UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EUVALDO DE SOUZA CARVALHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

ARRAIAS - TO
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EUVALDO DE SOUZA CARVALHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli

ARRAIAS - TO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C331s Carvalho, Euvaldo de Souza.
Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração. / Euvaldo de Souza Carvalho. – Arraias, TO, 2017.
103 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.
Orientador: Idemar Vizolli

1. A caminho do objeto de investigação. 2. Encaminhamentos metodológicos. 3. Sequência didática. 4. Uma sequência didática como proposta para o ensino do conceito de fração. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROFESSOR DR SÉGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

EUVALDO DE SOUZA CARVALHO *

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, em Rede Nacaional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07/07/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Idemar Vizolli (Orientador)
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Maria Bethânia S. dos Santos

Profa. Dra. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos
Universidade Federal de Goiás (UFG/IME)

Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus amigos e familiares pelo apoio e compreensão, especialmente à minha mãe e à minha avó, figuras importantíssimas, quais contribuíram muito para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Aos familiares e amigos, em especial à companheira amorosa de todas as horas, Rosanja, e ao meu filho impulsionador Samuel.

Aos amigos do dia a dia e companheiros de mestrado Ailton, Delfim, Onésimo e Roney. Sem eles a caminhada se tornaria mais árdua e menos descontraída.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional (PROFMAT) da Universidade Federal do Tocantins Campus de Arraias, em especial ao orientador da dissertação Idemar Vizolli - figura ímpar, de companheirismo e pragmatismo inigualáveis.

A Capes pelo apoio financeiro.

“ *Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência..*”

(Irene de Albuquerque)

Resumo

Esta dissertação resulta de um estudo bibliográfico que tem como objetivo a proposição uma sequência didática como recurso metodológico com vistas à compreensão do conceito de fração por estudantes da Educação Básica, considerando o campo do conjunto dos números racionais não negativos Q^+. O estudo bibliográfico foi desenvolvido em três momentos não desconexos: o primeiro teve o objetivo de compreender melhor o conceito de fração, para tanto consultamos a literatura que trata dos diferentes significados da fração, sua relação com outros conceitos matemáticos e a natureza das quantidades; o segundo consiste de um estudo na literatura que trata sobre Engenharia Didática e Sequência Didática; e a terceira consiste na elaboração da Sequência Didática. Os estudos apontam como frutífera a implementação de propostas pedagógicas cujas metodologias colocam os estudantes como agentes no processo de aprendizagem e consideram distintas perspectivas relacionadas aos objetos de ensino, no caso em tela, de fração. Os resultados deste estudo indicam que a elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas colocam ao professor a perspectiva de tornar-se pesquisador de sua própria prática, vez que desempenha papel de articulador, organizador, incentivador e mediador no fazer de sala de aula, ao mesmo tempo em que coloca o estudante na centralidade do processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chaves: Sequência didática, fração, processo de ensino e aprendizagem, estudante, professor.

Abstract

This dissertation is the result of a bibliographical study whose objective is the proposition of a didactic sequence as a methodological resource with a view to understanding the concept of fraction by students of Basic Education, considering the field of the set of non-negative rational numbers Q^+. The bibliographic study was developed in three non-disconnected moments: the first one had the objective to better understand the concept of fraction, for this we consult the literature that deals with the different meanings of the fraction, its relation to other mathematical concepts and the nature of the quantities; the second consists of a study in the literature that deals with Didactic Engineering and Didactic Sequence; and the third consists in the elaboration of the Didactic Sequence. The studies point out how fruitful the implementation of pedagogical proposals whose methodologies place students as agents in the learning process and consider different perspectives related to teaching objects, in the case in point, of fraction. The results of this study indicate that the preparation and development of didactic sequences give the teacher the perspective of becoming a researcher of his/her own practice, since he/she plays the role of articulator, organizer, incentive and mediator in the classroom, at the same time it places the student in the centrality of the teaching and learning process.

Key-words: Didactic sequence, fraction, process of teaching and learning, student, teacher.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática tem sido desenvolvido, em sua maioria, por práticas pedagógicas tradicionais, onde o professor é visto como o centro das atenções e o detentor exclusivo do conhecimento e o estudante, por sua vez, um sujeito passivo e que deve aprender o que lhe é transmitido com técnicas mecanizadas e repetitivas. Entretanto, pesquisas ligadas à Didática da Matemática apontam para a necessidade da elaboração de estratégias de ensino que visem uma atuação participativa do estudante na construção do seu conhecimento.

Na perspectiva construtivista, Zabala (1998) afirma que o professor deve diagnosticar o contexto de trabalho, tomar decisões, atuar e avaliar a pertinência das atuações. Além disso, destaca que o papel do professor é propor intervenções pedagógicas que possuam a finalidade de articular práticas educativas reflexivas e coerentes, levando o estudante a ser o protagonista principal, tendo em vista que a produção de aprendizagens é o resultado de processos que sempre são singulares e pessoais. Defende também que os professores devem agir como mediadores da atividade mental do estudante, tornando-o autônomo. Após a autonomia conquistada ao longo do processo o ato de pensar do estudante flui bem e o conduz a aprendizagem.

Porém, nem sempre os professores levam em consideração a perspectiva construtivista para a aula durante o ensino da matemática, o que acarreta, em algumas situações, aprendizagens insatisfatórias. Como exemplo podemos citar os índices da Prova Brasil [1] e do Enem no tocante às habilidades e competências relacionadas ao conceito de fração. Ao observarmos esses índices notamos que pode haver um problema na construção desse conhecimento matemático. A origem dessa situação pode estar relacionada à maneira com que esse assunto é abordado, haja vista que os professores que trabalham esse conteúdo algumas vezes não o dominam ou não trabalham todos os significados de fração de uma forma a colocar o estudante na centralidade do processo de ensino e aprendizagem.

> O método de ensino, ..., simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla - ou seja, contar o número total de partes e então o número de partes pintadas - sem entender o significado deste novo tipo de número. (CAMPOS 1997 apud NUNES, BRYANT, 1996, p. 191).

Outra fonte que exemplifica as dificuldades enfrentadas por estudantes no ensino de frações é proveniente da pesquisa de Merlini (2005). Ela investigou o desempenho

[1] Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - Anresc (também denominada "Prova Brasil"): trata-se de uma avaliação censitária envolvendo os alunos da 4ª série/5ºano e 8ªsérie/9ºano do Ensino Fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas. Participam desta avaliação as escolas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo. Fonte: http://inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc (Acessado em 03/01/2017).

de estudantes de 5ª e 6ª série em relação à aprendizagem de frações considerando os seus diferentes significados. Verificou um índice muito baixo de acertos, constatando que nenhum dos significados de fração ultrapassou o rendimento de 35%.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998 expõem a ideia de que a aprendizagem das frações requer rupturas com ideias construídas pelos estudantes acerca dos números naturais e, para tanto, é necessária uma abordagem adequada, com os pressupostos teórico-pedagógicos previamente esbalecidos. Além disso, consta nos PCN's que o contato dos estudantes com a fração no cotidiano se limita a metades, terços, quartos, e que, na maioria das vezes, a linguagem das representações é suprimida, fazendo uso apenas da linguagem oral. Portanto, a escola fica responsável pelo desenvolvimento de práticas pedagógicas que sanem essas dificuldades, para que não fiquem lacunas substanciais na construção desse saber.

Entendendo que a construção do conhecimento sobre frações é de suma importância para a vida do estudante, a nossa proposta é apresentar uma Sequência Didática fundamentada nos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática com a finalidade de nortear os trabalhos do professor e dos estudantes.

Com o propósito de elaborar uma sequência didática com vistas à compreensão do conceito de fração por estudantes de Ensino Fundamental, considerando o campo do conjunto dos números racionais não negativos Q^+, para efeitos desse estudo nos desafiamos a:

- Identificar os diferentes significados de fração;
- Distinguir quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas;
- Verificar o modo como o conceito de fração é abordado em livros didáticos;
- Propor uma sequencia didática com vistas à compreensão dos diferentes significados de fração, considerando a natureza das grandezas.

Inicialmente apresentamos a problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagenm de fração, assim como a pegunta e os objetivos que movem este estudo. Para tanto, descrevemos a motivação e a justificativa de nossa pesquisa, destacando a importância das frações, as nossas inquietações pessoais a respeito do assunto/conteúdo, a análise de resultados de avaliações externas de larga escala que dão a importância de pensarmos a respeito, uma vez que nos revelam números preocupantes no que tange a aprendizagem de frações. Além disso, apresentamos os procedimentos metodológicos do nosso trabalho e o referencial teórico escolhido.

Na continuidade abordaremos sobre o aporte teórico e a revisão da literatura, onde apresentaremos um breve histórico sobre as frações, uma consulta bibliográfica sobre os diferentes significados de fração e as distintas quantidades que os envolve, análise de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) com o intuito de verificar a forma com que as frações são apresentadas, assim como uma descrição de pesquisas envolvendo frações.

Na terceira sessão tratamos das definições e as ideias relacionadas à Sequência Didática, referencial pedagógico para a nossa pesquisa. Buscaremos falar sobre a forma com que Zabala (1998) propõe uma Sequência Didática, a maneira com que Oliveira (2013) enfatiza o desenvolvimento de Sequências Didáticas Interativas, o modo com que Borges Neto et al (2001) abordam a Sequência Fedathi e como Brousseau (1996) aponta tópicos para a metodologia da Engenharia Didática.

Na quarta sessão apresentamos uma Sequência Didática como proposta para o ensino do conceito de fração, além disso, sugerimos várias atividades e tarefas que conduzirão os estudantes a uma melhor compreensão desse conhecimento. Enfatizamos o trabalho em equipes, a socialização e sistematização do conhecimento em conjunto com as considerações e orientações do professor, com o intuito de termos o ensino do conceito de fração pautado nos seus deferentes significados e na natureza das quantidades.

As considerações a respeito da proposta e a nossa concepção de que o professor pode tornar-se pesquisador de sua própria prática no sentido de obter melhores resultados no ensino e na aprendizagem constam das considerações desse estudo.

1 A CAMINHO DO OBJETO DE INVESTIGAÇÃO

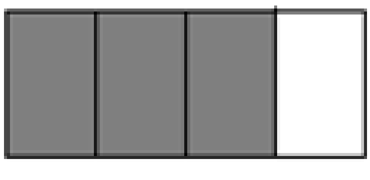
Aqui apresentaremos os argumentos que nos mostram a necessidade e a importância de escolher a fração como o objeto matemático do nosso estudo, as motivações pessoais e profissionais relacionadas ao tema, além daquelas provenientes de análises de resultados de provas externas realizadas pelos estudantes, o modo como os livros didáticos apresentam este conteúdo, um pouco da história das frações, assim como pesquisas que a tematizam. Entendemos que este é um assunto de difícil compreensão por parte de estudantes, em razão disso devemos pensar em práticas pedagógicas diferentes e fundamentadas teoricamente.

1.1 Vivências com o estudo de fração

Quando as frações me foram apresentadas no Ensino Fundamental estas se revelavam nos significados relação parte/todo e operador multiplicativo, presentes com ampla abordagem no livro didático adotado na época pela escola onde eu estudava.

Recordo-me que aprendi o significado que envolve a relação parte/todo por meio do uso de desenhos de retângulos ou círculos na lousa. Essas figuras eram divididas em partes iguais e pintava algumas delas. Contávamos todas as partes e também as pintadas. A fração era escrita da seguinte forma: fazia-se um traço e, na parte superior, colocávamos o número que representava a quantidade das partes pintadas e, na parte inferior, colocávamos o número que representava a quantidade total de partes da figura. A Figura 1ilustra uma possível situação, a fração $\frac{3}{4}$.

Figura 1 – A fração $\dfrac{3}{4}$



Fonte: Construção própria.

Para as situações em que envolvia o operador multiplicativo, fazíamos duas operações: multiplicação e divisão. Essas operações seguiam uma “regra básica”. Por exemplo, para o cálculo de $\dfrac{3}{4}$ de 100, podíamos multiplicar 3 por 100 e dividir o resultado por 4. Outra maneira seria dividir 100 por 4 e multiplicar o resultado por 3. Essas duas opções nos davam o mesmo resultado.

A compreensão de que a fração possui vários significados só foi efetivamente desenvolvida durante as pesquisas feitas para a realização deste trabalho. Nessa perspectiva, é possível que parte dos estudantes e até mesmo professores não saibam da existência desses diferentes significados de fração em virtude da forma com que ela lhes é apresentada durante a Educação Básica, o que dificulta muito sua compreensão.

Na minha atuação como professor do sexto ano de Ensino Fundamental, abordava o conteúdo frações da forma com que eu o aprendi e acreditava estar fazendo o melhor. No entanto, após os processos avaliativos, era possível notar que a aprendizagem não havia sido constituída de maneira satisfatória. Foi a partir daí que notei que os estudos com as frações, especialmente com os estudantes da segunda fase do Ensino Fundamental da Educação Básica, deveria ser algo mais elaborado e com objetivos muito bem definidos. Como diz Zabala (1998, p. 86) " refletir sobre o que implica aprender o que propomos, e o que significa aprendê-lo de maneira significativa, pode nos conduzir a estabelecer propostas mais fundamentadas, suscetíveis de ajudar mais os alunos e ajudar nós mesmos ".

Para Zabala (1998) a aprendizagem ocorre não só quando os estudantes se concentram frente a conteúdos para aprender; é necessário que frente a estes os estudantes façam uma atualização de seus esquemas de conhecimento, realizem uma comparação com o que é novo, identifiquem semelhanças e diferenças e notem que há coerência. Quando isso não ocorre trata-se de uma aprendizagem superficial e mecânica.

O ensino das frações não se inicia no sexto ano do Ensino Fundamental, embora seja essa a etapa do ensino a qual daremos foco no nosso trabalho. Segundo os PCN's (1998), os conceitos iniciais de números fracionários geralmente começam no 3º Ano de Ensino Fundamental, é aprofundado no 4º e no 5º, mas é no 6º ano que recebe um enfoque mais efetivo na vida do estudante, uma vez que é partir dessa fase que a percepção de que as frações permeiam áreas da matemática como a aritmética, a geometria e a álgebra fica mais evidente.

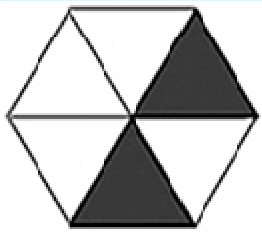
A análise de questões sobre a construção do conhecimento sobre frações em avaliações externas de larga escala apontam para um déficit na aprendizagem desse saber, o que denota que o trabalho com as frações pode não estar produzindo o conhecimento esperado.

1.2 Análises de resultados de provas externas realizadas pelos estudantes

Em se tratando dos estudantes concluintes do Ensino Fundamental, podemos perceber, a partir da análise da questão a seguir, que pouco mais da metade construíram conhecimento sobre frações adequadamente, pois apenas 53% acertaram. Aquestão que segue é da Prova Brasilde 2011, onde se pretende avaliar se o respondente é capaz de identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

Figura 2 – Questão da Prova Brasil de 2011

A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{6}$ (D) $\frac{6}{2}$

Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
18%	7%	53%	18%

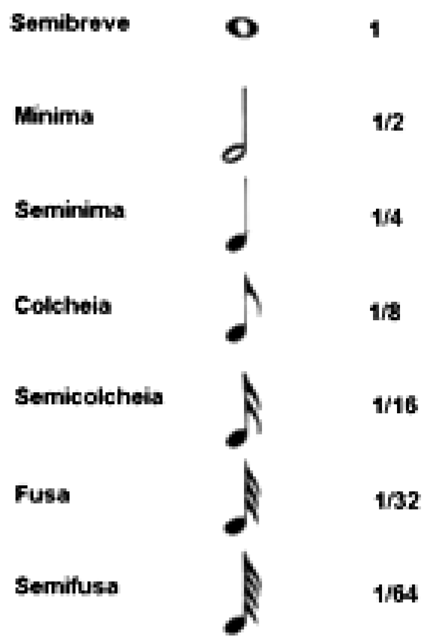
Fonte: Prova Brasil de 2011.

Tendo como foco estudantes concluintes do Ensino Médio, analisaremos os dados estatísticos referente a uma questão da prova do ENEM do ano de 2009 cuja competência era construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais e a habilidade seria reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais. Para suprir essa competência e essa habilidade, o estudante deve saber os diferentes significados de fração e conseguir aplicá-los durante a resolução da questão.

A seguir temos o texto da referida questão.

A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura 3.

Figura 3 – Questão da Prova do Enem de 2009



Fonte: Prova do Enem de 2009.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com

a) 24 fusas.

b) semínimas.

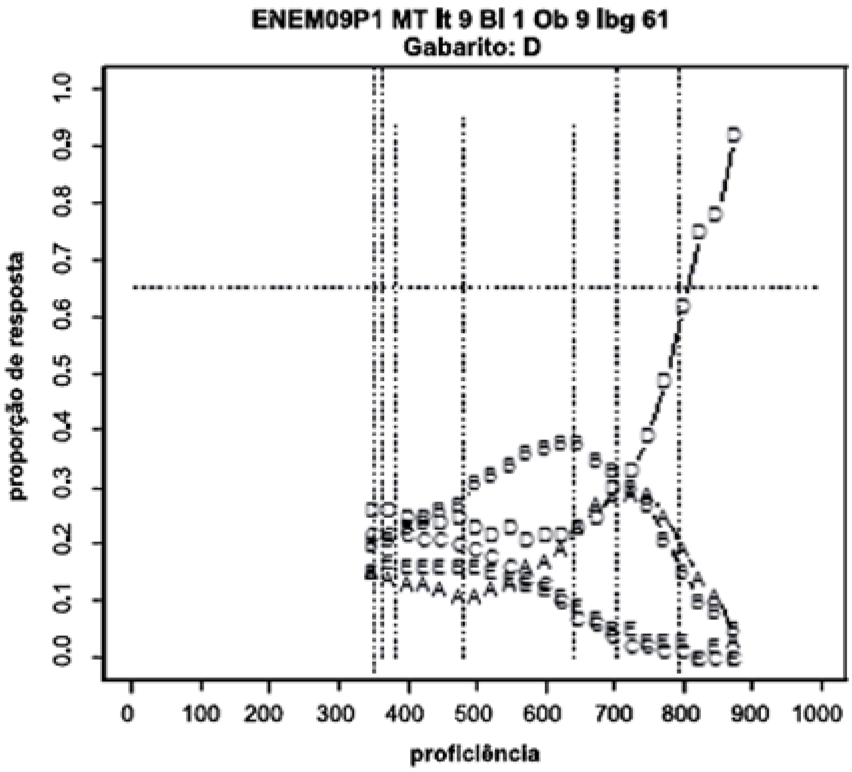
c) 8 semínimas.

d) 24 colcheias e 12 semínimas.

e) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

A figura 4 possui um quadro onde é possível analisar as respostas dadas pelos participantes, comparando a proficiência do estudante com a proporção de resposta escolhida.

Figura 4 – Análise pedagógica de uma questão do Enem de 2009



Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): relatório pedagógico 2009-2010.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos estudantes a essa questão, notamos a falta do domínio do conceito de frações inclusive por aqueles que conseguem uma proficiência alta na prova. É possível notar que muitos estudantes que obtiveram proficiência acima de 600 optaram por respostas incorretas.

Concordamos com Prochnow (2010) ao afirmar:

> Acredito que uma das principais causas para o surgimento dessas dificuldades de compreensão e significação do conjunto dos números racionais, representados na forma fracionária, é o modo como em geral as frações são apresentadas aos alunos. Ao abordar este conteúdo os professores, na maioria das vezes, iniciam conceituando os números racionais dando exemplos, geralmente numéricos, e, após, já começam a realizar operações introduzindo os algoritmos, sem que o aluno compreenda a quantidade que está sendo representada e utilizada na operação. (PROCHNOW, 2010, p.13).

1.3 Um pouco da história das frações

Segundo Boyer (2001), além da escrita dos números, o povo egípcio é conhecido pelo desenvolvimento do conceito de frações. Com o intuito de recolher impostos, o rei Sesótresdividiu a terra por meio de demarcações entre todos os egípcios, de maneira que todos ficassem com uma porção retangular de mesma área. No entanto, essas demarcações acabavam se perdendo em virtude das cheias do rio Nilo. Para que a cobrança dos impostos fosse justa, proporcionalmente ao tamanho de cada terra, o rei ordenou que fossem realizadas novas medições.

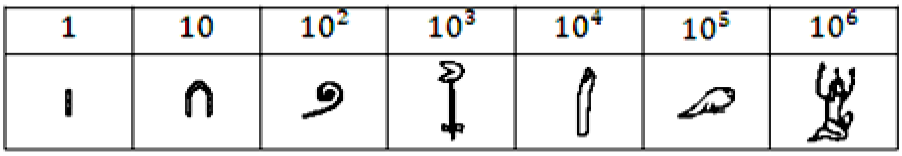
A unidade de medida utilizada pelos medidores, também chamados de “ esticadores de corda ”, era o cúbito ou côvado, proveniente da distância entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó, o que equivale hoje a aproximadamente 45 centímetros. Para o registro e utilização dessas unidades de medidas utilizavam-se cordas. Nelas haviam diversos nós e a distancia entre eles equivalia ao côvado. Para realizar a medição, os esticadores extraiam as medidas do contorno do terreno, podendo saber quantas vezes o côvado cabia nesse contorno.

Entretanto, como era de se esperar, nem sempre o cúbito cabia uma quantidade de vezes inteira na medida obtida, levando à necessidade de se pensar em subunidades do cúbito, ou seja, a fracionar aquela unidade.

A partir daí ficou registrada a necessidade do homem trabalhar com unidades diferentes das inteiras, haja visto que os números naturais já não eram suficientes para suprir toda a demanda de atividades comerciais e agrícolas. Assim, o fracionar das unidades do côvado dava origem ao conceito inicial de frações.

O uso das frações e a notação utilizada para representá-la não iniciou com a maneira que é hoje. No começo de tudo, sobre a notação de fração unitária, que é aquela em que o numerador é um, Ifrah (1997a) nos relata que se dava por meio da utilização dos símbolos egípcios para representar os números naturais acompanhados de um hieróglifo [1] de boca que tinha o sentido de “parte ”. Na figura 5 temos os símbolos utilizados para representar quantidades e as representações de algumas frações unitárias.

Figura 5 – Hieróglifos utilizados para representar quantidades.

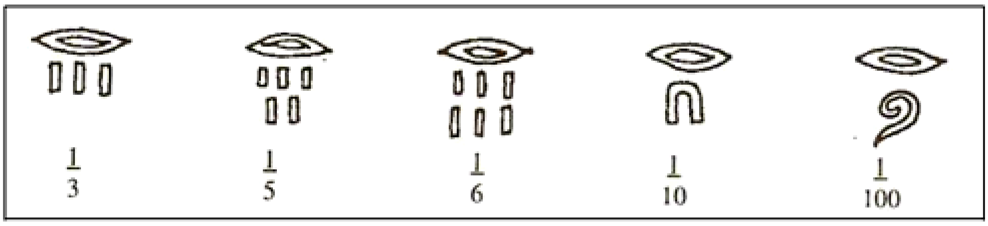


Fonte: Baseado em Ifrah (1997a).

Observando a figura 5 temos os hieróglifos utilizados pelos egípcios para representar quantidades. De acordo com Boyer (2001), um traço representava a unidade, um osso de calcanhar invertido correspondia a 10, um laço como uma letra C indicava 100, uma flor de lótus valia 1.000, um dedo indicador dobrado 10.000, um peixe era correspondente a 100.000 e uma figura ajoelhada 1.000.000. Esse sistema baseava-se no princípio aditivo, portanto podia-se repetir um algarismo quantas vezes quanto fosse necessário.

[1] Nome dado aos caracteres da escrita dos antigos egípcios.
Fonte: https://dicionariodoaurelio.com (Acessado em 10/04/2017).

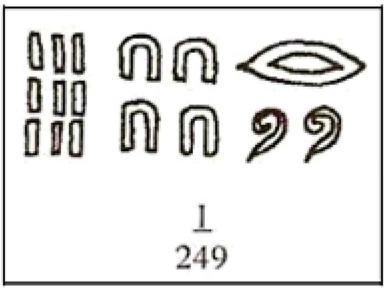
Figura 6 – Hieróglifos utilizados para representar algumas frações unitárias



Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349.

Já na figura 6 vemos uma sequência de frações: uma parte de um total de 3, uma de um total de 5, uma de 6, uma de 10 partes e uma de 100. Quando a quantidade de partes em que a unidade foi dividida (denominador) possuía vários hieróglifos, a boca não precisava necessariamente ficar na parte de cima. Observe a seguir como ficaria a representação da fração $\frac{1}{249}$.

Figura 7 – Representação egípcia da fração um duzentos e quarenta e nove avos.



Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349.

Segundo Boyer (1974), os egípcios também traziam em sua aritmética o uso das frações, mas estas se reduziam à soma de frações unitárias, com exceção das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, que possuíam representação própria possivelmente devido às suas aplicações práticas. Um exemplo dessa forma de representação é a fração $\frac{2}{5}$ que era escrita da seguinte maneira $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Outro exemplo é a fração $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Como relata Struik:

> O princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro. Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média (STRUIK, 1987, p. 53).

Para Ifrah (1996), embora as frações tenham sido conhecidas na Antiguidade, suas notações não eram homogêneas e as aplicações na prática pouco recorrentes. Elas não foram consideradas, desde sua origem, como números; nem se concebia a noção de fração geral $\dfrac{m}{n}$, como m vezes o inverso de n. Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, foi possível notar que as frações seguiam às mesmas regras que os inteiros, podendo haver uma interligação entre elas e os números inteiros. Sendo os números inteiros frações de denominadores 1.

Para exemplificar mais ainda a forma com que os egípcios manipulavam as frações, podemos recorrer a Boyer:

> Para a decomposição de $\frac{2}{5}$ o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de $\frac{1}{5}$ encontra-se a decomposição dada por Ahmes, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. No caso de $\frac{2}{7}$, aplica-se duas vezes a divisão por dois a $\frac{1}{7}$ para obter o resultado $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. A obsessão egípcia por dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no ultimo caso da tabela $\frac{2}{n}$ para $n = 101$. Talvez um dos objetivos da decomposição de $\frac{1}{2n}$ fosse a chegar a frações unitárias menores que $\frac{1}{n}$(BOYER, 1974, p. 11).

A respeito da origem da notação atualmente dada às frações, Ifrah (1996) nos afirma que:

> A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como $\frac{34}{1265}$: onde é 34 (numerador) e 1265 (denominador). Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal (IFRAH, 1996, p. 327).

O que se nota até aqui é que a noção de fração é encontrada em diversas civilizações, representadas de maneiras diferentes umas das outras, porém sem uma formalização do conceito.

Nesse sentido, notamos que a noção de fração foi construída desde a pré-história e é objeto de estudos até hoje. Sendo possível lhe apresentar diferentes significados e aplicações. Hoje é possível perceber que as frações estão presentes nos diversos aspectos da vida cotidiana. Com o advento da computação e o aprimoramento das variadas áreas da matemática tanto como ciência quanto conhecimento escolar, ela é indispensável para a vida contemporânea. Isso nos remete a verificar como a literatura trata dos diferentes signficados de fração.

1.4 Alguns apontamentos em relação às pesquisas que tematizam o estudo de fração

Em seu trabalho, Nunes e Bryant (1997), defendem que em relação às frações nem sempre percebemos tudo o que está em questão. O fato dos estudantes, muitas vezes, usarem os termos fracionários corretamente, falarem sobre as frações corretamente, coerentemente e resolverem alguns problemas não configura uma aprendizagem de fato. Mesmo diante de todas essas ações dos estudantes, pode-se estar enganado. É possível que eles saiam da escola sem saber frações e os professores nem percebam.

Nessa perspectiva, concordamos com Nunes e Bryant (1997) quando defendem que a falsa impressão de que os estudantes dominam o conceito de fração pode estar associado à forma com que esse conteúdo lhe é apresentado. Prevalecendo os casos em que se informa aos estudantes que o número total de partes do inteiro é o denominador e as pintadas/consideradas, o numerador. Somadas a isso são fornecidas aos estudantes uma série de instruções sobre como calcular que permitem que eles transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações sem, contudo, compreender o significado desse novo tipo de número.

Neste sentido, Pothier e Sawada (1990) têm o mesmo posicionamento de Nunes e Bryant (1997) ao argumentarem que os exercícios que se baseiam em diagramas de figuras previamente repartidas, os quais os alunos usam para identificar várias frações ou para representa-las, colorindo um número determinado de partes, remetendo o conceito somente à relação parte-todo, podem representar parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com o conceito de frações.

Ainda para Nunes e Bryant (1997), os estudantes teriam um desempenho melhor nas avaliações educacionais se estivessem mais preparados para lidarem com a situação-problema apresentada do que pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado em sala; deixando de se concentrar nas manipulações ou símbolos para se embrenharem na solução do problema proposto.

Para ilustrar o pensamento, os autores fazem referência a um estudo realizado por Mack (1993), com estudantes da 6ª série nos Estados Unidos, cuja ideia consiste em apresentar aos estudantes os mesmos problemas alternadamente, como situações que elas poderiam encontrar na vida cotidiana e como problemas simbólicos, ou vice-versa. A pergunta de tal situação era: " suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em seis pedaços de tamanhos iguais e a outra em oito pedaços de tamanhos iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, de qual você ganhará mais?" Foi seguida pela pergunta "diga-me que fração é maior, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{8}$?". Observam que os estudantes tiveram sucesso nas situações de vida cotidiana, mas naquelas que se deparavam com problemas simbólicos, apresentavam muitas dificuldades.

Kerslake (1986), buscando encontrar informações a respeito dos caminhos pelos quais os estudantes pensam sobre frações, observou os seguintes aspectos: os estudantes eram capazes de pensar frações como números ou se eles pensavam que a palavra "número" implicaria somente a números inteiros; que modelos de fração os estudantes dispunham e como eles visualizavam a ideia de frações equivalentes.

Kerslake (1986) propôs um mesmo problema de dois modos diferentes: com e sem contexto. No problema sem contexto fazia a proposição aos alunos que realizassem a divisão de 3 por 5. Já o problema com contexto foi: "Três barras de chocolate foram divididas igualmente para cinco crianças. Quanto cada uma recebeu?" Nessa situação a pesquisadora percebeu que, aproximadamente, 65% dos alunos tiveram sucesso na situação com contexto, enquanto que no problema sem contexto o índice de sucesso foi menor.

A pesquisadora analisa as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em perceber 3 : 5 (sem contexto) como sendo $\frac{3}{5}$. Os seus argumentos são que tal dificuldade se dá pelo fato de os alunos não relacionaram a divisão 3 : 5 à representação fracionária $\frac{3}{5}$. Além disso, nota que um número significativo de alunos representa 3 : 5 como 5 : 3.

Em seus estudos, Kerslake (1986) chega à conclusão de que o entendimento das frações, como elemento do campo quociente, requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Nesse contexto, defende que há necessidade de se estender o modelo parte-todo e incluir o aspecto quociente da fração e cita que as frações representadas como ponto sobre a reta numérica podem ser discutidas.

Kerslake (1986) encontrou evidências de que o único modelo de fração, com o qual os alunos se sentiam confortáveis e familiarizados, foi a fração como parte de um todo. Para ela, a familiaridade com o parte-todo dificultou o entendimento do aspecto de divisão ou distribuição. Ainda que o aspecto divisão apareça com frequência em livros-texto e é base para transformar fração em decimais, os alunos foram relutantes em reconhecer quaisquer conexões entre $\frac{a}{b}$ e $a : b$.

Tinoco e Lopes (1994) elaboraram uma proposta de ensino que contemplava situações didáticas cujo objetivo era minimizar o impacto das dificuldades apresentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem do conceito de fração.

O estudo dos autores foi realizado com 101 estudantes da 5ª série do Ensino Fundamental de escolas municipais e com um grupo 30 estudantes do 1º ano do curso de formação de professores, pertencentes a escolas estaduais, no Rio de Janeiro.

Na proposta deles, a ênfase dada era centrada em três aspectos: (a) a construção do conceito de fração pelo aluno como número; (b) a exploração do conceito de fração em conjuntos discretos e (c) a noção de frações equivalentes como representações da mesma quantidade. Os sujeitos foram submetidos a entrevistas, pré-teste e pós-teste.

Com base num desenho que havia 16 balas, uma das situações era: “Silvia ganhou dessas balas. Pinte as balas que ela ganhou.” Para a solução desse problema, foram encontrados três tipos de estratégias.

A primeira foi de fazer o cálculo, isto é, contar o total de balas determinando $\frac{3}{4}$ de 16 e pintando as 12 balas, sem fazer argumentos. Já a segunda estratégia foi o agrupamento das balas em 4 grupos iguais e pintando 3 deles. Por sua vez, a terceira foi a de formar grupos de 4 balas e em cada um deles pintando 3 das balas.

No trabalho com frações equivalentes, notaram outra situação. Foi proposta a seguinte questão: “$\frac{2}{7} = \frac{\square}{14} + \frac{10}{\triangle}$ .Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?”

As pesquisadoras levantaram a hipótese de que a dificuldade se daria pelo fato de existir a fração intermediária. Essa hipótese foi confirmada na entrevista, pois nela o aluno afirmou que o quadrado era 4 e o triângulo ele não sabia o valor. Ao tampar a fração intermediária, as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Segundo elas, essa evidência sugere que os alunos não estão acostumados com a transitividade da equivalência e essa dificuldade pode ser superada no processo de ensino.

As autoras perceberam ainda que, em relação ao pré-teste e ao pós-teste, houve uma diminuição no número de respostas em branco. No entanto, foi constatado que alguns tipos de erros persistiram, sugerindo que a maioria deles é obstáculo epistemológico ou vício adquirido em sala de aula.

Silva (1997), com base na metodologia de ensino Engenharia Didática, tinha como finalidade possibilitar aos futuros professores das séries iniciais uma reflexão sobre os principais pontos da introdução do número fracionário no ensino, levando-os a trabalhar com diversas concepções do conceito.

Com base nos resultados obtidos a pesquisadora constatou que, com relação aos aspectos didáticos, para o professor associar a fração a uma figura, essa deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma dessa figura.

Silva (1997) observou também a dificuldade dos professores perceberem o desenho e a divisão de figuras como suportes para a solução de alguns problemas presentes no trabalho. Destacou ainda a falta de entendimento do conceito de medição, o que dificultou efetuar medições com unidades não usuais; uma tendência ao uso de algoritmos, em detrimento do trabalho construtivo com a representação de figuras, sobretudo nas operações de adição e subtração. Assim, independentemente de contexto, os professores apresentavam decimais como resultados das divisões, ao invés de representarem o quociente por meio de uma fração.

A autora destaca como positivo o envolvimento dos professores nas propostas, o que levou a uma mudança de comportamento para quase todos os obstáculos apresentados. No entanto, apoiada em seus resultados, observa que alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, apresentam raízes profundas, sugerindo a necessidade de um trabalho a longo prazo, para que essas raízes possam ser removidas e pudessem crescer novamente com mais forças em outras direções.

Vizolli (2001), em sua pesquisa com o uso dos diferentes tipos de representação semiótica [2] para que os estudantes pudessem se apropriar do conceito de porcentagem enquanto proporção, utilizou-se das frações equivalentes e em especial da fração de denominador 100 para desenvolver junto aos estudantes o conceito de porcentagem. Em sua pesquisa foi possível notar que houve uma eficácia no trabalho com os diferentes registros de representação semiótica na compreensão do sentido e a atribuição do significado operatório às porcentagens.

Aprofundando os estudos sobre os registros de representação semiótica, Vizolli (2006), ao analisar os registros efetuados pelos participantes da pesquisa, percebeu que os estudantes fizeram uso principalmente de registros de representação semiótica mistos e numérico aritméticos, somente fazendo o uso de tabelas e números proporcionais quando instigados.

Merlini (2005) desenvolveu seu trabalho com o objetivo de investigar as estratégias que os alunos, de 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental, utilizam frente a problemas que envolvem o conceito de fração.

O seu estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: "Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª série utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?". A sua pesquisa realizou um estudo diagnóstico com 120 alunos, sendo 60 da 5ª série e 60 da 6ª série do Ensino Fundamental, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual de São Paulo.

A pesquisadora considerou que em relação aos significados da fração não houve uma regularidade nas estratégias utilizadas pelos alunos. Para o mesmo significado observou diferentes estratégias de resolução. Destaca que o modo do ensino do conceito fração abordado nas escolas, privilegiando os significados parte-todo e operador multiplicativo não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Em seu trabalho, Silva (2011) trabalhou a aquisição do conceito de número racional na sua representação fracionária com um conjunto de 36 estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, numa escola pública do município de Guarapari/ES. Os estudantes desenvolveram atividades sobre fração durante um ano. Foi planejada e realizada uma

---

[2] Os registros de representação semiótica são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático.

intervenção pedagógica com trinta e nove aulas. Essas consideravam o desenvolvimento cognitivo, afetivo, e moral dos estudantes. E, ao mesmo tempo, aproveitavam experiências anteriores deles com frações.

A sua questão de pesquisa foi: "Que aprendizagens alunos de uma 6ª série/7º ano de uma escola pública exibem sobre o conceito de fração em um processo de exploração e (re) construção desse conceito?".Ou seja, implicitamente, que procedimentos de ensino utilizados pelo professor contribuem para a compreensão e aprendizagem de alunos sobre alguns dos diferentes significados de fração?

Após as análises dos resultados de sua pesquisa, Silva (2011) afirma que para resolver certos problemas, o aluno deve dentre outras coisas: (a) aprender associações ou fatos específicos e diferenciá-los; (b) seguidamente, aprender conceitos que começam por ser gerais até se tornarem específicos. Só depois o estudante compreende o conhecimento de certos princípios que lhe permitirão resolver os problemas iniciais. Trata-se, assim, de um processo lógico que começa no geral e acaba no particular, iniciando-se no simples e terminando no complexo.

Silva (2007), em seus estudos, analisou fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais e seus deferentes significados. Para a coleta de dados, foram realizadas 16 sessões de 4 horas cada.

A pesquisadora utilizou-se da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), a classificação proposta por Nunes (2005) para os significados das frações, as ideias de Kieren (1988) sobre os construtos de números racionais e interpretações sugeridas por Ohlsson (1987).

Após as análises das informações obtidas, a pesquisadora constatou que alguns fatores podem exercer influência sobre o processo de desenvolvimento profissional do docente. Um deles refere-se ao conhecimento matemático do professor, que pode ser aprimorado a partir de um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, contemplado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária tanto em cursos de formação inicial quanto em formações continuadas.

Debruçamo-nos em busca de pesquisas que dessem enfoque ao trabalho com frações, especialmente com as séries do Ensino Fundamental e com professores. Os resultados obtidos nelas nos mostram que ainda persiste uma dificuldade no ensino e na aprendizagem de frações.

Com o objetivo de propor mais uma alternativa que auxilie na construção do conhecimento de frações por parte de estudante, daremos nossa contribuição com uma proposta para o ensino do conceito de frações baseada numa Sequência Didática, para isso apresentamos aos estudantes as frações dando ênfase a todos os seus diferentes significados logo no início formação desse conceito e não aos poucos como observamos nos livros didáticos e no fazer cotidiano de algumas salas de aula.

1.5 Frações e seus diferentes significados

Quando se trata de frações, é difícil perpassarmos instantaneamente por todos os seus significados. De imediato, o seu conceito nos remete a pensarmos que é “uma parte de algo”. A ideia de fração também está ligada a “quebrar”, “dividir em partes”. Vale relatarmos também que origem das palavras: fracionário, infração, infrator e fracionamento, estão relacionados à mesma palavra - fração. A ideia de infrator está ligada a alguém que quebrou regras previamente estabelecidas.

A seguir apresentaremos a forma com que diversos educadores matemáticos conceituam as frações e, por conseguinte, os números racionais, chegando ao consenso de que o estudo dos números racionais, em especial o de frações, deve contemplar uma gama de situações que leve à construção de maneira significativa desse conceito matemático.

Lima (2013) utiliza-se de um segmento de reta para explanar sobre a ideia de fração. Segundo o autor, é necessário que consideremos AB como um segmento de reta qualquer. Para medi-lo, fixa-se um segmento padrão u, chamado de segmento unitário, que, por definição, é igual a 1. No interior de AB, faz-se n - 1 pontos igualmente espaçados, fazendo com que o segmento AB seja a soma das medidas desses n segmentos.

Naturalmente, n é um segmento menor que AB. Se u possuir o mesmo tamanho de n, dizemos que u cabe n vezes em AB e a medida AB será igual a n. No entanto, pode acontecer de o segmento unitário não caber um número exato de vezes dentro de AB. Nesse caso, a medida não representará um número natural. Essa maneira de olhar a situação nos levará, portanto, à ideia de fração.

Ainda segundo Lima (2013), a fração propriamente dita extrapola a visão proveniente dos egípcios de dividir em partes e considerar uma delas. Explorando exclusivamente a reta numérica, defende que a fração pode ser vista da seguinte maneira:

> Procuramos um pequeno segmento de reta w, que caiba n vezes no segmento unitário u e m vezes em AB. Este segmento w será então uma medida comum de u e AB. Encontrando w, diremos que AB e u são comensuráveis. A medida de w será a fração 1/n e a medida de AB, por conseguinte, será m vezes 1/n, ou seja, igual a m/n (LIMA, 2013, p. 48).

Do ponto de vista de Kieren (1976), que introduziu a ideia de que os números racionais consistem em vários *constructos*, para a compreensão da noção de número racional torna-se necessário um claro entendimento da confluência desses constructos. Em sua lista de *constructos*, o autor analisa sete interpretações para os números racionais na forma fracionária:

- Os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- Os números racionais são classes de equivalência de frações;
- Os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$;
- Os números racionais são operadores multiplicativos;
- Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito, isto é, há números da forma $x = \frac{a}{b}$, onde x satisfaz a equação $bx = a$;
- Os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Kieren (1976) analisa os números racionais na forma fracionária por meio de cinco ideias básicas: relação parte-todo; quociente; medida; razão e operador.

De forma abrangente e levando em consideração as relações existentes entre o cotidiano e as frações, Behr *et al.* (1992) propõe sete interpretações para as frações, que ele chama de *subconstructos*:

- O *subconstructo* da medida fracionária indica a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Algo semelhante à noção parte-todo;
- O *subconstructo* razão;
- O *subconstructo* taxa define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. Ressalta que há de se distinguir taxa e razão, sendo que primeira é possível ser somada ou subtraída, já a segunda não;
- O *subconstructo* quociente vê o número racional como o resultado de uma divisão;
- O *subconstructo* das coordenadas lineares que interpreta o número racional como um ponto na reta numérica, isto é, os números racionais formam um subconjunto dos números reais; as propriedades associadas à topologia métrica da reta numerada racional estão entre a densidade, distância e não completividade;
- O *subconstructo* decimal enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração convencional;

- O *subconstructo* operador vê a fração como uma transformação.

Ohlsson (1988) trabalha com os números racionais levando em consideração quatro interpretações:

- $\frac{a}{b}$ é uma comparação em que a e b são quantidades e que uma é descrita em relação a outra;
- $\frac{a}{b}$ é um partição, em que a é a quantidade e b é o parâmetro;
- $\frac{a}{b}$ corresponde a ideia de operação compostas, parâmetro e quantidade;
- O quarto caso é parâmetro / parâmetro.

Apresentamos, a seguir, a classificação dos cinco significados proposta por Nunes et al (2003).

⋇ **A fração com o significado número** - a ideia envolvida nesse significado é o da notação $\frac{a}{b}$ ($a \in Z$, $b \in Z$, com $b \neq 0$) expressando um número na reta numérica, diferenciando as quantidades em maior, menor e igual (>, < e =) ou ainda sua representação na notação decimal. Por exemplo: represente $\frac{3}{4}$ na reta numérica; represente 0,75 na reta numérica.

⋇ **A fração como uma relação parte-todo** - a ideia presente nesse significado é a partição de um todo em partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. Assim, assumiremos como parte-todo, um todo dividido em partes iguais, em situações estáticas, nas quais a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para chegar a uma representação correta. Por exemplo, se um todo foi dividido em cinco partes e duas foram pintadas, os alunos podem aprender a representação como uma dupla contagem: acima de traço escreve-se o número de partes pintadas, abaixo do traço escreve-se o número total de partes.

A autora apresenta também:

> Por exemplo, um todo cortado em quatro partes [iguais], toma-se uma parte: 1/4. 1 e 4 representam partes

(Nunes, 2003, p. 10)

⁎ **A fração como quociente, indicando uma divisão e seu resultado** - este significado está presente em situações que envolvem a ideia de divisão - por exemplo, uma pizza a ser repartida igualmente entre 5 crianças. Nas situações de quocientes temos duas variáveis (por exemplo, número de *pizzas* e número de crianças), sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador - no caso da situação exposta, a fração será $\frac{1}{5}$. A fração, nesse caso, corresponde à divisão (1 dividido por 5) e também ao resultado da divisão (cada criança recebe $\frac{1}{5}$).

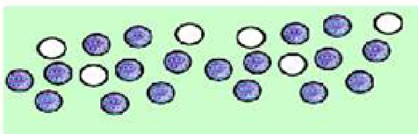
Outro exemplo:

> Uma torta repartida entre 4 crianças: 1 dividido por 4 é 1/4: 1 representa o número de tortas e 4 representa o número de meninas; 1/4 é a quantidade que cada uma recebe.

(Nunes, 2003, p. 11)

⁎ **A fração como uma medida** - Algumas medidas envolvem fração, por se referirem a quantidades intensivas [3], nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos são fracionários. Exemplos:

> 1- Uma relação: o valor do todo não influencia a quantidade intensiva - Uma quantidade intensiva (a probabilidade de retirar uma bolinha branca é 1/4).



(Nunes, 2003, p. 13)

> 2- Uma quantidade intensiva (1/4 polpa, 3/4 água).

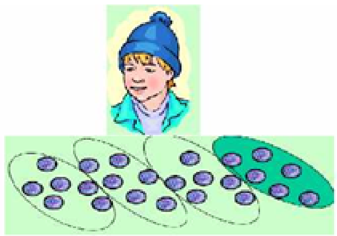
(Nunes, 2003, p. 13)

[3] Apresentaremos uma seção para tratar de quantidades intensivas e extensivas.

⁎ **A fração como um operador multiplicativo** - como o número inteiro, as frações podem ser vistas como o valor escalar aplicado a uma quantidade. No caso do inteiro, por exemplo, podemos dizer 2 balas; no caso da fração, poderíamos dizer $\frac{1}{4}$ de um conjunto de balas. A ideia implícita nesses exemplos é que o número $\frac{1}{4}$ é um multiplicador da quantidade indicada.

Outros exemplos utilizados por Nunes et al (2003):

> Situações em que os números são operadores (1/4 de 24): dividir 24 em quatro grupos de 4, tomar 1 grupo. João perdeu 1/4 de suas bolinhas de gude.



(Nunes, 2003, p. 13)

Em virtude da fácil adaptação para aplicação com um conjunto de estudantes do sexto ano do ensino fundamental, não excluindo nenhuma das demais, por ter um trabalho direcionado para crianças e citar vários exemplos provenientes do mundo delas, consideraremos as classificações feitas por Nunes et al (2003) para a elaboração da nossa proposta do ensino.

1.5.1 Quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas

As **quantidades contínuas** são aquelas divididas exaustivamente sem necessariamente perderem suas características. Por exemplo, uma pizza ou um bolo podem ser divididos inúmeras vezes sem deixar de ser uma pizza ou um bolo.

Já as **quantidades discretas** dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, e o resultado da divisão deve produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades. É o que encontramos em uma situação onde temos que dividir igualmente 10 bonés para 5 adolescentes

Segundo Nunes et al (2005), quando a medida de uma quantidade baseia-se na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na mesma lógica parte-todo, trata-se de uma **quantidade extensiva**.

> Apesar das diferenças entre quantidades contínuas e descotínuas, elas estão baseadas na mesma estrutura lógica, que é a relação parte-todo: a soma das unidades é igual ao valor do todo. Essa estrutura lógica

> relaciona-se ao fato de que a medida dessas quantidades é essencialmente uma comparação entre duas quantidades de mesma natureza. "Três metros" expressa a comparação de uma unidade de comprimento, o metro, com outro comprimento, o comprimento da mesa. Da mesma maneira, "três tijolos" expressa a comparação entre uma unidade, o tijolo, e outra quantidade de mesma natureza, uma pilha de tijolos. Quando a medida de uma quantidade baseia-se na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva. (NUNES *et al*, 2005, p. 123)

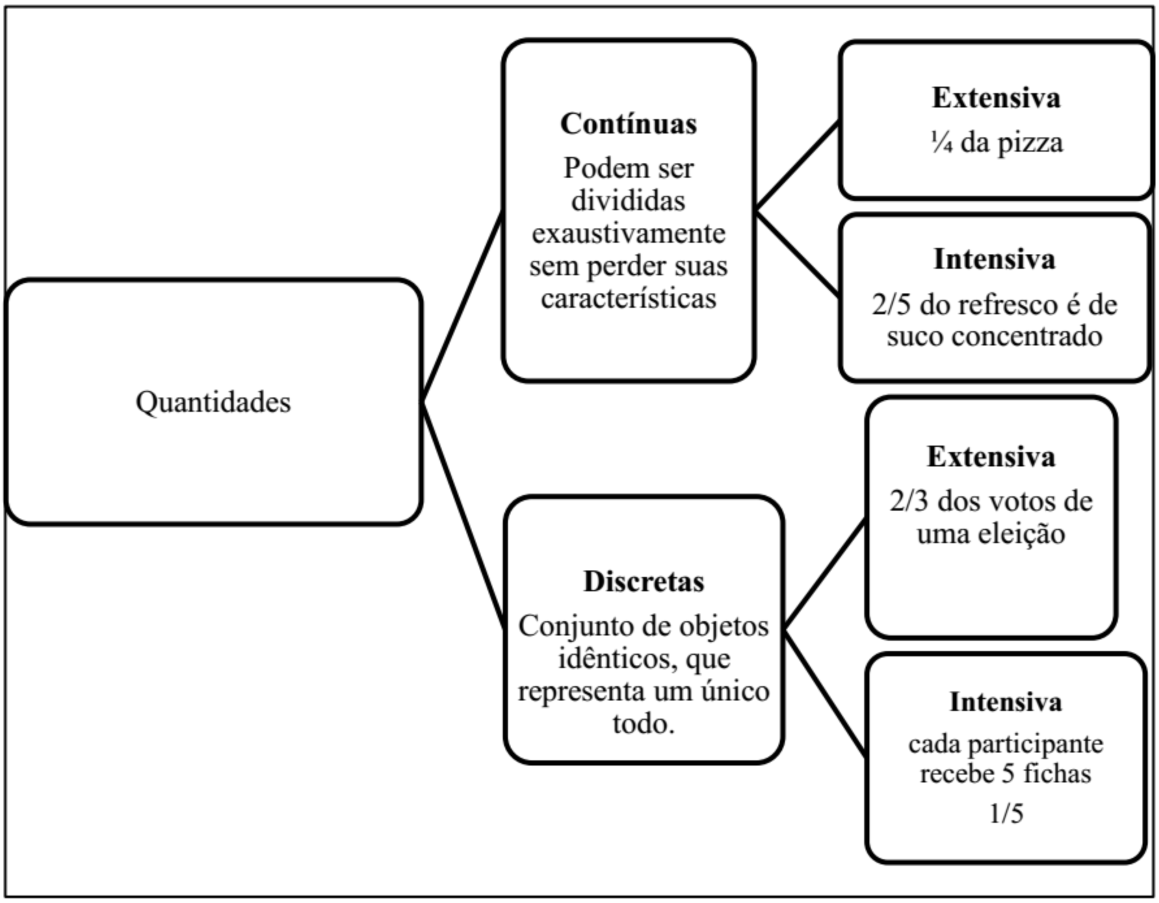
Nunes *et al* (2005) afirma que quantidade intensiva é aquela que baseia-se na relação entre duas quantidades diferentes. Podemos citar como exemplos as relações: reais por litro, gramas de açúcar por litro de refrigerante, concentração de suco de limão por litro de água na limonada e colheres de achocolatado em pó por litro de leite. Vale ressaltar que por se tratar de dois números de naturezas distintas, sua escrita é em forma de uma razão ou por uma fração.

> Podemos distinguir dois tipos de quantidades intensivas. Em algumas delas, as duas unidades diferentes estão combinadas, formando um todo. Por exemplo, quando misturamos suco concentrado e água, estamos formando um todo. Nesse caso, podemos escrever a concentração de suco de duas maneiras: 2 copos de suco concentrado para cada copo de água; ou 2/3 de suco concentrado e 1/3 de água. A primeira concentração é expressa na forma de uma razão; a segunda é expressa em forma de uma fração. Observe que a razão é 2 para 1; a fração é expressa na mesma relação, porém usando 2/3 e 1/3. (NUNES et al, 2005, p. 152)

Para Nunes et al (2005), nem sempre é possível a representação de uma determinada situação nas duas formas: razão e fração. É necessário que as quantidades de naturezas diferentes possam ser misturadas formando uma nova composição homogênea. Como é o caso da mistura de suco concentrado de limão com água. Para a situação preço por quilo de laranja não é possível fazer sua representação por meio de fração, somente através de uma razão, visto que não tem sentido a fração 2/1, nesse caso.

Na figura 8 temos um panorama completo a respeito da natureza das quantidades, cada uma com seus respectivos exemplos. É possível notar que as frações e a natureza das quantidades permitem diversas combinações sendo elas: contínuas e intensivas, contínuas e extensivas, discretas e intensivas e discretas e extensivas.

Figura 8 – Panorama completo a respeito da natureza das quantidades.



Fonte: Construção própria

Na tabela 1 temos exemplos detelhados de cada uma dessas quantidades, com as justificativas do porquê de cada um das situações.

Tabela 1 – Natureza das quantidades - exemplos

Natureza da quantidade	Exemplo
Contínua e intensiva	Para fazer um lanche, um garoto misturou utilizando um liquidificador duas bolas de sorvete e um copo de leite. A fração ½ representa a quantidade de leite para a quantidade de sorvete. Sendo, portanto, quantidades de naturezas diferentes, o que a classifica como intensiva. Já a mistura pode ser dividida exaustivamente em várias partes sem perder suas características, sendo assim uma quantidade contínua.
Contínua e extensiva	Uma pessoa comeu 1/3 da barra de chocolate. A barra de chocolate pode ser dividida várias vezes sem perder suas características, sendo, então, uma quantidade contínua. A situação trata de uma quantidade que baseia-se na comparação de duas quantidade de mesma natureza. O que nos leva a concluir que se trata de uma quantidade extensiva. Logo, o exemplo apresentado contempla uma quantidade contínua e extensiva.
Discreta e intensiva	Em uma festa, a cada pessoa que entrava para participar recebia 5 fichas para consumo. Assim, a fração de pessoas por ficha é 1/5. Trata-se de uma quantidade discreta, pois representa unidades idênticas e que juntas formam um grupo que representam o todo. E é intensiva, uma vez que são quantidades de naturezas diferentes.
Discreta e extensiva	Na festa de aniversário foram comidos 2/3 dos brigadeiros. Os brigadeiros são unidades idênticas que juntas formam o todo, o que caracteriza a quantidade como discreta. A relação entre numerador e denomindor envolve quantidades da mesma natureza – característica das quantidades extensivas.

Fonte: Construção própria.

1.6 A abordagem dada às frações em alguns livros didáticos

A análise nos livros didáticos[4] procurou verificar o modo como o conceito de fração é abordado, considerando os 05 (cinco) significados de fração propostos por Nunes et al (2003) e a natureza da grandeza ou quantidade - discreta, contínua, extensiva e intensiva, segundo a classificação dada por Nunes et al. (2005).

Analisamos 06 (seis) obras do 6º (sexto) ano do Ensino Fundamental, cujo critério de escolha foi a acessibilidade e a possibilidade de estarem em uso atualmente, visto que são livros que atendem ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Com a implantação em 1995 do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) pelo Ministério da Educação, os livros didáticos passaram a ter critérios definidos para a sua análise. Especialistas de diversas áreas, tais como: matemática, ciências, língua portuguesa, geografia e história, analisam os livros didáticos.

Iniciamos a descrição da nossa análise pela Obra 1 de Souza (2015). O autor cita um texto explicando a diferença entre o ouro de 14 (quatorze) quilates e o ouro de 18 (dezoito) quilates. Deixa claro que o quilate é a quantidade de partes de ouro contida em 24 (vinte e quatro) partes da liga metálica que compõe o ouro. Cita, por exemplo, que o ouro de 14 (quatorze) quilates indica que de 24 (vinte e quatro) partes da liga, 14 (quatorze) são de ouro e as outras 10 (dez) partes são de outros metais; enquanto que o ouro ser de 18 (dezoito) quilates, indica que de 24 (vinte e quatro) partes da liga 18 (dezoito) são de ouro e as outras 6 (seis) são de outros metais.

Na sequência, apresentaremos a distribuição das situações encontradas na Obra 1 que abordam os significados da fração considerando a natureza das quantidades: contínuas e intensivas; contínuas e extensivas; discretas e intensivas e discretas e extensivas.

---

[4] Obra 1 - SOUZA, Joamir Roberto de. **Vontade de Saber Matemática**. Obra 2 -DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática**. Obra 3 - ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática**. Obra 4 - SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**. Obra 5 - BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática do cotidiano**. Obra 6 - MORI, Iracema. **Matemática: ideias e desafios**.

Tabela 2 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 1

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	1	12	-	-	1	14
Cont. e Int.	-	1	-	-	-	1
Disc. e Ext.	-	-	-	1	-	1
Disc. e Int.	-	-	-	2	-	2
Total	1	13	-	3	1	18

Fonte: Construção própria.

Os dados da Tabela 2 apontam que, dentre as 18 situações classificadas, 13 delas referem-se ao significado Parte-todo. Segue o significado Medida com 3 situações, Número e Operador Multiplicativo com 01 situação e Quociente com nenhuma situação.

Nenhum dos significados apresenta situações envolvendo todas as quantidades, sendo que a natureza da quantidade que mais foi abordada foi a contínua e extensiva.

Agora destacamos o livro referente à Obra 2 (Dante, 2012). O capítulo 6, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem o título: "Frações e porcentagens". Apresenta um breve relato sobre o surgimento histórico das frações, explicando a razão da criação desse tipo de número. A situação usada envolve uma quantidade contínua e extensiva, ao passo que se relaciona com o significado medida. O conceito de fração é explorado em 29 das 299 páginas presentes na obra.

Passaremos a apresentar a distribuição das situações encontradas na Obra 2.

Tabela 3 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 2

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	1	11	1	4	2	19
Cont. e Int.	-	-	2	2	-	4
Disc. e Ext.	-	1	-	5	4	10
Disc. e Int.	-	-	-	1	-	1
Total	1	12	3	12	6	34

Fonte: Construção própria.

Os dados da Tabela 3 mostram que, dentre as 34 situações classificadas, 12 delas referem-se ao significado Parte-todo e 12 ao significado Medida. Segue o significado Operador multiplicativo com 6 situações, Quociente com 3 situações e Número com 1 situação.

Podemos perceber por meio da Obra 2 que as questões que abordam os significados Parte-todo e Medida receberam maior atenção, bem como o Operador multiplicativo. Sendo pouco explorados os significados Quociente e Número.

Ainda sobre a Obra 2, observamos que as situações que envolvem quantidades contínuas e extensivas aparecem com bastante frequência. Segue as quantidades discretas e extensivas, com 10 situações apresentadas. Já para as quantidades contínuas e intensivas e discretas e intensivas existe uma abordagem mais moderada, sendo que esta última aparece uma vez no significado Medida.

Apresentaremos a Obra 3, de Andrini (2015). A unidade 11, que inicia a abordagem do conceito de fração, tem como título: "Frações". O autor principia o assunto contextualizando uma situação em que uma pizza é dividida em quatro partes iguais, onde fornece a informação de que uma dessas partes representa a fração $\frac{1}{4}$ e dá explicações a respeito do que é numerador e denominador. A partir daí, o conceito de fração é exposto em 28 páginas das 276 que compõem o livro.

Discorremos também sobre distribuição das situações encontradas na Obra 3 que abordam os significados da fração considerando as seguintes quantidades: contínuas e intensivas; contínuas e extensivas; discretas e intensivas e discretas e extensivas.

Tabela 4 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 3

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	2	10	-	1	1	14
Cont. e Int.	-	-	-	1	-	1
Disc. e Ext.	-	-	-	-	1	1
Disc. e Int.	-	-	-	-	-	-
Total	2	10	-	2	2	16

Fonte: Construção própria.

Os dados da tabela 4 nos mostram que, dentre as 16 situações classificadas, 10 delas referem-se ao significado parte - todo. Segue os significados Número, Medida e Operador Multiplicativo, cada um com 2 situações.

Por meio da análise desta obra observamos também que as quantidades contínuas e extensivas apareceram em ampla maioria das situações analisadas, 14 do total de 16.

As quantidades contínuas e intensivas e discretas e extensivas, 1 situação cada. Nenhuma situação comtemplou quantidades discretas e intensivas.

Dissertaremos sobre a Obra 4 (Silveira, 2015). O capítulo 6, que dá início a abordagem do conceito de frações, tem o título: “Frações ”. O conceito de fração é apresentado a partir de um quebra-cabeça, onde é feito um questionamento sobre a fração do quebra-cabeça que falta para o seu preenchimento total. O conceito de fração é exposto em 28 páginas de um total de 296 que fazem parte do livro.

Agora apresentamos a distribuição das situações encontradas na Obra 4 que abordam os significados da fração considerando as quantidades: contínuas e intensivas; contínuas e extensivas; discretas e intensivas e discretas e extensivas.

Tabela 5 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 4

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	-	10	1	-	3	14
Cont. e Int.	-	-	-	-	1	1
Disc. e Ext.	-	2	-	-	6	8
Disc. e Int.	-	-	-	-	-	-
Total	-	12	1	-	10	23

Fonte: Construção própria.

A partir da análise dos dados da tabela 5 extraímos que das 23 situações classificadas 12 delas referem-se ao significado parte-todo. Seguido do significado Operador Multiplicativo, com 10 e do significado Quociente com 1 situação. Não temos situações que tratam do significado Número e Medida.

Analisamos ademais que em relação à classificação da natureza da quantidade há 14 situações envolvendo quantidades contínuas e extensivas, 8 situações que envolvem quantidades discretas e extensivas e 1 situação em que é contemplada a quantidade contínua e intensiva. Não há situação em que é abordada quantidade discreta e intensiva.

Na sequência segue a análise da Obra 5 (Bigode, 2015). A abordagem dada às frações inicia-se no capítulo 7, cujo título é: “Frações”. Dá inicio às discussões sobre fração explorando o contexto histórico, onde mostra que os números naturais não eram suficientes para representar qualquer quantidade ou medida. Além disso, faz uso de duas situações do cotidiano. Das 320 páginas do livro, 28 são dedicadas para o trato com as frações.

Em diante apresentamos a distribuição das situações encontradas na Obra 5 que abordam os significados da fração considerando as quantidades: contínuas e intensivas; contínuas e extensivas; discretas e intensivas e discretas e extensivas.

Tabela 6 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 5

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	-	8	-	-	-	8
Cont. e Int.	-	-	2	-	-	2
Disc. e Ext.	-		-	-	2	2
Disc. e Int.	-	-	-	-	-	-
Total	-	8	2	-	2	12

Fonte: Construção própria.

Feitas as observações da tabela 6, percebemos que das 12 situações classificadas 8 delas estão relacionadas ao significado Parte-todo. Segue 2 (duas) situações que envolvem Quociente e 2 (duas) que envolvem o significado Operador Multiplicativo. Não havendo situações que tratam dos significados Número e Medida.

Ao nos direcionarmos para as classificações das quantidades, inferimos que a quantidade contínua e extensiva é a que mais aparece, com 8 situações presentes. Segue a Contínua e Intensiva e a Contínua e Extensiva, cada uma com 2 (duas) situações. Não há situações que envolvam quantidades Discretas e Intensivas.

As considerações a seguir se referem à Obra 6 (Mori, 2012). A abordagem das frações é feita no capítulo 8, intitulado de: “Números racionais: representação fracionária”. Para iniciar o assunto que trata do conceito de fração são apresentadas duas situações: limões cortados em partes iguais e uma barra de chocolate que deverá ser dividida igualmente entre 4 crianças. O autor faz o uso de 48 páginas, das 304 páginas presentes no volume, para apresentar frações aos estudantes.

Procedemos, por meio da tabela que segue, com a distribuição das situações encontradas na Obra 6 que abordam os significados da fração considerando as quantidades: contínuas e intensivas; contínuas e extensivas; discretas e intensivas e discretas e extensivas.

Observando os dados da tabela 7, podemos dizer que das 35 situações classificadas, 18 delas são referentes ao significado Parte-todo. Segue o significado Quociente com 5 situações, o de Operador Multiplicativo e Medida, com 2 situações cada. O significado número não é contemplado com situações.

Tabela 7 – Distribuição das situações quanto ao significado de fração e a natureza das quantidades - Obra 6

Signif. / Quant.	Número	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multip.	Total
Cont. e Ext.	-	18	2	2	2	24
Cont. e Int.	-	-	3	-	-	3
Disc. e Ext.	-	-	-	-	8	8
Disc. e Int.	-	-	-	-	-	-
Total	-	18	5	2	2	35

Fonte: Construção própria.

Do ponto de vista da classificação das quantidades, podemos afirmar que 24 situações são quantidades Contínuas e Extensivas, 8 delas são Discretas e Extensivas e 3 são Contínuas e Extensivas. Não havendo situação que tratasse de quantidade Discreta e Intensiva.

1.6.1 Considerações em relação aos livros didáticos analisados

Colhidas as informações nas 6 (seis) obras, pudemos detectar que o significado parte-todo é o mais utilizado nos livros verificados, bem como a quantidade contínua e extensiva. O segundo significado mais usado por eles é o de Operador Multiplicativo. Os outros três significados (Número, Quociente e Medida) são trabalhados de uma maneira mais branda, se tornando obsoletos em alguns dos livros. Esse tipo de abordagem dada às frações pelos livros didáticos exige do professor uma postura muito crítica em relação ao seu uso como recurso metodológico.

Notamos também que para dar início ao estudo de frações, os autores não levam em consideração todos os diferentes significados de fração e nem todas as diferentes classificações da natureza das quantidades. Exploram em demasia alguns significados em detrimento de outros, podendo deixar o estudante sem a compreensão de algumas dessas situações. O que, sem a devida intervenção do professor, poderá acarretar uma formação deficitária no que diz respeito ao conceito de frações.

Na perspectiva de que o livro didático, embora muito útil e de suma importância para o ensino, não é uma ferramenta metodológica única e exclusiva, alvitramos ao professor que, como o mediador, orientador, articulador e motivador, desenvolva sequências didáticas que auxiliem o estudante na construção do saber. Essas atividades podem e devem fazer o uso do livro didático, porém não sendo ele o elemento principal.

1.7 A delimitação do objeto de pesquisa

Esse panorama nos desafia a desenvolver um estudo com vistas ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração. Para tanto esatbelecemos como objetivo geral: **elaborar uma sequência didática com vistas à compreensão do conceito de fração por estudantdes do Ensino Fundamental, considerando o campo do conjunto dos números racionais não negativos** Q^{+}.

Devido ao fato de os estudantes não compreenderem completamente o conceito de fração e o modo como este conteúdo é apresentado nos livros didáticos, nos deparamos com um panorama que nos desafia a desenvolver um estudo com vistas ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração junto a estudantes do sexto ano de Ensino Fundamental. Para tanto estabelecemos como objetivo geral: **elaborar uma sequência didática com vistas à compreensão do conceito de fração por estudantdes do Ensino Fundamental, considerando o campo do conjunto dos números racionais não negativos** Q^{+}.

A proposição deste objetivo mais amplo nos leva a estabelecer os seguintes objetivosespecíficos:

a) Identificar os diferentes significados de fração;

b) Distinguir quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas;

c) Verificar o modo como o conceito de fração é abordado em livros didáticos;

d) Propor uma sequencia didática com vistas a compreensão dos diferentes significados de fração, considerando a natureza das grandezas.

2 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta é uma pesquisa qualitativa, em que se faz uma revisão da literatura sobre o conceito de fração e propõe-se a elaboração de uma sequência didática.

O desenvolvimento desta pesquisa foi realizado em três etapas. A primeira teve como objetivo compreender e entender melhor o conceito de fração. Para isso, buscamos na literatura a abordardagem dada aos diferentes significados de fração e a relação que eles possuem com a natureza das quantidades. Na segunda, buscamos o referencial teórico sobre Sequência Didática e, na terceira, elaboramos a Sequência Didática lenvando em consideração os preceitos metodológicos da Engenharia Didática. Conceitos esses que serão explicitados no decorrer deste estudo.

Em conversas informais com colegas professores, o contato com estudantes e a busca para compreendermos a forma com que as frações são apresentadas no processo de ensino e aprendizagem, foi possível perceber de que o ensino de frações desse ser repensado, o que requer o desenvolvimento de pesquisas com vistas ao processo de aprendizagem.

A revisão bibliográfica nos possibilitou uma compreensão mais ampla a respeito do conceito de fração e seus diferentes significados, além de determinar elementos necessários para a delimitação do problema, os objetivos e a escolha da proposta, nos proporcionando uma visão ampla do trabalho a ser desenvolvido. Nesse sentido, consultamos a literatura que trata dos diferentes significados da fração, sua relação com outros conceitos matemáticos e a natureza das quantidades.

Nos embasamos em teorias pedagógicas para nos instrumentalizar em relação ao ensino e a aprendizagem de matemática, momento este em que vislumbramos a proposição de Sequência Didática.

Compreendemos que a escolha do referencial teórico é ponto crucial de todo o trabalho de pesquisa. Nesse sentido, buscamos teorias que levam em consideração a construção do conhecimento. Assim, optamos em desenvolver uma proposta de Sequência Didática para a compreensão do conceito de fração, inspirados nas ideias de Sequência Didática apresentadas por Zaballa (1998), Oliveira (2013) e Borges Neto (2001), além dos estudos de Brousseau (1996) sobre Engenharia Didática.

Analisamos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que possivelmente serão utilizados nos próximos 2 (dois) anos por escolas públicas do país. Observamos a forma com que as frações são apresentadas aos estudantes. Para nos orientar na análise, tomamos como referência os 05 (cinco) significados de fração propostos por Nunes et al (2003), assim como a natureza das quantidades.

Considerando o referencial teórico escolhido e toda a problemática envolvendo o ensino e a aprendizagem de frações, elaboramos uma Sequência Didática considerando os diferentes significados de fração e a natureza das quantidades. Para a elaboração dessa Sequência Didática seguimos as orientações da Engenharia Didática.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção trataremos a respeito de Sequência Didática e como é possível trabalhar com essa metodologia de ensino na construção de conhecimentos sobre frações. Teremos elementos teóricos que darão sustentação a nossa proposta, subsidiando ideias e ações para chegarmos aos caminhos que nos conduzirão à elaboração da Sequência Didática norteadora para o ensino e a aprendizagem de frações.

Segundo Oliveira (2013), sequência didática começa a ser utilizada na França na década de 1980 o tinha o objetivo de melhorar o ensino da língua materna, como proposta inovadora para implantar um ensino integrado e interconectado. No início teve resistência, mas depois muitos estudiosos da didática do ensino começaram a analisar tal procedimento e implementar pesquisas sobre os resultados produzidos com a utilização de Sequências Didáticas no ensino da língua francesa.

Para Oliveira (2013), sequencia didática é

> um procedimento simples quecompreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar osconteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem. (OLIVEIRA, 2013, p. 39)

Ainda segundo Oliveira (2013), a elaboração da sequência didática prescinde dos seguintes passos básicos: escolha do tema a ser trabalhado; questionamentos para a escolha do tema a ser trabalhado; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem atingidos no processo ensino-aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a organização dos estudantes, material didático, cronograma, integração entre cada atividade e etapas e avaliação dos resultados.

> A sequência didática é um procedimento para a sistematização do processo ensino-aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial informando aos alunos o real objetivo da sequência didática no contexto da sala de aula, até o final da sequência para avaliar e informar os resultados. (OLIVEIRA, 2013, p. 40)

Kobashigawa et al (2008) defende que Sequência Didática é o conjunto de atividades, intervenções e estratégias planejadas pelo professor afim de que o entendimento do conteúdo proposto seja alcançado pelos estudantes. Se parece com um plano de aula, porém é mais amplo que este por abordar várias estratégias de ensino e aprendizagem.

Atribuindo grande importância a ordenação da prática pedagógica, Zabala (1998) afirma que Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

Neste trabalho seguimos o definição de Sequência Didática sob a concepção de Zabala (1998), em virtude de ela ser a que melhor define o conjunto de ações e responsabilidades de estudantes e professores.

Na visão de Zabala (1998), das diferentes variáveis que configuram as propostas metodológicas, a Sequência Didática é aquela que é determinada pela série ordenada e articulada de atividades. Não só pelas atividades, mas também sua maneira de se articular são traços diferenciais que determinam a especificidade de uma proposta didática.

Para Zabala (1998), os diferentes conteúdos que apresentamos aos estudantes exigem esforços e ajudas específicas. Nem tudo se aprende do mesmo modo, no mesmo tempo nem com o mesmo tipo de situação. É necessário aos professores o discernimento entre o que pode ser apenas mais uma unidade didática a ser trabalhada normalmente e aquela que merece uma atenção especial e de forma prioritária.

> O que queremos dizer é que mais do que nos movermos pelo apoio acrítico a um ou a outro modo de organizar o ensino, devemos dispor de critérios que nos permitem considerar o que é mais conveniente em um dado momento para determinarmos objetivos a partir da convicção de que nem tudo tem o mesmo valor, nem vale para satisfazer as mesmas finalidades. Utilizar estes critérios para analisar a nossa prática e, se convém, para orientá-la em algum sentido, pode representar, em princípio, um esforço adicional, mas o que é certo é que pode evitar perplexidades e confusões posteriores. (ZABALA, 1988, p. 86)

As sequências didáticas permitem uma série de oportunidades comunicativas. As relações que são estabelecidas a partir das atividades definem os diferentes papéis dos professores e estudantes.

Para Zabala (1998), a participação dos alunos no processo de ensino aprendizagem é algo que discutimos desde os princípios do século XX. A perspectiva chamada “tradicional” atribui aos professores o papel de transmissores únicos de conhecimentos, enquanto os alunos devem interiorizar o conhecimento tal como lhe é apresentado. Esta é uma concepção de que a aprendizagem consiste na reprodução da informação.

Na escola se estudam muitas coisas deferentes, com intenções também diferentes, sendo que os objetivos educacionais influenciam no tipo de participação dos estudantes da situação didática.

Nesse sentido, Zabala (1998) afirma que na concepção construtivista, ensinar envolve estabelecer uma série de relações que devem conduzir à elaboração, por parte do estudante, de representações pessoais sobre o conteúdo objeto de aprendizagem. Assim, o estudante utiliza sua experiência e os instrumentos que lhe permitem construir uma interpretação pessoal e subjetiva do que é tratado.

Zabala (1998) também defende a ideia de que o professor poderá se utilizar de uma vasta diversidade de estratégias na estruturação de suas intenções educacionais. A posição do professor poderá ser de alguém que desafia; às vezes dirige; outras vezes propõe e compara, uma vez que os estudantes e as situações que têm que aprender são diferentes.

Nessa pespectiva, parece mais adequada uma relação que favoreça as interações nos deferentes níveis: em relação ao grupo-classe; em relação aos grupos de alunos; interações individuais.

Salientamos que toda proposta de ensino é carregada de intencionalidade e esta deve estar clara para o professor desde a elaboração das tarefas/atividades até a devolutiva junto aos estudantes dos seus resultados.

Essas intenções educativas abrangem três dimensões: "[...] dimensão conceitual - o que se deve saber?; dimensão procedimental - o que se deve saber fazer?; dimensão atitudinal - como se deve ser?" (Zabala, 1998, p. 31).

Zabala (1998) reconhece que existem os diferentes tipos de Sequências Didáticas. Não fornece uma receita pronta para a sua construção e afirma que não é possível definir se uma é melhor ou pior que a outra, mas é importante reconhecer as possibilidades e carências de cada uma, dependendo do tipo de conteúdo a ser desenvolvido (conceitual, procedimental ou atitudinal).

3.1 Sequência Didática Interativa (SDI)

Oliveira (2013) também se posiciona em relação a metodologias que têm foco no desenvolvimento de sequências didáticas ao trabalhar com a Sequência Didática Interativa (SDI), a conceituando da seguinte maneira:

> A sequência didática interativa é uma proposta didático-metodológica que desenvolve uma série de atividades, tendo como ponto de partida a aplicação do círculo hermenêutico-dialético para identificação de conceitos/definições, que subsidiam os componentes curriculares (temas), e, que são associados de forma interativa com teoria (s) de aprendizageme/ou propostas pedagógicas e metodologias, visando à construção de novos conhecimentos e saberes (OLIVEIRA, 2013, p. 43).

Oliveira (2013) sugere que a aplicação da SDI leve em consideração os seguintes passos:

1. Primeiro momento: sequência de atividades. Nessa etapa será necessário definir o tema a ser trabalhado; solicitar aos estudantes que escrevam o que entendem sobre ele; formar grupos e solicitar que os alunos façam uma síntese dos conceitos, formando uma só frase ou definição e, por fim, escolher um representante de cada

grupo para que apresente sua definição e, a partir de cada uma delas, construir uma definição geral, dada pelo grupo.

2. Segundo bloco de atividades. Aqui será o momento do embasamento teórico do tema, que se dará por uma exposição oral do professor, apoiado em livros e textos, tendo a liberdade de escolher a teoria de aprendizagem, metodologias de ensino e os recursos didáticos necessários. Após essa fase o professor poderá escolher uma determinada atividade para o fechamento do tema, sendo sugerida a construção de um novo conhecimento e saber.

A sondagem inicial é muito importante, uma vez que é nesse momento que é possível notar o que o estudante já possui de conhecimento ao longo de suas experiências e usar isso para a sistematização dos saberes pré-estabelecidos e a construção de um novo olhar a respeito do assunto, além de possibilitar uma interação maior entre todos os envolvidos no processo (OLIVEIRA, 2013).

O aporte teórico da SDI é a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau. Para esse autor (1996), o objeto de estudo da didática da matemática, que implica em um processo de aprendizagem no qual se acham envolvidos professor e estudante, é chamado de situação didática. Para que de fato exista uma situação didática é necessário que o professor seja criativo e, a partir de uma situação real, procure trabalhar um conhecimento e/ou saber matemático por meio da realização de um jogo educativo, e/ou utilização de diversos objetos que auxiliam na construção de novos conhecimentos.

> Uma "situação" é um modelo de interação de um sujeito com um meiodeterminado. O recurso de que esse sujeito dispõe para alcançar ouconservar um estado favorável nesse meio é um leque de decisões que dependem do emprego de um conhecimento preciso. Consideramos o "meio" como subsistema autônomo, antagônico ao sujeito (BROSSEAU,2008, p.19).

Além da abordagem construtivista, o principal pilar da teoria das situações didáticas é o contrato didático, que nada mais é do que o compromisso que se estabelece entre professor e estudante em relação ao conhecimento/saber (BROUSSEAU, 1982).

Nota-se que a proposição de uma SDI está alicerçada em teorias da aprendizagem que colocam o estudante como protagonista de sua aprendizagem. Nesse sentido, ele tende a ser a parte mais importante do processo de ensino e aprendizagem. É o estudante que fará descobertas, análises e chegará a uma conceituação a respeito do saber estudado.

3.2 Sequência Fedathi

Para exemplificar outra sequência didática passível de ser desenvolvida no ambiente escolar, podemos citar a Sequência Fedathi, apresentada em 1996, no trabalho de Pós-Doutorado do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, da UFC, na Universidade de Paris VI.

Desde a apresentação formal a Sequência Fedathi vem sendo experimentada e aperfeiçoada com base nos estudos de Borges Neto, juntamente com o Grupo Fedathi - FACED/UFC.

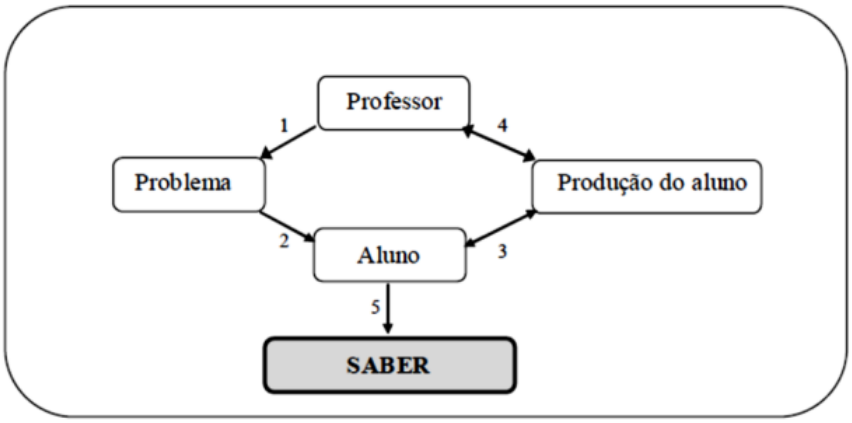
Borges Neto et al (2001) ressalta que uma das características importantes na aplicação da Sequência Fedathi é a realização, de forma sequencial, de todas as suas etapas, destacando que só assim se podem produzir os resultados esperados na aprendizagem.

Para Borges Netoet al (2001), ao se deparar com um problema novo, o estudante deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos para constituir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo.

Assim como Zabala (1998) e Oliveira (2013), a sequência didática (Sequência Fedathi) proposta por Borges Neto et al (2001) coloca o estudante como protagonista ativo na construção do saber. A Sequência Fedathi é composta por quatro etapas sequenciais e interdependentes, assim denominadas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova. Para Borges Neto et al (2001), o estudante reproduz ativamente os estádios que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite dos mesmos milênios que a história consumiu para chegar ao momento atual.

Apresentamos, na figura 9, uma síntese da relação entre professor, problema, produção do estudante, estudante e o saber na formulação do um conhecimento em Fedathi.

Figura 9 – Relações na Sequência Fedathi



Fonte: Borges Neto et al (2001)

Analisando o esquema proposto na figura 8, nota-se que o ensino é iniciado pelo professor que deverá selecionar um problema relacionado ao conhecimento que pretende ensinar (1); a seguir o professor deverá apresenta-lo aos estudantes por intermédio de uma linguagem adequada (2); com o problema apresentado, os estudantes irão explorá-lo na busca de uma solução (3); a solução encontrada deverá ser analisada pelo professor junto ao grupo (4). Os passos 3 e 4 correspondem ao debate acerca da solução, visando à formulação do saber pelo aluno (5).

Apresentaremos, a seguir, a forma com que Souza (2010) detalhou as etapas da Sequência Fedathi, onde é possível perceber as particularidades de cada uma.

1) **Tomada de posição: apresentação do problema**

   Souza (2010, p. 88) afirma que "nessa etapa o professor exibe o problema para o aluno, partindo de uma situação generalizável, ou seja, de uma circunstância possível de ser abstraída de seu contexto particular, para um modelo matemático genérico."

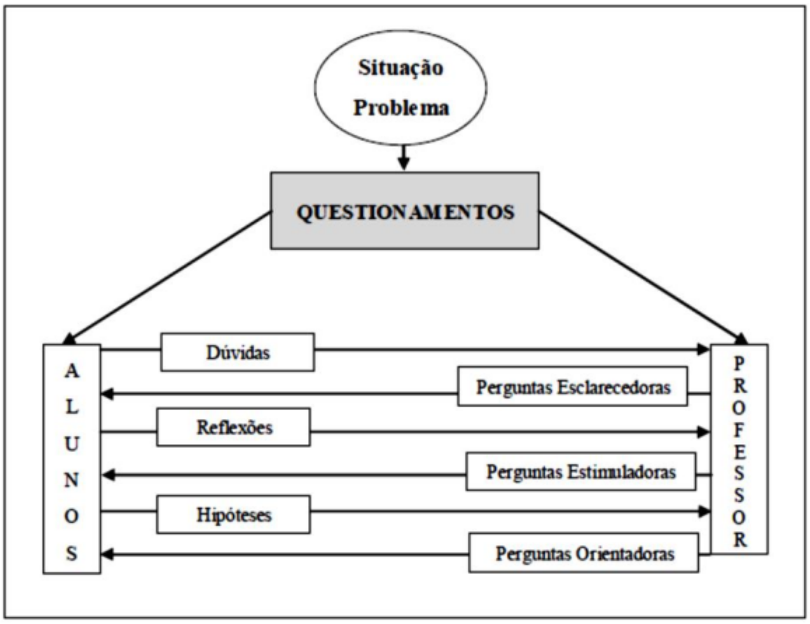
   Segundo Souza (2010), para uma melhor compreensão e acessibilidade aos estudantes, inicialmente o professor deve deixar de lado as especificidades da comunicação matemática. Ou seja, as manipulações algébricas e os algoritmos são trabalhados após a apresentação de uma situação problema e a tentativa de resolução pelos estudantes. Além disso, o professor deve preparar o ambiente, conquistar, orientar e preparar os estudantes. Assim, reforça ainda mais a importância do planejamento como um grande aliado para conduzir a gestão das aulas.

2) **Maturação: compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema**

   Para Souza (2010), esta etapa é destinada à discussão entre o professor e os estudantes a respeito da situação-problema apresentada; os estudantes devem buscar a compreensão do problema e tentar identificar os possíveis caminhos que possam levá-lo a uma solução. Feito isso, deverão identificar quais os dados contidos no problema, qual a relação entre eles e o que está sendo solicitado pela atividade.

   Nessa etapa a interação entre o professor e os estudantes é de suma importância. Nela, em decorrência das tentativas e solução e das abordagens tentadas pelos estudantes, surgem as dúvidas e os questionamentos por parte dos estudantes, o que é absolutamente normal e esperado. Na figura 10, apresentamos alguns tipos de questionamentos em relação à situação-problema que podem surgir durante a maturação do problema.

Figura 10 – Tipos de questionamentos em relação à situação-problema



Fonte: SOUZA (2010, p. 89)

As dúvidas surgem inicialmente por parte dos estudantes, geralmente logo no início da resolução de problema, quando eles se debruçam sobre ele tentando encontrar um caminho que os conduzam à solução. As reflexões surgem, geralmente, depois que os estudantes chegam à solução, quando se perguntam, por exemplo, se a solução de fato é aquela. As hipóteses aparecem quando os estudantes buscam os caminhos para constatar ou testar se suas respostas estão realmente corretas. Ao professor cabe a perguntas esclarecedoras, que são aquelas que têm o objetivo de verificar o que e como os estudantes estão entendendo sobre o que está sendo apresentado. O professor também faz perguntas estimuladoras. Estas levam o estudante a fazer descobertas. Em seguida faz perguntas orientadoras, que são aquelas em que o professor leva o estudante a tentar estabelecer compreensões e relações entre o problema e o caminho a seguir para chegar à solução (SOUZA, 2010).

3) **Solução: representação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema**

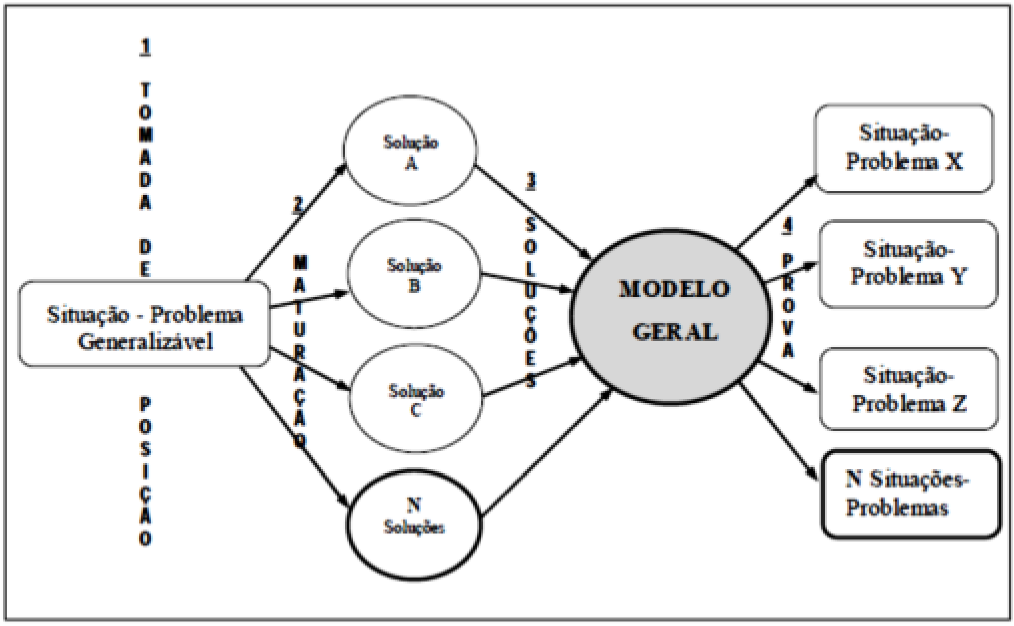
Souza (2010) afirma que nessa etapa os estudantes deverão organizar e apresentar modelos que possam conduzi-los a encontrar o que está sendo solicitado pelo problema. Nessa construção de conhecimentos, o professor tem o papel de mediador, pois discutirá com o grupo as soluções encontradas e, juntos, decidirão qual delas é a mais adequada para resolver o problema proposto. Para que tudo isso ocorra, é necessário que o professor detenha um bom domínio acerca dos conceitos que está ali trabalhando, ao passo que saiba usar elementos da didática geral e didática da matemática.

4) **Prova: apresentação o formulação do modelo matemático a ser ensinado**
Souza (2010), afirma que é nessa etapa que o novo saber deverá ser compreendido e assimilado pelo estudante, levando-o a perceber que, com base nele, será possível deduzir outros modelos simples e específicos. Além de manter a atenção e a motivação dos estudantes, terá que fazer uma conexão entre o modelo apresentado e o modelo matemático científico a ser aprendido.

A quarta etapa constitui a finalização do processo, que levará o estudante a elaborar um modelo geral do conhecimento em questão. É Nessa fase do desenvolvimento da sequência que é feita a avaliação, podendo ser feita por vários meios, desde que permita ao professor a verificação da apreensão de modo geral feita pelos estudantes.

Na figura 11 apresentamos o desenvolvimento da Sequência Fedathi, desde a tomada de posição até a prova.

Figura 11 – Desenvolvimento da Sequência Fedathi



Fonte: SOUZA (2010, p. 96)

A Sequência Fedathi propicia uma interação proveitosa do ponto de vista científico para estudantes e professores.

3.3 Algumas considerações em relação aos trabalhos com Sequências Didáticas

Notamos que Zabala (1998) ao defender o uso de Sequências Didáticas numa perspectiva construtivista, Oliveira (2013) ao propor trabalhos com SDI e Borges Neto et al

(2001) com as experimentações da Sequência Fedathi não negam as ideias uns dos outros. Pelo contrário, é possível percebermos que há uma conexão entre os três autores, uma vez que em todas elas o estudante possui papel ativo e o professor é o organizador e o articulador das atividades.

Como nos desafiamos a encontrar uma maneira de trabalho que enfoque os aspectos da Sequência Didática, discorremos um pouco mais sobre a Metodologia da Engenharia Didática na próxima seção.

3.4 Metodologia da Engenharia Didática

Como a nossa intenção é propor uma Sequência Didática segundo a concepção construtivista de Zabala (1998) para o ensino do conceito de frações, recaímos num panorama que requer uma exposição e explicações fundadas a respeito da metodologia a ser efetivamente adotada, com os passos bem definidos e as atividades articuladas e interligadas. Para tanto, recorremos a Engenharia Didática.

A Engenharia Didática foi concebida como um trabalho didático de modo parecido com o de um engenheiro, visto que segue caminhos semelhantes. Projeta buscando informações referentes ao local de realização da atividade, prevê possíveis problemas e dá soluções. No entanto, o desenvolvimento pedagógico é mais complexo. Nas palavras de Artigue (1996), é análogo ao

> [...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobreconhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle detipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1996, p. 193).

A Engenharia didática é também assim descrita por Machado (2002):

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (MACHADO, 2002, p. 198, *apud* DOUADY, 1993, p. 2).

Nos trabalhos de Brousseau (1996) e Artigue (1996), dentre outros pesquisadores da linha da Didática da Matemática, há uma defesa da utilização de situações de aprendizagem onde os estudantes são colocados em ação diante de jogos e situações-problema. Nessas situações, mobilizam estratégias de base e conhecimentos anteriores para que sejam capazes de realizar as operações de seleção, organização e interpretação de informações, representando-as de diferentes formas e tomando decisões. Assim, o processo de construção do conhecimento matemático efetivamente ocorre e, como consequência, há a formação de sentido para o estudante.

A Engenharia Didática foi inicialmente concebida como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa. Ela possui duas funções: ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática e ser utilizada para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula. Utilizaremos neste trabalho, essas duas funções. Como metodologia qualitativa de nossa pesquisa e também prover o professor de referencial propício e motivador para conceber, aplicar e posteriormente analisar algumas tarefas didáticas.

Essas duas funções assumidas pela Engenharia Didática são denominadas por Chevallard (2009b) como: "engenharia didática de 1ª geração", que é aquela voltada para o uso em sala de aula, onde o pesquisador tem que descrever e analisar os resultados da aplicação e "engenharia didática de 2ª geração", sendo esta voltada para a pesquisa e conhecimento a respeito das metodologias e recursos que conduzem a um melhor ensino e aprendizagem, ou seja, está ligada à formação do professor.

Na figura 12 algumas características dessas engenharias são apresentadas.

Figura 12 – Engenharias de 1ª e 2ª geração, objetivos e aspectos centrais.

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: ALMOULOUD; SILVA, 2010, p. 46

Segundo Artigue (1996), a engenharia de 1ª geração se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, perpassando pelas seguintes etapas:

a) Análises preliminares: considerações sobre os conhecimentos já adquiridos em relação ao assunto em questão, incluindo análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, as concepções dos estudantes, dificuldades e obstáculos, além da análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática.

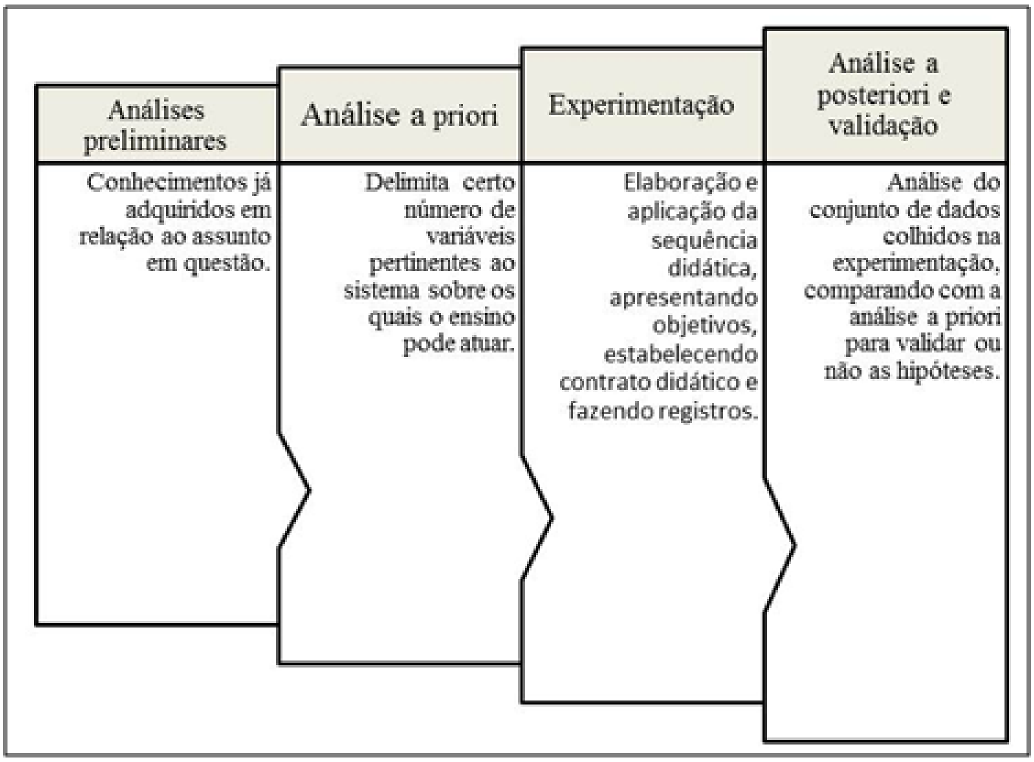
b) Concepção e análise a priori das situações didáticas: baseando-se nas análises preliminares, o pesquisador delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, levando em consideração os seguintes pontos: descrever as escolhas feitas no nível local e as características da situação adidática desenvolvida; analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o estudante; prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados.

c) Experimentação: trata-se da aplicação da sequência didática, apresentando objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecendo o contrato didático e registrando as observações feitas durante a experimentação.

d) Análise a posteriori e validação: consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos durante a experimentação. Aqui se faz necessário uma comparação com a análise a priori para validar ou não as hipóteses formuladas na investigação.

O esquema da figura 13 no ajuda a compreender melhor as etapas da Engenharia Didática.

Figura 13 – Etapas da Engenharia Didática.



Fonte: Construção própria

Ao se referir à engenharia didática de segunda geração, Perrin-Glorian (2009) afirma que o seu primeiro objetivo é o desenvolvimento de recursos para o ensino regular, ou a formação de professores. Sendo assim, necessita de vários níveis de construção. Podendo-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial de investigação: Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD).

Para distinguirmos uma da outra, vejamos a figura 14 a seguir.

Figura 14 – Comparando IDR e IDD.

Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª geração	
IDR	**IDD**
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso (s) para professores ou para a formação de professores. • Liberdade de ação para o professor • A investigação continua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: ALMOULOUD; SILVA, 2010, p. 46

Chevallard (2009), entende que a IDR será uma engenharia didática para uso, enquanto que a IDD servirá com engenharia didática para o conhecimento.

Para Brousseau (1996), o modelo de pesquisa da Engenharia Didática requer do pesquisador/professor a participação e análise das situações didáticas. Um elemento essencial da situação didática é sua intencionalidade de ser construída para a aprendizagem do estudante.

Nesse sentido, a Didática da Matemática estabelece que cabe ao professor fazer um duplo papel cíclico: procurar situações de aprendizagem onde os estudantes possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pela ação do próprio estudante; ajudar os estudantes no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, de modo análogo como fazem os matemáticos, o que conduz a tornar as produções dos estudantes fatos universais e reutilizáveis em outras situações e contextos.

Desse modo, o papel do professor é oferecer um conjunto de boas situações de ensino, de modo a aperfeiçoar a autonomia do estudante. Estas sequências de atividades devem permitir que o estudante atue sobre a situação, com a mínima interferência explícita ou condução do professor. "Se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma"(BROUSSEAU, 1996a, p. 54).

No que se refere ao estudante, Brousseau (1996) afirma que inicialmente ele se defronta com situações intencionalmente elaboradas pelo professor, situadas em um ambiente propício de jogos e problemas, contexto este que deve propiciar o estímulo necessário e convidar os estudantes a tomar a iniciativa para a busca do conhecimento. Porém, os estudantes inicialmente não devem perceber os pressupostos didáticos envolvidos no objeto de estudo, a não ser pelo êxito de uma tarefa.

3.5 Contrato Didático

Zabala (1998), a quem tomamos como referência em relação aos aspectos pedagógicos para a elaboração da Sequência Didática, defende que professores e estudantes têm papéis muito ativos durante a realização da atividade pedagógica. Afirma que as relações interativas em sala de aula devem permear as situações didáticas. Mais ainda, formula que o estudante deve elaborar representações pessoais sobre o conteúdo objeto de aprendizagem e que com isso ele construirá uma interpretação pessoal e subjetiva do que está sendo tratado; já ao se referir ao professor, revela que este deve estabelecer uma série de relações que conduzam o estudante a isso.

Nessa mesma perspectiva, no que tange à Engenharia Didática, foi possível notar que estudantes também assumem constantemente um papel ativa na construção do seu conhecimento, ou seja, estão na centralidade do processo de ensino e aprendizagem.

Zabala (1998), Oliveira (2013) e Brousseau (1996) trabalham com a Sequência Didática de maneiras análogas. Possuem suas diferenças nos pormenores, mas não há a negação do cerne da proposta, que é colocar o estudante como um ator importante no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, para que isso se efetive é necessário que os papeis do professor e dos estudantes fiquem estabelecidos previamente. É nesse contexto que precisamos nos remeter ao contrato didático.

O que é Contrato Didático?

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (BROUSSEAU, 1986, APUD SILVA, 2008, p.50).

Embora esse instrumento pedagógico tenha a maior parte do seu funcionamento sendo dada implicitamente, ele é responsável pelas relações entre professores e estudantes na sala de aula, definindo os papéis de cada um. Sendo possível observar que, segundo Brousseau (1982), essas relações se fundamentam em três polos: professor, aluno e saber. O elo entre esses três polos é construído a partir do contrato didático.

Em relação ao contrato didático, temos a descrição de três modelos de referência: normativo, indicativo e aproximativo.

No modelo normativo o centro do processo está no conteúdo e pode ser caracterizado como uma sequência de exposição seguida de atividades a serem realizadas pelos estudantes. Aqui cabe ao professor, intermediário do saber, fornecer o conhecimento acabado, explicando, dando exemplos e mostrando as noções que o estudante, sendo um sujeito receptivo e pouco participativo, deve escutar com atenção e depois aplicar o que lhe foi ensinado.

Em relação a esse tipo de comportamento de professores e estudantes, Silva (2008) afirma que:

> [...] a prática pedagógica mais comum utilizada em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos (...). O aluno por sua vez, cumpre seu contrato se ele bem ou mal compreendeu a aula dada e consegue resolver corretamente ou não os exercícios(...) (SILVA, 2008, p. 52).

Silva (2008) defende que os efeitos desse tipo de prática são: resolver a questão no lugar do estudante, quando este encontra alguma dificuldade; acreditar que os estudantes darão, naturalmente, a resposta esperada; substituir o estudo de uma noção complexa por uma analogia; interpretar um comportamento banal do estudante como uma manifestação de um saber culto; tomar como objeto de estudo uma técnica que se presume seja útil na resolução de um determinado problema, perdendo de vista o verdadeiro saber matemático a ser desenvolvido.

O modelo indicativo é centrado no estudante. Nesse viés, o professor atende as demandas do estudante, ouvindo-o, detectando seus interesses, ajudando a utilizar fontes de informações. O estudante por sua vez, estuda, busca informação, organiza informações, aprende. O saber responde aos interesses do estudante, às suas necessidades, à sua vida cotidiana, ficando a estrutura do saber em segundo plano.

Aquele que tem sua centralidade voltada para a construção do saber por parte do estudante é o modelo aproximativo. Nesse modelo, o professor é responsável por propor e organizar sequências de situações que apresentem obstáculos aos estudantes, sugerir elementos convencionais do saber e organizar a comunicação da aula. Ao estudante cabe o dever de ensaiar, buscar, propor situações. Sendo assim, este constrói esquemas de conhecimento cada vez mais ajustados à natureza do conteúdo, interagindo de maneiras diferentes. Para esse modelo, o ponto de partida é o conhecimento que os estudantes já possuem a respeito do saber, não para o estudante se tornar a peça principal, como no segundo modelo, mas para fazer as intervenções necessárias na situação didática de maneira que a construção do conhecimento seja garantida da maneira mais ampla possível.

Para Silva (2008), a estratégia pedagógica mais utilizada é aquela que se aproxima da tradicional, qual o professor ensina como fazer e o estudante exercita até aprender. Entretanto, ele acredita que é necessário uma ruptura da negociação para que haja avanço na aprendizagem. Nessa perspectiva, defende que os estudantes, com a orientação e o auxílio do professor, devem criar suas próprias estratégias de aprendizagem.

Para Brousseau (1982) o mais importante não é explicitar e tornar extremamente claras todas as regras do contrato, até porque nele consta, além das condições explícitas pelas normas, interpretações subjetivas que não são totalmente previsíveis. Logo, o necessário é delinear os seus possíveis pontos de ruptura.

Neste trabalho optaremos pelo modelo aproximativo, uma vez que proporemos o desenvolvimento de atividades que são obstáculos e desafios ao estudante, conduzindo-o a construção de seu conhecimento e o auxiliando sempre que necessário. O professor será um mediador entre o saber e o estudante. Além disso, será um motivador, um incentivador, aquele que orienta no caminho que conduzirá à aprendizagem. Por outro lado, o estudante será o sujeito que tem um histórico de conhecimento que será aproveitado e aprimorado.

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Após discorrermos sobre os motivos que nos conduziram a escolha desse tema para o trabalho, a trajetória histórica das frações e sobre os aspectos teórico-pedagógicos que levam em conta as perspectivas construtivistas para o ensino e a aprendizagem, apresentamos a nossa proposta: uma Sequência Didática para o ensino do conceito de fração.

A Sequência Didática foi pensada como proposta a ser desenvolvida junto a estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental e elaborada levando em consideração as orientações da metodologia da Engenharia Didática. As atividades presentes na sequência contam com as análises preliminares, que foram feitas considerando os obstáculos epistemológicos existentes no assunto fração, as concepções dos estudantes e a dificuldades enfrentadas por eles. Nelas constam também a concepção e a análise a priori de cada uma das situações didáticas, onde delimitamos as escolhas feitas e as características de cada tarefa, tentando prever certos comportamentos dos estudantes, tentando demonstrar como é possível controlar seus significados. Há também os preparativos para a experimentação e análise a priori e validação.

A Sequência Didática foi construída considerando três fases: a primeira consiste de um disgnóstico com o objetivo de verificar o que os estudantes sabem sobre fração; a segunda se caracteriza pelo desenvolvimento de atividades com vistas à conceitualização de fração; ao concluir o trabalho propõe-se a realização de uma avaliação das aprendizagens.

Para orientar na análise das tarefas da sondagem, apresentamos as 6 (seis) tarefas e, em seguida, tecemos comentários de modo a caracterizar cada uma delas a fim de cotejar conhecimentos e/ou dificuldades que os estudantes podem apresentar no processo de solução. Por ocasião do desenvolvimento das atividades da segunda fase, caracterizamos cada tarefa, assim como listamos o material necessário para o desenvolvimento, indicamos os objetivos, os encaminhamentos metodológicos, e fazemos uma análise a priori com vistas ao processo de resolução. Nas tarefas de avaliação, indicamos os objetivos de aprendizagem, fazemos os encaminhamentos metodológicos, apresentamos a análise a priori e, em seguida, cada uma das tarefas com suas respectivas caracterizações.

Para elaborar as atividades da Sequência Didática como um todo consideramos os diferentes significados de fração e a natureza das quantidades. A sondagem é constituida por 6 (seis) tarefas; enquanto que a segunda fase é composta por 3 (três) atividades: 01 - reconhecendo e percebendo a fração, composta por 7 (sete) tarefas, 02 - explorando a ideia de fração composta por 5 (cinco) tarefas, 03 - utilizando o conceito de fração, a qual se constitui na sistematização das produções das tarefas das atividades 01 e 02; a avaliação das aprendizagens, composta por 10 (dez) tarefas.

As atividades da segunda fase foram previstas para serem desenvolvidas em equipes de no mínimo 4 (quatro) e no máximo 6 (seis) estudantes, cujas tarefas exigem atenção, observação, colaboração, cooperação, tomada de decisão e anotações.

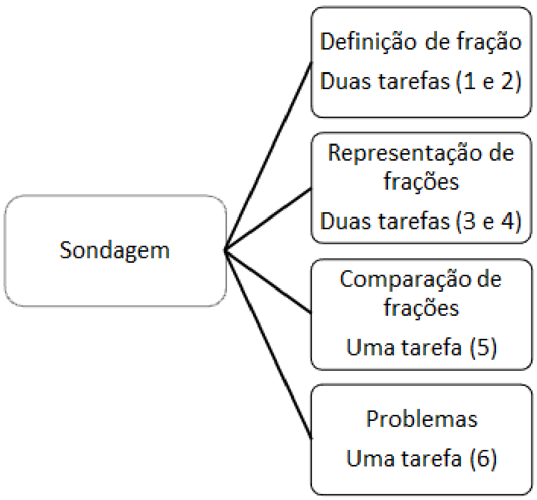
O material a ser utilizado e os procedimentos a serem adotados no desenvolviemntos das atividades de cada uma das três etapas são apresentadas em cada uma delas.

4.1 Sondagem do conhecimento

O diagnóstico se constitui de 06 (seis) tarefas, as quais procuram detectar o que os estudantes já sabem sobre fração.

As tarefas 1 (um) e 2 (dois) versam sobre a definição de fração; as tarefas 3 (três) e 4 (quatro) tratam da representação de frações; enquanto que a tarefa 5 (cinco) estabelece comparação entre frações; a tarefa 6 (seis) consiste na solução de problemas, conforme figura 15, a seguir.

Figura 15 – Detalhamento da sondagem do conhecimento



Fonte: Construção própria

Para tanto, no primeiro momento com os estudantes, logo após firmarmos os acordos do contrato didático, eles responderão às perguntas que seguem.

Tarefa 01) Você já estudou fração?

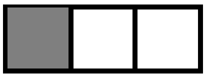
Tarefa 02) O que você entende por fração. Descreva tudo o que você lembrar. Se necessário, faça desenhos e dê exemplos.

Tarefa 03) Represente, por meio de desenhos, as seguintes frações:

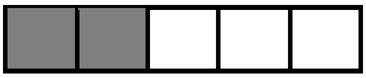
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{3}$

Tarefa 04) Dadas as figuras, escreva a fração que representa a parte acinzentada de cada uma delas.

a)



b)



c)

Tarefa 05) Utilizando os símbolos $>$ (maior), $=$ (igual) e $<$ (menor), compare as frações entre si.

a) $\frac{1}{5}$_____$\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2}$_____$\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{5}$_____$\frac{3}{10}$

c) $\frac{5}{12}$_____$\frac{3}{4}$

Tarefa 06) Resolva os problemas apresentados em cada uma das situações:

a) Rafael possui um conjunto de bolas de gude, das quais 10 são verdes e 15 são vermelhas. Qual a fração que representa as vermelhas em relação ao total?

b) Uma turma do 6º Ano possui 24 estudantes. Se um grupo de estudantes correspondente a $\frac{1}{3}$ do total de estudantes viajou para representar a escola nos jogos interescolar. Qual a quantidade de estudantes que viajou para representar a escola nos jogos?

4.1.1 Análise a priori: comentários sobre cada questão da sondagem do conhecimento

Como os PCN's (1998) sugerem o ensino de frações a partir do 3º ano do ensino fundamental, na primeira tarefa damos a oportunidade do estudante responder se ele de fato já estudou esse assunto.

A segunda tarefa, onde perguntamos o que os estudantes endentem por fração, visa esclarecer o que eles sabem sobre o assunto. Com isso, esperamos que as respostas fornecidas nos ofereçam informações acerca do conhecimento que estes apresentam em relação aos diferentes significados de fração. Para tanto, verificaremos se fazem desenhos e pintam algumas pertes, se usam situações práticas para darem exemplos de frações ou se simplesmente respondem de maneira displicente, demostrando pouco conhecimento.

Na tarefa 03 (três) tratamos da representação de fração por meio de figuras, ou mais especificamente do significado parte-todo. Nela contém 4 (quatro) itens que requer o desenho e a pintura de algumas das partes iguais. Aqui esperamos ques os estudantes façam desenhos que retratem quantidades contínuas e extensivas sem apresentarem muitas dificuldades.

Ao eleborarmos a quarta tarefa fornecemos figuras divididas em partes iguais com algumas dessas partes pintadas e é solicitado ao estudante que reconheça a parte pintada como uma fração. Tratamos da relação parte-todo em quantidades contínuas e extensivas e esperamos que os estudantes respondam corretamente com as respostas 1/3 e 2/5, apresentando um pouco de dificuldade na fração que 3/2 (maior que um inteiro).

Na quinta tarefa o estudante se depara com a comparação de frações, o que requer um trabalho que vai além do conceito inicial, é preciso que ele tenha a habilidade de trabalhar com frações equivalentes, por exemplo. Este é um item que esperamos que os estudantes demostrem dificuldades, tanto no que se refere às frações quanto ao uso dos símbolos para comparação $<$ (menor) e $>$ (maior).

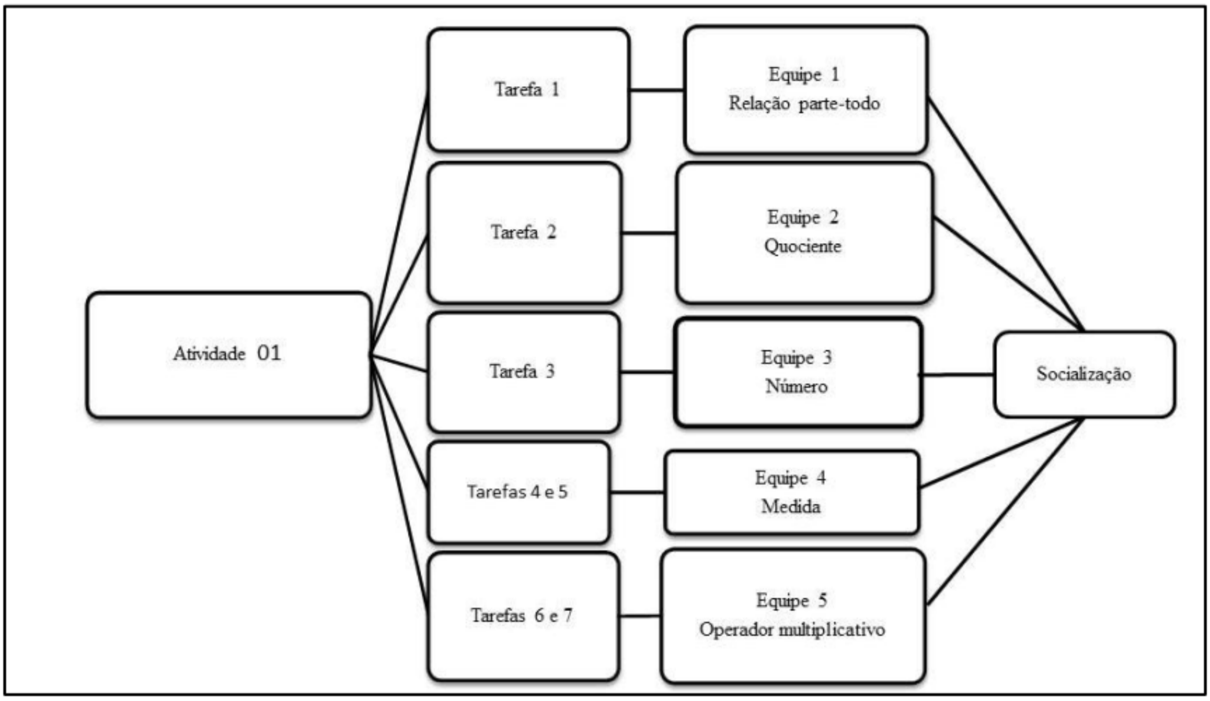
Na sexta e última tarefa da sondagem, queremos verificar como os estudantes se encontram em relação à resolução de problemas que envolvam o conceito de fração. Para esse fim, são propostos dois itens, cada um com um problema a ser resolvido. Para o item a, esperamos que as respostas sejam 15/25 ou 3/5 caso estejam familiarizados com a representação e o uso das frações. Caso apresentem dificuldades, é possível que confundam a posição do numerador e denominador ou até mesmo na interpretação, fornecendo respostas incorretas como 10/15, 15/10 e 10/25. Nessa questão, no item a, optamos por trabalhar quantidades discretas e extensivas e com o significado medida. Em se tratanto do item b, temos quantidades discretas e extensivas e o significado operador multiplicativo.

4.2 Atividade 01 - reconhecendo e percebendo a fração

Esta atividade é composta de 7 (sete) tarefas que serão desenvolvidas junto às 5 (cinco) equipes. As situações presentes nessa atividade foram pensadas de maneira a atender os diferentes significados de fração (e também a natureza das quantidades, sendo elas: contínua e extensiva; contínua e intensiva; discreta e extensiva e discreta intensiva).

Na figura 16 apresentamos o detalhamento da atividade 01.

Figura 16 – Detalhamento da atividade 01



Fonte: Construção própria

4.2.1 Objetivos da atividade 01

Perceber:

- o conceito de fração em relação ao significado **parte-todo**, ou seja, como a partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n;
- o conceito de fração em relação ao significado **quociente**, isto é, a fração indicando uma divisão ou o seu resultado;
- o conceito de fração em relação ao seu significado **número**, ou seja, sendo a localização de um ponto sobre a reta numérica;
- o conceito de fração em relação ao significado **medida**, isto é, que a fração pode ser vista a partir da relação entre duas grandezas;
- o conceito de fração em relação ao significado **operador multiplicativo**, isto é, a fração sendo um valor escalar aplicado a uma quantidade;

- a existência da fração entrelaçando-se quantidades contínuas, discretas, extensivas e intensivas;

- **Reconhecer**:
- as características, as funções e as posições na representação escrita da fração do numerador e do denominador;
- que as frações podem ser percebidas em diversas situações, não só naquelas onde é possível desenhar e dividir o inteiro emcerto númerode partes iguais.

4.2.2 Encaminhamento metodológico da atividade 01

O desenvolvimento dessa etapa do trabalho prescinde inicialmente dos seguintes passos: organizar a classe em 5 (cinco) equipes com no mínimo 4 (quatro) e no máximo 6 (seis) estudantes e a entrega do material correspondente à tarefa a ser desenvolvida.

Cada equipe receberá uma tarefa, conforme consta na tabela 1, a seguir:

Tabela 8 – Distribuição das tarefas por equipe

Equipe	**Tarefa (as)**
1	1
2	2
3	3
4	4 e 5
5	6 e 7

Fonte: Construção própria

Após o recebimento do material e da respectiva tarefa, cada equipe procederá com a realização dos seus trabalhos, com discussões, anotações, formulação de hipóteses e conclusões. Assim, a medida que vão realizando as atividades, o conceito de fração está, aos poucos, sendo construído pelos estudantes.

A conclusão das atividades será por meio da socialização dos trabalhos desenvolvidos junto à turma, onde se realizará um pequeno seminário. Nele cada equipe expõe o trabalho desenvolvido e explica o que foi compreendido. Este é um momento oportuno para que o professor faça as devidas considerações e ponderações.

4.2.3 Propostas para as tarefas da atividade 01

Proposição para a tarefa 01

A proposta dessa tarefa prevê o uso de cartolina, régua, tesoura e lápis, o que estimula o sentido da visão e possibilita a manipulação desse material. Com avisualização, manipulação, medição, marcação, recorte e organização do material os estudantes terão a oportunidade de retomar os conceitos de partes iguais, numerador e denominador. Estes constituem ideias que fundamentam a fração quanto ao significado relação parte-todo. Nosso objetivo é que o estudante conheça, reconheça e perceba a fração. Nessa tarefa estarão presentes quantidades contínuas e extensivas.

Análise a priori da tarefa 1

A primeira tarefa prevê o recorte e a separação das partes da cartolina de acordo com os critérios solicitados no problema e exige que os estudantes observem e anotem as conclusões da equipe. Possivelmente ocorra uma medição ou um recorte errado, nesse caso, chamar-se-á a atenção quanto à utilização adequada de todo o material entregue a eles (régua para medição cuidadosa e marcação com lápis, só depois o recorte com a tesoura).

Tarefa 1: fração na relação parte - todo

Como estímulo para a realização da atividade proposta, os estudantes deverão dar uma solução para a seguite situação: uma equipe de estudantes fará três apresentações, sendo elas sobre: significado de fração, numerador e denominador. Para isso,utilizar-se-ão de cartolina. Porém, eles possuem um único exemplar desse papel. Para a primeira apresentação, resolveram subdividir a cartolina em três partes iguais, retirando uma delas para o uso.

Coloquem-se no lugar dos estudantes da situação e utilizando-se da cartolina e do material que receberam, realizem demarcações na cartolina de maneira a obter três partes iguais. Recortem, separando uma delas.

Orientações:

a) Fazendo uso da régua, meça o comprimento da cartolina e divida por 3 (três).

b)Com o lápis e o auxílio da régua, marque na cartolina os pontos correspondentes ao resultado da divisão.

c) Agora, trace uma linha ou faça um tracejado demarcando-a até a outra extremidade da cartolina.

d) O que vocês estão vendo? Resposta esperada: uma cartolina divida em três partes iguais. e) Matematicamente falando, o que isso significa?
Respostas esperadas: que dividimos a cartolina em três partes iguais; uma divisão; três pedaços; três tiras; três retângulos; fração.

f) O que é uma fração?

g) Consulte no dicionário o significado de fração.

h) Veja como o livro didático define fração.

i) Quais os elementos de uma fração?

j) Como se representa numericamente uma fração?

k) O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

l) Fazendo uso da tesoura, recorte uma das partes da cartolina.

Agora, discutam, tirem conclusões e respondam:

a) Em quantas partes iguais acartolina foi demarcada/tracejada? Emse tratando de fração, que nome pode-se dar a essa quantidade/parte:

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

b) Das 3 (três) partes em que foi tracejada ou demarcada a cartolina, foi recortada e separada 1 (uma) delas. Em se tratando de fração, que nome pode - se dar a essa quantidade ou parte: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

c) Faça o desenho de um retângulo, divida em 3 (três) partes iguais e pinte uma delas, escrevendo ao lado a fração correspondente à 1 (uma) parte pintada.

Observação: espera-se que os estudantes, com o devido auxílio do professor, não encontrem muitas dificuldades para a realização desta etapa da tarefa.

Proposição para a tarefa 2

A proposta desta tarefa prevê o uso de 1 (uma) barra de chocolate de 150 gramas e de folha fornecida pelo professor para as anotações, observações e conclusões.

No decorrer dessa tarefa prevalecerá o trabalho com quantidades contínuas e extensivas por meio da utilização da barra de chocolates, trabalhando a ideia de que a fração pode ser vista como uma divisão ou o seu resultado, objetivando que o estudante reconheça e perceba a fração.

Análise a priori da tarefa 2

A segunda tarefa estabelece a necessidade da separação de uma barra de chocolate em três partes iguais, de acordo com os critérios solicitados e exige que os estudantes observem e anotem as conclusões da equipe. Devido à faixa etária dos estudantes (em torno de 11 anos) e também pelo material ser um doce que muitos apreciam, o professor deve ter o cuidado de reforçar o objetivo da tarefa e os estimular a começarem os trabalhos o quanto antes. Assim, é de se esperar que a euforia inicial acabe. Quanto à manipulação e separação em partes, espera-se que não haja nenhuma dificuldade, uma vez que a barra de chocolate é previamente cheia de ranhuras que facilitam a separação em partes. O professor pode chamar a atenção dos estudantes para essa especificidade, atingindo o objetivo de reconhecer e perceber a fração quanto ao significado quociente.

Tarefa 2: fração como quociente

Para dar sentido ao que os estudantes da equipe 02 farão, proporemos a divisão de uma barra de chocolate igualmente entre três crianças como solução da seguinte situação: Mari, Neto e Zeca ganharam uma barra de chocolate de 150 gramas e querem a dividir igualmente entre eles. Usem a barra de chocolate fornecida a vocêse realizem essa separação em três partes iguais, relacionando cada uma das partes ao seu respectivo dono.

Orientações:

a) Abra a barra de chocolate e note que há subdivisões em tamanhos iguais;

b) Use as subdivisões para desmembrar a barra em3 (três) partes iguais. O que é uma fração?
Consulte no dicionário o significado de fração.
Veja como o livro didático define fração.
Quais os elementos de uma fração?
Como se representa numericamente uma fração?
O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

1) Qual o total de partes que a barra de chocolate foi dividida? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a esses pedaços/partes: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

2) Com quantas partes da barra de chocolate cada um ficou? Em se tratando de fração, que nome pode - se dar a essa parte: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja numerador.

3) Faça o desenho de um retângulo, divida em 3 (três) partes iguais e pinte uma delas, escrevendo ao lado a fração correspondente à 1 (uma) parte pintada.

Observação: espera-se que os estudantes, com o devido auxílio do professor, não encontrem muitas dificuldades para a realização desta etapa da tarefa.

Proposição para a Tarefa 3

Essa tarefa será desenvolvida com o uso da reta numerada, onde os estudantes terão que subdividir o espaço entre o 0 (zero) e o 1 (um) conforme orientações constantes na atividade. Com a manipulação, visualização, marcações na reta e discussões com os colegas, os estudantes terão a oportunidade de retomar os conceitos importantes para a sua compreensão a respeito de fração. Enfim, com essas construções o estudante reconhecerá e perceberá a fração quanto ao seu significado número. Este trabalho também levará em consideração quantidades contínuas e extensivas.

Material:
- folha de papel milimetrado contendo uma reta numerada a partir do 0 (zero);
- régua;
- lápis;
- barbante branco de 15 cm;
- tinta guache colorida;
- folha fornecida pelo professor para anotações e conclusões.

Análise a priori da tarefa 3

Nessa tarefa utilizamos a reta numerada e o material fornecido, onde os estudantes terão que medir, marcar e dividir em partes iguais um inteiro, conforme orientações. Essa etapa exige que os estudantes observem atentamente à reta e o barbante e anotem as conclusões da equipe. É possível que ocorram medições ou marcações erradas. Nesse caso, chamar-se-á a atenção quanto à utilização adequada do material entregue a eles (régua para medição cuidadosa e marcação com lápis no papel milimetrado, que facilita muito para que as marcações fiquem corretas).

Tarefa 3: fração como número na reta numérica

Trata-se da localização de um número fracionário da reta numérica.
De posse do material a equipe 03 deve desenvolver as atividades que segue.

Orientações

a) utilizando a reta numerada a partir do 0 (zero), dividir o espaço existente entre o 0 (zero) e o 1 (um), com dois traços igualmente espaçados, em 3 (três) partes iguais.

b) saindo do 0 (zero), em direção ao 1 (um), faça um ponto no local do primeiro traço, sendo que este ponto representará a localização de um número fracionário.
O que é uma fração?
Consulte no dicionário o significado de fração.
Veja como o livro didático define fração.
Quais os elementos de uma fração?
Como se representa numericamente uma fração?
O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

1) Qual o total de partes iguais que o espaço entre o zero e o um foi dividida? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essas partes: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

2) Qual o total de partes do espaço entre o zero e o um foi percorrida para marcar a localização do ponto? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essa parte: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja numerador.

3) Usando o barbante branco e a régua, faça as medições necessárias e pinte uma parte do barbante que corresponde a 1/3 do total.

Observação: com o auxílio do professor e em virtude das atividades feitas anteriormente, espera-se que os estudantes não apresentem dificuldades para realizarem essa etapa da tarefa.

Proposição para a tarefa 4: fração como medida (parte A da equipe 04)

A tarefa é organizada em duas partes, que aqui chamaremos de A e B. Essa questão requer a utilização de material concreto e com quantidades discretas e intensivas. Ele estimula o sentido da visão e possibilita que os estudantes manipulem esse material. Com a visualização, manipulação, e organização do material, eles terão a oportunidade de retomar os conceitos preliminares que os ajudarão na melhor compreensão da fração quanto ao significado medida, sendo que o resultado obtido por eles será uma medida entre 0 (zero) e 1 (um).

Material:
- 3 bolas de gude de mesmo formato e tamanho, sendo 2 (duas) verdes e 1 (uma) branca;
- 1 (uma) urna para a colocação das bolas de gude;
- folha fornecida pelo professor para anotações e conclusões.

Análise a priori da tarefa 4

Essa tarefa prevê a utilização de bolas de gude e exige que os estudantes observem e anotem as conclusões da equipe, colocando - os em contato direto com mais um significado da fração: medida. Possivelmente não se recordem ao ainda não estudaram probabilidade, nesse caso, sendo este conteúdo objeto de estudo na série anterior, o professor poderá lembrá-los rapidamente os preceitos básicos desse saber ou até mesmo instigá-los a investigarem um pouco mais esse assunto.

Tarefa 4: fração como medida (parte A da equipe 04)

A fração será trabalhada a partir da relação entre duas grandezas. No caso da probabilidade, na forma decimal, esse medida estará sempre entre 0 (zero) e 1 (um).

Pensem, se articulem, troquem ideias, usem o material cedido e deem uma solução para a seguinte situação: determinar a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bola de gude branca de uma urna que possui duas bolas de gude verdes e uma branca, sendo todas elas idênticas.

Observação: a probabilidade da ocorrência de um determinado evento é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Orientações

a) colocar as três bolas de gude na urna;

b) retirar uma ao acaso;

c) anote a cor da bola de gude: __________.
O que é uma fração?
O que é razão entre dois números?
Consulte no dicionário o significado de fração.
Veja como o livro didático define fração.
Quais os elementos de uma fração?
Como se representa numericamente uma fração?
O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

1) qual o total de bolas de gude colocadas na urna? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essas partes: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

2) Na experiência, quantas bolas foram retiradas da urna? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essa parte: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja numerador.

3) Faça o desenho de um retângulo, divida em 3 (três) partes iguais e pinte uma delas, escrevendo ao lado a fração correspondente à 1 (uma) parte pintada.

Observação: espera-se que os estudantes, com o devido auxílio do professor, não encontrem muitas dificuldades para a realização desta etapa da tarefa.

Proposição para a tarefa 5: fração como medida (parte B da equipe 04)

Aqui, o estudante fará o uso da relação entre duas grandezas para trabalhar o conceito de fração com quantidades contínuas e intensivas. Com a visualização, manipulação, medição, mistura e organização do material, os estudantes terão a oportunidade de retomar os conceitos iniciais que o ajudarão na melhor compreensão da fração.

Material:
- jarra de suco transparente;
- copos descartáveis de 200 mililitros;
- suco concentrado que possui uma coloração intensa, ou seja, que fique mais transparente a medida que se acrescenta água;
- água mineral.

Análise a priori da tarefa 5

A tarefa em questão objetiva colocar o estudante em contato com mais um significado de fração: o de medida. Eles irão trabalhar com líquidos, misturá-los, observar tonalidades obtidas e organizar os materiais. Como temos líquidos envolvidos, é possível que ocorra algum derramamento. Nesse caso, tentando prevenir esse acontecimento, orientar-se-á quanto à atenção e ao cuidado, deixando os papéis de anotações em uma mesa diferente. Possivelmente, no momento das medições pode ser que, por falta de atenção, eles deixem uma medida com uma quantidade maior ou menor que a anterior. O professor deve orientar quanto a isso e observar se estão fazendo corretamente, ressaltando que as quantidades devem ser iguais. Objetiva-se fazer com que o estudante reconheça e perceba a fração tendo em vista o significado medida.

Tarefa 5: Fração como medida (parte B da equipe 04)

A fração será trabalhada a partir da relação entre duas grandezas.

De posse do material a equipe 04 deve desenvolver as atividades que segue.

Orientações

a) na jarra transparente recebida, colocar um copo de suco concentrado e dois copos, de mesma medida que a usada para o suco, de água mineral;

b) observar e anotar como ficou a coloração da mistura homogênea.
O que é uma fração?
Consulte no dicionário o significado de fração.
Veja como o livro didático define fração.
Quais os elementos de uma fração?
Como se representa numericamente uma fração?
O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

1) Quantos copos de líquido, entre suco e água, foram colocados na jarra? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essa partes: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja denominador.

2) Da quantidade de copos de líquido colocados na jarra, quantos deles são de suco concentrado? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essa parte: numerador ou denominador?

Observação: como já fizeram consultas ao livro didático e ao dicionário, espera-se a resposta seja numerador.

3) Escreva a fração correspondente ao suco concentrado em relação ao total de líquido colocado na jarra. Logo após, desenhe retângulo, divida-o em três partes iguais e pinte uma delas.

Proposição para a Tarefa 6: fração como operador multiplicativo (parte A da equipe 05)

A equipe 05 fará o desenvolvimento de duas tarefas, que será organizada em partes e aqui denominaremos de parte A e parte B. A partir delas serão trabalhados os conceitos de fração no tocante ao significado operador multiplicativo.

Materiais:
- barra de chocolate de 150 gramas;
- folha entregue pelo professor para anotações, observações e conclusões.

Essa tarefa se desenvolve, novamente, com a utilização de uma barra de chocolate e exige dos estudantes atenção, anotação de dados e conclusões. Oportuniza-se a eles o trabalho com quantidade contínua e extensiva e requer deles o trabalho com as ideais básicas sobre as frações: partes iguais, numerador, denominador e divisão. Com isso, objetiva-se que estes percebam e reconheçam as frações.

Análise a priori da tarefa 6

Nessa tarefa, espera-se que ao contarem os pedacinhos das subdivisões preexistentes na barra eles cheguem ao número 18 (dezoito), uma vez que se escolherá uma barra de 150g que possua características a possibilitarem tal contagem. Possivelmente os estudantes repartam a barra de chocolate em três partes iguais sem nenhuma dificuldade, visto que, as subdivisões preexistentes na barra tornam o processo trivial. Portanto, os estudantes não sentirão, a princípio, nenhuma dificuldade em realizá-la. No entanto, é válido ratificar que devem estar atentos quanto às orientações dadas.

Tarefa 06: fração como operador multiplicativo (parte A da equipe 05)

A fração será vista como valor escalar aplicado a uma quantidade.
De posse do material a equipe 05 deve desenvolver as atividades que seguem.
Orientações

a) contar e anotar o total de pedacinhos em que foi subdividida a barra de chocolate;

b) separar a barra de chocolate em três partes iguais, cada um contendo a mesma quantidade de pedacinhos;
 O que é uma fração?
 Consulte no dicionário o significado de fração.
 Veja como o livro didático define fração.
 Quais os elementos de uma fração?
 Como se representa numericamente uma fração?
 O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

c) contar quantos pedacinhos tem em cada em cada uma das três partes.

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

a) em quantas partes foi dividida a barra de chocolate? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essas partes: numerador ou denominador?

Observação: como os estudantes já buscaram informações no dicionário e no livro didático sobre frações, espera-se que a resposta seja denominador.

b) considerando uma dessas partes, em se tratando de fração, que nome pode-se dar a ela: numerador ou denominador?

Observação: como os estudantes já buscaram informações no dicionário e no livro didático sobre frações, espera-se que a resposta seja numerador.

c) Escreva a fração correspondente à uma das partes em que foi dividida a barra de chocolate.

---

d) a fração dada como resposta da "letra c" desta tarefa pode ser vista também como uma quantidade de pedacinhos. Que quantidade é essa?

---

e) o que se pode concluir em relação às anotações feitas nas "letra c e d" desta tarefa?

Observação: Espera-se que os estudantes notem que 1/3 da barra de chocolates equivale a 6 (seis) dos 18 (dezoito) pedacinhos constantes na barra de chocolate. Sendo, portanto, um valor escalar aplicado a uma quantidade.

Proposição para a tarefa 7: fração como operador multiplicativo (parte B da equipe 05)

No desenrolar dessa tarefa os estudantes trabalharão com quantidades discretas e extensivas, utilizando material concreto, estimulando o sentido da visão e exigindo deles tomadas de decisão, observações, trabalho em equipe, organização do material e formulação de respostas e conclusões. Assim, poderão utilizar-se de noções básicas que ajudam na compreensão da ideia de fração, sendo elas: divisão em partes iguais, partes a serem consideradas, total de partes e resultado da divisão (quociente).

Materiais:

- 15 bolas de gude idênticas;
- folha entregue pelo professor para as devidas anotações, observações e conclusões.

Análise a priori da tarefa 7

Os estudantes farão a separação da quantidade total de objetos em subconjuntos com quantidades menores de e de igual valor sem muita dificuldade. O esperado é que eles percebam que podem falar a respeito dessas quantidades de duas maneiras, sem provocar nenhum tipo de prejuízo à verbalização, podendo expressar suas falas assim: 5 (cinco) bolas ou um terço do total de bolas. Assim, perceberão e reconhecerão a fração em mais este significado.

Tarefa 07: fração como operador multiplicativo (parte B da equipe 05)

A fração será trabalhada como um valor escalar aplicado a uma quantidade. De posse do material a equipe 05 deve desenvolver as atividades que seguem.

Orientação

a) Separar as 15 bolas de gude em subconjuntos ou grupos, cada um com 5 (cinco) bolas.
O que é uma fração?
Consulte no dicionário o significado de fração.
Veja como o livro didático define fração.
Quais os elementos de uma fração?
Como se representa numericamente uma fração?
O que significa cada elemento (numerador e denominador) da fração?

Agora, analisem, discutam, tirem conclusões e respondam:

1) Quantos subconjuntos ou grupos foram formados? Em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essas partes: numerador ou denominador?

Observação: em virtude dos estudantes terem passado pela experiência de buscarem informações sobre frações no dicionário e também no livro didático, espera-se que seja fornecida a resposta denominador.

2) Considerando um desses subconjuntos ou grupos, em se tratando de fração, que nome pode-se dar a essa parte: numerador ou denominador?

Observação: em virtude dos estudantes terem passado pela experiência de buscarem informações sobre frações no dicionário e também no livro didático, espera-se que a resposta seja numerador.

3) Escreva a fração que representa um desses grupos em relação ao total de grupos formados.

---

4) A fração dada como resposta da “letra c” desta tarefa pode ser vista também como uma quantidade de bolas. Que quantidade é essa?

---

5) O que se pode concluir em relação às anotações feitas nas “letra c e d” desta tarefa?

Observação: Espera-se que os estudantes notem que 1/3 da quantidade de bolas de gude equivale a 5 (cinco) das 15 (quinze) existentes. Sendo, portanto, um valor escalar aplicado a uma quantidade.

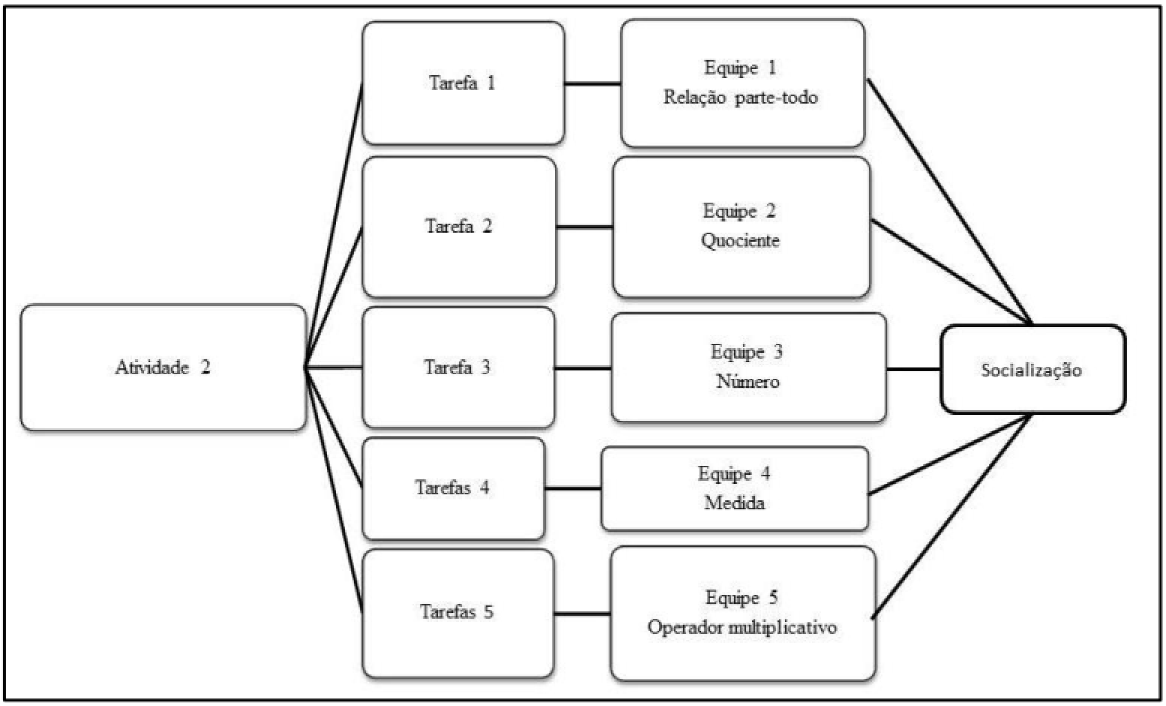
4.3 Atividade 02 - explorando um pouco mais a ideia intuitiva de fração

Esta atividades é composta de 5 (cinco) tarefas que serão distribuídas entre os 5 (cinco) grupos de estudantes da sala. Cada grupo ficará responsável por um tipo de situação, dando continuidade no trabalho desenvolvido na atividade 01. Sempre que necessário, os estudantes poderão recorrer às anotações e conclusões da atividade anterior, fazendo com que revisem constantemente o trabalho feito. Assim, a apropriação do conhecimento será feita com o auxílio do desenvolvimento das atividades da Sequência Didática.

As situações que aparecem nesta atividade foram pensadas de maneira a atender os diferentes significados de fração e também a natureza das quantidades.

O detalhamento da atividade 02 está presente na figura 17.

Figura 17 – Detalhamento da atividade 02



Fonte: Construção própria

4.3.1 Objetivos da atividade 02

- Explorar:

- a ideia de fração, com numeradores maiores do que 1 (um) e menores do que o denominador (a chamada fração própria);
- a ideia de fração, com numeradores iguais aos denominadores ou com numeradores múltiplos inteiros dos denominadores (frações aparentes). Exemplos: 3/3, 4/2 e 6/3;
- a ideia de fração, com numeradores maiores que os denominadores, mas não são múltiplos dele (as chamadas frações impróprias). Exemplos: 4/3, 5/2 e 7/4.

4.3.2 Encaminhamento metodológico da atividade 02

- discutir a respeito das dificuldades encontradas na atividade anterior;
- manter a mesma formação das equipes;
- o professor deve distribuir o material conforme a tarefa a ser desenvolvida pelas equipes, dando sequência no significado de fração recebido na atividade 01 pela equipe;
- socialização das atividades desenvolvidas junto à turma se dará por meio de apresentações da tarefa desenvolvida pelo grupo à turma, onde o professor fará as devidas considerações e ponderações necessárias para a sistematização do conhecimento.

O desenvolvimento desta atividade possibilita ao estudante aplicar e ampliar os conhecimentos adquiridos na atividade 01, ou seja, objetiva-se explorar a ideia de fração na resolução de situações propostas a partir da problemática inicial.

Análise a priori

As tarefas propostas nessa atividade são continuidades daquelas propostas na atividade 01. Cada equipe seguirá trabalhando com o mesmo significado de fração recebido inicialmente, entretanto serão explorados aspectos que visam uma melhor compreensão da fração. O trabalho com as frações explorará três aspectos: mais que uma das partes, porém menor que um inteiro (fração própria); partes que formam inteiros (fração aparente) e partes formam mais que inteiros (frações impróprias). Nesse momento, conduzir-se-á o processo de maneira bastante próxima das equipes: orientando; fazendo com que os estudantes reorganizem as ideias erradas; solicitando que eles retomem e repensem o problema da atividade 01; estimulando raciocínios corretos; auxiliando e motivando todos a participarem.

A construção correta do conceito de fração levando em consideração, sobretudo, os seus diferentes significados e as diferentes quantidades, dependerá e muito desta etapa da sistematização do conhecimento. É esperado também que alguns não se identifiquem com essa maneira de se conduzir o processo educativo. Para estes, dar-se-á mais incentivos para que deem continuidade ao raciocínio, formulando perguntas intrigantes que os levem a se sentir desafiados e encorajados a buscar respostas.

Apresentamos, a seguir, o detalhamento de cada uma das tarefas a serem desenvolvidas nesta atividade.

4.3.3 Propostas para as tarefas da atividade 02

Tarefa 1: explorando a relação parte-todo

A fração será explorada como parte menor que o inteiro, igual ao inteiro e maior que o inteiro.
Retomando a situação apresentada na tarefa 01, a equipe 01 responderá aos seguintes questionamentos:

1) Separando **duas das três partes em que a cartolina foi demarcada/tracejada**, que fração teria? A fração que representa essas duas partes consideradas da cartolina é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: como os estudantes terão a cartolina utilizada na atividades 01 para manipularem, espera-se que eles notem que a fração representa uma parte menor que um inteiro.

2) Separando **três das três partes em que a cartolina foi demarcada/tracejada**, que fração teria? A fração que representa essas três partes da cartolina é menor,

igual ou maior que um inteiro?

Observação: como os estudantes terão a cartolina utilizada na atividade 01 para manipularem, espera-se que eles notem que a fração representa um inteiro.

3) Suponha que a equipe disponha de duas cartolinas idênticas e subdividam as duas em três partes iguais. Separando ou considerando **quatro dessas partes**, que fração teria? A fração que representa essas quatro partes da cartolina é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que após discussões, ponderações, análises, desenhos e busca nas anotações anteriores, os estudantes cheguem a conclusão de que a fração é maior que um inteiro.

4) Suponha que a equipe disponha de duas cartolinas idênticas e subdividam as duas em três partes iguais cada. Separando **cinco dessas partes**, que fração teria? A fração que representa as cinco partes da cartolina é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que após discussões, ponderações, análises, desenhos e busca nas anotações anteriores, os estudantes cheguem a conclusão de que a fração é maior que um inteiro.

5) Suponha que a equipe disponha de duas cartolinas idênticas e subdividam as duas em três partes iguais cada. Separando **seis dessas partes**, que fração teria? A fração que representa as seis partes da cartolina é, na verdade, quantos inteiros?

Observação: espera-se que após discussões, ponderações, análises, desenhos e busca nas anotações anteriores, os estudantes cheguem a conclusão de que a fração é, na verdade, 2 (dois) inteiros.

6) Suponha que a cartolina tenha sido demarcada/tracejada em 10 (dez) partes iguais. Considerando 1 (uma) dessas 10 (dez) partes, que fração teria? Considerando 2 (duas) dessas 10 (dez) partes, que fração teria? Considerando 3 (três) dessas 10 (dez) partes, que fração teria? Agora, pesquise no livro didático o nome que se dá às frações de denominadores 10 (dez) e 100 (cem).

Observação: é esperado que os estudantes percebam que se trata das frações 1/10 (um décimo), 2/10 (dois décimos) e 3/10 (três décimos). Com a pesquisa espera-se que cheguem à conceituação de frações decimais e frações centesimais. Estas últimas muito presentes nas porcentagens.

Para sintetizar e sistematizar as informações, os estudantes preencherão a tabela 9

Tabela 9 – Sistematização e sintetização das informações - parte todo.

Questão	Fração (ões) encontrada (as)	Escreva a(as) fração (ões) na forma decimal e centesimal	Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			
6)			

Fonte: Construção própria

Tarefa 2: explorando a ideia de fração como quociente

A fração será explorada como parte menor que o inteiro, igual ao inteiro e maior que o inteiro.

Retomando a situação apresentada na tarefa 02 da atividade 01, a equipe 02 responderá aos seguintes questionamentos:

1) Dividindo **duas barras de chocolate de 150 gramas idênticas entre três crianças**, com que fração da barra de chocolate cada criança ficará? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que, com a retomada a situação desenvolvida na atividade 01, os estudantes percebam que a fração 2/3 é menor que um inteiro.

2) Dividindo **três barras de chocolate de 150 gramas idênticas entre três crianças**, com que fração da barra de chocolate cada criança ficará? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes não sintam dificuldades em perceber que a fração 3/3 representa um inteiro.

3) Dividindo **quatro barras de chocolate de 150 gramas idênticas entre três crianças**, com que fração da barra de chocolate cada criança ficará? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 4/3 é maior que um inteiro.

4) Dividindo **cinco barras de chocolate de 150 gramas idênticas entre três crianças**, com que fração da barra de chocolate cada criança ficará? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: é esperado que os estudantes percebam que a fração 5/3 é maior que um inteiro.

5) Dividindo **seis barras de chocolate de 150 gramas idênticas entre três crianças**, com que fração da barra de chocolate cada criança ficará? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 6/3 representa 2 (dois) inteiros.

6) Suponha que 1 (uma) barra de chocolate seja dividida igualmente entre 10 (dez) crianças. Com que fração da barra de chocolate ficaria cada criança? E se fossem 2 (duas) barra de chocolate divididas igualmente entre 10 (dez) crianças, com que fração da barra de chocolate cada crianças ficaria? Sendo 3 (três) barras de chocolate divididas igualmente entre 10 (dez) crianças, com que fração da barra de chocolate cada uma ficaria? E sendo 3 (três) barras divididas igualmente entre 100 (cem) crianças, com que fração da barra cada uma ficaria? Por fim, pesquise no livro didático que nome se dá às frações de denominadores 10 (dez) e 100 (cem).

Observação: Espera-se que as respostas dadas pelos estudantes sejam: 1/10 (um décimo), 2/10 (dois décimos), 3/10 (três décimos) e 3/100 (três centésimos). Na pesquisa é esperado que consigam conceituar a fração decimal e a fração centesimal.

Para sintetizar e sistematizar as informações, a fim de interpretar melhor os dados constantes nas tarefas, os estudantes preencherão a tabela 10.

Tabela 10 – Sistematização e sintetização das informações - quociente.

Questão	Fração (ões) encontrada (as)	Escreva a(as) fração (ões) na forma decimal e centesimal	Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			
6)			

Fonte: Elaboração própria

Tarefa 3: explorando a ideia de fração como número

A fração será explorada como parte menor que o inteiro, igual ao inteiro e maior que o inteiro.

Retomando a situação apresentada na tarefa 03, a equipe 03 responderá aos seguintes questionamentos:

1) Na reta numérica, a partir de zero, percorrer, no sentido do número 1 (um), **duas das três partes em que foi dividida a distância entre o zero e o 1 (um)** e marcar um ponto. Esse ponto representa que fração do intervalo entre o zero e o um? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 2/3 representa uma quantidade menor que um inteiro.

2) Na reta numérica, a partir do zero, percorrer, no sentido do número um, **três das três partes em que foi dividida a distância entre o zero e o um** e marcar um ponto. Esse ponto representa que fração do intervalo entre o zero e o um? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes percebam facilmente que a fração 3/3, ou seja, que o ponto localizado exatamente no número 1 (um), é igual a 1 (um).

3) Na reta numérica, dividir os intervalos entre os números inteiros em três partes iguais cada. Agora, a partir do zero, percorrer, no sentido do um e inclusive ultrapassá-lo,

quatro das partes iguais e marcar um ponto. Esse ponto representa que fração do intervalo entre o zero e o um? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que um ponto que se localiza na reta numérica entre o 1 (um) e o 2 (dois) seja uma fração maior de que 1 (um) inteiro.

4) Agora, a partir de zero, percorrer, no sentido do um, cinco das partes iguais e marcar um ponto. Esse ponto representa que fração do intervalo entre o zero e o um? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes, a partir da análise das atividades anteriores e da própria reta numérica, percebam que um ponto que se localiza na reta numérica entre o 1 (um) e o 2 (dois) seja uma fração maior de que 1 (um) inteiro.

5) Agora, a partir de zero, percorrer, no sentido do um, seis das partes iguais e marcar um ponto. Esse ponto representa que fração do intervalo entre o zero e o um? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 6/3 representa 2 (dois) inteiros.

6) Suponha, agora, que o intervalo entre o 0 (zero) e o 1 (um) seja dividido em 10 partes. Percorrendo, no sentido do número 1 (um), 1 (uma) dessas partes, que fração teria? Percorrendo, no mesmo sentido, 2 (duas) dessas partes, que fração teria? E se fossem percorridas, no mesmo sentido, 3 (três) dessas partes, que fração teria? E no caso de espaço entre o 0 (zero) e o 1 (um) ser dividido em 100 (cem) partes e destas serem percorridas 3, que fração teria? Para finalizar, pesquise no livro didático, o nome que se dá às frações de denominadores 10 (dez) e 100 (cem).
Observação: espera-se que os estudantes deem as seguintes respostas: 1/10 (um décimo), 2/10 (dois décimos), 3/10 (três décimos) e 3/100 (três centésimos). Na pesquisa, é esperado que encontrem a conceituação de frações decimais e fração centesimais.

Para sintetizar e sistematizar as informações, os estudantes preencherão a tabela 11.

Tabela 11 – Sistematização e sintetização das informações - número.

Questão	Fração (ões) encontrada (as)	Escreva a(as) fração (ões) na forma decimal e centesimal	Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			
6)			

Fonte: Construção própria

Tarefa 4: explorando a ideia de fração como medida

A fração será explorada como parte menor que o inteiro, igual ao inteiro e maior que o inteiro.
Retomando a situação apresentada na tarefa 05 - parte B da atividade 01, a equipe 04 responderá aos seguintes questionamentos:

1) Na jarra, qual é a fração que representa a **quantidade de água em relação ao total de líquido**? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 1/3 representa uma quantidade menor do que um inteiro.

2) Na jarra da situação anterior será colocado mais uma medida (copo de 200 mililitros) de suco concentrado. Qual é a fração que representa a **quantidade de água em relação à quantidade de suco concentrado**? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro? Explique o que isso significa em ternos de proporção.

   Observação: espera-se que os estudantes respondam 2/2 ou 1/1 e percebam que estas quantidades são iguais a um inteiro. No que tange à proporção, é esperado que respondam 2 para 2, 1 de cada, mesma quantidade, ...

3) Na jarra da situação anterior (letra b) será colocado mais uma medida (copo de 200 mililitros) de suco concentrado. Qual é a fração que representa a **quantidade de suco concentrado em relação à quantidade de água**? Essa fração é menor,

igual ou maior que um inteiro? Explique o que isso significa em ternos de proporção.

Observação: é esperado que os estudantes respondam 3/2 e percebam que essa fração representa uma quantidade maior do que um inteiro. Quanto à proporção, é possível que respondam: 3 a cada 2, 1 e meio de suco a cada 1 de água, tem mais suco concentrado do que água, ...

4) Na jarra da situação anterior (letra c) será colocado mais uma medida (copo de 200 mililitros) de suco concentrado. Qual é a fração que representa a **quantidade de suco concentrado em relação à quantidade de água**? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro? Explique o que isso significa em ternos de proporção.

Observação: espera-se que os estudantes respondam 4/2 e que percebam que essa fração representa 2 (dois) inteiros. Já no que se refere a proporção, é possível que respondam: 2 a cada 1, 2 pra 1, 2 de suco e 1 de água, 4 de suco e 1 de água, ...

5) Suponha que na jarra sejam colocados 10 (dez) copos de líquido, sendo 1 (um) de suco concentrado e 9 de água. Que fração o suco concentrado representa em relação ao total de líquido? E se fossem 2 (dois) copos de suco concentrado e 8 (oito) de água, que fração o suco concentrado representa em relação ao total de líquido? Sendo colocados 3 (três) copos de suco concentrado e 7 (sete) copos de água, que fração o suco concentrado representa em relação ao total de líquido da jarra? Pense ainda na hipótese de um recipiente conter 100 copos desses líquidos, sendo 3(três) de suco concentrado e 97 (noventa e sete) de água, que fração teria? Por fim, pesquisem no livro didático o nome que se dá às frações cujos denominadores são 10 (dez) e 100 (cem).

Observação: espera-se que as respostas dos estudantes sejam 1/10 (um décimo), 2/10 (dois décimos), 3/10 (três décimos) e 3/100 (três centésimos). Quanto à pesquisa, é esperado que consigama conceituação de frações decimais e frações centesimais.

Para sintetizar e sistematizar as informações, os estudantes preencherão a tabela 12.

Tabela 12 – Sistematização e sintetização das informações - medida.

Questão	Fração (ões) encontrada (as)	Escreva a(as) fração (ões) na forma decimal e centesimal	Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			

Fonte: Construção própria

Tarefa 5: explorando a ideia de fração como operador multiplicativo

A fração será explorada como parte menor que o inteiro, igual ao inteiro e maior que o inteiro.

Retomando a situação apresentada na tarefa 07 - parte B da atividade 01, a equipe 05 responderá aos seguintes questionamentos:

1) Se considerarmos **dois dos três grupos de bolas de gude**, que fração teria? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 2/3 é menor do que um inteiro.

2) Se considerarmos três dos **três grupos de bolas de gude**, que fração teria? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

   Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 3/3 representa uma quantidade igual a um inteiro.

3) Dividir dois pacotes com 15 (quinze) bolas de gude cada. A divisão deve ser feita de maneira que cada pacote seja subdividido em três partes iguais, cada uma contendo 5(cinco) bolas de gude, assim serão 6 (seis) pacotes com 5 (cinco) bolas de gude em cada. Se considerarmos 4 (quatro) dessas partes, que fração teria em relação às três partes em que foi subdividido cada pacote? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 4/3 é maior que um inteiro.

4) Dividir dois pacotes com 15 (quinze) bolas de gude cada. A divisão deve ser feita de maneira que cada pacote seja subdividido em três partes iguais, cada uma contendo 5 (cinco) bolas de gude, assim serão 6 (seis) pacotes contendo 5 (cinco) bolas de gude em cada. Se considerarmos 5 (cinco) dessas partes, que fração teria em relação às três partes em que foi subdividido cada pacote? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 5/3 é maior que um inteiro.

5) Dividir dois pacotes com 15 (quinze) bolas de gude cada. A divisão deve ser feita de maneira que cada pacote seja subdividido em três partes iguais, cada uma contendo 5 (cinco) bolas de gude, assim serão 6 (seis) pacotes contendo 5 (cinco) bolas de gude em cada.. Se considerarmos 6 (seis) dessas partes, que fração teria em relação às três partes em que foi subdividido cada pacote? Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?

Observação: espera-se que os estudantes percebam que a fração 6/3 representa 2 (duas) unidades inteiras.

6) Suponha que havendo 150 (cento e cinquenta) bolas de gude, onde serão subdivididas em 10 (dez) pacotes, cada um com 15 bolas de gude. Considerando 1 (um) um desses 10 (dez) pacotes, que fração teria em relação ao total de pacotes? Considerando 2 (dois) desses 10 (dez) pacotes, que fração teria em relação ao total de pacotes? Considerando 3 (três) desses 10 (dez) pacotes, que fração teria em relação ao total de pacotes? Sendo 1500 (mil e quinhetas) bolas de gude, separadas em pacotes, cada um contendo 15 (quinze) bolas de gude, serão 100 pacotes. Considerando 3 (três) desses 100 (cem) pacotes, que fração teria? Por fim, pesquise no livro didático sobre as frações de denominadores 10 (dez) e 100 (cem).
Observação: espera-se que os estudantes deem como respostas as frações 1/10 (um décimo), 2/10 (dois décimos), 3/10 (três décimos) e 3/100 (três centésimos). Sobre a pesquisa, devem chegar ao conceito de frações decimais e frações centesimais.

Para sintetizar e sistematizar as informações, os estudantes preencherão a tabela 13.

Tabela 13 – Sistematização e sintetização das informações - operador multiplicativo.

Questão	Fração (ões) encontrada (as)	Escreva a(as) fração (ões) na forma decimal e centesimal	Essa fração é menor, igual ou maior que um inteiro?
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			

Fonte:Construção própria

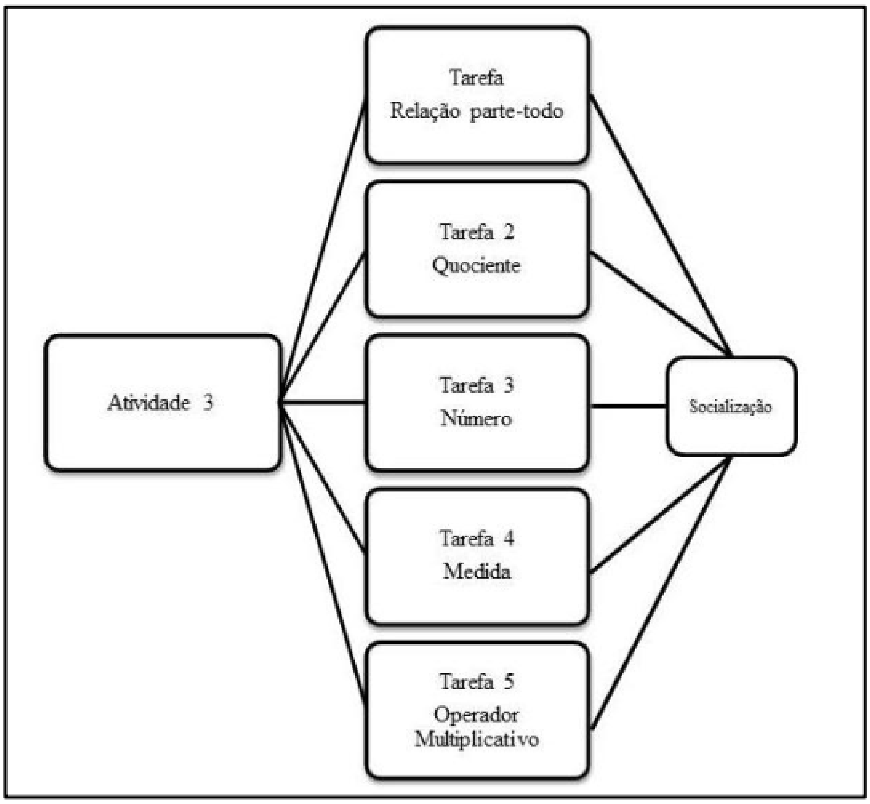
4.4 Atividade 03: utilizando o conceito de fração

Esta atividades é composta de 5 (cinco) tarefas que serão distribuídas entre os 5 (cinco) equipes de estudantes da sala, porém as equipes das atividades 01 e 02 serão desfeitas e organizar-se-á novas formações. Todas as equipes ficarão responsáveis pelo mesmo tipo de situação, no entanto manter-se-á a continuidade no trabalho desenvolvido nas atividades 01 e 02. Sempre que necessário, os estudantes poderão recorrer às anotações e conclusões da atividade anterior, fazendo com que revisem constantemente o trabalho feito. Assim sendo, a apropriação do conhecimento será feita com o auxílio do desenvolvimento das atividades da Sequência Didática.

As situações que aparecem nesta atividade foram pensadas de maneira a atender os diferentes significados de fração e também a natureza das quantidades, sendo elas: contínua e extensiva; contínua e intensiva; discreta e extensiva e discreta intensiva.

A seguir, na figura 18, apresentamos o detalhamento da atividade 03.

Figura 18 – Detalhamento da atividade 03



Fonte: Construção própria

4.4.1 Objetivos da atividade 03

Utilizar:
- o conceito de fração em situações que envolvem pelo menos os cinco significados trabalhados;
- a ideia de fração em problemas.

4.4.2 Encaminhamentos metodológicos da atividade 03

- discutir a respeito das dificuldades encontradas na atividade 02;
- mudar a formação das equipes, sendo que cada nova equipe contará com um integrante de cada equipe formada para as atividades 01 e 02. Assim, a interação, a socialização e a troca de informações e conhecimentos serão aprimoradas.
- o professor distribuirá entre as equipes o mesmo material, isto é, todas as equipes receberão as mesmas situações-problemas para solucionarem.

Para desenvolver esta atividade é necessário que o estudante use os conhecimentos construídos nas atividades anteriores, reforçando as ideias do conceito de fração e de cada um dos significados percebidos até o momento. O objetivo desta atividade reside na aplicação do conceito de fração, considerando os seus diferentes significados.

Análise a priori

A atividade 03 é constituída de 5 (cinco) questões descritivas que envolvem os cinco significados de fração explorados as atividades anteriores. Possivelmente os estudantes encontrem dificuldades naqueles significados com os quais não trabalhou. Nessa hora o professor poderá estimular a interação entre os integrantes da equipe, uma vez que há no grupo um participante de cada tipo de tarefa desenvolvida anteriormente. O que tornará a sala de aula uma grande troca de experiências e informações entre os próprios estudantes. O professor poderá, também, verificar se as informações e conhecimentos trocados entre os estudantes são mesmo válidos e corretos, caso não o sejam ele poderá intervir, mostrando os caminhos corretos para a compreensão do assunto.

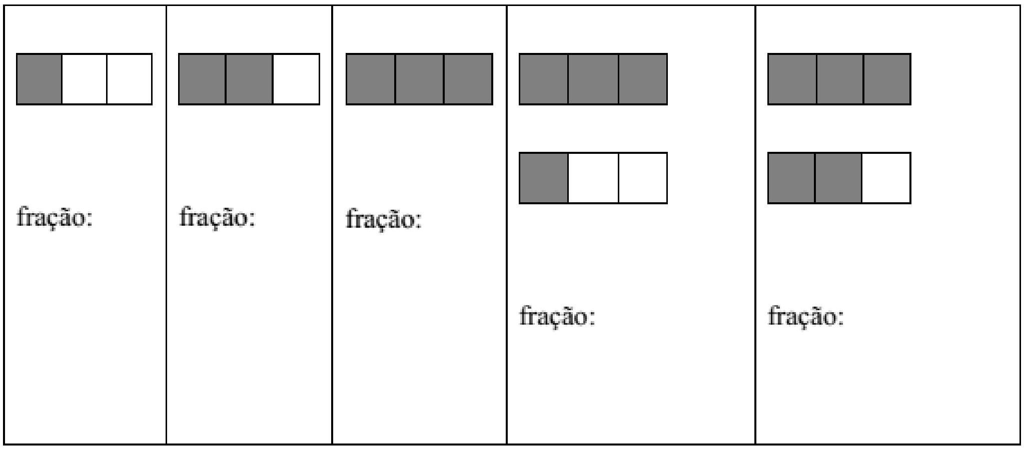
4.4.3 Propostas para a tarefa da atividade 03

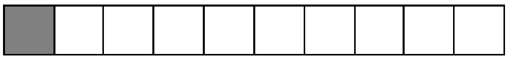
Tarefa: utilizando os conceitos de fração considerando os cinco significados trabalhados

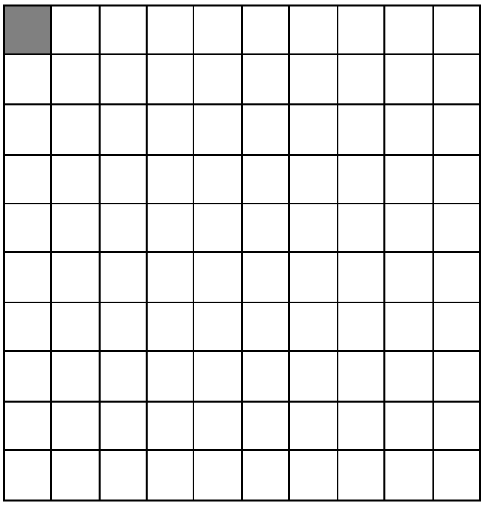
Essa tarefa consiste na resolução de 5 (cinco) questões descritivas, cada uma envolvendo um dos significados de fração.

Questão 1 (Relação parte-todo)

Para cada figura, escreva a fração que representa a quantidade de partes pintadas em relação à quantidade de partes em que o retângulo foi dividido.







Fração: (escreva esta fração na forma de porcentagem)

Questão 2 (Quociente)

Considere cada uma das situações dadase responda:

a) Ao dividir 1 (uma) barra de chocolate igualmente entre 3 (três) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

b) Ao dividir 2 (duas) barras de igualmente entre 3 (três) amigos, com que fração da barra cada uma ficará?

c) Ao dividir 3 (três) barras de chocolate igualmente entre 3 (três) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

d) Ao dividir 4 (quatro) barras de chocolate igualmente entre 3 (três) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

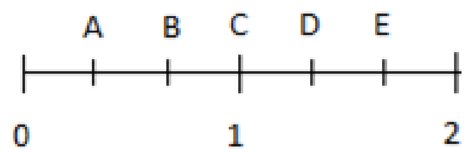
e) Ao dividir 5 (cinco) barras de chocolate igualmente entre 3(três) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

f) Ao dividir 1 (uma) barra de chocolate igualmente entre 10 (dez) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

g) Suponha que você queira dividir 1 (uma) barra de chocolate igualmente entre 100 (cem) amigos, com que fração da barra cada um ficará?

Questão 3 (Número)

Dada a reta numérica, que fração está associada a cada um dos pontos A, B, C, D e E?



Questão 4 (Medida)

Dadas as situações, responda:

a) No preparo de um refresco, foram colocadas 3 (três) medidas de água e 1 (uma) medida de suco concentrado numa jarra. Qual é a fração representa a quantidade de água em relação ao total de líquido na jarra?

b) No preparo de um refresco, foram colocadas 7 (sete) medidas de água e 3 (três) medidas de suco concentrado numa jarra. Qual é a fração representa a quantidade de água em relação ao total de líquido na jarra? Em termos de porcentagem, qual seria o percentual de água em relação ao total de líquido?

c) No preparo de um refresco, foram colocadas duas medidas de suco concentrado para cinco medidas de água. Que fração representa a quantidade de água em relação à quantidade de suco concentrado?

Questão 5 (Operador Multiplicativo)

Para a venda em uma das barracas da festa junina da escola, foram adquiridos 100 (cem) pirulitos de dois sabores, sendo que 2/5 deles são do sabor laranja e 3/5 do total são do sabor uva. A princípio, essa quantidade de pirulitos foi organizada em 10 (dez) fileiras, cada uma contendo 10 (dez) pirulitos, de maneira que não ficassem numa mesma fileira pirulitos de sabores diferentes.

Com base na situação, responda:

a) qual a quantidade de pirulitos de cada sabor?

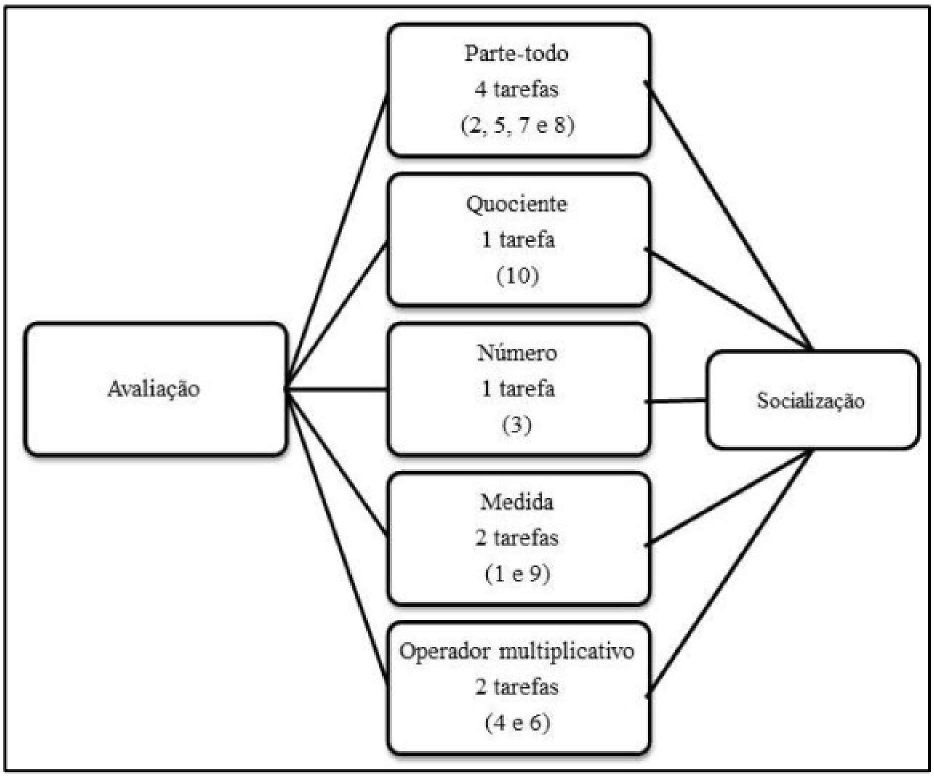
b) considerando apenas 1 (uma) das 10 (dez) fileiras de pirulitos, que fração teria?

c) considerando todos os pirulitos sabor de uva presentes no conjunto dos 100 (cem) pirulitos, que fração teria? Em termos de porcentagem, qual seria o percentual em relação ao total de pirulitos?

4.5 Avaliação das aprendizagens

A avaliação das aprendizagens é composta por um conjunto de 10 (dez) tarefas em que os estudantes resolvem problemas que envolvem o conceito de fração, conforme representado na figura 19, a seguir. Ela permite que os estudantes utilizem os conhecimentos construídos ao longo das atividades desenvolvidas na segunda fase da Sequência Didática.

Figura 19 – Detalhamento da atividade 04



Fonte: Construção própria

4.5.1 Objetivo da avaliação

Verificar se os estudantes compreenderam o conceito de fração.

4.5.2 Encaminhamentos metodológicos da avaliação

Discutir a respeito das dificuldades encontradas na atividade 03; - manter a formação das equipes da atividade 03; - o professor distribuirá entre as equipes o mesmo material, isto é, todas as equipes receberão as mesmas situações-problemas para solucionarem; - para sistematizar o conhecimento, logo após o término da resolução das questões, cada equipe apresentará para a turma a resolução de 2 (duas) das 10 (dez) questões. Esse momento será aproveitado pelo professor para as devidas considerações e possíveis correções necessárias, uma vez que esta é a etapa fundamental para a validação das hipóteses levantadas para a construção desse saber.

Análise a priori

Para desenvolver esta atividade é necessário que o estudante use os conhecimentos construídos nas atividades anteriores, reforçando as ideias do conceito de fração e de cada um dos significados percebidos até o momento. O objetivo desta atividade reside na verificação da aprendizagem e na aplicação do conceito de fração para a resolução de problemas, considerando os seus diferentes significados.

Essa atividade é composta de 10 (dez) questões. O intuito é que as equipes discutam os problemas entre si e busquem resolvê-los. Se aparecerem dificuldades, é esperado que eles encontrem nas atividades desenvolvidas anteriormente um caminho para a solução. Ao professor cabe o incentivo e o fornecimento de pistas e perguntas aos estudantes no sentido de superarem as dificuldades encontradas afim de que cheguem a uma elaboração própria de solução.

4.5.3 Propostas para a tarefa da atividade 04

Tarefa: resolvendo problemas que envolvem os conceitos de fração considerando os cinco significados trabalhados

Tarefa 1 (Medida)

Num total de 20 estudantes do sexto ano, 15 deles correspondem à fração ____________ do total.

Tarefa 2 (Relação parte-todo)

Uma figura foi dividida em 7 (sete) partes iguais, das quais 5 (cinco) foram pintadas de azul e 2 (duas) foram pintas de vermelho. As partes pintadas de vermelhos representam que fração da figura?

Tarefa 3 (Número)

Desenhe uma reta numérica contendo os números inteiros 0, 1, 2 e 3. Faça as subdivisões necessárias e dê a localização do número fracionário $\frac{8}{5}$. Na reta numérica este número está localizado entre quais números inteiros?

Questão 4 (Operador Multiplicativo)

Sabe-se que a distância entre as cidades de Paraiso do Tocantins e Palmas é de aproximadamente 60 quilômetros e que, em virtude de uma reforma na pista, $\frac{3}{4}$ do trajeto está sem a devida sinalização. Quantos quilômetros desse trajeto estão devidamente sinalizados?

Questão 5 (Relação parte-todo)

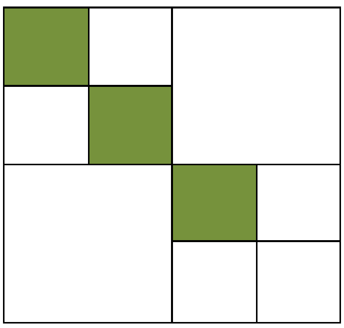
João abasteceu seu carro com um combustível que é composto pela mistura de álcool e gasolina, sendo $\frac{1}{4}$ do total da mistura de álcool e o restante de gasolina. Qual é a fração que representa a quantidade de gasolina desse líquido?

Questão 6 (Operador Multiplicativo)

O tanque de combustível de um carro tem capacidade para 56 litros. O marcador aponta exatamente para $\frac{1}{4}$ dessa capacidade. Quantos litros de gasolina há nesse tanque?

Questão 7 (Relação parte-todo)

A fração que representa a parte colorida da figura é:



a) $\frac{1}{4}$

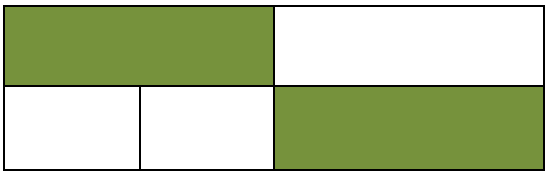
b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{5}{16}$

Questão 8 (Relação parte - todo)

Podemos afirmar que a parte colorida da figura representa seus $\frac{2}{5}$? Por quê?



Questão 9 (Medida)

João possui uma revendedora de carros usados com 25 carros, dos quais 12 são da cor prata. Qual é a fração que representa a quantidade de carros da cor prata em relação ao total de carros? Quantos por cento dos carros da revendedora são da cor prata?

Questão 10 (Quociente)

Maria tinha duas barras de chocolates iguais. Ela dividiu cada uma dessas barras igualmente em 3 (três) colegas de sala. Que fração da barra de chocolate cada colega recebeu?

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES EM RELAÇÃO A PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A matemática contribui para que cidadãos atuem na sociedade de maneira mais crítica. Nesse sentido, a escola deve ir além de ensinar macetes e fórmulas que mais parecem uma receita que propicia a solução de determinados tipos de problemas matemáticos. O papel do professor não pode se limitar a mostrar como se faz um determinado exercício com a aplicação de uma exaustiva técnica. Para fazer a diferença na vida dos estudantes o professor deve ser o fio condutor que, na busca por melhores experiências de aprendizagens, elabore sequências de ensino permeadas de significado e pertinência, fazendo com que eles consigam encontrar caminhos próprios de aprendizagem.

É preciso se pensar no desenvolvimento de atividades que vão além da resolução de problemas. Esse ir adiante significa dizer que é necessário que os estudantes aprendam a lidar com informações numéricas que os direcionem para uma tomada de decisão e para opinarem a respeito dos temas envolvidos na situação, uma vez que cada um possui um jeito próprio de raciocinar e elaborar o conhecimento.

Não há a necessidade de se fazer uma imposição sobre a maneira com que o estudante pensará. O que o professor pode oferecer são metodologias que facilitem a compreensão do que ele está fazendo e, por conseguinte, lhe proporcione a escolha da melhor estratégia para a sua aprendizagem.

Quando se compreende os assuntos estudados e se entende a importância deles para o exercício da cidadania e para o convívio social, o ato de ensinar se torna mais fácil. Para que cheguemos a esse nível, é importante que o estudante vivencie concretamente algumas situações. O ensino por meio de Sequências Didáticas nos proporciona mais um instrumento que o professor pode utilizar para a melhoria do ensino, da aprendizagem, da relação professor-estudante e da relação entre os estudantes.

Como cada estudante possui um ritmo próprio para a construção de seu conhecimento, ensinar às vezes não é tarefa fácil. Isso implica dizer que o professor não deve se acomodar e encarar a não aprendizagem de um determinado conteúdo como algo corriqueiro e normal na vida escolar. É necessário, sobretudo, que ele pesquise, se mobilize, se articule com os estudantes e desenvolva processos cada vez mais envolventes e que ponha o estudante como o centro do processo.

Nesse contexto, a perspectiva construtivista do ensino e da aprendizagem norteia o professor no sentido deste se tornar pesquisador de sua própria prática, elaborando meios de chegar ao objetivo de desenvolver metodologias e estratégias que conduzam os estudantes a se tornarem autônomos na construção do conhecimento.

O desenvolvimento da proposta apresentada nesta dissertação é mais um meio de mostrar que, com dedicação, planejamento e vontade, o professor torna-se um articulador em sala de aula, um mediador entre o conhecimento e o estudante, aquele que coordena atividades, orienta e encaminha, escolhe materiais adequados à realidade e incentiva para a busca do conhecimento.

O trabalho do professor na busca pela melhoria na qualidade das aulas deve ser contínuo. Para cada assunto a ser trabalhado em sala, uma metodologia que melhor se adapte às condições da escola e do estudante.

Apresentamos aqui uma maneira diferente de conduzir o ensino, em que, acreditando na capacidade de cada estudante e que eles aprendem de jeitos diferentes, deixamos de ter situações em que o professor expõe e discorre em vários momentos da aula a respeito de um assunto/conteúdo e os estudantes apenas ouvem e reproduzem o que ouviram.

Por acreditarmos na ideia de que estudantes diferentes aprendem de maneiras diferentes, defendemos o ponto de vista de que emancipá-los no sentido deles serem sujeitos ativos e participativos na construção do saber é uma saída necessária para a melhoria do ensino e da aprendizagem.

A proposta aqui apresentada não foi desenvolvida em sala de aula de maneira que pudéssemos realizar as demais etapas da engenharia didática, como a experimentação e a validação. Porém, em sua elaboração primamos por desenvolver atividades que colocassem os estudantes como sujeitos ativos na construção do conhecimento. As atividades preveem situações próximas da vida dos estudantes, trazem problemas do cotidiano deles, fazem com que interajam um com o outro, que partilhem informações e conhecimentos, envolvendo-os de tal maneira que a construção do conhecimento se torna algo cíclico à medida que eles têm a opção de estar sempre revisando o que foi feito nas atividades anteriores.

Um diferencial do nosso trabalho é que tentamos propiciar aos estudantes o contato com a proposta teórica dos diferentes significados de fração e das distintas naturezas das quantidades e grandezas logo no início da apresentação do conteúdo frações, o que não observamos nos livros didáticos verificados neste trabalho.

No entanto, não temos a intenção de afirmar que a forma como propomos o desenvolvimento das atividades é algo pronto e acabado e que não precisa de ajustes, todavia a forma com que apresentamos a Sequência Didática para o ensino do conceito de fração é, na verdade, um exemplo de que ensino e a aprendizagem pode ser algo possível e acessível a todos os estudantes, desde que as condições sociais e externas à escola favoreçam e que o professor esteja qualificado para pesquisar e encontrar meios de ensino que promovam a aprendizagem.

Ainda na pesrpctiva de darmos continuidade a este trabalho, em estudos posteriores, pretendemos realizar o desenvolvimento das atividades junto aos estudantes, identificar obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino e aprendizagem de frações e considerar no trabalho com as frações a utilização dos deferentes registros de representação semiótica.

Referências

1 ALMOULOUD, S. A.; SILVA M. J. F. **Engenharia Didática: evolução e diversidade**. Revista Eletrônica e Educação Matemática (REVEMAT), Florianópolis – SC, v. 07, n. 2, p. 22 – 52, 2012.

2 ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática**. 6º Ano. 4ª ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. p. 177 - 188.

3 ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: JEAN BRUN (Ed.) **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217. (Horizontes Pedagógicos).

4 BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. **Rational number, ratio and proportion**. In: Grows, D. A. (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, p. 296-333, 1992.

5 BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática do cotidiano**. 6º Ano. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2015. p. 170 - 192.

6 BORGES NETO, H. et al. A **sequência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação - EPENN, 15, São Luiz, Anais, 2001.

7 BOYER, C. B. **História da Matemática**. - 3. imp. - São Paulo: Edgard Blüncher, 2001.

8 BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

9 BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasilia, MEC/SEF, 1998.

10 BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

11 BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

12 BROUSSEAU, Guy. **Ingéniere didactique**. d'unproblème à l'étude à priori d'une situationdidactique. DeuxièmeÉcole d'Été de Didactique des mathématiques. Paris: Olivet, 1982.

13 CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, unconcept à refonder. Questionnementetélémentos de réponses à partir de la TAD. inMargolinas et all.(org.):Em amont et en aval desingénieries didactiques, XVª École d'Été de Didactique des Mathématiques - Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, , v. 1, p. 81 - 108, 2009b.

14 DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática**. 6º Ano. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012. p. 152 - 180.

15 Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): **Relatório pedagógico 2009-2010** / Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. - Brasília : O Instituto, 2013.

16 IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Tomo 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 (a).

17 IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Tomo 2. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 (b).

18 IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

19 KERSLAKE, D. Fractions: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

20 KIEREN, T. E. **Number and measurement**: mathemathical, congnitive and instrucional foundaments of rational number.Columbs: OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

21 KOBASHIGAWA, H. A. et al. **Estação Ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental**. In: IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica. São Paulo, 2008, p. 212 - 217.

22 LIMA, E. L. **Números e Funções**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

23 MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática**. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Educação Matemática: Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ., 2002. p. 197-208.

24 MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005. MORI, Iracema. **Matemática: ideias e desafios**. 6º Ano. 17ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012. p. 151 - 167.

25 NUNES, T. et al. **Educação matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

26 NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

27 NUNES, T. et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions**.Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics.Oxford, junho de 2003.

28 NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**.Porto Alegre: Artmed, 1997.

29 OHLSSON, S. **Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts**. In Hiebert, J. & Behr, M.$ (Eds.), Number Concepts and Operations in Middle-Grades. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p.53-92, 1988.

30 OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Cidade: Vozes, 2013.

31 PERRIN - GLORIAN, M. J. L'ingénieriedidactique a l'interface de larechercheavecl'enseignement. Développement des ressourceset formação desenseignants. in Margolinas etall.(org.): Enamont et en aval desingénieriesdidactiques, XV^{a} École d'Été de Didactique des Mathématiques - Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em DidactiquedesMathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009

32 POTHIER, Y.; SAWADA, D. Partitioning: an approach to fractions. In: **Arithmetic Teacher**, v. 38, p. 12 - 16, 1990.

33 PROCHNOW, K. Z. S. **Uma Abordagem Diferenciada dos Números Racionais na Forma Fracionária**. Monografia (Especialização em Matemática)-UFRGS/RS. Porto Alegre, 2010.

34 SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional do docente**: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de frações. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

35 SILVA, Benedito Antonio. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara.(Org.) **Educação Matemática - Uma (nova) introdução**. São Paulo. EDUC., p. 49-75, 2008.

36 SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

37 SILVA, W. R. **O ensino da matemática na escola pública**: uma inter(invenção) pedagógica no sétimo ano. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo. Espírito Santo, 2011.

38 SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**. 6º Ano. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2015. p. 124 - 140.

39 SOUZA, Joamir Roberto de. **Vontade de Saber Matemática**. 6º Ano. 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015. p. 128 - 150.

40 SOUZA, Maria José Araújo. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza (CE), 2010.

41 STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

42 TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. In: **A Educação Matemática em Revista - SBEM**, n. 2, p. 13 - 18, 1º sem. 1994.

43 VIZOLLI, Idemar. **Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção/porcentagem**. Tese (Doutorado - Setor de Educação) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba (PR), 2006.

44 VIZOLLI, Idemar. **Registros de representação semiótica no estudo de porcentagem**. Dissertação - Mestrado na Área de Educação e Ciência, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis (SC), 2001.

45 ZABALA, Antoni. **A Prática Edicativa - Como ensinar**. Porto Alegre - RS: Artmed, 1998.