Universidade Federal do Tocantins
Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

André Luiz Morais dos Santos

Modelação Matemática como Método de Ensino para o ENEM

Arraias - TO

2017

Universidade Federal do Tocantins
Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

André Luiz Morais dos Santos

Modelação Matemática como Método de Ensino para o ENEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes

Arraias - TO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S237m Santos, André Luiz Morais dos.

Modelação Matemática como Método de Ensino para o ENEM. / André Luiz Morais dos Santos. – Arraias, TO, 2017.

86 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

Orientadora : Alcione Marques Fernandes

1. Modelagem. 2. Modelação. 3. Método de Ensino. 4. ENEM. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Universidade Federal do Tocantins
Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor
Mestrado Profissional em Matemática

PROFMAT

André Luiz Morais dos Santos *

Modelação Matemática como Método de Ensino para o ENEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho APROVADO em 29 de abril de 2017:

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes (UFT)
Orientadora - Presidente da banca

Prof. Dr. Rui Seimetz (UnB)
1º membro da banca

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (UFT)
2º membro da banca

Arraias - TO
2017

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Trabalho dedicado a minha família que sempre sabe compreender minha vocação ao estudo e consequentemente minhas ausências.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por iluminar minha consciência e abençoar meu caminho com oportunidades de evoluir. Um agradecimento especial a minha orientadora Profa. Dra. Acione Marques Fernandes, ao coordenador Prof. Dr. Eudes Antônio da Costa e todos os professores e colegas de curso que indireto ou diretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Agradeço também ao PROFMAT pela oportunidade desta capacitação e o CAPES que disponibilizou bolsa de estudo durante o período de curso.

Resumo

Analisando o maior exame de acesso ao ensino superior de nosso país, o ENEM, percebe-se que as dimensões do quantitativo de inscritos e importância para os programas educacionais e de acesso as instituições de ensino superior, são surpreendentemente notáveis, tornando-se na segunda maior avaliação do mundo. Desta análise percebemos uma relação das provas de Matemática com a Modelagem Matemática, principalmente na Matriz de Referência do ENEM, permitindo assim um comparativo com as etapas da então denominada Modelação Matemática, ou seja, a Modelagem Matemática usada como metodologia de ensino da Matemática. As etapas da Modelação Matemática são identificadas nas questões de Matemática do ENEM através de inúmeros exemplos de questões resolvidas de edições anteriores. A Modelação Matemática é apresentada como método de ensino e aprendizagem para a resolução das questões de Matemática do ENEM.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Modelação Matemática. ENEM. Método de Ensino

Abstract

Analyzing the greatest exam of access to higher education in our country, ENEM, it was noticed that its dimension, concerning the number of enrollment and importance to educational programs and to the access to higher education institutions, is surprisingly remarkable, making it the second-highest evaluation in the world. From this analysis, we perceive a relation between Mathematics esams and the Mathematical Modeling, mainly on ENEM's the former reference, thus allowing a comparison of the steps of the so-called Mathematical Molding, that is, the Mathematical Modeling used as a methodology of the teaching of Mathematics. The stages of Mathematical Molding are identified on ENEM's Mathematics questions through numerous examples of solved questions from previous editions. The Mathematical Molding is presented as a teaching-learning method, which is not necessarily the same as a method or technique for solving ENEM Mathematics questions.

Keywords: Mathematica Modeling. Mathematical Molding. ENEM. Teaching Method

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa
TRI	Teoria de Resposta ao Item
LDBEN	Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação e Cultura
TCT	Teoria Clássica do Teste
ECT	Empresa de Correios e Telégrafos
ProUni	Programa Universidade para Todos
ENCCEJA	Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
DOU	Diário Oficial da União
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
GA	Geometria Analítica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFT	Universidade Federal do Tocantins

Lista de símbolos

ρ	Letra grega “rô”
π	Letra grega “pi”
θ	Letra grega “teta”
σ	Letra grega “sigma”

Sumário

INTRODUÇÃO

Motivado pelo regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT que orienta para a realização de um Trabalho de Conclusão de Curso abordando o ensino da Matemática na Educação Básica, foi pensando no Ensino Médio, que de imediato foi associado ao ENEM que é um notável modelo de avaliação em larga escala em nosso país e até mesmo do mundo. A palava modelo nos direcionou a Modelagem Matemática, assim surgiu a curiosidade de identificar uma relação entre a prova de Matemática e suas Tecnologias com a Modelagem Matemática.

Buscamos conhecer um pouco do histórico e legislação da instituição do ENEM, assim como a estrutura de construção das questões que compõem os seus cadernos de avaliação. A Teoria Clássica do Teste - TCT fundamentou a primeira fase do ENEM, fase esta que denominamos "origem do ENEM" e a partir de 2009 a Teoria de Resposta ao Item - TRI proporcionou uma reestruturação na forma de avaliar os participantes deste exame que em pouco anos adquiriu uma dimensão tanto numérica, percebida no quantitativo de inscritos quanto de reconhecimento, pois inúmeros programas de governo foram associados ao seus resultados. A esta reestruturação denominamos "Segunda geração do ENEM".

No capítulo 2 foi conceituado modelo matemático, Modelagem Matemática e a Modelação Matemática que nada mais é do que a adaptação da Modelagem Matemática que nasceu fora do contexto da educação para ser utilizada no ensino de Matemática. Através dos precursores e grandes nomes da Modelagem e Modelação Matemática caraterizarmos as quatro etapas da Modelação Matemática que nos seriam muito útil para concatenar as questões da prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM com a Modelação.

Iniciamos o capítulo 3 concatenando em definitivo as provas de Matemática e suas Tecnologias no ENEM com a Modelação Matemática, permitindo assim, identificarmos as características das etapas da Modelação Matemática nas questões do ENEM. Propusemos a classificação das questões matemáticas do ENEM em três tipos: Questão Modelagem, Questão Modelo e Questão Direta, finalizamos o capítulo apresentando a resolução de algumas questões de edições anteriores para cada tipo de questão que classificamos.

Amparados pelo resultado do capítulo anterior, dedicamos no capítulo 4 a resolução de questões do ENEM descrevendo passo a passo cada etapa da Modelação Matemática. Utilizamos o capítulo 5 para descartar, por menor que seja, a possibilidade de forçar a relação criada entre as questões do ENEM com a Modelação Matemática, buscando argumentos para reforçar a visão que adotamos de que a Matemática tem como essência a modelagem e consequentemente a apresentação de modelos por mais simples que eles possam parecer.

1 ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

O Exame Nacional de Ensino Médio - ENEM foi instituído no ano de 1998 e teve nessa primeira edição um quantitativo de 157.221 inscritos, chegando ao surpreendente número de 9.276.328 de inscritos em 2016 (INEP, 2016), mas o recorde é do ano de 2014 com 9.490.952 inscritos. Para termos ideia da grandeza atingida pelo ENEM, basta compararmos este quantitativo de participantes com a população [1] de alguns países como por exemplo: Uruguai (3.300.000 de habitantes), Paraguai (6.700.000 de habitantes) e Bolívia (10.600.000 de habitantes), apenas tomando como exemplos alguns países vizinhos ao Brasil.

O índice de abstenções fica na casa dos 30% para cada edição e uma rápida análise nestes dados, pode-se inferir a dimensão do ENEM, já considerado há um bom tempo como o segundo maior processo seletivo do mundo, perdendo apenas para a versão chinesa. A grandeza não é apenas numérica, mas também de importância, pois o ENEM se tornou no principal processo seletivo do país, sendo que a maioria, se não todas as instituições de ensino superior, públicas e privadas, utilizam seu resultado (parcial ou integral) para disponibilizar vagas nestas instituições. Além disso, tornou-se na principal porta (em muitos casos a única porta) de acesso aos programas de governo para ingresso e financiamento do ensino superior.

No ano de 2009 houve uma reestruturação motivada pela adoção da Teoria de Resposta ao Item - TRI, que doravante, denominaremos de "Segunda Geração do ENEM". Dentre os objetivos do ENEM, busca-se identificar indicadores para a melhoria da educação brasileira, então era preciso adotar uma avaliação que refletisse tais finalidades. A TRI vem sendo adotada como instrumento de avaliação em larga escala em diversos países e principalmente em avaliações internacionais.

1.1 Histórico

1.1.1 ENEM original

Com as mudanças introduzidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN, em especial, quando se trata da busca de medidas para promover a melhoria da educação no Brasil (Art. 9, VI) (DIRETRIZES, 1996), a portaria 438 do Ministério da Educação e Cultura - MEC, em 28 de maio de 1998 instituiu o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Uma avaliação anual, composta de questões elaboradas tendo como base uma Matriz de Referência criada especificamente para este fim, com objetivo de viabilizar

[1] População aproximada para o ano de 2014

a todos os cidadãos, que voluntariamente se submete ao ENEM, de acordo com portaria 438 do MEC, a possibilidade de obter:

i) Parâmetro para auto-avaliação, com vista à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;

ii) Referência nacional para egressos de qualquer modalidade do ensino médio;

iii) Subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;

iv) Modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.

Destacamos aqui os papéis de “Referência” e “Subsídios” nascidos juntos com o ENEM, papéis estes que foram, e ainda são fundamentais para estudos, acompanhamento e avaliação da educação básica, em especial o ensino médio, que analisaremos em momento oportuno. A Matriz de Referência que é utilizada para elaboração das questões do ENEM, foi idealizada de acordo com a Portaria 438 - MEC (MEC, 1998) levando em consideração as 05 (cinco) competências e as 21 (vinte e uma) habilidades previstas nesta mesma portaria.

Uma equipe de professores, assessorados por especialistas nas diferentes áreas do conhecimento e pelos autores da Matriz de Referência, foi contratada para elaboração de um banco constituído por 474 questões que avaliassem as competências e habilidades abordadas pelo ENEM e que por força da legislação, estariam previstas na Matriz de Referência (INEP, 1998). Essas questões precisavam passar por um processo de pre-testagem, para tanto, 5.427 alunos selecionados em 33 localidades das cinco regiões do Brasil (capitais dos estados e cidades do interior) foram submetidos a um dos 24 cadernos contendo entre 19 e 21 questões cada (INEP, 1998).

A pre-testagem permitiu que cada questão fosse interpretada através de um modelo matemático denominado Teoria Clássica do Teste - TCT, ou seja, analisa-se os indicadores: índice de dificuldade; descriminação; coeficiente bisserial e distratores, e observando os dados estatísticos desses indicadores, os autores da Matriz de Referência selecionavam as questões que iriam compor o ENEM, de maneira que cada habilidade fosse contemplada com 3 (três) questões. Desta forma, o ENEM era constituído por uma redação e 63 questões [2] com 5 (cinco) alternativas cada, de forma que as questões eram distribuídas aleatoriamente, ou seja, sem sequência estabelecida das 5 (cinco) competências [3] e 21 (vinte e uma) habilidades

[2] Cada uma das habilidades foi medida três vezes - três questões objetivas para cada uma, devidamente calibradas pelo pré-teste como de dificuldade alta, média e baixa. (INEP, 1998, p.17)

[3] Competências são aqui compreendidas como as modalidades estruturais da Inteligência, ou melhor, ações e operações que se utiliza para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. (INEP, 1998, p.9)

[4] previstas na Portaria 438 (MEC, 1998). Assim, as disciplinas que compunham o exame não eram agrupadas, mas dispostas aleatoriamente. Só podeira integrar a avaliação a questão que apresentasse coeficientes bisserial maior que 30 (oportunamente entenderemos o significado deste valor).

A Figura 1 mostra a organização da Matriz de Referência do ENEM, onde destaca a distribuição de diversas habilidades para cada uma das cinco competências elencadas. Observe também que algumas competências possuem mesma habilidade, como é o caso por exemplo das competências II, III e V, que possuem a habilidade 7. Para finalizar, observe que há segmentos de reta unindo as competências, onde devermos interpretar como inter-relações entre as competências, deixando claro que não são estanques.

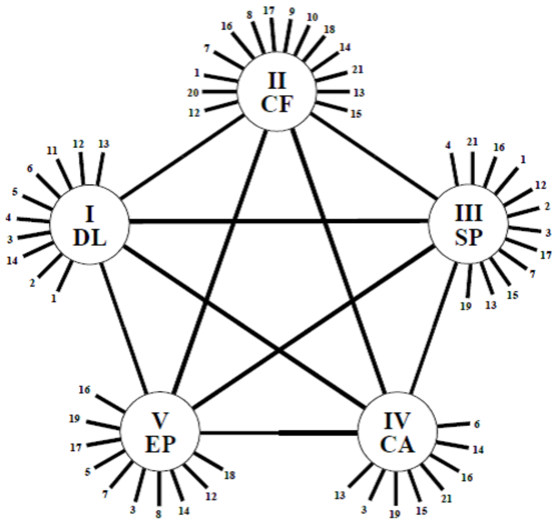


Figura 1 – Organização da Matriz de Referência. Fonte: INEP - 1998

I) Dominar linguagens (DL)

II) Compreender fenômenos (CF)

III) Enfrentar situações-problemas (SP)

IV) Construir argumentações (CA)

V) Elaborar propostas (EP)

Segundo os responsáveis pela seleção das questões que iriam compor a prova do ENEM, o objetivo era promover mudanças no processo de avaliação, afastando-se das metodologias tradicionais e ultrapassadas para aproximar-se de uma metodologia mais cuidadosa que valorizasse mais os conhecimentos e seus objetivos.

[4] Habilidades decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do “saber fazer”. (INEP, 1998, p.9)

> Do ponto de vista cognitivo, resultou de um exame cuidadoso das competências e habilidades que mapeam os conteúdos traduzidos em itens avaliadores. Foram valorizados os conhecimentos - em termos de extensão e profundidade - que são significativos para o exercício pleno da cidadania, para o mundo do trabalho e para o prosseguimento de estudos em qualquer nível do término do ensino médio. Todas as questões da prova expressam qualidades e formas de relação com o conhecimento, expressos a partir do conjunto das competências e habilidades. (INEP, 1998, p.21)

Desta forma nasce o ENEM em sua primeira versão, aplicado no dia 30 de agosto de 1998, composto de uma prova de múltipla escolha e uma redação, para serem realizadas em 4 horas de duração. O ENEM destina-se a todos os egressos do ensino médio, independente do tempo transcorrido de sua conclusão, bem como aos alunos que estão concluindo a última série do ensino médio.

Os resultados do ENEM, preservando o anonimato de seus participantes, iriam formar a cada ano, bancos de dados para análises de especialistas de diversos segmentos, com o intuito da criação de indicadores de políticas públicas tanto no âmbito financeiro quanto pedagógico visando à melhoria da educação brasileira.

A classificação do desempenho de cada participante estabeleceu três níveis:

a) insuficiente a regular;

b) regular a bom;

c) bom a excelente.

Estes níveis correspondem respectivamente: a) à faixa de 0 a 40% de acertos (sendo 20% de acerto ao acaso); b) à faixa de 41% a 70% de acertos e c) 71% à 100 de acertos (INEP, 1998, p.18).

Os resultados da prova denominavam-se Boletim de Resultados que eram encaminhado à residência [5] de cada participante via Empresa de Correios de Telégrafos - ECT. Nesse primeiro ano de existência do ENEM, segundo o INEP, em todo o Brasil, foram 157.221 inscritos, 115.575 presentes, resultando em 26,5% de faltosos, ou seja, 41.646 inscritos não compareceram aos locais do exame.

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC, destacou-se como a primeira instituição a disponibilizar vagas ao ensino superior utilizando o resultado do ENEM, destinando 20% de suas vagas aos alunos que alcançarem mais de 70% de aproveitamento no exame. De acordo com a avaliação do MEC, o ENEM consolidou sua popularização em 2004, quando foi instituído, pelo próprio MEC, o Programa Universidade para Todos (ProUni) que vinculava a concessão de bolsas em instituições de ensino superior

[5] Nas edições mais recentes, o resultado é divulgado via acesso a página do MEC na internet.

privadas à nota obtida no Exame. No ano seguinte da instituição do ProUni, o ENEM registrou 3 milhões de inscritos e 2,2 milhões de participantes.

1.1.2 Segunda Geração do ENEM

O ENEM manteve até o ano de 2008 o seu formato original. Já na 2^a Geração [6] do ENEM, as mudanças ocorridas pela determinação da portaria 462 - MEC (MEC, 2009b) publicada no Diário Oficial da União - DOU em 28 de Maio de 2009, propiciou uma complementação e uma alteração no ENEM original, de modo que proporcionou mudanças significativas desde então.

A complementação resultou na inclusão de mais dois objetivos:

VI) Promover a certificação no nível de conclusão do ensino médio, de acordo com a legislação vigente;

VII) Avaliar o desempenho escolar do ensino médio e o desempenho acadêmico dos ingressantes nos cursos de graduação.

Já a alteração, foi no formato da prova, não só na estrutura física, ou seja, no quantitativo de cadernos e questões, mas principalmente na sua concepção de elaboração. Para compreendermos melhor, analisemos alguns pontos da portaria 109 - INEP (MEC, 2009a) publicada no Diário Oficial da União em 28 de Maio de 2009, que trouxe detalhes desta nova "versão" do ENEM.

O primeiro objetivo acrescentado na legislação do ENEM visou atender os jovens de no mínimo 18 anos e adultos em nível de conclusão de ensino médio, ou seja, atingindo determinada pontuação no ENEM, o participante obtém certificado de conclusão do ensino médio. Na prática vem substituir o efeito para o ensino médio do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos - ENCCEJA, destinando o objetivo do ENCCEJA aos aspirantes de certificação no Ensino Fundamental, em outras palavras, concluintes do 9^o ano (antiga 8^a série). Quando ao 2^o objetivo adicionado ao ENEM está relacionado com a avaliação em larga escala e políticas públicas que têm como objetivo investir em melhorias da educação pública, além de estudo e pesquisa educacionais. Foi nesta ideologia que a forma de avaliar passou de uma prova objetiva de múltipla escolha contendo 63 questões e uma proposta de redação, para 04 (quatro) provas objetivas de múltipla escolha com 45 questões cada e elaboração de uma redação. Essa reestruturação foi necessária, pois visava adotar uma estratégia para substituir a Teoria Clássica do Teste - TCT pela Teoria de Resposta ao Item - TRI.

[6] Anteriormente já havíamos anunciado que as mudanças que ocorreram a partir de 2009 seria denominadas "2^a Geração do ENEM".

Antes de pormenorizar esta mudança de TCT para TRI, uma vez que dedicaremos logo mais atenção específica para tal, vamos conhecer mais detalhes da 2^a Geração do ENEM. De acordo com o Art. 16 da Portaria 109 (MEC, 2009a), as provas foram estruturadas tendo como base as quatro áreas do conhecimento, tendo como ponto de partida as Matrizes de Referência do ENCCEJA Ensino Médio (INEP, 2002), já organizados em quatro áreas do conhecimento (INEP, 2010). Tempos depois, em 2012, as Diretrizes Curriculares Nacional da Educação Básica (MEC, 2013, p.186) viriam ratificar essas quatro áreas do conhecimento:

Prova 1: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação (Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Artes e Educação Física);

Prova 2: Matemática e suas Tecnologias;

Prova 3: Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Filosofia e Sociologia);

Prova 4: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Química, Física e Biologia).

Para essa nova etapa do ENEM, fez-se necessário a elaboração de uma nova Matriz de Referência [7] que foi apresentada para sua composição 5 (cinco) eixos cognitivos que estão associados a todas as áreas do conhecimento e para cada uma das 4 (quatro) áreas do conhecimento já apresentadas, foram especificadas 30 (trinta) habilidades organizadas em subáreas. No Anexo A, encontram-se os Eixos Cognitivos e as 30 habilidades da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias para a edição 2016 do ENEM.

Consequentemente, devido ao acréscimo do quantitativo de cadernos de provas, de 1 para 4, além da redação, houve um acréscimo de 1 dia de aplicação. No primeiro dia os participantes são submetidos às provas de Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciência da Natureza e suas Tecnologias com duração de 4 horas e 30 minutos. Já no segundo dia realizam as provas de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Matemática e Redação, agora o tempo de duração é de 5 horas e 30 minutos.

A Portaria 807 - MEC (MEC, 2010) publicada no Diário Oficial da União em 21 de junho de 2010 revogou a portaria anterior, ou seja, a Portaria 462 - MEC, reestruturando os objetivos do ENEM, que passou a ter a seguinte redação:

I) a constituição de parâmetros para auto-avaliação do participante, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;

[7] Quando formos especificar a metodologia da Teoria de Resposta ao Item (TRI), detalharemos melhor a elaboração desta nova Matriz de Referência.

II) a certificação no nível de conclusão do ensino médio, pelo sistema estadual e federal de ensino, de acordo com a legislação vigente;

III) a criação de referência nacional para o aperfeiçoamento dos currículos do ensino médio;

IV) o estabelecimento de critérios de participação e acesso do examinando a programas governamentais;

V) a sua utilização como mecanismo único, alternativo ou complementar aos exames de acesso à Educação Superior ou processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho;

VI) o desenvolvimento de estudos e indicadores sobre a educação brasileira.

Salientamos neste momento o item (III), por pre-destinar ao ENEM o papel de referência aos currículos do Ensino Médio, assunto que vem sendo discutido há tempos, tanto pelo governo federal quanto pelo governos estaduais. Por hora, chamamos atenção para as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (MEC, 2013, p.176) que descreve a função do ENEM, ratificando seus objetivos:

I) avaliação sistêmica, que tem como objetivo subsidiar as políticas públicas para a Educação Básica;

II) avaliação certificatória, que proporciona àqueles que estão fora da escola aferir os conhecimentos construídos no processo de escolarização ou os conhecimentos tácitos construídos ao longo da vida;

III) avaliação classificatória, que contribui para o acesso democrático à Educação Superior.

Outro ponto importante que achamos relevante mencionar é a utilização dos resultados divulgados pelo INEP, tanto pela modalidade das instituições de ensino médio, quanto por municípios, rede de ensino [8] e demais modalidades [9], além do resultado individual que é respeitado o direito do sigilo e da pessoalidade. Esses resultados do ENEM se tornaram veículos de marketing utilizado por diversos setores relacionados com a educação, principalmente pelas instituições privadas de ensino, que promovem ranking e marketing das escolas que obtiveram as melhores médias no exame. Não poderia ser diferente quando se trata da segunda maior avaliação do mundo em quantidade de participantes, perdendo apenas para o GAOKA, a versão chinesa de seleção de vagas para o ensino superior.

[8] públicas ou privadas
[9] Estados, regiões, estaduais, federais, outras

A consolidação do ENEM permitiu um efeito cíclico que o fortaleceu a cada ano, ou seja, a medida que aumentava os inscritos no exame, proporcionava a criação de programas vinculados ao seu resultado e mais programas associados ao seu resultado proporcionava mais inscritos. Citamos brevemente os principais programas associados ao resultado do ENEM:

Vestibular: as instituições públicas e privadas utilizam o resultado do ENEM exclusivamente ou associado a outros métodos para preenchimento de suas vagas.

Ciência sem Fronteira [10] o Programa Ciência sem Fronteira usa o resultado no ENEM para os candidatos da modalidade "Graduação Sanduíche".

Programa Universidade para Todos - ProUni: [11] o programa tem como finalidade a concessão de bolsas de estudo integrais e parciais em cursos de graduação e sequenciais de formação específica, em instituições de ensino superior privadas. Criado pelo Governo Federal em 2004 e institucionalizado pela Lei 11.096, em 13 de janeiro de 2005 oferece, em contrapartida, isenção de tributos àquelas instituições que aderem ao Programa.

Fundo de Financiamento Estudantil - Fies: [12] é um programa do Ministério da Educação destinado a financiar a graduação na educação superior de estudantes matriculados em cursos superiores não gratuitas na forma da Lei 10.260/2001. Podem recorrer ao financiamento os estudantes matriculados em cursos superiores que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo Ministério da Educação.

Sistema de Seleção Unificada da Educação Profissional Técnica - Sisutec: [13] é o sistema informatizado, gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC), no qual instituições públicas e privadas de ensino superior e de educação profissional e tecnológica oferecem vagas gratuitas em cursos técnicos na forma subsequente para candidatos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Sistema de Seleção Unificada - Sisu: [14] O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é o sistema informatizado gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC) no qual instituições públicas de ensino superior oferecem vagas para candidatos participantes do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM).

---

[10] <http://www.cienciasemfronteiras.gov.br/web/csf/duvidas-frequentes:>
[11] <http://prouniportal.mec.gov.br/o-programa>
[12] <http://sisfiesportal.mec.gov.br/?pagina=fies>
[13] <http://sisutec.mec.gov.br/>
[14] <http://sisu.mec.gov.br/>

1.2 Elaboração das Provas

O procedimento de elaboração das provas do ENEM é compreendido por duas maneiras distintas que coincidem com os dois períodos de tempo já citados, ou seja, do ano de 1998 que foi o ano da instituição do ENEM até 2008 predominou a Teoria Clássica do Teste - TCT e do ano 2009 até o ano atual predominou a Teoria de Resposta ao Item - TRI.

1.2.1 Teoria Clássica do Teste - TCT

Em 1998 foi instituído, como já mencionamos, a Matriz de Referência para elaboração das provas do ENEM, que tinha o fundamental papel de servir, como o nome já sugere, de referência pedagógica para a elaboração das questões objetivas das provas.

Com pequenas variações na forma de organizar as equipes de trabalho, as provas eram elaboradas após um grupo de especialistas contratados pelo INEP juntamente com os autores da Matriz de Referência construir questões para todas as 21 habilidades previstas nessa matriz. Cada questão era submetida ao processo de pré-testagem [15] e após analisadas estatisticamente pela TCT, eram selecionadas 63 questões, de forma que 20% seriam de dificuldade baixa, 40% de dificuldade média e 40% de dificuldade alta. Os critérios de seleção das questões para a composição final do exame consideravam também; a pertinência mais direta da questão à habilidade avaliada, originalidade e coeficiente bisserial maior do que 30 (INEP, 2000).

Desta forma, o ENEM em sua fase original, ou seja, período de 1998 até 2008, teve suas questões elaboradas tendo como principal referência a Teoria Clássica do Teste - TCT, apesar de que o INEP (INEP, 2000) já fazia uso da Teoria de Resposta ao Item - TRI. De acordo com Rabelo, a TCT possuía algumas limitações, "principalmente no que diz respeito a discriminação dos itens, fidedignidade dos testes e comparabilidade de desempenho de indivíduos que se submetem a testes diferentes." (RABELO, 2013, p.126). Como o ENEM tinha no seu VI objetivo (MEC, 2010) a intenção de desenvolver estudos e indicadores sobre a educação brasileira, o exame fundamentado pela TCT estava desta forma medindo os parâmetros com um instrumento ineficiente. Usando a mesma analogia de Rabelo (2013) é o mesmo que medir objetos diferentes com instrumentos diferentes, é como se "a grandeza comprimento de um objeto fosse definida pelo instrumento de medida e não um atributo do objeto" (RABELO, 2013, p.126). Em outras palavras, cada ano de aplicação do ENEM, havia uma "régua" que media o desempenho de seus participantes, mas esta "régua" não poderia ser mais usada para o ano seguinte, ou seja, não havia eficiência para comparar resultados do ENEM de um ano para o outro.

[15] Alunos de toda a parte do Brasil são escolhidos para serem submetidos às questões elaboradas pelo grupo de criação de questões. Busca-se uma seleção bem pulverizada destes alunos, alcançando todas as cinco regiões do país, dentre as capitais e cidades do interior.

Para entendermos matematicamente está dificuldade de comparação dos resultados do ENEM de um ano para o outro analisemos alguns parâmetros utilizados na TCT.

Dificuldade da Questão

Na Teoria Clássica do Teste - TCT, a dificuldade para cada questão i é calculado de acordo com a equação 1.1 em que:

D_i: dificuldade de o respondente acertar a questão i;

C_i: quantidade de respondente que acertou a questão i;

N_i: quantidade de respondente que respondeu a questão i.

$$\boxed{D_i = \frac{C_i}{N_i}} \tag{1.1}$$

Matematicamente fica explícito que o valor do parâmetro dificuldade está mais relacionado [16] à quantidade de pessoas que acertaram a questão i do que à elaboração da questão, mesmo a questão tendo sido pre-testada e classificada com um dos níveis fácil, médio ou difícil. Valores próximos de 0 (zero) para D_i caracteriza uma questão difícil e valores próximo de 1 (um) caracteriza uma questão fácil, pois quase todo mundo acertou esta questão, de maneira que D_i irá variar no intervalo entre 0 e 1. Em outras palavras, quanto maior o valor de D_i, mais fácil a questão é, e quanto mais baixo o valor de D_i, mais difícil é a questão. Rabelo (RABELO, 2013, p.133) comenta que dessa análise "seria melhor denominar índice de facilidade e não de dificuldade".

Para compreendermos melhor a ideia da mesma "régua" medir de forma diferente, imagine que a questão i classificada com nível difícil fosse submetida a um grupo A de 100 (cem) participantes. Pela equação 1.1 esta questão terá um valor $D_i = x$. Vamos agora considerar dois grupos, o grupo B composto pelos 10 (dez) participantes que obtiveram as melhores notas no grupo A e o grupo C composto pelos 10 (dez) participantes que obtiveram as piores notas no grupo A. Pelo fato da questão i ter sido classificada como difícil, é consenso imaginar que o valor de D_i no grupo C seja menor que x, ou até mesmo tenha o valor 0 (zero), pois não seria absurdo acreditar que estas 10 piores notas tenham errado a questão i. Já o valor de D_i quando submetida ao grupo B, espera-se que seja maior que x, uma vez que alunos de maiores notas normalmente acertam questões difíceis, então o valor de D_i no grupo B está mais próximo de 1 ou até mesmo havendo a possibilidade do valor ser exatamente 1 (um), caso todos acertassem a questão i. Assim, deixa claro que a questão i, que na nossa simulação desempenha o papel da "régua" utilizada, ou seja, a questão i que foi elaborada para compor um exame com o objetivo de avaliar, medir o

[16] Mais do que relacionado, na Matemática, dizemos que C_i é diretamente proporcional

conhecimento de um grupo, retorna valores diferentes, dependendo de qual grupo ela foi submetida.

A questão i poderia ser considerada uma boa "régua" se ela dependesse mais de sua elaboração e menos de sua aplicação. Desta forma o ENEM no período que denominamos versão original, não poderia ser considerado uma boa "ferramenta" para avaliação com fins de obtenção de dados em larga escala e principalmente de médio a longo intervalo de tempo.

Discriminação da Questão:

De acordo com Rabelo (2013), a discriminação é concebida como a capacidade do item de diferenciar indivíduos com habilidades ou proficiências distintas. Na prática, uma questão com boa discriminação consegue distinguir alunos que dominam ou não as competências e habilidades envolvidas na solução da questão.

Alguns modelos são utilizadas para a determinação do valor da discriminação da Questão na Teoria Clássica do Teste - TCT. Destaca-se o coeficiente de correlação ponto-bisserial (ρ_{pb}) que pela exposição detalhada [17] de Lira e Neto (LIRA; NETO, 2008), (ρ_{pb}) é uma variação do coeficiente de correlação linear de Pearson, chegando na equação 1.2:

$$\boxed{\rho_{pb} = \frac{\overline{S}_p - \overline{S}}{\overline{\sigma}_s}\sqrt{\frac{p}{q}}} \tag{1.2}$$

De forma que:

$\overline{S}_p$ é o escore médio no teste para os indivíduos que acertaram a questão;

$\overline{S}$ é o escore médio no teste para todos os respondentes;

$\overline{\sigma}_s$ é o desvio-padrão dos escores obtidos no teste pelos respondentes;

p é a proporção correspondente aos respondentes que acertaram a questão no teste, ou seja, o índice de dificuldade;

q é a proporção correspondente aos respondentes que erraram a questão no teste.

Para determinarmos o coeficiente utilizado pelo ENEM em seu período que denominamos original (1998 até 2008), Rabelo utiliza a equação 1.3 denominada coeficiente de correlação bisserial por ser mais apropriada quando uma das variáveis é dicotômica, que é o caso das questões objetivas que compõe as provas do ENEM (RABELO, 2013). A correlação bisserial relaciona-se com o ponto-bisserial de acordo com a fórmula:

[17] Foge do objetivo deste trabalho entrar em detalhes sobre esta temática.

$$\boxed{r_{bis} = \frac{\rho_{pb}\sqrt{p(1-p)}}{h(p)}} \quad (1.3)$$

sendo $h(p)$ o valor da densidade da distribuição normal padrão no ponto em que a área da curva à esquerda desse ponto é igual a p, a proporção de acertos da questão, (RABELO, 2013, p.137). Representamos esta área na Figura 2, de forma que está representado pela letra p.

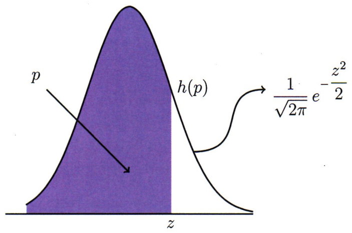


Figura 2 – Determinação do valor h(p). Fonte: [11], pág. 137

Segundo o (INEP, 2000), para uma questão ser incluída no ENEM, precisa ter uma correlação bisserial maior que $0,30$. Sem maiores detalhes, pois já fizemos isto ao tratar o parâmetro Dificuldade da Questão (D_i), percebemos mais uma vez que tanto na equação 1.2 quanto na equação 1.3, as variáveis tornam-se dependentes do grupo que a questão foi submetida e não na concepção da questão. Mas uma vez identificamos um parâmetro que é deficiente na função de comparação entre provas do ENEM com aplicação em anos distintos.

Acerto ao acaso:

A Teoria Clássica do Teste não vincula os acertos ao acaso com o score total do participante, ou seja, com a nota final da prova. O que caberia comentar sobre o assunto é que a TCT atribui o mesmo valor as questões respondidas de forma consciente ou não pelo participante. Torna-se evidente que as questões calibradas [18] com o perfil de nível difícil, estão mais suscetíveis ao famoso "chute".

Enfim, a TCT não poderia ser considerada um bom modelo de metodologia de avaliação para que o ENEM se consolidasse como um instrumento avaliativo do desempenho do ensino médio criando indicadores para a melhoria da educação brasileira. Esta realidade não condizia com um exame que a cada ano se consolidava e batia recordes de inscritos. Mas um trabalho com outro modelo matemático estava sendo desenvolvida desde 1995 através do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, a Teoria de Resposta ao Item - TRI. O Brasil no ano de 2009 quando reestruturou o ENEM, substituindo a TCT

[18] O termo calibrada é mais comum ser encontrado na Teoria de Resposta ao Item - TRI, mas para a familiarização do leitor já vamos utiliza-lo. Entenda como calibrada as questões que passaram e foram aprovadas pela pre-testagem.

pela TRI, já contava com quase 15 anos de experiência, seguindo a mesma tendência adotada por diversos países.

1.2.2 Teoria de Resposta ao Item - TRI

Para definirmos a Teoria de Resposta ao Item - TRI, adotaremos o trabalho de Andrade, Tavares e Vale (2000), não só por serem uns dos maiores nomes de referência nacional quando o assunto é TRI, mas pelo motivo do INEP utilizar os autores como base de referência bibliográfica em suas atividades e publicações. Assim, "a TRI é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item como função dos parâmetros do item e da habilidade (ou habilidades) do respondente." (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000b, p.7).

A grande vantagem da TRI em relação a TCT, tanto na interpretação dos autores Andrade, Tavares e Vale 2000b, quanto na interpretação do INEP, foi a declaração de que "a decisão de utilizar a TRI no ENEM teve como principal finalidade permitir a comparabilidade dos resultados entre edições" (INEP, 2010, p.31).

> Uma das grandes vantagens da TRI sobre a Teoria Clássica é que ela permite a comparação entre populações. Desde que submetidas a provas que tenham alguns itens comuns, ou ainda, a comparação entre indivíduos da mesma população que tenham sido submetidos a provas totalmente diferentes. Isto porque uma das principais características da TRI é que ela tem como elementos centrais os itens, e não a prova como um todo. (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000b, p.03).

A TRI possui uma variedade de modelos matemáticos que dependem fundamentalmente de três fatores:

Natureza do item: dicotômicos ou não dicotômicos;

Número de populações: uma ou mais de uma;

Quantidade de traços latentes a ser medido: um ou mais de um.

Abordaremos neste trabalho o modelo unidimensional, ou seja, que avalia apenas um traço latente ou habilidade. Os itens de nosso modelo são dicotômicos aplicados a uma única população, pois as provas do ENEM são caracterizadas por estes fatores.

Finalmente apresentamos o modelo matemático adotado pelo INEP, tanto para elaboração das prova quanto para atribuir as notas aos participantes do ENEM.

$$\boxed{P\left(u_{ji}=1|\theta_j,a_i,b_i,c_i\right)=c_i+\frac{1-c_i}{1+e^{-a_i\left(\theta_j-b_i\right)}}} \tag{1.4}$$

A equação 1.4 representa a probabilidade $u_{ji} = 1$, ou seja, a probabilidade do participante j acertar a questão i, condicionada aos parâmetros a_i (discriminação da questão), b_i (dificuldade da questão), c_i (acerto ao acaso, "chute") e principalmente em relação ao nível de proficiência do participante (θ_j). A Figura 3 apresenta o gráfico desta probabilidade, sendo comumente denominado Curva Característica do Item - CCI [19], destacando os parâmetros a_i, b_i e c_i.

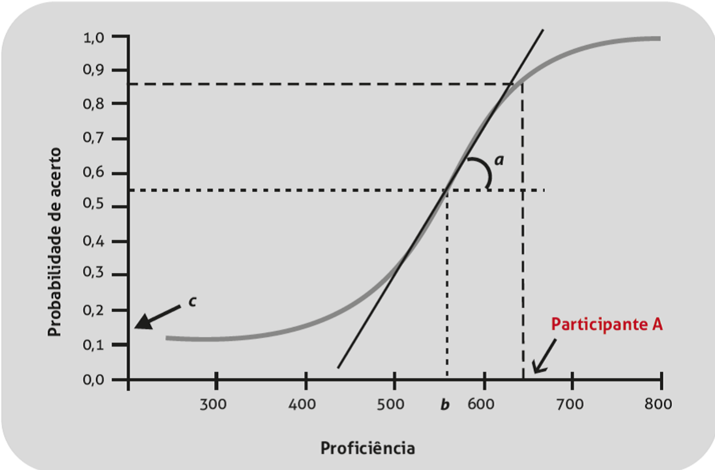


Figura 3 – Curva Característica do Item - CCI. Fonte: INEP, 2012

Discriminação do Item (a)

Na TRI, a discriminação é definida como a possibilidade da questão diferenciar indivíduos com magnitudes próximas da habilidade que está sendo aferida (RABELO, 2013). Na Curva Característica do Item - CCI, a discriminação é identificada com um valor proporcional à inclinação da curva no ponto onde ela muda de concavidade (ponto de inflexão). Matematicamente possível, mas interpretativamente inviável são valores negativos para o parâmetro (a), pois não faz sentido a probabilidade de acerto da questão diminui a medida que aumenta a aptidão do participante. Uma discriminação alta seria valores acima de 1,35 e para valores abaixo de 0,65 seria melhor rever a elaboração da questão. Interpretando graficamente, a CCI, caracterizada pela função sigmoide, ou seja, em formado de "S", deve-se apresentar não muito "achatado", pois assim sendo, teríamos a reta tangente sobre o ponto crítico (ponto de inflexão) tendendo à horizontal, o que caracterizaria uma questão não tão discriminativa.

Dificuldade do Item (b)

O parâmetro Dificuldade do Item no modelo adotado pela TRI é interpretada como o nível mínimo de proficiência que um estudante precisa possuir para ter uma chance alta de acertar a resposta. Para Rabelo temos,

[19] Doravante, se o contexto não deixar claro o significado do termo "item", entenda-se "item" como uma questão de múltipla escolha composta de alternativas (O esclarecimento faz-se necessário pois pode haver conflito de entendimento entre item, questão e alternativas).

> Em termos mais específicos, a dificuldade é o valor da aptidão (θ) que é necessário para se obter uma probabilidade de acerto igual a $\frac{(1+c)}{2}$. Desse modo, basta traçar uma reta horizontal no nível de probabilidade igual a esse valor e fazer a interseção com a CCI para se encontrar o θ correspondente. (RABELO, 2013, p.134).

Acerto ao acaso (c)

A TRI utiliza o parâmetro c representado na Figura 3 para estimar o acerto ao acaso. Desta forma, c representa a probabilidade de um aluno com baixa habilidade responder corretamente o item. Se não fosse permitido "chutar", o valor de c seria 0 (zero). O parâmetro c é identificado pelo ponto em que a assíntota horizontal inferior da Curva Característica do Item - CCI (veja figura 3) intercepta o eixo das probabilidade. Em uma questão composta por 5 (cinco) alternativas, espera-se que o valor de c seja não superior a 0,20, caso contrário, podemos acreditar que a opção correta está de alguma maneira atraindo a atenção dos participantes que não dominam as competências e habilidades necessárias para respondê-la. Neste caso, a questão deve passar por uma revisão de formulação. Na figura 3, o parâmetro c tem valor aproximado de 0,13, bastante aceitável.

Após analisarmos os três parâmetros da TRI, podemos compará-los com a interpretação já realizada quando tratamos do modelo da TCT. Na Teoria de Resposta ao Item, o foco está em cada questão individualizada, não na prova como um todo e muito menos dependendo da aptidão dos outros candidatos. Na TRI, considera-se apenas os conhecimentos do participantes e as questões que ele está sendo submetido.

1.3 Escala de Proficiência - "Régua"

Em 2012 o INEP, publicou um documento que buscava esclarecer como a nota do participante do ENEM era calculada, mas apesar de usar boa apresentação e ser o único material oficial que foi encontrado para a pesquisa deste trabalho, foi muito vago. Apresentou-se a equação 1.4 que já expomos aqui, que vagamente ainda, cita através de uma função genérica como calcular o parâmetro ρ (notação do ENEM) e o modelo recursivo para tal feito torna-se indeterminada pela falta de especificação das funções que não foram expressas.

Os autores Andrade, Tavares e Valle tratam a estimação das habilidades quando os parâmetros dos itens são conhecidos. "Na prática, essa situação ocorre quando os itens já foram calibrados (estimados) em outros testes", (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000b, p.44). Segundo o INEP, é desta forma que se procedeu para a elaboração das provas do ENEM que denominamos segunda geração. [20] Após uma sequência considerável de cálculos e modelos recursivos chega-se a um valor que teoricamente está no intervalo

[20] No ENEM original também havia calibração.

$[-\infty, \infty]$, então basta estipular a critério do interessado, a média e o desvio-padrão para esta escala de valores. O INEP 2012 estipulou para o ENEM a média das notas dos alunos da rede públicas que participaram do ENEM no ano de 2009, ou seja, o valor 500 e para o desvio-padrão o valor 100.

Acreditamos que o INEP não detalhou a TRI pelo fato de existir e já se sabe que o INEP faz uso de programas de computadores desenvolvidos exclusivamente para trabalhar com tais modelos matemáticos. Modelos estes, que por apresentarem um elevado grau de dificuldade de solução, utiliza modelagem recursivas para obtenção de valores. Mas para o momento, nos contentaremos no fato de a TRI, tanto para a elaboração das questões do ENEM quanto para as notas dos alunos, são calculados em uma mesma escala, ou seja, são medidas pela mesma "régua". Procedimento esse fundamental para o objetivo de comparar resultados entre as edições dos ENEM.

A Figura 4 ilustra a ideia da proficiência ser mensurada através de uma "régua". Destaque para o desvio-padrão adotado pelo INEP, que é o valor 500.

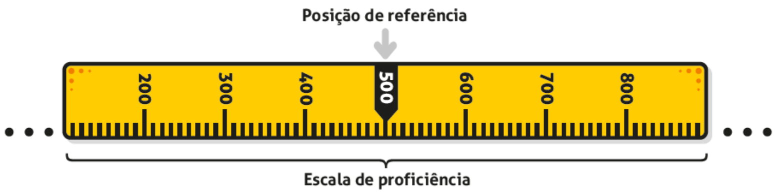


Figura 4 – Escala de Proficiência - "Régua". Fonte: INEP - 2012

Tentemos esclarecer melhor o benefício de se ter uma "régua" que mensura o nível de dificuldade de uma questão assim como mensura a proficiência de quem se submete a esta questão. Voltemos à nossa simulação, o grupo A com 100 participantes, o grupo B com os 10 participantes que tiveram as piores notas no grupo A e o grupo C com os 10 participantes que obtiveram as melhores notas no grupo A. Esses grupos ao serem submetidos a mesma prova do grupo A, terão suas notas semelhantes às recebidas quando realizadas anteriormente, pois aqueles que conseguiram acertas apenas as fáceis, continuaram acertando somente as fáceis e quem teve um bom desempenho, continuará recebendo a mesma nota pelo seu desempenho, pois nenhum parâmetro utilizado pela TRI é vinculado ao quantitativo ou desempenho dos demais participantes. Não é demais repetir que a TRI tem como foco principal as questões que compõem o exame e não a quantidade ou nível de conhecimento dos participantes. Enfim, a nota tendo como modelo a TRI, relaciona o participante com seus conhecimentos e o desempenho de outros candidatos não influencia sua nota.

A Figura 5 demonstra que a proficiência de cada participante é mensurada na mesma escala de medida que as questões foram interpretadas, reforçando a dependência da nota do participante com as questões e não com a prova como um todo e muito menos com o desempenho de outros participantes.

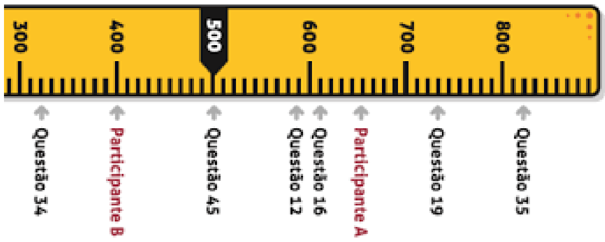


Figura 5 – Régua de proficiência - ENEM. Fonte: www.mec.gov.br

Importante ainda ressaltar que mesmo submetendo qualquer um desses grupos a uma outra prova, desde que seja elaborada com questões calibradas pelo mesmo processo, o resultado será similar. Por exemplo, se o grupo C (as 10 melhores notas no grupo A) resolvessem uma outra prova, espera-se que a nota desde grupo seja próxima da nota que este grupo obteve quando participou pelo grupo A, ou seja, participantes que possuem uma proficiência de melhor desempenho consegue solucionar questões elaboradas para tais níveis de desempenho.

Também pode-se destacar que o modelo adotado pela TRI, proporciona uma coerência ao atribuir as notas para os participantes, pois é muito comum, dois ou mais participantes acertarem um quantitativo igual de questões e mesmo assim receberem notas distintas. Isto ocorre pelo fato do parâmetro c, que é responsável pela avaliação da resposta ao acaso ("chute") atribuir um valor menor para o participantes que se enquadrar em tais características.

A Figura 6 ilustra a normal possibilidade de dois (ou mais) participantes acertarem o mesmo quantitativo de questões na prova do ENEM e mesmo assim obterem resultados diferentes, basta não esquecermos que o modelo logístico da TRI leva em consideração a coerência das respostas, ou seja, aluno que erra questões fáceis e acerta as difíceis, provavelmente houve acerto ao acaso, como foi o caso do "Pedro" na referida figura.

Mostra-se desta forma, que a TRI possibilita comparar resultados e cria uma coerência para determinar a nota do participante, mesmo tendo aplicações de provas distintas, desde que se mantenha o mesmo padrão de elaboração dessas avaliações, fato que é facilmente possível, uma vez que as questões foram submetidas a processo de pré-testagem.

Neste capítulo pudemos compreender o contexto histórico do ENEM bem como suas fases e modelos de elaboração e correção das provas, assim como seus objetivos. Ficou claro que o ENEM nasceu carregando o propósito de ser um instrumento de avaliação para uma almejada educação de qualidade em nosso país. Pelos argumentos aqui apresentados, não estaríamos incorrendo em erro se afirmássemos que o ENEM se tornou na maior e mais eficiente avaliação no Brasil. Mérito que proporciona novos contextos, como por

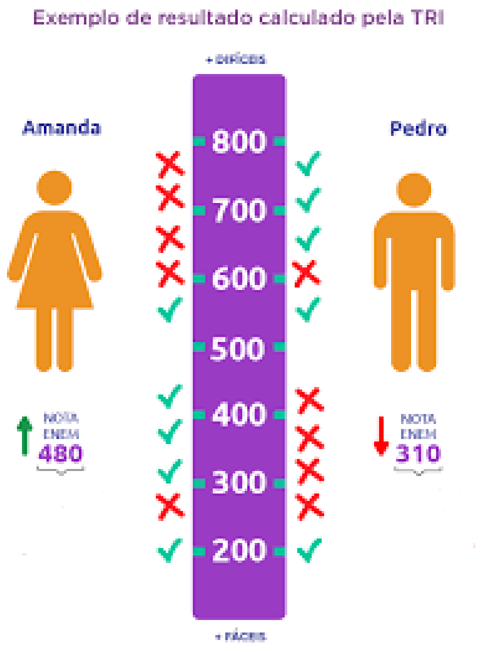


Figura 6 – Coerência da TRI - ENEM. Fonte: www.mec.gov.br

exemplo, ser modelo de avaliação a ser copiado e desenvolvido em todas as redes de ensino, pois as personagens do ensino médio, que são os docentes e alunos, objetivam um bom desempenho ao participarem desse exame.

Queremos dizer com isto que o ENEM tem em sua proposta de criação o objetivo de se tornar um modelo (objetivo *iii*), suas questões são elaboradas e corrigidas pela utilização de modelos matemáticos e será com esta palavra “modelo”, que insiste aparecer em nosso contexto, que iremos nos interessar no próximo capítulo.

2 Modelagem

No capítulo anterior, ao tratarmos do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, tivemos a oportunidade de fazer alguns levantamentos sobre seu contexto histórico, legislação e principalmente sobre a organização e modelo de elaboração e correção das questões que compõem o ENEM. É com esta palavra, "modelo" que iremos direcionar nossa atenção, pois é inevitável não perceber que esta palavra foi utilizada 22 vezes só no capítulo anterior. Algumas vezes esta mesma palavra veio complementada do termo "matemático", que passamos a nos interessar nesta dupla daqui em diante.

2.1 Modelo Matemático

Intuitivamente podemos definir modelo como algo que adquiriu características suficientes para ser copiado ou ao menos para servir de referência. Foi exatamente a proposta do (III) objetivo da portaria 807 - MEC, em relação a instituição do ENEM como modelo ou referência para o aperfeiçoamento dos currículos do ensino médio. Também já mencionamos que na segunda geração [1] do ENEM, as avaliações eram organizadas em quatro áreas do conhecimento, contudo, doravante passaremos a dedicar atenção exclusiva para a área que aborda a Matemática e suas Tecnologias.

Esclarecidos estes pontos, estamos em condições de retornarmos ao contexto da definição de "modelo", para tanto, recorremos a Ferreira pois afirma que modelo é a "representação de algo a ser reproduzido" (FERREIRA, 2010, p.511), então podemos tomar a iniciativa de dizer, em uma primeira análise, que **modelo matemático** é a representação de algo tendo como ferramenta a matemática. Para consolidar nossa visão a respeito da definição de modelo matemático, que será fundamental para darmos prosseguimento ao nosso estudo, recorremos a referências sobre a temática.

Começamos por Bassanezi que buscando simplificar o conceito de modelo matemático, pois para ele cada autor acaba desenvolvendo sua própria definição, prefere chamá-lo de "conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado." (BASSANEZI, 2009, p.20). Para Biembengut e Hein modelo matemático define-se como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real." (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.12). E finalmente para os autores Almeida, Silva e Virtuan, modelos matemáticos são utilizados "para representar, explicar e tornar presentes situações (que podem não ser matemáticas) que queremos analisar usando matemática." (ALMEIDA; SILVA;

[1] Estrutura e organização que permanece até as edições atuais.

VERTUAN, 2016, 12).

> Podemos dizer, então, que um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.13)

De acordo com o objetivo de obtenção de um modelo, segundo Biembengut e Hein 2014, foi possível classificar os modelos em explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros. Explicitar e ou detalhar tal classificação não faz parte do objetivo principal desse trabalho.

2.2 Modelagem Matemática

Consolidada a definição de modelo matemático, é importante agora conhecermos o processo que resulta na construção desse modelo. Vejamos o que afirmam os autores já citados sobre o assunto e antecipadamente denominaremos esse processo de obtenção de um modelo matemático de **Modelagem Matemática**. Contudo, estamos também interessados em seu histórico, seus precursores, na organização e na finalidade desse processo.

Para Bassanezi "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." (BASSANEZI, 2009, p.16).

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele. (BASSANEZI, 2009, p.24).

Segundo os autores Biembengut e Hein, a modelagem matemática se define como o processo envolvido na obtenção de um modelo, processo este composto de doses de intuição e criatividade.

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo

> matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.12).

Já para os autores, Almeida, Silva e Vertuan, o modelo é o objetivo a ser alcançado e Modelagem Matemática é o caminho que leva a este objetivo.

> Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que “dá forma” à solução do problema e a Modelagem Matemática é a “atividade” de busca por essa solução. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.15).

Para a evolução humana como sociedade, podemos imaginar que a busca pelo conhecimento remota das mais primitivas gerações, pois está intrínseco na natureza humana. Das situações mais simplórias quanto as mais sofisticadas dos dias atuais, o homem busca entender determinados acontecimentos e fenômenos, e a Matemática, com sua formalidade, objetividade e poder de síntese, passou a ser amplamente utilizada como instrumento da busca de conhecimentos em diversas áreas.

Em um processo cíclico, o uso da Matemática na pesquisa promovida por outros campos do conhecimento, proporcionou avanços significativos, a exemplo da Física, Química, Biologia, Astrofísica, dentre outras. Mas foi exatamente o fato destes outros campos buscarem recursos na Matemática que se percebeu a necessidade da própria Matemática avançar, desta forma que áreas da Matemática evoluíram (Teoria dos Conjuntos, Teoria dos Números, Equações Diferencias, Teoria dos Grafos, e inúmeros outros exemplos) outras surgiram e novas estão em processo de avanço. Foi desses processos de pesquisas que surgiu o ramo da Matemática Aplicada.

> Primeiro, a teoria matemática para a construção do modelo matemático adequado ao problema original pode não existir. Esta situação exige do estudioso uma tarefa talvez histórica: desenvolver um novo ramo da Matemática. Obviamente isto não acontece todos os dias. Como um exemplo recente podemos citar a Teoria dos Jogos criada por J. Neumann para modelar situações de competição econômica. De qualquer maneira, o objetivo (e a esperança) de todo matemático aplicado ao estudar um problema é construir um modelo dentro de uma teoria matemática já desenvolvida e amplamente estudada, que facilite a obtenção de resultados. (BASSANEZI, 2009, p.26).

A Matemática Aplicada para atender as demandas, dedica-se ao estudo de modelos, desta forma, a Modelagem Matemática passou a ser um excelente método científico para as ciências factuais. Para Bassanezi, “a Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática.” (BASSANEZI, 2009, 32).

Tudo isso para entendermos que a Modelagem Matemática nasceu da necessidade da criação de um método científico e só mais tarde que foi introduzida na educação, na tentativa de se criar um método de ensino e aprendizagem capaz de atender as exigências de uma sociedade dinâmica, prática e objetiva, que além de buscar conhecimento, almeja sua utilização prática, abandonando por completo atividades tradicionais de memorização e repetição. Os alunos nos dias atuais não aceitam mais uma educação estagnada, primitiva, pois o conhecimento precisam ser também aplicado, requisitado na rotina diária, ou seja, significativo.

> Acreditamos que os professores de matemática, considerados paramatemáticos, têm a obrigação de mostrar aos alunos as duas possibilidades que na verdade se completam: tirar de um “jogo” resultados significativos (matemática aplicada) ou montar um “jogo” com regras fornecidas por alguma realidade externa (criação de matemática). A modelagem fomenta essas possibilidades num processo de ensino-aprendizagem em que a Matemática pode ser encarada como um jogo maior em que os perdedores são aqueles que não conseguem se divertir jogando (o que ocorre muitas vezes, por deficiência dos próprios treinadores, que estão mais preocupados com as regras do jogo do que com o prazer de efetivamente jogar). (BASSANEZI, 2009, p.16)

A Modelagem Matemática já consolidada como método científico era fato, pesquisadores da Educação Matemática queriam saber se tal trajetória poderia se repetir, mas agora como método de ensino e aprendizagem, principalmente em nosso país, que infelizmente possui um sistema educacional com muitas falhas e carente de inovações e novas práticas de ensino.

2.3 Fases da Modelagem Matemática

É unânime entre os autores analisados que a Modelagem Matemática, o que não poderia ser diferente, é um processo que tem como objetivo bem determinado de obter um modelo matemático, desta forma pode-se identificar fases ou etapas nesse processo, permitindo assim uma associação mais direta com uma metodologia, e como já é do nosso conhecimento, reforçado pelo ensinamento de Bassanezi que dedica um capítulo em sua obra Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática, escrevendo exclusivamente de técnicas de modelagem. Para que fique explícito, ainda não estamos num contexto totalmente pedagógico, continuamos considerando a modelagem como um método, mas não estamos afirmando nada no sentido de que quando direcionarmos para o campo da educação tais etapas sofrerão mudanças. Apenas estamos identificando etapas para obtenção de um modelo matemático, independente da área de atuação ao qual destina-se este modelo.

> Uma atividade de Modelagem Matemática, nesse contexto, envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.15).

A Tabela 1 apresenta características das etapas que cada autor citado em nosso estudo dividiu a Modelagem Matemática. Percebemos que as denominações são parecidas, diferenciando na maioria das vezes por subdivisões, porém com caracterização bem similar. A Tabela 1 foi agrupada em quatro etapas. Chamamos atenção para a terceira etapa da tabela, em que todos os autores a denominam de *Resolução*, ou seja, etapa fundamental, descrita como a obtenção propriamente dita do Modelo Matemático.

Faz-se extremamente importante compreendermos as etapas aqui apresentadas através da Tabela 1, uma vez que o ápice de nosso estudo será (pelo menos é nossa intenção) a utilização reiterada destas etapas, bem como é fundamental sua sequência de apresentação, por fazer parte do processo cronológico da atividade de Modelagem Matemática. Então, devido a importância do tema, apresentamos a Tabela 2 de forma sintética, porém completa, para posterior consulta [2]. Ressaltamos mais uma vez a convergência entre os autores analisados neste trabalho sobre as etapas existente na atividade de modelagem, transparecendo o amadurecimento sobre a temática, o que facilita, a apresentação de nossa proposta, uma vez que ao compilar as informações na Tabela 1 para a Tabela 2, já consideramos uma versão de nossa proposta.

[2] Nada impede a leitura da Tabela 1, apenas temos a intenção de otimizar a leitura.

Biembengut Hein	**Almeida Silva Vertuan**	**Bassanezi**	**Característica da etapa**
1) Interação a)Reconhecimento b)Familiarização	Inteiração	Experimentação	Primeiro contato com a situação problema. Atividade laboratorial de estudo direto (in loco) ou indireto (bibliografias) para coletas de dados tanto quantitativamente quanto qualitativamente. Técnicas e métodos estatísticos formalizam com um grau maior de confiabilidade à adoção de variáveis a serem consideradas na situação em estudo. Formulação e definição de metas para a resolução do problema.
2) Matematização a)Formulação	Matematização	Abstração	É a “tradução”da situação problema para a linguagem matemática, ou seja, transformação da linguagem natural para a linguagem matemática. Etapa que deve prevalecer a intuição, criatividade e experiência para definir e trabalhar com as hipóteses, variáveis e simplificações.
3) Resolução	Resolução	Resolução	Obtenção do modelo matemático.
4) Modelo matemático a)Interpretação b)Validação	a)Interpretação b)Validação	a)Validação b)Modificação	Avaliação do modelo matemático com base na validação da sua capacidade de representar a situação inicial. Ou seja, avaliar se o modelo matemático responde a problemática inicial. Etapa que caracteriza o dinamismo da modelagem matemática, visto que se o resultado não for satisfatório, deve-se retornar a segunda etapa para identificar erros ou falhas, buscando nova “tradução” para a linguagem matemática. Na impossibilidade da alteração é provável que um novo ramo de pesquisa para a matemática esteja surgindo. (muitos ramos da matemática foram criados nesta etapa).

Tabela 1 – Etapas da Modelagem Segundo alguns autores

ETAPA	DESCRIÇÃO DA ETAPA
Contextualização	Primeiro contato com a situação problema. Atividade laboratorial de estudo direto (in loco) ou indireto (bibliografias) para coletas de dados tanto quantitativamente quanto qualitativamente. Técnicas e métodos estatísticos formalizam com um grau maior de confiabilidade à adoção de variáveis a serem consideradas na situação em estudo. Formulação e definição de metas para a resolução do problema.
Matematização	É a "tradução" da situação problema para a linguagem matemática, ou seja, transformação da linguagem natural para a linguagem matemática. Etapa que deve prevalecer a intuição, criatividade e experiência para definir e trabalhar com as hipóteses, variáveis e simplificações.
Resolução	Obtenção do Modelo Matemático.
Validação	Avaliação do modelo matemático com base na validação da sua capacidade de representar a situação inicial. Ou seja, avaliar se o modelo matemático responde a problemática inicial. Etapa que caracteriza o dinamismo da Modelagem Matemática, visto que se o resultado não for satisfatório, deve-se retornar a segunda etapa para identificar erros ou falhas, buscando nova "tradução" para a linguagem matemática. Na impossibilidade da alteração é provável que um novo ramo de pesquisa para a matemática esteja surgindo (muitos ramos da matemática foram criados nesta etapa).

Tabela 2 – Síntese das Etapas da Modelagem Matemática

2.4 Modelagem Matemática como método de ensino

Iniciamos esta sessão com a seguinte pergunta: Modelagem Matemática pode ser utilizada como método ou prática de ensino? Antes de mais nada, vamos nos contextualizar no aspecto histórico da Modelagem Matemática no campo da educação, mais especificamente a Educação Matemática.

A Modelagem Matemática passou a ser debatida pela Educação Matemática em um cenário internacional, na década de 1960, no movimento denominado "utilitarista". Este promoveu o surgimento de grupos de pesquisa em diversos países. Eventos como Lausanne Symposium (Suíça, 1968), IOWO (Holanda, 1978) e o Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações - ICTMA (Dinamarca, 1978) são exemplos da expansão e consolidação da Modelagem Matemática (BIEMBENGUT, 2009).

Os representantes brasileiros na comunidade internacional de Educação Matemática trouxeram as influências do movimento "utilitarista" em momento quase simultâneo aos acontecimentos internacionais. E no final da década de 1970 e início de 1980 os nomes:

Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani conquistaram adeptos no pais, de forma que permitiu a consolidação do tema ao ponto de encontros bi-anuais de Educação Matemática e Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, fossem realizados desde 1999 (BIEMBENGUT, 2009). Aprofundando mais a leitura dessa autora os interessados poderão encontrar um mapeamento completo das atividades da Modelagem Matemática na educação brasileira, que oportunamente nos contentamos com sua breve síntese:

> (...) elegemos apresentar brevíssima síntese sobre dois deles como sinal, referência: Aristides C. Barreto, pois, pelo que temos em registro, foi o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira e, ainda, a representar o Brasil em congressos internacionais apresentando trabalhos sobre o tema, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos; e Rodney C. Bassanezi, um dos maiores disseminadores, em especial por meio dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou em diversas instituições de quase todos estados brasileiros. (BIEMBENGUT, 2009, p.10)

Como já mencionado, a Modelagem Matemática nasceu no berço da metodologia científica, utilizada em inúmeras pesquisas de diversos campos do conhecimento. Mas a Educação Matemática passou a se interessar e perceber o potencial da Modelagem Matemática na área da educação, e como não poderia ser diferente, este ramo da educação organizou-se para deixar sua contribuição. As adaptações e adequações necessárias para a utilização da Modelagem Matemática na educação passou a ser denominada *Modelação Matemática* e esta foi a nomenclatura adotada pelos autores Bassanezi 2009, Biembengut e Hein 2014.

Não nos enganemos acreditando que a Modelação Matemática foi um processo consensual, mas as divergência são ricas e oportuniza novos debates e novas pesquisas. Fato este, que na literatura, tanto nacional quanto internacional, há pesquisadores que defendem a Modelação como o melhor caminho para ensinar matemática, outros acreditam não se poder ensinar novos conceitos matemáticos, apenas otimizar a habilidade dos discentes no estudo da matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2014). O que temos de comum são os objetivos, por estarem bem definidos ao se fazer uso da Modelação em sala de aula. Abaixo apresentamos uma lista de objetivos elencada por (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.19), verdadeiros pontos positivos que a Modelação Matemática traz para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

a) aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;

b) enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;

c) despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;

d) melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;

e) desenvolver a habilidade para resolver problemas;

f) estimular a criatividade.

Acreditamos que a Modelação Matemática, embasados nos argumentos apresentados, seja um recurso bastante significativo para realçar, ou pelo menos iniciar, o interesse do aluno para com os conteúdos da Matemática, permitindo acessos em campos nunca, ou pouco explorado. Nessa mesma direção temos a prática do docente, pois ele tem oportunidade de percorre caminhos dantes nunca explorados, conhecer um público que possa responder positivamente aos estímulos de um diferenciado processo de ensino e aprendizagem.

A prática da Modelação Matemática nas escolas contribuirá para que velhos tabu sejam repensados, em que destacamos, a título de exemplificação, a visão da autora Biembengut que como já mencionado, dedicou-se ao estudo e a disseminação da Modelação Matemática. Sua larga experiência no assunto dá-lhe autoridade para mapear a rotina do sistema brasileiro de educação, além de ratificar os benefícios da Modelação.

> Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: **enunciado** $\longrightarrow$ **demonstração** $\longrightarrow$ **aplicação** quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua *motivação* (externa ou não à matemática), a *formulação de hipóteses*, a *validação* das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu *enunciado*. Estaríamos assim reinventando o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo da modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem. (BASSANEZI, 2009, p.36).

Bassanezi 2009, devido sua vasta experiência nos trabalhos de Modelagem e Modelação, tem em seu histórico, uma trajetória de acompanhamento de trabalhos pelo país e afirma ter presenciado bom resultados em diversas situações como cursos regulares, aperfeiçoamento de professores de Matemática, cursos de serviço, reciclagem de adultos, bem como disciplina de curso de licenciatura e em programas de Iniciação Científica.

Pelos fatos elucidados até o momento, estamos convictos que a Modelagem Matemática, com sua variante para a educação, a Modelação Matemática, além de se firmar como um método de ensino e aprendizagem, é um método que se destaca pelo fato de possuir características peculiares quando realçamos a necessidade de atrair um público em especial, os alunos, que há tempo estão descrentes, pois uma educação tradicional e ineficiente persiste em nosso sistema de educação.

Não queremos dizer que todas as “chagas” do ensino da matemática sejam resolvidas com a introdução da Modelação Matemática nas salas de aula. Em hipótese alguma foi nossa intenção, até mesmo porque, temos conhecimento de inúmeros relatos das dificuldades de se implantar tal metodologia: falta de tempo, capacitação dos docentes, programas de ensino a ser desenvolvido, novidade para o estudante ser parte do processo de ensino e aprendizagem (a não ser como ouvinte), dentre outros tantos fatores. Nosso objetivo inicial, por isto, fomos objetivos ao começamos por um questionamento, ao qual deveríamos responder se a Modelagem Matemática poderia ser considerada como método ou prática de ensino, em outras palavras, estamos analisando "o que fazer" e sugerindo a outrem o "como fazer".

Assim, deixamos como sugestão, um interessante campo de pesquisa, ou seja, como avançar sobre as barreiras impeditivas da implantação da Modelação Matemática nas salas de aula. Por hora, continuaremos na direção de nosso objetivo. Pois agora estamos em condição de responder o questionamento que abri esta sessão, mas antes, gostaríamos de ratificar nossa resposta com duas respeitáveis referências sobre o tema.

> A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno da realização de seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação. Não há restrição!. (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.18)

> Nessa nova forma de encarar a matemática, a modelagem - que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem - tem se mostrado muito eficaz. (BASSANEZI, 2009, p.16)

Finalmente respondemos afirmativamente a pergunta inicial, ou seja, a Modelagem Matemática pode e deve ser utilizada como método de ensino. Mais que isso, deve ser reconhecido como um método apropriado para conquistar a atenção dos alunos para um verdadeiro ensino da Matemática. Para sintetizar nossa fala, finalizamos com a seguinte argumentação:

Genericamente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir. (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p.13).

3 Exame Numa Experiência Matemática - ENEM

No primeiro capítulo tivemos a oportunidade de analisarmos a elaboração das provas e organização do ENEM, assim como seu contexto histórico, de forma que, oportunamente, destacamos como os assuntos relacionados com o ENEM trazem os termos *modelo*, *modelagem matemática* e *referência*. Esses termos nos motivaram a tratar da Modelagem Matemática e sua vertente para a educação: Modelação Matemática. Definições e etapas foram discutidas e um questionamento fundamental foi respondido afirmativamente: Modelagem Matemática pode ser utilizada como método ou prática de ensino?

Mas tudo o que foi dito até o presente momento não passa de indícios de que o ENEM e a Modelagem Matemática possam ter alguma inter-relação. Precisamos refinar nossos argumentos ao ponto de acreditarmos que a Modelagem Matemática, em específico, a Modelação Matemática, possa ser um método de ensino e aprendizagem. Desta forma, estaremos alcançando o objetivo principal desse trabalho.

Sendo assim, recorremos aos autores Kaiser e Sriraman (2006) em significante trabalho publicado da revista Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik - ZDM, que descreveram um sistema caracterizando seis tipos de Modelagem Matemática, denominados de acordo com o que eles chamaram de *perspectivas*. As perspectivas: realística, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica e cognitiva, foram denominadas segundo objetivos identificados para cada modelagem. Recomendamos aos interessados uma leitura mais detalhada sobre o tema em (KAISER; SRIRAMAN, 2006), pois dedicaremos nossa atenção a perspectiva *contextual* por estar diretamente relacionada ao nosso propósito de analisar questões do ENEM. Destacamos a interpretação que os autores Almeida, Silva e Vertuan fazem desta nomenclatura, apesar deles optarem na obra Modelagem Matemática na Educação Básica (2016) as perspectivas *educacional*, *cognitiva* e a *sociocrítica*.

> Na perspectiva contextual, consideram a inclusão de situações-problema nas aulas de Matemática com a finalidade de contextualizar ou mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos levando em conta principalmente questões motivacionais. É um problema "de palavras", de interpretação de enunciados, em que obter um modelo matemático é uma atividade de resolução de problemas, previamente construída visando à utilização pelos alunos de situações significativas que os levem a construir e reconstruir ideias matemáticas. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.28).

Complementando nosso objetivo, buscamos no Anexo A os Eixos Cognitivos, que são comuns às quatro áreas do conhecimento, ou seja, para as quatro provas que os candidatos do ENEM são submetidos (além da redação) e a íntegra da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, composta por 7 sub-áreas e 30 habilidades.

De modo geral, como já definimos Modelagem Matemática e suas etapas, em particular a Tabela 2, podemos em uma breve leitura do Anexo A, dizer que a Matriz de Referência do ENEM está convergindo, em alguns casos indiretamente, aos preceitos da modelagem. Gostaríamos de ir um pouco além, para identificar tópicos nessa matriz que diretamente estão associados com a prática da Modelação Matemática e suas etapas. Vejamos:

Eixos Cognitivos:

- Dominar linguagens (DL): fazer uso das linguagens matemática. Este eixo é fundamental na etapa da *Matematização*.
- Compreender fenômenos (DF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas. Ações fundamentais da etapa da *Contextualização*.
- Enfrentar situações-problemas (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problemas. Ações fundamentais na etapa da *Contextualização*.
- Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente. A etapa da *Solução* embasa-se nesses objetivos, que podem também ser utilizados na etapa da *Validação*.
- Elaborar proposta (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade. A etapa da *Solução* que resulta na apresentação de um modelo matemático, nada mais é que uma elaboração de proposta.

Todos os 5 Eixos Cognitivos da Matriz de Referência para o ENEM estão diretamente relacionados com as etapas da Modelação Matemática, obviamente estamos direcionando nossa argumentação para a prova de Matemática, apesar desses eixos serem comuns para as demais área do conhecimento: Linguagem, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Filosofia e Sociologia); Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Química, Física e Biologia), de forma que o mesmo direcionamento poderia ser possível, caso essas áreas assim o queiram.

Competências de sub-áreas e habilidades:

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. Etapa da *Matematização*.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimento de estatística e probabilidade.

Com exceção da habilidade H9 que se destaca mais na etapa da *Matematização*, todas as outras mencionadas, estão intrinsecamente relacionada com todas as etapas da Modelação Matemática, que como já vimos, tem como papel principal apresentar modelos matemáticos que solucione questões a partir de situação-problema e de acordo com os autores Kaiser e Sriraman, temos nessas habilidades a modelagem denominada: expectativa *contextual*.

Deixamos para o final a argumentação mais importante, que além de ser uma citação direta da relação do ENEM com a Modelação Matemática, chama-nos a atenção para o fato da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias reservar uma sub-área exclusiva para a Modelação Matemática:

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Esta sub-área é composta de 5 habilidades (H19 até H23), todas descrevem habilidades que são desenvolvidas pela Modelação Matemática em sala de aula. Mas dedicamos toda nossa atenção para em definitivo, concatenar a prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM com a Modelagem Matemática, pois tanto a competência de sub-área 5 quanto a habilidade H21, referem literalmente os termos “modelar” e “modelagem” respectivamente.

3.1 Tipos de Questões de Matemática do ENEM

Convictos de que a relação das questões de matemática do ENEM e modelagem foi estabelecida, damos mais um passo para classificar as questões do ENEM, dentro de um ambiente de Modelação Matemática, as questões das provas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM em três tipos. Selecionamos a edição de 2016 do ENEM (caderno amarelo da primeira aplicação), por ser a mais recente, mas a sugerida classificação poderia ser realizada em qualquer edição.

Questão Tipo Modelagem: São questões que tem o perfil de uma atividade de Modelação Matemática, onde o professor em sala de aula poderia fazer uso desse tipo de questão como exemplo para desenvolver as etapas da modelação com seus alunos, etapas que já foram descritas pela Tabela 2. São as questões de números: 136, 138, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 150, 151, 153, 155, 156, 157, 159, 161, 165, 166, 170, 171, 173, 175, 176, 177 e 179.

Questão Tipo Modelo: São subdivididas em dois casos: quando a questão *sugere* um modelo matemático ou quando *apresenta* um modelo já pronto, por mais simples que ele seja. A sugestão do modelo ao qual nos referimos acontece quando os dados da questão já são suficiente para a explicitação do modelo, não havendo necessidade de recorrer a conhecimentos extras, fora da questão, para a sua construção. Já o modelo pronto, é quando a questão já fornece uma imagem, uma fórmula, um gráfico, ou qualquer outro elemento, de forma que o respondente deverá apenas utilizá-lo (analisando, calculando ou interpretando) para encontrar a solução da situação-problema. Questão Modelo foi identificada nas questões de números: 137, 139, 141, 142, 148, 149, 152, 154, 158, 160, 163, 164, 167, 168, 169,174 e 180.

Questão Tipo Direta: Essas questões, em quantidade bem inferior em relação aos outros dois tipos, não é o padrão utilizado pelo ENEM, pois a elaboração das provas busca uma análise, uma interpretação, uma tomada de decisão e não respostas memorizadas, mecânicas e ou automáticas. Em geral, são questões elaboradas para averiguar a habilidade H6, ou seja: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional. Foram identificadas as questões de números 162, 172 e 178.

Finalizamos o capítulo descrevendo, com mais detalhes, algumas das questões identificadas como um dos três tipos: questão modelagem, questão modelo ou questão direta, para que a distinção entre esses três tipos de questões seja compreendida.

3.1.1 Questões tipo modelagem

Questão 140: Uma cisterna de 6000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmento de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

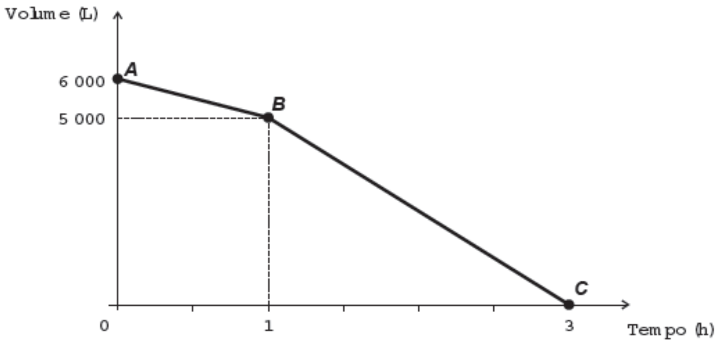


Figura 7 – ENEM, 2016 - Questão 140 (Prova Amarela)

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1000.

b) 1250.

c) 1500.

d) 2000.

e) 2500.

<u>Análise:</u>

O modelo que o respondente deve recorrer dentre os trabalhados em seu processo de aprendizagem é o da função afim $f(x) = ax + b$. Observe que a leitura da questão e principalmente o gráfico apresentado, proporcionam uma contextualização que direcionam o respondente ao modelo citado. Por estas características que classificamos a questão como *questão modelagem*, pois para a solução da questão, deve-se elaborar um modelo que possibilite a identificação da opção correta.

Utilizando o modelo $f(x) = ax + b$ juntamente com os dados do gráfico podemos calcular os valores dos coeficientes a e b,

$$\text{Ponto A: } f(0) = 6000 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 6000$$

$$\text{Ponto B: } f(1) = 5000 \Rightarrow f(1) = a + 6000 \Rightarrow a = -1000$$

Logo a primeira bomba pode ser representada pela função

$$\begin{gathered} f(x) = -1000x + 6000 \\ f(1) = 5000 \\ f(2) = 4000 \\ f(3) = 3000 \\ f(4) = 2000 \\ f(5) = 1000 \\ f(6) = 0 \end{gathered}$$

Levando 6 horas para esvaziar a cisterna, ou seja, a primeira bomba tem uma vazão de 1000 L/h. Como uma segunda bomba foi instalada após a primeira hora, e sabendo que as duas bombas juntas esvaziaram em um intervalo total de 3 horas, desta forma, concluímos que a segunda bomba foi responsável por extrair 3000 L em 2 horas. Um segundo modelo é exigido,

$$v = \frac{L}{h} \Rightarrow v = \frac{3000}{2} \Rightarrow v = 1500 \quad L/h$$

Opção C

Questão 146: Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m $\times$ 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura de 10 m de base, de modo que os compartimento são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

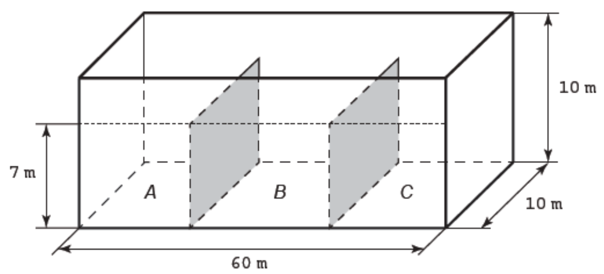


Figura 8 – ENEM, 2016 - Questão 146 (Prova Amarela)

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1,4 \times 10^3 \;\; m^3$

b) $1,8 \times 10^3 \;\; m^3$

c) $2,0 \times 10^3 \;\; m^3$

d) $3,2 \times 10^3 \;\; m^3$

e) $6,0 \times 10^3 \;\; m^3$

Análise:

A imagem do reservatório, juntamente com suas medidas e a contextualização elaborada pela questão, propicia a organização de um modelo matemático que resultará no quantitativo de petróleo vazado em um possível acidente. Para isso, deve-se recorrer aos conhecimentos de volume de sólidos. Como o reservatório se encontra com sua carga máxima e a interligação existente entre os três compartimentos ocorre pela parte superior, de forma que a divisória não impede o petróleo passar de um compartimento para o outro nessa parte superior, então observando a imagem fornecida pela questão e chamando:

v = variável vazamento;
v_s = vazamento parte superior;
v_c = vazamento do compartimento;
c_r = comprimento do reservatório;
l_r = largura do reservatório;
h_r = altura do reservatório;
c_d = comprimento da divisória;
h_d = altura da divisória;
l_c = largura do compartimento.

Temos

$$v = v_s + v_c$$

$$v = [c_r \cdot l_r \cdot (h_r - h_c)] + (c_d \cdot h_d \cdot l_c)$$

$$v = 60 \cdot 10 \cdot (10 - 7) + 10 \cdot 7 \cdot \frac{60}{3}$$

$$v = 1800 + 1400$$

$$v = 3200 \;\; m^3$$

$$v = 3,2 \times 10^3 \;\; m^3$$

Opção D

Questão 153: Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por

a) $10^2 \cdot 26^2$

b) $10^2 \cdot 52^2$

c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2!}$

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

A questão contextualizada direciona o respondente para modelos de contagem (Análise Combinatória). Está explícito que letras maiúscula e minúscula são diferentes e para não haver dúvida, o alfabeto a ser considerado deve ser o composto de 26 letras. O modelo necessário deve ser estruturado no princípio fundamental da contagem, onde os eventos (cada elemento da senha) é independente. Chamando e_i de enésimo evento temos:

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4$$

Sabendo que a senha se altera ao permutar a ordem de seus elementos (ou não, mas de modo geral sim. Exemplo: $2354 \neq 3245$), o modelo deve atender as seguintes exigências:

$$T = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot P_4}{2! \cdot 2!}$$

De forma que:

$n_1 = 10$
$n_2 = 10$
$l_1 = 52$
$l_2 = 52$
$P_4 =$ permutação de 4 elementos.

Como tanto as letras quanto os números podem ser repetidos para a mesma senha, contamos cada dupla 2 vezes. Exemplo: Na senha 22Ab permutando os números, a senha continua a mesma. Desta forma devemos compensar tal excesso de contagem dividindo o modelo por $2! \cdot 2!$. Substituindo os valores temos:

$$T = \frac{10 \cdot 10 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 4}{2! \cdot 2!}$$

$$T = 10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

Opção E

3.1.2 Questões tipo modelo

Questão 142: De forma geral, os pneus radiais trazem em sua lateral uma marcação do tipo *abc/deRfg*, como 185/65R15. Essa marcação identifica as medidas do pneu da seguinte forma:

- *abc* é a medida da largura do pneu, em milímetro;
- *de* é igual ao produto de 100 pela razão entre a medida da altura (em milímetro) e a medida da largura do pneu (em milímetro);
- *R* significa radial;
- *fg* é a medida do diâmetro interno do pneu, em polegada.

A figura ilustra as variáveis relacionadas com esses dados.

Figura 9 – ENEM, 2016 - Questão 142 (Prova Amarela)

O proprietário de um veículo precisa trocar os pneus de seu carro e, ao chegar a uma loja, é informado por um vendedor que há somente pneus com os seguintes códigos: 175/65R15, 175/75R15, 175/80R15, 185/60R15 e 205/55R15. Analisando, juntamente com o vendedor, as opções de pneus disponíveis, concluem que o pneu mais adequado para seu veículo é o que tem a menor altura.

Desta forma, o proprietário do veículo deverá comprar o pneu com a marcação

a) 205/55R15.

b) 175/65R15.

c) 175/75R15.

d) 175/80R15.

e) 185/60R15.

<u>Análise:</u>

Observemos de início que o código do pneu já trás um modelo pronto, pois a disposição de suas informações determina algumas medidas típicas de um pneu. Não é de mais lembrar que tais códigos são reais, assim como quase todas as contextualizações das provas do ENEM. Mas o modelo matemático que servirá para solução da questão está descrito no segundo tópico da caracterização do código do pneu, ou seja, na definição de *de*. Essa questão *sugere*[1] um modelo matemático em seu enunciado, não havendo necessidade de recorrer a outros conhecimentos (modelos) fora da contextualização da questão (a não ser é claro, na etapa da matematização que sempre precisará dos modelos da linguagem matemática) para apresentar um modelo, por este motivo essa questão foi classificada como *questão modelo*. O modelo a ser utilizado é:

$$de = \frac{100 \cdot altura}{abc}$$

Chamando *altura* de h e isolando h no primeiro membro temos:

$$h = \frac{(abc) \cdot (de)}{100}$$

Com esse modelo verificamos cada item apresentado pela questão.

a) $h = \dfrac{205 \cdot 55}{100} \Rightarrow h = 112,75;$

b) $h = \dfrac{175 \cdot 65}{100} \Rightarrow h = 113,75;$

c) $h = \dfrac{175 \cdot 75}{100} \Rightarrow h = 131,25;$

d) $h = \dfrac{175 \cdot 80}{100} \Rightarrow h = 140,0;$

e) $h = \dfrac{185 \cdot 60}{100} \Rightarrow h = 111,0;$

[1] Primeiro caso da subdivisão da classificação: questão modelo.

O respondente que tiver a habilidade para interpretar o modelo sugerido pela questão, perceberá que nos itens b), c) e d) os pneus têm a mesma largura $abc = 175$ que é diretamente proporcional ao valor de *(de)*. Como o objetivo é o menor valor para h, basta calcular o item que tem o menor valor para *(de)*, que nesse caso é o item b), ganhando um tempo precioso na prova.

opção E

Questão 169: No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

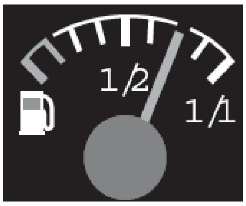


Figura 10 – ENEM, 2016 - Questão 169 (Prova Amarela)

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

a) 570

b) 500

c) 450

d) 187

e) 150

<u>Análise:</u>

O modelo *sugerido* está na interpretação da imagem do medidor de combustível contendo 8 divisórias [2], juntamente com a informação de sua capacidade total de 50 L e o

[2] Gostaríamos de chamar a atenção para a utilização de gráficos, imagens, tabelas e outras situações que funcionam como modelo, não apenas a linguagem matemática é utilizada na Modelação Matemática. É importante reconhecermos a interpretação matemática da situação.

rendimento médio do carro que é 15 km/L. Por essa caracterização que a classificamos como *questão modelo*.

$$d = capacidadedotanque \cdot combustíveldisponível \cdot rendimento \Rightarrow d = k \cdot c \cdot r$$
$$d = 50 \cdot \frac{6}{8} \cdot 15 \Rightarrow d = 562,5km$$

O combustível acabará entre o 4^0 e o 5^0 posto de combustível, logo o motorista deverá reabastecer no 4^0 posto que se localiza a 500 km do início do trajeto.

opção B

Questão 174: Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013 outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

<u>Análise:</u>

Observe que a questão já *apresentou* um modelo, que é o cálculo da magnitude de um terremoto, ou seja, a escala Richter. O que já é suficiente para classificá-la como *questão modelo*. Informações complementares foram apresentadas, as quais foram a magnitude do terremoto do Japão (9,0) e do terremoto de Sichuan (7,0). Chamemos de M_1 a magnitude do terremoto no Japão, de M_2 a magnitude do terremoto em Sichuan. Como E_0 foi declarada uma constante real positiva, manipulando o equação apresentada pela questão e isolando E_0 temos:

$$M = \frac{2}{3} \cdot (\log E - \log E_0)$$

$$\frac{3}{2} \cdot M = \log E - \log E_0 \Rightarrow \log E_0 = \log E - \frac{3}{2} \cdot M$$

Sendo $E_0 > 0$, podemos afirmar que $\log E_0$ existe e continua sendo uma constante real. Basta igualar $\log E_0$ para os dois terremotos para identificar a relação existente entre os acontecimentos catastróficos.

$$\log E_1 - \frac{3}{2} \cdot M_1 = \log E_2 - \frac{3}{2} \cdot M_2$$

$$\log E_1 - \frac{3}{2} \cdot 9 = \log E_2 - \frac{3}{2} \cdot 7$$

$$\log E_1 - \frac{27}{2} = \log E_2 - \frac{21}{2}$$

$$\log E_1 - \log E_2 = \frac{27}{2} - \frac{21}{2}$$

$$\log \left(\frac{E_1}{E_2} \right) = \frac{6}{2}$$

$$\log \left(\frac{E_1}{E_2} \right) = 3$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3$$

$$E_1 = 10^3 \cdot E_2$$

Opção C

3.1.3 Questões tipo direta

Questão 162: É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

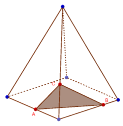
a) Quadrados, apenas.

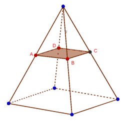
b) Triângulos e quadrados, apenas.

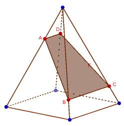
c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

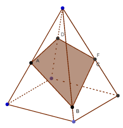
d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

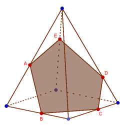
e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Análise:

Podemos percebe que nesse tipo de questão não há sugestão ou apresentação de um modelo, muito menos o respondente recorrerá a conhecimentos matemáticos tratados anteriormente em sua formação, como princípios, teoremas, fórmulas, proposições, axiomas, dentre outros. Seu único recurso é sua habilidade de interpretar imagens tridimensionais para serem representadas bidimensionalmente. Em resumo, deve-se buscar um recurso mais visual para interpretar as interseções entre o plano e a pirâmide regular de base quadrada.

Opção E

Questão 178: Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

Qual é o esboço obtido pelos alunos?

a) 

b) 

Figura 11 – ENEM, 2016 - Questão 178 (Prova Amarela)

c) 

d) 

e) 

Análise:

Outra questão que não há sugestão ou apresentação de um modelo, nem tão pouco conhecimento matemáticos que ele o respondente possa recorrer. Mais uma vez, o recurso a ser utilizado é a habilidade de interpretar imagens tridimensionais para serem representadas bidimensionalmente.

Opção C

4 Modelação Matemática na Questões de Matemática do ENEM

Neste capítulo apresentaremos exemplos de questões de algumas edições anteriores do ENEM. Apresentamos numa abordagem que permita identificar as etapas da Modelação Matemática, ou seja, utilizaremos a sugestão da Tabela 2.

4.1 ENEM - 2016

Questão 171:

Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

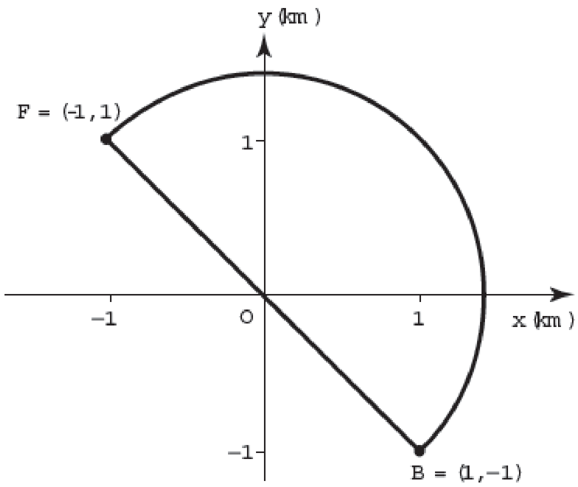


Figura 12 – ENEM, 2016 - Questão 171 (Prova Amarela)

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galera via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

a) 1260.

b) 2520.

c) 2800.

d) 3600.

e) 4000.

UMA SOLUÇÃO:

Contextualização: Como se trata de um exame (prova), o primeiro contato com a problemática é através da leitura. Uma primeira leitura trará a temática e uma visão geral da situação que deverá ser abordada. Caso seja necessário uma segunda leitura, agora com mais atenção, permitirá trazer características e dados que devem ser coletados e anotados para consulta e utilização nas etapas seguintes.

Matematização: Etapa em que deve-se perceber que dois modelos devem ser apresentados, um para cada projeto de construção da galeria: segmento de reta ou semicircunferência. O respondente deve apresentar uma linguagem matemática para a situação, pois é nessa etapa que deve ocorrer uma transcrição da situação problema para a linguagem matemática. Para o trajeto retilíneo temos:

$$\overline{FB} = \overline{FO} + \overline{OB}$$

Já para o trajeto semicircunfêrico obtemos:

$$\overline{FB} = 2\pi r \frac{1}{2}$$

Analisando o sistema de coordenadas xOy, concluímos que o valor de r pode ser calculado usando o Teorema de Pitágoras, visto que forma um triângulo retângulo com os pontos (0, 0), (1, 0) e (1, -1), ou seja, r é a hipotenusa:

$$r^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow r = \sqrt{2}$$

Chamando T_r de trajeto retilíneo e T_c de trajeto semicircular queremos avaliar quem proporcionará um tempo menor de execução, lembrando que T_r deve ser multiplicado por 1000, e T_c multiplicado por 600 para obtermos os dados em horas. Desta forma convertemos quilômetros em metros, pois cada metro foi avaliado em horas.

Observe que o conhecimento adquirido pelo respondente é de fundamental relevância na etapa da matematização, de forma que sua habilidade e experiência matemática será de suma importância [1].

<u>*Resolução*</u>: Não adiantará uma boa e elaborada organização de linguagem matemática por parte do respondente se não souber articular os dados para obter a solução procurada, ou seja, responder a situação problema. O modelo matemático procurado para esta questão deve responder se $T_r > T_c$ ou o contrário, $T_c < T_r$.

Temos então nosso modelo matemático:

$$(\overline{FO} + \overline{OB}) \times 1000 \overbrace{=}^{?} \left(2\pi r \frac{1}{2}\right) \times 600$$

$$(r + r) \times 1000 \overbrace{=}^{?} 2\pi r \frac{1}{2} \times 600$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times 1000 \overbrace{=}^{?} \pi\sqrt{2} \times 600$$

$$(2\sqrt{2}) \times 1000 \overbrace{=}^{?} \pi\sqrt{2} \times 600$$

$$2 \times 1,4 \times 1000 \overbrace{=}^{?} 3 \times 1,4 \times 600$$

$$2800 > 2520$$

<u>*Validação*</u>: Toda solução deve passar por uma análise, principalmente quando se tratar de uma avaliação. Perguntas como: Faz sentido tal solução? Este foi o caminho planejado? Está faltando alguma conversão? Por que não encontrei uma das opções de solução apresentada pela questão? Questionamento como estes permite uma interpretação mais cuidadosa da questão a ser respondida, pois além de revisar sua estratégia, permite ajustes não percebidos durante o processo de obtenção do modelo e consequentemente da resposta procurada. Não é raro alunos chegarem numa solução correta, mas por não fazerem algum ajuste ou interpretação em sua solução, acreditam que erraram e como quase sempre não há tempo hábil para refazer a questão, acabam desistindo da questão, perdendo uma pontuação preciosa num processo de seleção como é o caso no ENEM.

[1] Por este e outros motivos que acreditamos que a metodologia da Modelação Matemática possa contribuir aos alunos do ensino médio, pois a prática de uma abordagem com as etapas da modelagem proporcionará uma considerável experiência aos candidatos

Nosso modelo apresentou uma resposta direta e de fácil análise, concluindo de imediato que a opção que demandará menos tempo será o projeto de construção da galeria que contorna os bairros, ou seja, trajeto da semicircunferência.

Opção B

4.2 ENEM - 2015

Questão 140: O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo $30cm$.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquiri nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

Contextualização: Uma primeira leitura da questão desempenha o papel de um primeiro contato sobre o assunto. Perceba que a questão é construída num formato que busca situar o leitor dentro do contexto proposto. Logo após esta primeira leitura, espera-se que o respondente possa ter uma abstração do formato da mesa o mais próximo possível da figura 13, permitindo a partir daí buscar em seu repertório de conhecimento matemático os conteúdos necessários para a próxima fase da modelagem.

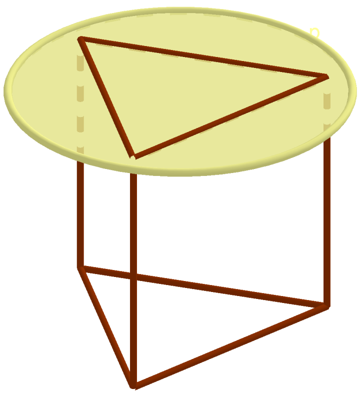


Figura 13 – Prisma

Matematização: Etapa que terá como pré-requisito fundamental a experiência que o respondente tem em "transcrever" a situação apresentada e interpretada na etapa da contextualização para a linguagem matemática. Espera-se que o respondente perceba que a situação apresentada trata-se da compra de um tampo de formato circular que precisa ter um tamanho mínimo e suficiente para cobrir a base da mesa que é apresentada como um prisma reto de base triangular, de forma que este triângulo seja equilátero.

O respondente deve listar os seguintes tópicos matemáticos:

a) Perceber que o ponto central do problema trata-se da mensuração do raio da circunferência do tampo da mesa;

b) Planificação do tampo da mesa, observe figura 14;

c) Para mensurar o raio, devemos abordar o tema de círculo circunscrito a triângulo, em particular, a triângulo equilátero;

d) Para identificar o círculo circunscrito deve-se recordar do circuncentro, ponto médio, mediatriz, relações métricas da altura do triângulo equilátero, das medianas do triângulo equilátero e principalmente da relação de $\frac{2}{3}$ que o circuncentro tem com a altura dos triângulo equiláteros. Veja figura 15.

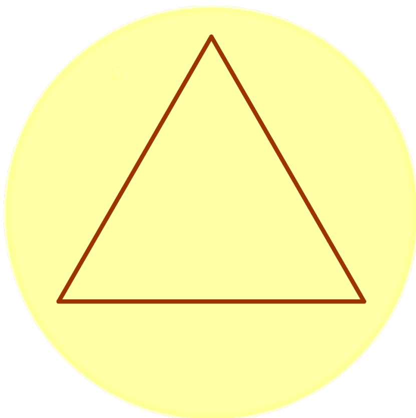


Figura 14 – Visualização bidimensional do tampo da mesa.

Nesta etapa da modelagem, é de suma importância que se fique atento a coleta de dados, como por exemplo as dimensões dos tampos disponíveis na empresa citada na questão, bem como dos valores fornecidos, como foi o caso do 1,7 sendo uma aproximação para $\sqrt{3}$ e 3 para π. O respondente deve está muito bem preparado para participar do ENEM, pois em uma única questão, há uma abrangência bastante significativa do repertório matemático, uma exigência da próxima etapa.

Resolução: Com os dados anotados na etapa anterior e com as organizações dos conteúdos necessários, faz-se a construção do modelo. Chamando r_t de raio do tampo e r_b o raio da base da mesa, temos

$$r_t \geq r_b$$

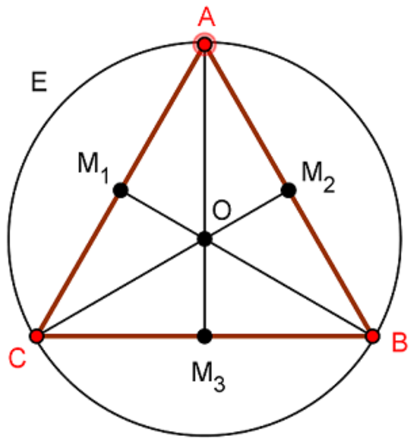


Figura 15 – Círculo circunscrito a um triângulo equilátero.

Na etapa da matematização espera-se que se conclua que r_b procurado são os $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo representado pela Figura 16, sendo assim obtemos o seguinte modelo matemático:

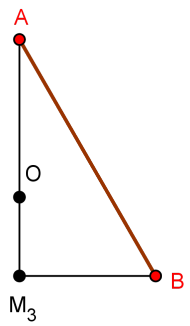


Figura 16 – Utilização do Teorema de Pitágoras

$$
\begin{gathered}
r_t \geq r_b \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_3} \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM_3}^2} \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{30^2 - 15^2} \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{900 - 225} \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{675} \\
r_t \geq \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot \sqrt{3} \\
r_t \geq 2 \times 5 \times (1,7)
\end{gathered}
$$

$$r_t \geq \frac{51}{3}$$
$$r_t \geq 17$$

Validação: Temos aqui um exemplo que destaca bem a importância desta etapa da Modelação Matemática, observem que a resposta encontrada não está entre as opções de solução dada pela questão. A interpretação torna-se tão importante quando a obtenção do modelo e seus respectivos cálculos. Como o problema solicitou a menor opção dentre as possibilidades disponível na loja, fica fácil compreender que o vidro com raio de 18 cm atende a problemática.

Opção A

4.3 ENEM - 2014

Questão 144: Um show especial de Natal teve 45000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

a) 1 hora.

b) 1 hora e 15 minutos.

c) 5 horas.

d) 6 horas.

e) 6 horas e 15 minutos.

UMA SOLUÇÃO:

Contextualização: Novamente uma leitura atenciosa permitirá conhecimento da situação problema. O respondente nesta etapa tem seu primeiro contato com a situação, durante a leitura, em um processo “automático”, vai buscando em seu repertório de conhecimento matemático os modelos que possam ser utilizados nessa problemática. Uma metodologia de ensino da Matemática tendo como ponto de referência a Modelação Matemática, ampliará e facilitará as interpretações e análise das situações problemas, ou seja, o respondente se sentirá mais preparado pelo simples fato de provavelmente já ter trabalhado, em seu histórico de estudo, algum modelo que parece ou seja idêntico com esta nova situação.

Matematização: Vamos transcrever a situação apresentada para a linguagem matemática. Uma boa estratégia, como já apresentado em exemplos anteriores é nomear as variáveis:

T_e = Tempo de entrada;
T = Total de ingressos;
K = quantidade de catracas;
P = quantidade de portões;
t = tempo em segundos.

É importante ficar atento às adaptações que a situação problema faz para idealizar uma situação real ou podemos denominar de "ideal" como por exemplo: Nenhuma catraca irá dar defeito. Pessoas não irão para portões errados demandando tempo até chegar no portão correto. As pessoas chegarão no mesmo horário. As pessoas serão suficientemente organizadas para realmente gastarem 2 segundo para passar pela catraca. Todos que compraram o ingresso irão ao show. Dentre outros detalhes até mesmo subentendidos no texto da questão.

Por se tratar de uma prova de múltipla escolha, é válido observar as opções apresentadas com solução, pois como neste caso, será necessário a conversão de unidades de medidas, ou seja, transformar segundos em minutos e minutos em horas. Para tanto, devemos dividir por 60 o resultado para obtermos a resposta em minutos e novamente por 60 para obtermos finalmente a solução em horas. Também é comum em conversões de minutos para horas o tratamento fracionário como por exemplo 3,5 horas, onde $\frac{1}{2}$ horas corresponde 30 minutos.

O ponto "chave" dessa questão é a interpretação de que o tempo mínimo solicitado para todo o público adentrar no estádio seja o mesmo tempo gasto para cada grupo de pessoas passarem na catraca definida no ingresso, pois como já supomos, todos estarão presentes e irão passar na catraca pré-estabelecida ao mesmo tempo em todos os portões e catracas disponíveis. Sendo assim, deve-se identificar a quantidade de pessoas que passará em cada catraca para então calcular o tempo mínimo necessário.

Nesta etapa da Modelação Matemática, nem sempre a linguagem matemática se apresenta na forma escrita, não identificamos nenhum problema o fato desta linguagem matemática ocorrer mentalmente, até mesmo porque pessoas com habilidades matemáticas possuem uma abstração muito bem trabalhada e muitas vezes não necessitam de passar para o papel essa linguagem, indo direto ao modelo matemático.

Resolução: Nosso modelo então é construído,

$$\boxed{T_e = t \cdot \frac{T}{60 \cdot 60 \cdot P \cdot K}}$$

$$T_e = 2 \cdot \frac{45000}{60 \cdot 60 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$T_e = 1,25 \text{ horas}$$

Validação: Como já previsto, nossa resposta apresentou uma parte fracionária da hora, ou seja, 0,25 horas corresponderá a $\dfrac{1}{4}$ da hora, ou seja, 15 minutos. Desta forma nossa resposta final é 1 horas e 15 minutos.

Opção B

5 Modelos Matemáticos

Antes de mais nada, apesar que em nenhum momento neste trabalho, houve indício de identificar a modelagem ou até mesmo a modelação como método de resolução do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, muito menos a pretensão, mesmo que subentendido, de uma técnica ou "macete", comuns em inúmeros cursos preparatórios espalhados pelo Brasil para preparação dos candidatos ao exame.

Ratificamos nosso objetivo de buscar elementos que permitam uma comparação entre a Matriz de Referência do ENEM e a Modelagem Matemática, em especial a Modelação Matemática, de forma que o capítulo 3 teve como objetivo tal finalidade.

Destacamos a compreensão da Modelação Matemática como um método de ensino, visto no capítulo 2. Sendo assim, é importante que se perceba que as questões elaboradas e incluídas no ENEM possuem uma caracterização idêntica, quando não, muito próxima da existente nas etapas para a Modelação Matemática que é realizada em sala de aula. Logo, nossa proposição fundamenta-se em mostrar que aulas regulares e habituais no ensino médio que têm como base a Modelação Matemática podem proporcionar um método de ensino para o candidato do ENEM. Estamos nos referindo a planos de ensino, preferencialmente abrangendo todo o ensino médio, que tem como base metodológica os conceitos e etapas da Modelação Matemática.

Em nosso primeiro auto questionamento queremos avaliar a possibilidade de estarmos "forçando" a identificação das etapas da Modelação Matemática nas questões do ENEM, ou seja, nosso capítulo 3. Para negar tal possibilidade, recorremos a Elon Lages Lima que em sua obra Números e Funções Reais (LIMA, 2013) fornece requisitos para inferirmos que de modo geral, a Matemática, do ponto de vista de uma linguagem, pode ser considerada como modelos matemáticos que permitem interpretar situações concretas.

> Neste livro, procuramos deixar claro que a Matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelos para situações concretas, permitindo assim analisar, prever e tirar conclusões de forma eficaz em circunstâncias onde uma abordagem empírica muitas vezes não conduz a nada. Os temas aqui abordados são apresentados dentro dessa ótica. (LIMA, 2013, p.X)

Nesta mesma direção e reforçando que a carateriação das etapas da Modelação Matemática pode ser incluídas nas questões que visam abordar situações concretas, ou seja, questões frequentemente comuns no ENEM, ainda citando (LIMA, 2013), justificamos nossa estratégia de considerar cada tema, conceito, conteúdo, definição, ou seja, toda linguagem matemática como um modelo, mesmo que mais simples e intuitivo possível.

> Assim é que os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo para as operações de contagem e medida; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representa uma situação específica. (LIMA, 2013, p.X)

Se são jogos de palavras, ou ponto de vista, ou forma de abordagem, ou preferência de nomenclatura, enfim, não importa como cada autor articula sua abordagem, o importante é que questões que buscam retratar uma situação concreta, do nosso ponto de vista, permitem ao menos uma comparação com as etapas da Modelagem Matemática, até porque, como já mencionamos, a Modelagem Matemática teve sua origem justamente nesses tipos de questões.

Para exemplificar, destacamos a obra de Luiz Roberto Dante, Matemática: contexto e aplicações. Selecionamos esta obra pelo fato de pertencer ao Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, no triênio: 2015 à 2017. O PNLD democratiza o direito de cada escola pública optar pelo livro texto de cada disciplina. Nossa escolha foi motivada principalmente pelo fato de ter sido a obra mais solicitada pelas escolas atendidas pelo PNLD, de forma que mais de 2,5 milhões de unidades foram distribuídas em todo o país.

A coleção de Dante possui duas versões; volume único e um volume para cada ano dos três do ensino médio (esta última que tivemos acesso). Para cada volume o autor organizou 4 (quatro) unidades [1] e as unidades possuem o que o autor denominou de boxes e seções: Abertura da unidade; Abertura de capítulo; Exercício resolvido passo a passo; Para refletir; Fique atento!; e Você sabia?; Exercícios; Matemática e tecnologia; Leitura(s); Um pouco mais...; Outros contextos; Vestibulares de Norte a Sul; Pensando no Enem e Caiu no Enem. Para nós, nos interessa a seção: Exercício resolvido passo a passo. Transcrevemos abaixo um exercício desta seção (DANTE, 2016, vol. 3, pag. 23).

[1] Acredita-se que a divisão de cada volume em 4 unidades atende a organização do atual sistema educacional brasileiro que possui 4 bimestre para cada ano de escolaridade.

(Enem) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21000,00, e esse valor não será reajustado nos próximo meses. Ele tem R$ 20000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses, e terá a quantia exata.

b) três meses, e terá a quantia exata.

c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$225,00.

d) quatro meses, e terá a quantia exata.

e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
É dado o preço do carro à vista(21 mil reais), o capital que João tem para investir(20 mil reais) e a taxa de juros que João obterá investindo (2% ao mês).

b) O que se pede?
O tempo que João deverá esperar para comprar o carro pretendido, e se haverá ou não sobra de dinheiro.

2. Planejando a solução
Devemos calcular o montante do investimento de João para 2, 3 e 4 meses, e comparar com o valor à vista do carro para saber quando João conseguirá comprar o carro.
3. Executando o que foi planejado
O montante pode ser obtido pela fórmula

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

com $C = 20000$ (capital)
$i = 0,02$ (taxa) e
t assumindo os valores 2, 3 e 4.
Assim:

$$M_2 = 20000 \cdot (1 + 0,02)^2 = 20808,00$$

$$M_3 = 20000 \cdot (1 + 0,02)^3 = 21224,16$$

$$M_4 = 20000 \cdot (1 + 0,02)^4 = 21648,64$$

Como $M_2 < 21000$ (preço à vista), concluímos que investir por 2 meses apenas é insuficiente para comprar o carro.
Como $M_3 > 21000$, concluímos que 3 meses é suficiente, e ainda sobram 224,16 reais.
Também percebemos que esperar 4 meses é desnecessário, porém, se assim ocorresse, sobrariam 648,64 reais.
Diante desses resultados, João deverá esperar 3 meses e ainda sobrarão, aproximadamente, 225 reais.

4. Verificando
Vamos acompanhar a evolução do dinheiro aplicado mês a mês até o 3^0 mês após a aplicação inicial: No dia aplicação, temos $C = 20000$.

- Após o 1^0 mês, temos $M_1 = 20000,00 \cdot 1,02 = 20400,00$.
- Após o 2^0 mês, temos $M_2 = 20400,00 \cdot 1,02 = 20808,00$.
- Após o 3^0 mês, temos $M_3 = 20808,00 \cdot 1,02 = 21224,16$.

Esse valor é suficiente para comprar o carro e sobram quase R$ 225,00. Isso confirma o resultado obtido anteriormente.
5. Emitindo a resposta
Alternativa **c**.
Ampliando o problema

a) Qual deveria ser a taxa para que, em apenas 1 mês de investimento, João conseguisse comprar o carro à vista sem sobra de dinheiro?

b) *Discussão em equipe* Converse com seus colegas sobre a importância de uma boas educação financeira para a população, ou seja, a importância de ensinar as pessoas, de qualquer idade e nível social, a planejar os gastos futuros, economizando dinheiro quando for possível para que ele seja usados mais tarde sem atrapalhar as finanças da família.

Diante da organização de Dante do que ele denominou Exercício resolvido passo a passo, torna-se fácil a comparação com as descrições das etapas já apresentada tanto na Tabela 1 quando na Tabela 2, onde ambas foram divididas em quatro etapas. Chamamos a atenção principalmente para a Tabela 1 que mesmo sendo estruturada em quatro etapas, possui subetapas, o mesmo acontecendo com a comparação que vamos fazer com o trabalho de Dante.

A etapa **Lendo e compreendendo** nada mais é que a etapa que denominamos **Contextualização**. A etapa **Planejando a solução** corresponde a etapa **Matematização**. Já a etapa **Executando o que foi planejado** é a **Resolução**, ou seja, o **Modelo Matemática** propriamente dito e finalmente as etapas **Verificando**; **Emitindo a resposta**; e **Ampliando o problema** compõem a etapa da **Validação**. Mais uma vez chamamos a atenção para a diferenciação de nomenclaturas, pois a conceituação e o objetivo de trabalhar ou levar a problemática da questão para uma situação concreta ficam evidentes.

5.1 Direcionamento de Modelos

Para concluirmos nossa abordagem sobre este tópico, apresentamos alguns exemplos de questões tiradas de algumas edições do ENEM que sugerem uma proposta pedagógica para o professor em sua sala de aula de direcionar a Modelação Matemática para determinado conteúdo programático, permitindo demonstrar a flexibilidade que a Modelação Matemática proporciona em sala de aula.

Escolhemos um conteúdo do terceiro ano do ensino médio pelo fato de ser o ano letivo mais próximo do exame bem como pelo aluno ter uma maior amadurecimento de aprendizagem.

Iremos resolver algumas questões tendo como modelo a Geometria Analítica, ou seja, resolução de questões do ENEM que diretamente ou indiretamente pode-se recorrer aos conceitos da Geometria Analítica para resolver a questão. Reforçamos mais uma vez que não se trata de uma estratégia para o aluno no dia do exame, mas um procedimento pedagógico em sala de aula ou em momentos de estudo, propiciando uma revisão ou aprofundamento de teorias, tendo com metodologia o Modelação Matemática. Até mesmo porque, há outras maneiras de resolver estas questões apresentadas (até mais simples e mais rápidas), mas o nosso objetivo é mostrar que ao escolher determinado conteúdo, pode-se fazer dele um modelo matemático.

5.1.1 *Questão 167 (ENEM-2014)*

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

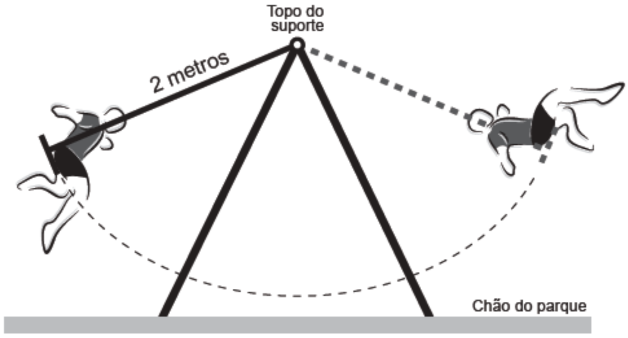


Figura 17 – ENEM, 2014 - Questão 167 (Prova Amarela)

Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balaço é parte do gráfico da função.

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$.

b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

c) $f(x) = x^2 - 2$.

d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

UMA SOLUÇÃO:

Aqui temos uma questão que diretamente usamos a Geometria Analítica para sua solução. Pelas informações e dados da questão, trata-se de uma semicircunferência com centro na origem (topo do suporte) o raio é a corda do assento e vale 2 m. Pela organização do plano cartesiano Oxy, Figura 18, temos $y < 0$ e $-2 < x < 2$. O modelo a ser utilizado é a equação da circunferência,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = -\sqrt{4 - x^2}$$

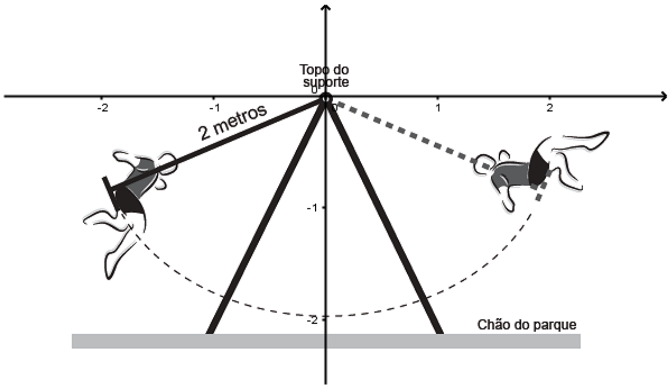


Figura 18 – ENEM, 2014 - Questão 167 (Prova Amarela)

O movimento da criança no parque descreve a curva que é parte do gráfico da função

$$f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Opção D

5.1.2 *Questão 173 (ENEM-2014):*

Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

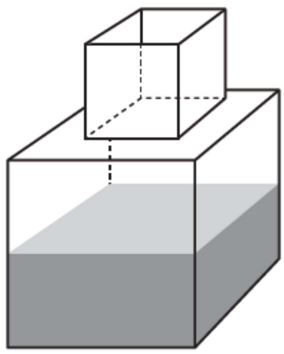


Figura 19 – ENEM, 2014 - Questão 173 (Prova Amarela)

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8.

b) 10.

c) 16.

d) 18.

e) 24.

<u>*UMA SOLUÇÃO*</u>:

Uma possibilidade para o cálculo do volume do cubo $C_{ABCDEFGH}$ (cubo maior) é $A_C \cdot H$ onde A_C é a área da base do cubo e H a altura. Representando as arestas do cubo maior AB, AC e AE por respectivamente $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, obtemos $\vec{u} = (a, 0)$, $\vec{v} = (0, a)$ e $\vec{w} = (0, a)$, pois se trata de um cubo e consequentemente suas arestas são iguais e valendo <u>a</u>, considerando evidentemente um sistema de eixos Oxyz. Usando a modelagem através da Geometria Analítica - GA podemos representar [2]

$$A_C = \left| det \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \right| \tag{5.1}$$

$$A_C = \left| det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right|$$

$$A_C = \left| a^2 \right|$$

$$A_C = \sqrt{a}$$

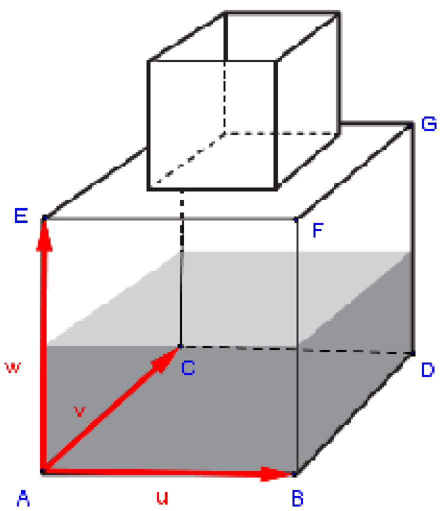


Figura 20 – Vetores inseridos no cubo maior

Agora para obtermos o volume do cubo $C_{ABCDEFGH}$ temos

[2] A demonstração da Equação 5.1.2 pode ser encontrada em (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p.47).

$$V_C = A_C \cdot H \Rightarrow V_C = \sqrt{a} \cdot |\overrightarrow{w}|$$

Sendo $|\overrightarrow{w}|$ a norma do vetor $\overrightarrow{w}$, logo

$$\boxed{V_C = a\sqrt{a}}$$

Analogamente fazendo para o cubo menor obtemos:

$$A_c = \left| det \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \right|$$

$$\boxed{A_c = \left|\frac{a^2}{4}\right|}$$

E para o volume do cubo menor:

$$V_c = A_c.h$$

Sendo A_c e h a área do cubo menor e sua altura, respectivamente

$$V_c = \left|\frac{a^2}{4}\right| \cdot |w|$$

$|w| =$ é a norma de $\overrightarrow{w_1}$

$$V_c = \left|\frac{a^2}{4}\right| \cdot \frac{a}{2}$$

$$\boxed{V_c = \frac{a\sqrt{a}}{8}}$$

De V_C e V_c temos que $8V_c = V_C$ que é o mesmo que dizer que V_c enche 8 vezes mais rápido. A torneira ficou aberta por 8 minutos para encher metade da parte cúbica inferior, então mais oito minutos encherá a outra metade e como já sabemos que a parte cúbica superior e enchida 8 vezes mais rápida, então gastará $\dfrac{16}{8} = 2$ minutos.

Atenção, a pergunta é: Quanto tempo ainda falta para enche completamente o depósito? Como já estava pela metade do cubo inferior (8 minutos) então para terminar de enchê-lo será,

$$8 + 2 = 10 \text{ minutos}$$

Opção B

5.1.3 *Questão 140 (ENEM-2015):*

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximadamente para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a) 18.

b) 26.

c) 30.

d) 35.

e) 60.

UMA SOLUÇÃO:

Quando resolvemos essa questão no capítulo 4, usamos outro modelo, basicamente tratava-se do fato de que o raio procurado era $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero que formava base da mesa em questão. Vamos usar novamente a Figura 15 só que desta vez vamos inserir um plano cartesiano de eixos coordenados de maneira que sua origem $(0, 0)$ fique sobre o ponto C, conforme Figura 5.1.3. Lembrando também que o baricentro de nosso triângulo equilátero será o centro da circunferência circunscrita que estamos procurando.

Usando a modelagem da Geometria Analítica, recorremos a proposição que diz:

Seja P um ponto do plano. Então, o ponto O tal que

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$$

não depende da escolha do ponto P mas apenas dos pontos A, B e C.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrado em (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013, p.30) ou no Anexo B. Para facilitar, vamos fazer $P = A$, e recordando que o ponto O é o encontro das medianas do triângulo ABC, ou seja, o *baricentro*.

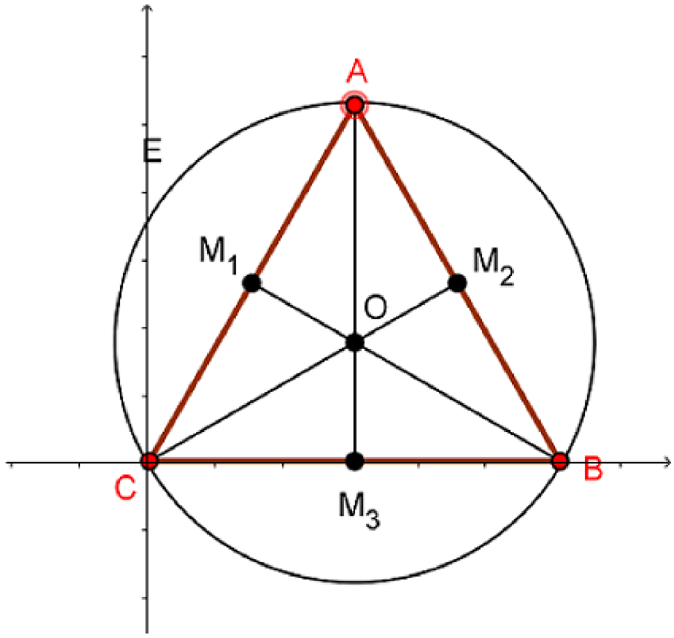


Figura 21 – Tampo da mesa com origem do plano cartesiano no ponto C.

Da Figura 5.1.3 fazemos

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$$

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}\left[\left(-15, -15\sqrt{3}\right) + \left(15, -15\sqrt{3}\right) + (0, 0)\right]$$

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{3}\left(0, -30\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PO} = \left(0, -10\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PO} = (0, -17)$$

$$\left|\overrightarrow{PG}\right| = 17$$

No último passo, como o valor se refere a medida, então pegamos a norma do vetor $\overrightarrow{PO}$.

Mais uma vez devemos ficar atento, pois o resultado encontrado não está entre as opções apresentadas no enunciado da questão, mas como deve-se comprar o tampo de vidro de menor diâmetro suficiente para ser colocado sobre a mesa, então a opção que atende é o tampo de vidro com raio 18 cm.

Opção A

6 Considerações Finais

Tornou-se gratificante a percepção da construção comparativa entre as questões de Matemática do ENEM e a Modelação Matemática que este trabalho promoveu, a medida que as ideias, conceitos e análises foram sendo organizados. Nas pesquisas bibliográficas iniciais não se tinha ainda a dimensão comparativa que acreditamos ter atingido.

As questões elaboradas para a composição do ENEM têm como suporte a Teoria de Resposta ao Item - TRI assim como a Matrize de Referência que ambas dão embasamento teórico e legal para construção das questões. Em particular, pelo fato de ter sido nosso alvo de estudo, as provas de Matemática e suas Tecnologias, permitiram uma interligação com a metodologia de ensino e aprendizagem denominada Modelação Matemática.

Desta feita, concluímos que as questões da avaliação de Matemática apresentadas nas diversas edições do ENEM, devem ser abordadas com a perspectiva da Modelação Matemática. Vários argumentos foram expostos para justificar tal abordagem, mas destacamos a resolução de algumas questões de edições anteriores do ENEM apresentando uma solução organizada passo a passo de acordo com as quatro etapas da Modelação Matemática que foram caracterizadas pelos maiores nomes da modelagem no país.

Não menos interessante, foi a apresentação da flexibilidade da Modelação Matemática quando usamos determinado modelo matemático para abordar questões que a princípio poderiam (e normalmente são) resolvidas com outras estratégias, ou seja, outros modelos tradicionalmente mais acessíveis. Esses modelos matemáticos são os conteúdos que se deseja trabalhar em sala de aula, usamos como exemplo a Geometria Analítica.

Enfim, nosso objetivo era mostrar que a Modelação Matemática é uma considerável sugestão de metodologia de ensino de Matemática, não só com o objetivo de submeter ao ENEM, mas pelo fato de tentar resgatar ou até mesmo da início a uma percepção da importância e do significado do estudo da Matemática para os dias atuais.

Apresentamos uma pesquisa bibliográfica onde nos convencemos que a Modelação Matemática pode ser utilizada em sala de aula, como método de ensino de Matemática. Infelizmente não houve oportunidade para que uma pesquisa de campo fosse realizada para coletar dados da aplicação deste método. Desta forma deixamos a sugestão desta pesquisa de campo e acreditamos que no futuro possamos ter a oportunidade de avaliar o desempenho desta metodologia que até o momento afirmamos ser viável de aplicabilidade, nosso questionamento agora seria a tentativa de mensurar o quanto ela traria de resultados positivos.

Jamais foi nosso objetivo fazer da Modelação Matemática uma única e exclusiva opção para solução dos problemas do ensino da Matemática. A intenção foi simplesmente acrescentar mais uma estratégia tanto para os docentes quanto para os alunos de Matemática. Parafraseando Bassanezi, não queremos matar pulgas com granadas.

> A modelagem não deve ser utilizada como uma panaceia descritiva adaptada a qualquer situação da realidade - como aconteceu com a teoria dos conjuntos. Em muitos casos, a introdução de um simbolismo matemático exagerado pode ser mais destrutivo que esclarecedor (seria o mesmo que utilizar granadas para matar pulgas!) (BASSANEZI, 2009, p.25).

Esperamos que este trabalho possa contribuir para a melhoria das práticas utilizadas pelos colegas docentes na árdua tarefa diária de ministrar aulas de Matemática.

Referências

ALMEIDA, L. W. d.; SILVA, K. P. d.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na educação básica*. 1. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora Contexto, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 36 e 43.

ANDRADE, D. F. de; TAVARES, H. R.; VALLE, R. da C. Teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações. *ABE, Sao Paulo*, 2000. Nenhuma citação no texto.

ANDRADE, D. F. de; TAVARES, H. R.; VALLE, R. da C. Teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações. *ABE, Sao Paulo*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora Contexto, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 33, 34, 35, 36, 40, 41, 42 e 79.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora Contexto, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 33, 34, 35, 40 e 42.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 3, 2016. Citado na página 68.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. *Coleção Profmat*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 76.

DIRETRIZES, L. de. *bases da Educação Nacional*. [S.l.]: Lei, 1996. Citado na página 15.

FERREIRA, A. B. d. H. *Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa*. 8. ed. [S.l.]: Curitiba: Positivo, 2010. Citado na página 33.

INEP. *Relatório Final - Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM*. Brasil: INEP, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

INEP. *Relatório Pedagógico - ENEM 2000*. Brasil: INEP, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.

INEP. *Relatório Pedagógico - ENEM 2009 E 2010*. Brasil: INEP, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 27.

INEP. *Entenda sua nota no ENEM*. Brasil: INEP, 2012. Citado na página 30.

INEP. disponível em< http://brasil.gov.br/educacao/2016/05/mec-anuncia-mais-de-8-6-milhoes-de-estudantes-inscritos-no-enem-2016>. *Acesso em:16/01/2017*, 2016. Citado na página 15.

INEP, M. *Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos–ENCCEJA–Documento Básico*. [S.l.]: Brasília, 2002. Citado na página 20.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, Springer, v. 38, n. 3, p. 302–310, 2006. Citado na página 43.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.

LIRA, S. A.; NETO, A. C. Coeficientes de correlação para variáveis ordinais e dicotômicas derivados do coeficiente linear de pearson. *Ciência & Engenharia*, v. 15, n. 1/2, p. 45–53, 2008. Citado na página 25.

MEC. *Portaria 438 de 28 de maio de 1998*. Brasil: INEP, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

MEC. *Portaria 109 de 28 de maio de 2009*. Brasil: INEP, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

MEC. *Portaria 462 de 28 de maio de 2009*. Brasil: Lei, 2009. Citado na página 19.

MEC. *Portaria 807 de 21 de junho de 2010*. Brasil: Lei, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.

MEC. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*: Secretaria de educação básica. Brasil: Lei, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

RABELO, M. Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 28 e 29.

ANEXO A – Matriz de Referência - ENEM 2016

EIXOS COGNITIVOS **(comum a todas as áreas de conhecimento)**

I. **Dominar linguagens (DL)**: dominara a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (DF)**: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problemas (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problemas.

IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1. **Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**

   H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

   H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

   H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

   H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

   H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

2. **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**

   H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

   H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

   H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

   H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

   H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

   H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

   H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

   H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

   H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimento geométrico relacionados a grandeza e medidas.

4. **Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

   H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

   H16 - Resolver situação-problema envolvendo a varação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

   H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

   H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

5. **Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico- científicas, usando representação algébricas.**

   H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas

   H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

   H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimento algébricos.

- H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

6. **Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**

- H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- H27 -
- H28 -

7. **Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de varáveis apresentadas em uma distribuição estatística.**

- H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou gráficos.
- H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
- H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
- H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimento de estatística e probabilidade.

ANEXO B – Demonstrações

B.1 Demo A:

Seja P' outro ponto do plano e seja O' o ponto tal que

$$\overrightarrow{P'O'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}\right)$$

Usaremos as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores para verificar que $O = O'$.

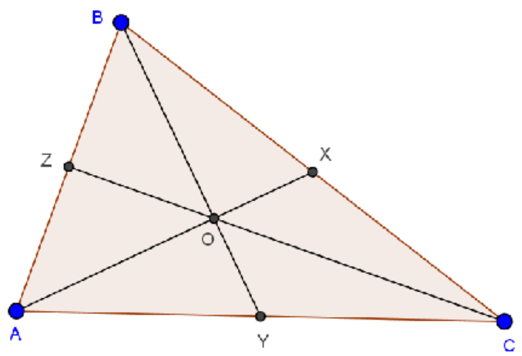


Figura 22 – Baricentro do triângulo ABC

Como

$$\overrightarrow{P'A} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA}$$
$$\overrightarrow{P'B} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PB}$$
$$\overrightarrow{P'C} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PC}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P'O'} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PC}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) \\
&= \overrightarrow{P'P} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) \\
&= \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{P'O} = \overrightarrow{P'O}
\end{aligned}$$

Logo, $O = O'$.

B.2 Demo B:

Em particular, fazendo $P = O$, na demonstração Demo A, o ponto O, caracterizado pela identidade

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \tag{B.1}$$

é o baricentro do triângulo ABC. Isto é, as medianas AX, BY e CZ do triângulo ABC se intersectam no ponto O dado por B.1. Basta mostrar que o ponto O pertence às medianas do triângulo ABC, representado na Figura 22.

Por exemplo, verifiquemos que O pertence à mediana AX. Como X é o ponto médio do segmento BC, temos que $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{XC}$. Logo, pela identidade B.1, concluímos que A, O e X são colineares, pois:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CX}\right)\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OX},\end{aligned}$$

ou seja, $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OX}$. Além disso , pela definição da multiplicação de um escalar por um vetor, O está entre A e X e $d(A, O) = 2d(O, X)$. Da mesma maneira se verifica que $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OZ}$. Portanto, O é também o ponto das mediadas BY e CZ tal que $d(B, O) = 2d(O, Y)$ e $d(C, O) = 2d(O, Z)$.