



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCIVAL SANTOS MONTEIRO

A REPUNIDADE NO CAMPO DOS INTEIROS: EXPLORANDO PADRÕES NO
CONTEXTO DE MATEMÁTICA

ARRAIAS, TO

2026

Francival Santos Monteiro

A Repunidade no campo dos inteiros: Explorando Padrões no Contexto de Matemática

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS, TO

2026

<<https://sistemas.uft.edu.br/ficha/>>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M775r Monteiro, Francival Santos.

A repunidade no campo dos inteiros: explorando padrões no contexto de matemática. / Francival Santos Monteiro. – Arraias, TO, 2025.

70 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.

Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Sequência Numérica. 2. Sequência Repunidade. 3. Engenharia Didática. 4. Teoria das Situações Didáticas. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Francival Santos Monteiro

A Repunidade no campo dos inteiros: Explorando Padrões no Contexto de Matemática

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 29 de outubro de 2025

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 03/11/2025 16:00:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (UFT)
Orientador (Presidente)

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO SOARES DE CARVALHO**
Data: 03/11/2025 15:37:05-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho (UFT)
Examinador 1

Documento assinado digitalmente
 **FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES**
Data: 31/10/2025 06:45:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves (IFCE)
Examinador 2

AGRADECIMENTOS

A realização deste Trabalho de Conclusão de Curso não teria sido possível sem o apoio e o incentivo de várias pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o seu desenvolvimento.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me dar sabedoria e discernimento para concluir este trabalho.

Expresso minha profunda gratidão ao meu orientador, Eudes Antonio da Costa, por todas as orientações, paciência, compreensão e pelo apoio constante ao longo de todo o processo. O senhor é um professor incrível; te admiro e sou imensamente grato ao senhor.

Agradeço também a todos os professores e colaboradores do Curso de Licenciatura em Matemática da UFT, pela troca de experiências e pelo aprendizado contínuo durante toda a minha jornada.

À minha família, em especial aos meus pais, Alvino Monteiro de Souza e Marilena Pereira dos Santos, pelo apoio incondicional e incentivo constante para que eu continue lutando pelos meus sonhos e objetivos.

Aos meus amigos e colegas da faculdade, com destaque para minha namorada Thaíssa e para minha “dupla” Vitor, que me acompanhou ao longo da graduação, pela parceria, amizade e companheirismo. Estendo também meus agradecimentos a Sunamita, Andrêssa, Hanna, Sandrielle, Marcos, Luan e Ricardo, pela convivência, pelo apoio e pelos momentos compartilhados ao longo dessa jornada acadêmica.

Por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo registrado meu sincero e profundo agradecimento.

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo elaborar e propor Situações Didáticas envolvendo a sequência repunidade, com foco no desenvolvimento do raciocínio matemático e na exploração de padrões numéricos. A pesquisa fundamenta-se nas abordagens metodológicas da Engenharia Didática (ED) e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), priorizando as fases de análise preliminar e análise a priori. As atividades propostas visam investigar propriedades algébricas, estruturais e recursivas da sequência, incluindo sua extensão para índices inteiros negativos, de modo a favorecer a construção de saberes matemáticos por meio de situações problematizadoras. Os resultados teóricos indicam que a sequência repunidade pode ser um assunto ou conteúdo no ensino de matemática, promovendo a articulação entre conhecimentos conceituais. Espera-se, assim, contribuir para a formação de estudantes críticos, reflexivos e autônomos, e inspirar novas investigações no campo de ensino da educação matemática.

Palavras-chave: Sequência Repunidade. Padrões Numéricos. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

The main objective of this work is to develop and propose Didactic Situations involving the repunity sequence, focusing on the development of mathematical reasoning and the exploration of numerical patterns. The research is based on the methodological approaches of Didactic Engineering (DE) and Didactic Situations Theory (DST), prioritizing the preliminary analysis and a priori analysis phases. The proposed activities aim to investigate the algebraic, structural, and recursive properties of the sequence, including its extension to negative integer indices, in order to promote the construction of mathematical knowledge through problematizing situations. The theoretical results indicate that the repunity sequence can be excellent content for teaching mathematics, promoting the articulation between conceptual knowledge. It is thus hoped that this will contribute to the formation of critical, reflective, and autonomous students and inspire new investigations in the field of mathematics education.

Keywords: Sequence Repunity. Numerical Patterns. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – As quatro fases da Engenharia Didática.	18
Figura 2 – O triângulo Didático	23
Figura 3 – Função geradora dos números da repunidade positiva utilizando o software Máxima.	50
Figura 4 – Função geradora dos números da repunidade negativa utilizando o software Máxima.	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Polinômios de repunidade para $1 \leq n \leq 5$	52
Tabela 2 – Polinômios repunidade para $-4 \leq n \leq 0$	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Fundamental	29
Quadro 2 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Médio	30
Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental . . .	30
Quadro 4 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio	31

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Engenharia Didática
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFT	Universidade Federal do Tocantins

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO	16
2.1	Engenharia Didática de Primeira Geração	16
2.1.1	Análises Preliminares	18
2.1.2	Análise a Priori	19
2.1.3	Experimentação	20
2.1.4	Análise a Posteriori	21
2.2	A Teoria das Situações Didáticas	22
2.3	A abordagem das sequências numéricas na BNCC	26
3	ANÁLISES PRELIMINARES	32
3.1	Sequências	32
3.1.1	Progressões	33
3.2	Recorrência	38
3.2.1	Recorrência de Primeira Ordem	39
3.2.2	Recorrência de Segunda Ordem	42
3.3	Sequência Repunidade	46
3.4	Análise de livros didáticos	53
4	ANÁLISES A PRIORI E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	56
4.1	Concepções das Situações Didáticas	56
4.2	Construção das Situações Didáticas	56
5	REFLEXÕES SOBRE A ANÁLISE A POSTERIORI E O PROCESSO DE VALIDAÇÃO	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

No cenário da educação básica, é frequente o surgimento de obstáculos enfrentados tanto por estudantes quanto por docentes no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Diante do exposto, infere-se que tais dificuldades estejam associadas à complexidade de determinados conteúdos ou à escassez de materiais didáticos que articulem teoria e prática de maneira significativa. Ademais, o ensino de matemática frequentemente se limita a conteúdos previamente consolidados nos currículos oficiais, subestimando temas alternativos e potencialmente enriquecedores, como as sequências recorrentes. No ensino médio, por exemplo, é comum o estudo de sequências numéricas se limitar apenas progressões aritméticas e geométricas, tratadas como modelos padrões, o que reduz a diversidade de abordagens possíveis.

Os estudos sobre sequências numéricas possuem origens remotas, remontando às civilizações da Antiguidade. Os babilônios, por volta de 2.000 a.C., já utilizavam tábuas de cálculo nas quais era comum identificar sequências envolvendo quadrados e cubos de números inteiros (OLIVEIRA, 2011). Na civilização egípcia, há cerca de 5.000 anos, a observação dos ciclos das enchentes do Rio Nilo levou ao desenvolvimento de um calendário solar estruturado em regularidades temporais. Esse calendário era constituído por 12 meses de 30 dias, acrescidos de cinco dias festivos dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys, e dividido em três fases de quatro meses: semeadura, crescimento e colheita. Tal organização evidencia uma tentativa de compreender e sistematizar padrões cíclicos, característica essencial de algumas sequências numéricas.

Na Grécia Antiga, por sua vez, encontram-se registros significativos de avanços nesse campo, como os estudos da escola pitagórica no século VI a.C., que exploravam os números figurados (Representação no plano euclidiano de quantidades que representam polígonos regulares). Outro exemplo notável é o crivo de Eratóstenes, um método sistemático desenvolvido para identificar a sequência dos números primos, demonstrando o interesse grego por regularidades numéricas e propriedades dos números naturais.

A sequência repunidade, especialmente em sua extensão para índices negativos, apresenta propriedades matemáticas instigantes e constitui uma oportunidade didática valiosa a fim de que os estudantes sejam capazes de identificar regularidades, formular conjecturas e aprofundar sua compreensão sobre o sistema de numeração decimal e os números racionais. Diante disso, este trabalho tem como objetivo geral elaborar e propor Situações Didáticas que envolvam a

sequência repunidade, visando o desenvolvimento do raciocínio matemático e a exploração de padrões numéricos. Para atingir esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar propriedades matemáticas da sequência repunidade para o campo dos inteiros, incluindo sua relação com desenvolvimento decimal periódico, potências e padrões numéricos;
- Analisar o ensino de sequências numéricas e os processos de identificação de regularidades;
- Descrever Situações Didáticas para o ensino da sequência repunidade no contexto da educação básica.

Como metodologia de pesquisa, adotou-se a Engenharia Didática (ED), contemplando suas duas primeiras fases: a análise preliminar e a concepção com análise a priori. É importante destacar que as etapas seguintes da ED, que não foram desenvolvidas neste trabalho, correspondem à fase de experimentação e à análise a posteriori, também conhecida como fase de validação.

No que se refere à metodologia de ensino, utilizou-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD), aplicada em suas quatro fases: (1) ação, (2) formulação, (3) validação e (4) institucionalização. Proposta por Guy Brousseau, essa teoria tem como objetivo modelar e estruturar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, promovendo uma relação dinâmica entre professor, aluno e saber. Como destaca Almouloud (2007, p. 31), ela foi desenvolvida “no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos”. A TSD propõe, assim, a criação de situações didáticas intencionais, organizadas de modo a favorecer a construção do conhecimento pelo estudante.

Para fundamentar o uso dessas metodologias, foram realizadas leituras de autores que se dedicam à Didática da Matemática na perspectiva francesa, com destaque para os trabalhos de Almouloud (2007), Almouloud e Coutinho (2008), Artigue (1988) e Brousseau (1976), que oferecem subsídios teóricos e metodológicos sobre a organização de situações de ensino.

Em paralelo, foram pesquisadas definições, propriedades e relações matemáticas ligadas à sequência repunidade. A análise apresentada neste trabalho inclui um breve histórico sobre sua origem, bem como o estudo de sua fórmula de recorrência, equação característica e principais identidades. Nesse processo, destacam-se as contribuições de Yates (1992), Jaroma (2007), Kamada (1999–2023), Costa e Santos (2022), Carvalho e Costa (2015), Costa e Carvalho (2024), Santos e Costa (2023), Costa *et al.* (2024b) e Santos e Costa (2024), que aprofundam aspectos

teóricos relevantes dessa sequência. Como referências centrais para a construção desta pesquisa, ressaltam-se ainda as dissertações de mestrado profissional de Monteiro (2023) e Lima (2019), além dos artigos de Souza e Alves (2018) e Paiva, Alves e Campos (2025), que dialogam diretamente com a proposta metodológica adotada.

O primeiro capítulo irá corresponder à Introdução deste trabalho. Nele são apresentados o tema, a delimitação do problema, os objetivos geral e específicos, a justificativa da pesquisa, o programa metodológico adotado, bem como uma visão geral da estrutura dos capítulos seguintes.

O segundo capítulo trata das metodologias de pesquisa e de ensino adotadas neste estudo, sendo elas, respectivamente, a Engenharia Didática (ED) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Nesse capítulo, são apresentadas e discutidas as principais características e etapas de cada uma dessas abordagens. Além disso, é incluída uma breve consideração sobre o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe em relação ao ensino de sequências numéricas em seu currículo.

O terceiro capítulo será dedicado às análises preliminares da pesquisa, com foco no estudo analítico matemático da sequência repunidade, tanto para índices positivos quanto negativos. Inicialmente, são discutidos os conceitos fundamentais relacionados ao termo geral de sequências, recorrências lineares e propriedades básicas de sequências numéricas. Em seguida, é apresentada a fundamentação teórica formal da sequência repunidade, com o intuito de explicitar, sob a perspectiva acadêmica, as propriedades algébricas, estruturais e recursivas que caracterizam esse objeto matemático.

No quarto capítulo, apresentará a elaboração das sessões de ensino e das situações didáticas, as quais constituem a fase de análise a priori da Engenharia Didática. Neste capítulo, descreve-se a construção das atividades didáticas propostas, que têm por finalidade promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da análise de padrões e da compreensão de conceitos numéricos por parte dos estudantes. Trata-se da concretização dos seguintes objetivos específicos: propor estratégias para estimular a identificação de padrões em sequências numéricas e a compreensão da generalização de fórmulas matemáticas; e elaborar atividades didáticas que explorem a sequência repunidade para índices negativos, pautadas em situações-problemas e na análise de padrões matemáticos.

Por fim, o quinto capítulo será dedicado às reflexões acerca da análise a posteriori e do processo de validação da proposta, enquanto o sexto capítulo apresentará as considerações finais deste autor, reunindo observações sobre o desenvolvimento da pesquisa, os resultados obtidos e

possíveis desdobramentos para futuras investigações.

Vale ressaltar que este trabalho teve origem a partir do interesse e afinidade por questões relacionadas às Componentes Curriculares, como Teoria dos Números e Álgebra Linear, que contribuíram significativamente para o aprofundamento teórico e para a construção de uma base sólida voltada à investigação de padrões e estruturas matemáticas. Além disso, o convite de um professor, que mais tarde se tornaria orientador desta pesquisa, para participar de atividades de investigação acadêmica, foi fundamental nesse processo. A partir desse conjunto de experiências, consolidou-se o interesse em desenvolver um estudo sobre a sequência repunidade, articulando aspectos conceituais e metodológicos que possam contribuir no ensino de matemática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO

Este capítulo apresenta as metodologias de pesquisa e de ensino que fundamentam o desenvolvimento deste estudo, a saber, a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas. Serão descritas as etapas que compõem essas abordagens, bem como as discussões relacionadas à sua aplicação. Cabe destacar que, neste trabalho, foram utilizadas somente as duas fases iniciais da Engenharia Didática, considerando que se trata de uma proposta metodológica. No entanto, de forma sucinta, também serão apresentadas considerações acerca das duas etapas posteriores. Ademais, será considerada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orienta o currículo da educação básica, com ênfase nas diretrizes voltadas para o ensino médio.

2.1 Engenharia Didática de Primeira Geração

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho foi a Engenharia Didática, proposta por Michèle Artigue, concebida como um modelo experimental no âmbito da Didática da Matemática. Para Almouloud e Coutinho (2008), essa abordagem revela-se especialmente apropriada para investigações centradas nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos específicos, possibilitando a construção de situações didáticas que favorecem a apropriação desses saberes.

A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (ALMOULoud; COUTINHO, 2008, p. 66).

Na concepção de Artigue (1988), a Engenharia Didática apresenta uma dinâmica de trabalho semelhante à do engenheiro, embora atuando em um campo de maior complexidade. Assim como o engenheiro projeta soluções alicerçadas em princípios científicos, o pesquisador em Didática da Matemática estrutura suas intervenções pedagógicas fundamentado em teorias educacionais consolidadas. No entanto, enquanto o engenheiro lida com sistemas físicos previsíveis e controláveis, o profissional da educação enfrenta um objeto de estudo essencialmente dinâmico: o processo de ensino-aprendizagem.

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto específico, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1996, p. 193).

A autora ressalta ainda o duplo papel da Engenharia Didática, que se apresenta tanto como um instrumento para o desenvolvimento de materiais e estratégias de ensino quanto como uma abordagem metodológica para a pesquisa qualitativa em educação. Douady (1993) define a Engenharia Didática como:

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob a reação dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY, 1993, p. 2).

As definições apresentadas permitem compreender a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa que articula, de maneira sistemática, a elaboração, a experimentação e a análise de situações de ensino, com base em referenciais teóricos consolidados. Ao estabelecer analogias com o trabalho do engenheiro, essa abordagem destaca o papel ativo do pesquisador na construção de intervenções pedagógicas fundamentadas e ajustadas à complexidade do processo de ensino-aprendizagem, configurando-se como uma ferramenta eficaz para a investigação educacional voltada ao ensino de Matemática.

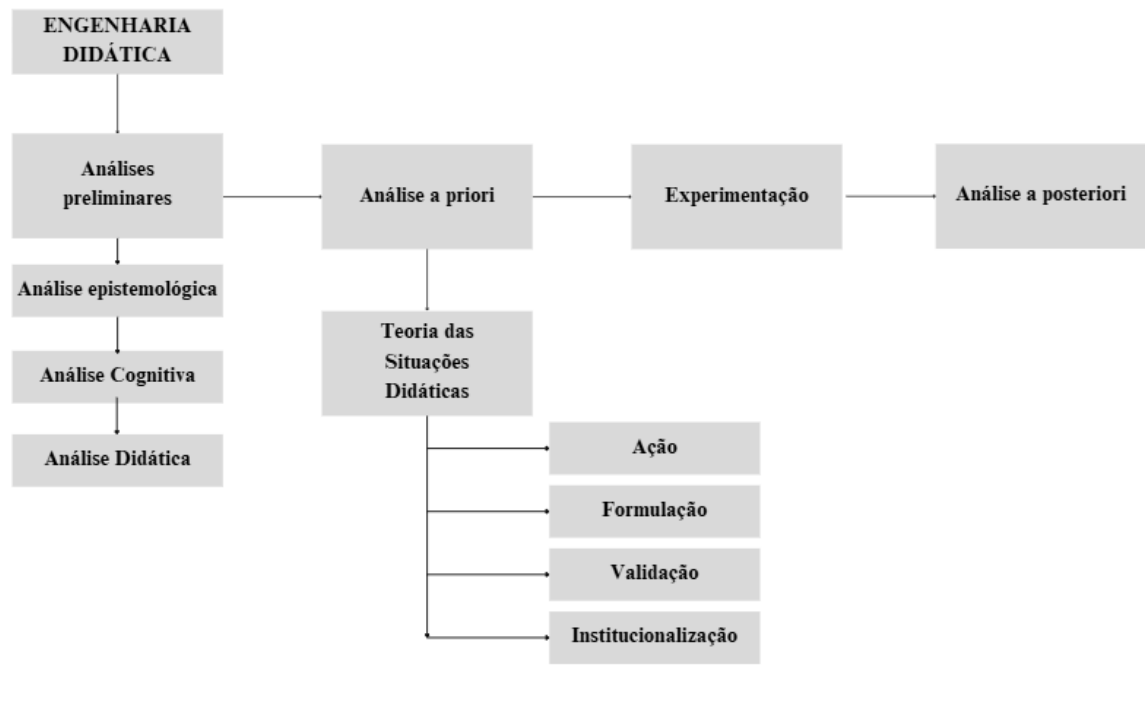
Neste estudo, a Engenharia Didática será adotada como metodologia de pesquisa, considerando suas etapas e características. No entanto, nem todas as fases serão aplicadas. Serão desenvolvidas apenas as duas primeiras, a saber: análise preliminar e análise a priori, por atenderem adequadamente aos objetivos propostos.

[...] Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Essa citação corrobora a escolha metodológica adotada neste trabalho, ao evidenciar que a Engenharia Didática possibilita uma validação interna das hipóteses formuladas, mesmo sem a realização de experimentações formais, o que justifica o uso exclusivo das duas primeiras etapas do modelo.

Com base na estrutura geral e nos fundamentos da Engenharia Didática, as quatro etapas que compõem esse modelo metodológico são agora detalhadas de forma mais minuciosa. A seguir, será apresentada uma figura ilustrativa que sintetiza essas fases.

Figura 1 – As quatro fases da Engenharia Didática.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

2.1.1 Análises Preliminares

Segundo Artigue (1988), esta análise deve contemplar três dimensões fundamentais: a epistemológica, que se refere ao saber em causa e às suas especificidades no âmbito do conhecimento; a cognitiva, relacionada com as características do público-alvo e com as possibilidades de aprendizagem dos estudantes; e a didática, que abrange as particularidades do sistema de ensino, as suas regras e as condições institucionais que influenciam o processo de ensino-aprendizagem.

Busca-se, neste contexto, realizar uma análise epistemológica dos conteúdos a serem ensinados, com o objetivo de compreender suas bases teóricas e estruturais. Para tanto, é fundamental descrever o objeto de pesquisa a partir de três dimensões complementares: a epistemológica, que se refere ao saber em jogo; a didática, relacionada às características do sistema de ensino; e a cognitiva, voltada às especificidades do público-alvo. Essa análise deve estar ancorada em um referencial teórico sólido, que oriente a compreensão e a intervenção no processo de ensino e aprendizagem:

Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

Desta forma, a análise epistemológica, articulada com as dimensões didática e cognitiva, possibilita uma compreensão mais ampla e fundamentada dos conteúdos escolares, favorecendo a elaboração de propostas pedagógicas coerentes com as necessidades dos estudantes e com os desafios do contexto educativo. Essa é uma etapa importante para garantir que as práticas de ensino estejam de acordo com os fundamentos teóricos e com as condições reais do processo de aprendizagem. Entretanto, Almouloud (2007) destaca:

[...] Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização (ALMOULOU, 2007, p. 173).

Desse modo, compreende-se que essa etapa não é definitiva nem fechada, podendo ser retomada sempre que necessário ao longo do processo investigativo. Tal possibilidade permite ao pesquisador realizar ajustes, reorientações ou aprofundamentos, garantindo maior coerência entre os objetivos da pesquisa e as decisões metodológicas adotadas em cada fase do estudo.

2.1.2 Análise a Priori

Nesta fase, é procedida à identificação das variáveis que respondem aos objetivos do estudo e à estruturação do experimento de acordo com esses objetivos e variáveis, organizando-o em forma de situações-problema a serem propostas aos estudantes. Artigue (1988) classifica as variáveis em dois tipos: variáveis macrodidáticas ou globais, que dizem respeito à organização geral da Engenharia Didática, e variáveis microdidáticas ou locais, referem-se aos eventos que ocorrem durante o desenvolvimento das situações didáticas no ambiente de sala de aula.

Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos). O objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), “o objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido”. Assim, essa etapa visa

antecipar e fundamentar as possíveis escolhas didáticas que serão adotadas no desenvolvimento da engenharia, identificando as variáveis relevantes que poderão ser manipuladas para orientar e interpretar os resultados obtidos. Nesse contexto, os autores também apresentam recomendações metodológicas sobre como realizar essa análise de forma eficaz, destacando a importância de considerar tanto os aspectos epistemológicos do conteúdo quanto as características do público-alvo e do meio didático envolvido.

1) Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida. 2) Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; 3) Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Na perspectiva de Monteiro (2023), é essencial que o professor/investigador tenha confiança nas decisões relativas às variáveis locais, compreendendo que tais decisões são fundamentais para a transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar. Ademais, as situações-problema elaboradas devem ser concebidas de modo a oferecer oportunidades para investigar, tomar decisões, validar procedimentos e construir estratégias de resolução. Nesse sentido, a elaboração destas situações-didáticas deve ser intencional e estruturada, de modo a promover a aprendizagem significativa por meio da ação dos próprios estudantes. Conforme é destacado por Almouloud (2007):

Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc (ALMOULOU, 2007, p. 176).

Dessa maneira, reforça-se que a construção de situações-didáticas deve ser pensada intencionalmente pelo professor, com o objetivo de favorecer a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem. Ao propor problemas que estimulem a reflexão e a mobilização de saberes, o docente cria condições para que o estudante progrida em sua compreensão matemática. Cabe ainda ao professor, diante dos obstáculos identificados, intervir com estratégias previamente planejadas que auxiliem na superação das dificuldades encontradas.

2.1.3 Experimentação

Durante a fase de experimentação, as situações-problema previamente definidas na análise a priori serão aplicadas em sala de aula, permitindo ao professor observar as reações dos

estudantes às propostas apresentadas. Durante esta etapa, proceder-se-á à coleta dos dados que, subsequentemente, serão confrontados com os elementos previstos na análise a priori.

A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela (ALMOULOU, 2008, p. 67-68).

Durante a coleta de dados, o professor pode usar diferentes recursos, como relatórios, fotos, atividades feitas pelos discentes, entrevistas, entre outros. Esses materiais serão analisados depois.

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (CARNEIRO, 2005, p. 105).

E nesse momento, consolida-se o contrato didático, entendido por Brousseau (1982) como o conjunto de comportamentos esperados reciprocamente entre professor e educandos. Em outras palavras, esse contrato representa as relações estabelecidas entre o docente, os discentes e o saber, orientando a dinâmica das situações de ensino e aprendizagem.

2.1.4 Análise a Posteriori

A análise a posteriori constitui a última etapa do processo de pesquisa. Os comportamentos observados de fato são comparados com os comportamentos previstos pelas variáveis didáticas. Tais projeções foram delineadas anteriormente na análise a priori, com base em investigações preliminares de natureza teórica e documental. Segundo Almouloud (2007):

A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que: (1) a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador; (2) os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori (ALMOULOU, 2007, p. 178).

Dessa forma, a análise a posteriori permite ao pesquisador avaliar a eficácia das escolhas didáticas feitas durante a fase de planejamento e identificar possíveis ajustes para futuras intervenções. Ao confrontar as previsões delineadas na análise a priori com os dados efetivamente observados, é possível refletir criticamente sobre os processos de ensino e aprendizagem envolvidos, promovendo uma compreensão mais aprofundada da prática

pedagógica e contribuindo para a construção de saberes profissionais mais consistentes. No tópico seguinte, apresentou-se a teoria de ensino escolhida para essa pesquisa.

2.2 A Teoria das Situações Didáticas

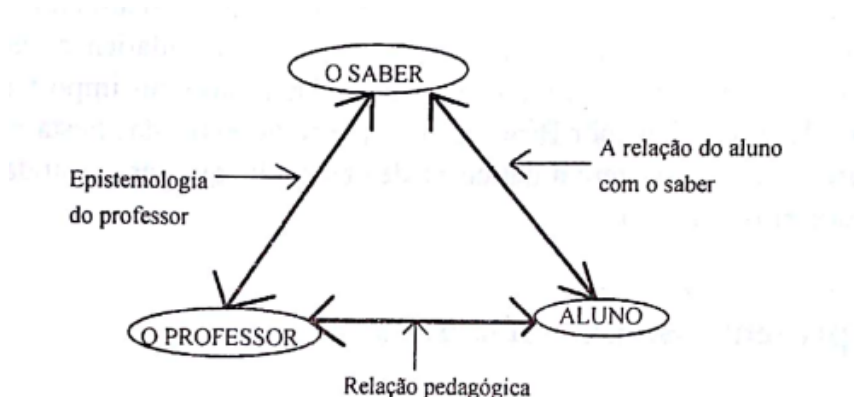
A Teoria das Situações Didáticas, formulada por Brousseau, reestrutura o ensino da matemática ao propor que os conhecimentos sejam construídos por meio de situações organizadas para esse efeito. Ademais, esta abordagem enfatiza a necessidade de compreender como o estudante interage com o conhecimento e qual o papel do professor nesse processo, colocando em evidência as relações entre o sujeito que aprende, o sujeito que ensina e o conteúdo a ser aprendido.

Segundo Monteiro (2023), a Teoria das Situações Didáticas concebe o estudante como um verdadeiro pesquisador, que elabora hipóteses, constrói modelos e teorias, participando ativamente do processo de aprendizagem. Nesse contexto, cabe ao professor organizar situações propícias para que o estudante, ao tomar decisões e interagir com o meio, transforme as informações em conhecimento significativo. À luz do exposto, a transmissão de conteúdos deixa de ser o foco principal para se passar à criação de condições que permitam ao discente apropriar-se do saber por meio da sua atividade intelectual e investigativa. Nesse sentido, Vieira (2020) destaca que:

Assim, a TSD é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. Essa teoria ainda retrata que, cada conhecimento pode ser determinado com base em uma determinada situação. Dessa forma, essas situações permitem que o espaço de aplicação (sala de aula), seja organizado elencando os momentos de interações entre o professor, aluno e saber (VIEIRA, 2020, p. 36).

Ao abordar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, é necessária uma compreensão das interações em sala de aula, da sua organização e intencionalidade no desenvolvimento do conhecimento. Nesse sentido, a TSD destaca a importância da relação entre os sujeitos envolvidos no processo educativo e o saber matemático, enfatizando que o processo de aprendizagem ocorre de forma mais eficaz quando há uma estruturação adequada das situações de ensino. Conforme Monteiro (2023), "uma situação didática é determinada quando acontecem relações pedagógicas dentro da tríade professor, aluno e o conhecimento matemático em situação de aprendizagem, considerando o meio".

Figura 2 – O triângulo Didático



Fonte: Almouloud (2007, p. 32).

A partir da observação dos vértices do triângulo didático, é possível identificar as relações fundamentais entre saber-professor, professor-aluno e aluno-saber. No interior dessa configuração, destaca-se o papel do meio (*milieu*) como elemento central das interações. O espaço representado pelo interior do triângulo corresponde ao local no qual emergem as dificuldades, os conflitos e as contradições inerentes ao processo de aprendizagem. É neste âmbito que os estudantes têm a oportunidade de confrontar as suas hipóteses, reformular as suas compreensões e evoluir cognitivamente. Deste modo, o meio não apenas mede as interações entre os polos do triângulo, mas também impulsiona a superação dos obstáculos, sendo essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

De acordo com Almouloud:

Na TSD, o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão ao respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (ALMOULOUD, 2007, p. 35).

De acordo com Carmo e Fonseca (2016), as interações entre professor e educando no processo de ensino-aprendizagem, especialmente no que se refere ao relacionamento do educando com o meio didático, podem ser compreendidas a partir da noção de contrato didático. Esta noção abrange as suposições explícitas envolvidas nas expectativas do professor e do estudante quanto à interpretação das ações coletivas, bem como o conjunto de cláusulas que fundamentam as relações estabelecidas entre ambos, no que diz respeito ao saber. A compreensão desta dinâmica é fundamental para fomentar um ambiente de aprendizagem mais consciente, reflexivo e eficaz, no qual o papel de cada sujeito seja respeitado e claramente delineado. Esta abordagem possibilita que o ensino ocorra de forma mais transparente e colaborativa, permitindo

que o estudante se aproprie ativamente do conhecimento e que o professor possa estabelecer intervenções pedagógicas mais ajustadas às necessidades do grupo.

Neste campo, emergem dois conceitos fundamentais: o de situação didática e o de situação adidática. A situação didática envolve as interações pedagógicas estabelecidas entre professor, educandos e o saber, com o propósito de favorecer a construção do conhecimento pelo estudante, promovendo a sua autonomia. Em contrapartida, no contexto adidático, a intervenção do professor é deliberadamente limitada ou dissimulada, de modo a não expor a estratégia pedagógica ao educando, permitindo que este se confronte diretamente com o problema e desenvolva soluções de forma autônoma. De acordo com Almouloud (2007), que explicita os dois termos:

Uma situação didática se caracteriza pelo jogo de interações do aluno com os problemas colocados pelo professor. A forma de propor esses problemas ao aluno é chamada de devolução, e deve ter por objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo (ALMOULOU, 2007, p. 34).

Na situação adidática, entendida como parte essencial da situação didática, configura-se como um momento em que a intenção de ensinar não é explicitada ao estudante. Trata-se de uma situação pensada, planejada e construída pelo professor, de modo que o estudante possa se apropriar de um novo saber por meio das condições propostas, sem interferência direta do docente (ALMOULOU, 2007).

Com efeito, a TSD é composta por quatro fases que visam investigar o processo de ensino e aprendizagem, nas quais o saber assume funções pedagógicas distintas, conduzindo o estudante a diferentes formas de interação; nesse contexto, Brousseau (2008) modela a situação didática em quatro momentos: ação, formulação, validação e institucionalização.

A fase da ação representa o primeiro estágio do processo, que visa envolver o estudante no processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o estudante possui liberdade para interagir sem a necessidade de seguir regras, ou seja, o estudante pode refletir sobre a ação e executá-la.

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação (ALMOULOU, 2007, p. 37).

Na fase da formulação é caracterizada pela interação comunicativa entre os educandos e demais interlocutores, favorecendo a construção coletiva de estratégias para a resolução da situação-problema. Tais estratégias podem ser expressas de forma oral ou escrita, utilizando linguagem natural ou linguagem matemática, conforme a natureza da atividade desenvolvida.

Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019, p. 268).

Segundo Brousseau (1976), a fase de validação é marcada pelo processo de verificação e aceitação da validade dos argumentos utilizados na resolução do problema. Nessa etapa, o educando revela domínio de determinados conceitos matemáticos e a habilidade de aplicar métodos de demonstração de forma apropriada. Dessa forma, considera-se que:

Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Por fim, analisa-se a fase da institucionalização, na qual o professor assume um papel ativo com o objetivo de identificar, sistematizar e validar o conhecimento construído a partir da situação-problema, promovendo sua formalização e generalização. Teixeira e Passos (2013) oferecem importantes contribuições sobre a etapa de institucionalização, destacando seu papel na consolidação e sistematização do conhecimento construído ao longo do processo didático.

O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 166).

Para Monteiro (2023), na Teoria das Situações Didáticas (TSD), o papel do professor não é o de fornecer diretamente as soluções para os problemas propostos, mas sim o de organizar situações que possibilitem ao estudante atuar de forma ativa na construção do conhecimento matemático. A partir dessa dinâmica, o estudante é incentivado a mobilizar seus saberes prévios, interagir com o meio e com os colegas, o que favorece o desenvolvimento de novos aprendizados.

Entre as publicações mais recentes que adotam a Teoria das Situações Didáticas (TSD) na transposição didática de conhecimentos matemáticos, destaca-se o estudo desenvolvido por Paiva, Alves e Campos (2025). Este estudo aborda duas situações-problema voltadas para o ensino do Triângulo de Frenet, estruturadas com base na TSD e articuladas com a Engenharia Didática e com a utilização do software GeoGebra. Ademais, assiste-se a uma evolução notável nas discussões e aplicações desta teoria, sobretudo com o enriquecimento proporcionado pelas noções de contrato didático e transposição didática. Conforme Brousseau (1998), é possível definir o contrato didático como sendo:

Uma relação que determina explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente- aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir, e então ele será de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro(parceiro). Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer, a parte do contrato que é específica ao conteúdo: O conhecimento matemático visado (BROUSSEAU, 1998, p. 61).

O contrato didático não se limita a regras explícitas, mas abrange também expectativas mútuas implícitas relativamente a papéis, responsabilidades e formas de interação face ao saber. A sua compreensão permite ao professor refletir sobre a sua prática e antecipar possíveis rupturas na aprendizagem, promovendo ajustes que favoreçam a construção do conhecimento matemático. Deste modo, o contrato didático revela-se um instrumento essencial para a mediação pedagógica e para o desenvolvimento de uma relação mais consciente e produtiva com o conteúdo escolar.

Segundo Chevallard (1998), o conceito de transposição didática é um instrumento fundamental para a análise do sistema didático, na medida em que permite compreender os processos envolvidos na transformação de um saber científico em uma saber a ser ensinado. Esta transformação envolve várias mediações e adaptações realizadas no contexto escolar, de modo a tornar o conhecimento acessível e adequado aos objetivos educativos. Como o autor destaca:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p. 39).

Chevallard (1998) concebe a transposição didática como o processo de transformar um saber produzido por especialistas ou pesquisadores em um objeto de ensino, isto é, em um saber a ser ensinado. Em essência, trata-se de uma atividade que adapta o conhecimento científico para que ele possa ser ensinado no contexto educacional. No tópico a seguir, explorou-se o ensino de sequências numéricas conforme orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacando habilidades, objetivos de aprendizagem e possíveis abordagens didáticas para os diferentes anos do Ensino Fundamental.

2.3 A abordagem das sequências numéricas na BNCC

O professor da educação básica, atualmente, tem um papel que envolve a responsabilidade de promover uma aprendizagem conectada com a realidade dos estudantes. Para tanto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) atua como um guia, oferecendo propostas que incentivam o desenvolvimento integral dos estudantes por meio de competências e habilidades. Mais do que indicar conteúdos, a proposta é que o conhecimento dialogue com o cotidiano, a cultura e o meio social em que os estudantes estão inseridos. Ao delinear as competências a serem

desenvolvidas ao longo da Educação Básica, a BNCC reconhece que o papel da escola ultrapassa a mera transmissão de saberes, procurando promover valores e estimular práticas que favoreçam a construção de uma sociedade mais humana, socialmente justa e ambientalmente responsável (BRASIL, 2018, p. 8).

Portanto, é relevante que o ensino estimule uma formação crítica e cidadã, na qual o conhecimento escolar esteja conectado à vida dos estudantes, possibilitando a compreensão de seu papel na sociedade. A partir da articulação de saberes com valores éticos, sociais e ambientais, a educação tem a capacidade de contribuir para a construção de uma sociedade mais justa, consciente e comprometida com a transformação do mundo em que vivemos.

A álgebra adquire importância no ensino fundamental à medida que os estudantes progredem em sua formação escolar, possibilitando o desenvolvimento de conceitos previamente introduzidos nos anos iniciais. Nesta etapa, os discentes são incentivados a compreender o papel das variáveis em expressões matemáticas, identificar regularidades em sequências numéricas, generalizar propriedades e explorar relações entre grandezas. Tais processos contribuem para a formação de um pensamento lógico e estruturado, favorecendo a argumentação, a abstração e a resolução de problemas, e consolidando um arcabouço conceitual necessário para os estudos matemáticos mais avançados nos anos subsequentes.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra têm como objetivo retomar, aprofundar e ampliar os conhecimentos desenvolvidos nos Anos Iniciais, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais sólida e estruturada dessa linguagem matemática. Nessa etapa, espera-se que os alunos compreendam os diferentes significados das variáveis numéricas em expressões, sejam capazes de generalizar propriedades, investigar regularidades em sequências numéricas, representar valores desconhecidos em sentenças algébricas e analisar variações entre grandezas (BRASIL, 2018, p. 268).

As competências estabelecidas para o Ensino Médio desempenham um papel essencial no fortalecimento do letramento matemático dos discentes, pois permitem que esses estudantes avancem e ampliem os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental. Nesta etapa, os discentes passam a dispor de recursos mais complexos para compreender o mundo ao seu redor e atuar de maneira crítica e consciente. Um dos principais desafios nesse processo é demonstrar que a Matemática não se limita a fórmulas e procedimentos mecânicos, mas está intrinsecamente ligada à cultura, à história e à maneira como compreendemos e transformamos a realidade. Em paralelo a isso, podemos citar a Competência 5 da BNCC:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

Portanto, podemos mostrar o papel das sequências numéricas no desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo da Educação Básica. O estudo das sequências numéricas permite aos estudantes identificar padrões, formular conjecturas, generalizar propriedades e compreender o comportamento de regularidades matemáticas, habilidades essenciais para o avanço em conteúdos mais complexos. No Ensino Médio, essas competências são aprofundadas, possibilitando ao estudante estabelecer relações entre sequências, funções, progressões e modelos matemáticos aplicáveis a diferentes contextos. Desse modo, as sequências assumem um papel central como elo entre a Matemática escolar e a construção de uma visão crítica, investigativa e significativa desse campo do conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define um conjunto de habilidades que os estudantes devem desenvolver nessa etapa, e que estão ligadas a determinados objetos de conhecimento. As habilidades que mais se relacionam com o escopo deste trabalho serão apresentadas a seguir, organizadas em um quadro, para mostrar como elas se relacionam com os conteúdos abordados.

Quadro 1 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Fundamental

<i>UNIDADES TEMÁTICAS</i>	<i>OBJETOS DE CONHECIMENTO</i>	<i>HABILIDADES</i>
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora.
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Números	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
Álgebra	Identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
Álgebra	Identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA15) Expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Álgebra	Potenciação e radiciação	(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros, [...].
Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica, [...]	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, [...].
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva, [...].
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva, [...].
Álgebra	Resolução de equações polinomiais do 2º grau, [...]	(EF09MA09) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 2 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Médio

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas [...].
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas, [...], reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas, [...], reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
COMPETÊNCIA NÚMERO 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 4 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
COMPETÊNCIA NÚMERO 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018).

A BNCC não especifica em quais séries do Ensino Médio as habilidades relacionadas ao ensino de sequências numéricas devem ser desenvolvidas, o que confere flexibilidade às instituições de ensino na organização curricular. No entanto, tal liberdade demanda uma atuação planejada por parte dos professores, a fim de garantir a progressão adequada das unidades curriculares. Em particular, no que se refere às sequências numéricas, a BNCC recomenda que sua abordagem esteja associada a contextos práticos, promovendo a resolução de problemas que envolvam progressões e sua aplicação em outros ramos da matemática, como a matemática financeira e o estudo de funções. Essa forma de ensino torna o aprendizado mais significativo, relacionando o conteúdo à realidade dos estudantes e estimulando o desenvolvimento de competências como a modelagem, a generalização e a análise crítica de situações diversas.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

Neste capítulo, abordamos a primeira fase prevista na metodologia de pesquisa, que consiste nas análises preliminares. Para a presente etapa, foram consideradas três dimensões fundamentais: epistemológica, cognitiva e didática, embora, neste estudo, tenha-se dado ênfase às dimensões epistemológica e didática.

Os tópicos destacados incluem elementos introdutórios sobre recorrências e recorrências lineares, bem como a caracterização da sequência repunidade. Ademais, inclui-se também a análise da abordagem do conceito de recorrência em livros didáticos utilizados na educação básica.

O objetivo central desta etapa é reunir subsídios teóricos e práticos que sustentem a elaboração do experimento durante a fase de Análise a Priori, respeitando as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas, conforme os pressupostos da Engenharia Didática.

3.1 Sequências

Uma sequência pode ser compreendida como uma disposição ordenada de elementos, geralmente números, seguindo uma regra específica de formação. No cotidiano, somos constantemente expostos à ideia de sequência, que se manifesta em diversas situações, como a disposição dos nomes dos estudantes em um diário de classe, as fases da lua (nova, crescente, cheia, minguante), a ordenação das notas musicais (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) e a sequência dos dias da semana (segunda a domingo). Nessas situações, os elementos seguem uma regularidade ou padrão, o que torna possível reconhecer estruturas e fazer previsões.

Conforme argumentado por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), incentivar a observação de padrões e a representação de diferentes formas, tanto em aspectos geométricos quanto numéricos, é fundamental desde os primeiros anos da escolaridade. De acordo com as autoras, tais representações promovem a criação de conexões entre diferentes áreas da matemática, como a geometria e a aritmética. Elas destacam que os padrões estão presentes no cotidiano dos estudantes, podendo ser encontrados com facilidade em elementos como lenços, tapetes ou mesmo em figuras diversas, as quais podem ser descritas, desenhadas e analisadas. A observação de sequências numéricas também contribui para esse processo, ao possibilitar a identificação de regularidades e relações entre números. No contexto pedagógico, o estudo dessas regularidades contribui significativamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de

identificar e generalizar padrões.

Uma formulação mais precisa e formal, do ponto de vista da matemática, sobre o conceito de sequência pode ser encontrada em Lima (2013).

Definição 1. *Uma sequência é definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Uma sequência numérica é, então, uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa, a cada $n \in \mathbb{N}$, um número real x_n . Essa correspondência é representada por:*

$$X_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

na qual a cada número natural n associa-se o número real x_n , denominado n -ésimo termo da sequência.

A introdução da noção de sequência numérica ocorre desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de atividades que exploram regularidades e padrões. No entanto, nos materiais didáticos do Ensino Médio, o estudo das sequências passa a ser abordado de forma mais sistematizada, geralmente a partir do 1º ano. No entanto, tal abordagem tende a restringir-se a casos específicos, enfatizando as Progressões Aritmética e Geométrica, que são tratadas como exemplos particulares de sequências numéricas. Em geral, o estudo desse conteúdo tem início pela Progressão Aritmética, com a dedução da fórmula do termo geral e da soma dos seus termos.

3.1.1 Progressões

Progressões constituem sequências numéricas definidas a partir de um termo inicial e de um valor fixo, denominado razão, que é adicionado ou multiplicado a esse termo para formar os demais elementos da sequência. Nesta seção, serão abordados aspectos referentes às progressões aritmética e geométrica, incluindo suas definições fundamentais. As principais referências utilizadas foram Morgado e Carvalho (2015) e Lima *et al.* (2016).

Definição 2. *Progressão Aritmética é uma sequência numérica $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ em que, a partir do segundo termo, cada elemento é obtido pela adição de uma constante r ao termo anterior. Essa constante $r \in \mathbb{R}$, chamada de razão da progressão aritmética, representa a diferença comum entre dois termos consecutivos, ou seja, $a_n = a_{n-1} + r$. Assim, a PA é caracterizada por uma variação constante entre seus termos, sendo um exemplo clássico de regularidade linear em sequências numéricas.*

Considere uma progressão aritmética (PA) representada por $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, na qual cada termo é obtido pela adição de uma constante r , denominada **razão da PA**, ao termo anterior. Essa propriedade possibilita tanto o avanço quanto o retrocesso na sequência, bastando multiplicar a razão pelo número de posições desejadas.

Por exemplo, ao calcular a_{15} a partir de a_6 , observa-se um avanço de 9 posições, resultando em:

$$a_{15} = a_6 + 9r.$$

De forma semelhante, para determinar a_{10} a partir de a_3 , tem-se:

$$a_{10} = a_3 + 7r.$$

No caso de retrocesso, como ao calcular a_2 a partir de a_{11} , aplica-se:

$$a_2 = a_{11} - 9r.$$

A generalização desse comportamento é dada pela **fórmula do termo geral** da progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r,$$

em que:

- a_1 representa o primeiro termo da PA;
- a_n é o termo geral ou o n -ésimo termo da sequência;
- n indica a posição do termo na progressão;
- r é a razão da PA, isto é, a diferença constante entre dois termos consecutivos.

Exemplo 1. [Lima et al. (2016)], O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Resolução: Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834, ... e formam uma progressão aritmética de razão -76 . O termo de ordem n dessa progressão é

$$a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

isto é,

$$a_n = 1986 - 76(n - 1) = 2062 - 76n.$$

Temos $a_n > 0$ quando

$$n < \frac{2062}{76} \approx 27,13.$$

Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{27}.$$

Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano

$$a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10.$$

•

Proposição 1. Se S_n representa a soma dos n primeiros termos de uma P.A. $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, de primeiro termo a_1 e n ésimo termo a_n , com $n \in \mathbb{N}$, então

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Podemos apresentar a seguinte justificativa, sabemos que a soma pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Agora, vamos reescrever essa mesma soma, mas na ordem contrária:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1.$$

Somando essas duas expressões termo a termo, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Observe que todos os parênteses resultam na mesma soma: $(a_1 + a_n)$, pois em uma PA os termos equidistantes do início e do fim se somam ao mesmo valor.

Como há n termos ao todo, formamos n desses parênteses. Assim:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Dividindo ambos os lados da equação por 2, obtemos a fórmula desejada:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Exemplo 2. [Lima et al. (2016)], Considere a progressão aritmética $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ e determine a soma dos seus 55 primeiros termos. Para isso, é preciso saber qual é o 55º termo dessa sequência. Para encontrá-lo, utilizaremos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.?

Resolução:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{55} = 2 + (55 - 1) \cdot 2$$

$$a_{55} = 2 + 54 \cdot 2$$

$$a_{55} = 2 + 108$$

$$a_{55} = 110$$

Agora, usando a fórmula para soma dos n primeiros termos de uma PA, teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{55} = \frac{(2 + 110) \cdot 55}{2} = \frac{112 \cdot 55}{2} = \frac{6160}{2} = 3080$$

•

Definição 3. Progressão Geométrica é uma sequência de números reais não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante q , denominada razão da progressão.

Seja a sequência $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, então temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \quad a_4 = a_3 \cdot q, \quad \dots, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

De forma geral, o termo de posição n pode ser determinado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

em que:

- a_1 é o primeiro termo da PG;
- q é a razão constante da progressão;

- n é a posição do termo na sequência.

Exemplo 3. [Bonjorno, Giovanni-Júnior e Sousa (2020)], Um mercado organizou caixas de um produto em forma de pirâmide. O primeiro patamar contém 4 caixas, e cada patamar seguinte possui o dobro de caixas do patamar imediatamente anterior. Determine quantas caixas há no 8º patamar.

Resolução:

Dados da PG: $a_1 = 4$ (primeiro termo), $q = 2$ (razão), $n = 8$ (posição desejada).

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 4 \cdot 2^{8-1} = 4 \cdot 2^7 = 4 \cdot 128 = 512.$$

Logo, no 8º patamar há **512** caixas.

•

Proposição 2. Se $(a_n)_{n>0}$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma PG de razão $q \neq 0$ e S_n representa a soma dos seus n primeiros termos, então:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ se } q \neq 1.$$

Exemplo 4. [Lima et al. (2016)], Segundo a lenda, o inventor do xadrez solicitou como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, e assim sucessivamente, dobrando a quantidade a cada nova casa. Considerando que o tabuleiro possui 64 casas, a quantidade total de grãos requisitada corresponde à soma dos 64 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 e termo inicial 1, O valor dessa soma é:

Resolução:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

O cálculo nos leva a um número extenso, com vinte dígitos:

18 446 744 073 709 551 615.

•

Isso significa o total de grãos de trigo que o inventor do xadrez estaria solicitando ao final das 64 casas do tabuleiro. A contagem começa com apenas 1 grão na primeira casa e vai dobrando a cada nova casa (2, 4, 8, 16, ...). O resultado dessa soma é:

$$18446744073709551615 \text{ grãos de trigo}$$

o que corresponde a cerca de 18,4 quintilhões de grãos. Esse número é tão gigantesco que torna o pedido praticamente impossível de ser realizado.

3.2 Recorrência

Diversas sequências podem ser descritas por meio de uma regra de formação que envolve seus termos anteriores, o que caracteriza uma definição recursiva. Isso significa que, a partir de um ou mais termos iniciais, é possível determinar os demais termos com base nos que já foram definidos.

Exemplo 5. A sequência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dos números naturais ímpares $1, 3, 5, 7, \dots$ pode ser construída a partir da relação $x_{n+1} = x_n + 2$ para $n \geq 1$, com o valor inicial $x_1 = 1$.

Exemplo 6. Uma progressão aritmética $\{x_n\}_{n \geq 1}$ qualquer, com razão r e termo inicial a , pode ser representada por $x_{n+1} = x_n + r$ para $n \geq 1$, sendo que $x_1 = a$.

Exemplo 7. Considere a sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine x_5 .

Resolução: Calculamos os termos da sequência até x_5 :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2x_1 + x_0 = 2 \cdot (1) + 1 = 3$$

$$x_3 = 2x_2 + x_1 = 2 \cdot (3) + 1 = 7$$

$$x_4 = 2x_3 + x_2 = 2 \cdot (7) + 3 = 17$$

$$x_5 = 2x_4 + x_3 = 2 \cdot (17) + 7 = 41$$

Logo:

$$\{x_n\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 3, 7, 17, 41, \dots\}$$

3.2.1 Recorrência de Primeira Ordem

Chamamos de recorrência de **primeira ordem** toda relação que define um termo da sequência x_{n+1} em função direta do termo imediatamente anterior x_n .

Definição 4. Uma recorrência de primeira ordem é classificada como **linear** se a função que define x_{n+1} em termos de x_n for de primeiro grau em x_n , ou seja, da forma:

$$x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n),$$

sendo $g(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $g(n)$, $h(n)$ são funções conhecidas.

- Se $h(n) = 0$, a recorrência é dita **linear homogênea**.
- Se $h(n) \neq 0$, a recorrência é **linear não homogênea**.

Exemplo 8. Dado a recorrência $x_{n+1} = n \cdot x_n$, com $x_1 = 1$, vamos mostrar que $X_n = (n-1)!$:

Resolução: Vamos calcular alguns termos da sequência para entender seu padrão:

$$x_2 = 1 \cdot x_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$x_3 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_4 = 3 \cdot x_3 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$x_5 = 4 \cdot x_4 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$x_6 = 5 \cdot x_5 = 5 \cdot 24 = 120$$

$$\vdots$$

$$x_n = (n-1) \cdot x_{n-1}$$

Observamos que cada termo é o anterior multiplicado por um número inteiro do tipo $(n-1)$. Isso nos leva à seguinte forma geral:

$$X_n = (n-1)(n-2) \cdot X_{n-2}$$

$$x_n = (n-1)!$$

Como sabemos que $x_1 = 1$, então:

$$x_n = (n-1)!$$

•

Exemplo 9. [Lima et al. (2016)], Dado a recorrência não homogênea $x_{n+1} = x_n + n$, com $x_1 = 0$, vamos encontrar uma expressão para o termo geral.

Resolução: Vamos calcular os primeiros termos da sequência para entender seu padrão:

$$x_2 = x_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$x_3 = x_2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x_4 = x_3 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + (n-1)$$

Observe que a cada passo somamos o número $n-1$. Isso significa que estamos somando todos os inteiros de 1 até $n-1$:

$$x_n = x_{n-2} + (n-2) + (n-1)$$

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

Como $x_1 = 0$, temos:

$$x_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

Usando a fórmula da soma dos k primeiros números naturais:

$$x_n = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

•

Exemplo 10. Resolução: Queremos resolver a equação de recorrência:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Primeiro, consideramos a parte homogênea:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Isso nos dá:

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$x_4 = 2x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = 2x_{n-1}$$

Logo,

$$x_n = 2^{n-1} \cdot x_1.$$

Assim, a solução da homogênea é:

$$x_n^{(h)} = C \cdot 2^{n-1},$$

onde $C = x_1$ é uma constante.

Agora, voltamos para a equação completa:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Fazemos a substituição:

$$x_n = 2^{n-1} y_n.$$

Substituindo na recorrência:

$$2^n y_{n+1} = 2 \cdot (2^{n-1} y_n) + 1,$$

$$2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1.$$

Dividindo por 2^n :

$$y_{n+1} = y_n + 2^{-n}.$$

Isso significa que cada termo é obtido somando uma fração ao anterior:

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}, \quad y_3 = y_2 + 2^{-2}, \quad y_4 = y_3 + 2^{-3}, \quad \dots, \quad y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.$$

Somando todos os termos:

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-(n-1)}.$$

Portanto:

$$y_n = y_1 + 1 - 2^{-(n-1)}.$$

Voltando para x_n :

$$x_n = 2^{n-1}y_n = 2^{n-1} \left(y_1 + 1 - 2^{-(n-1)} \right).$$

Simplificando:

$$x_n = 2^{n-1}(y_1 + 1) - 1.$$

Se a condição inicial é $x_1 = 2$, então:

$$x_1 = 2^0 y_1 \Rightarrow y_1 = 2.$$

Substituindo:

$$x_n = 2^{n-1}(2 + 1) - 1,$$

$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1.$$

•

3.2.2 Recorrência de Segunda Ordem

Chamamos de **recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes** toda relação que define um termo da sequência x_{n+2} em função dos dois termos imediatamente anteriores, x_{n+1} e x_n .

Definição 5. Uma recorrência linear de segunda ordem é classificada como homogênea com coeficientes constantes quando p e q são constantes reais conhecidas, e o termo x_{n+2} depende apenas de x_{n+1} e x_n , sem a presença de termos independentes. Assim, tem-se:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Supondo $q \neq 0$, associa-se à recorrência a seguinte equação característica:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Essa equação do segundo grau é denominada **equação característica** da recorrência. A suposição de que $q \neq 0$ garante que o número zero não seja uma de suas raízes.

Antes de apresentarmos a expressão de Binet referente à sequência repunidade, é oportuno revisitar o conceito de *sequências lineares recorrentes homogêneas*. Essas sequências podem ser expressas pela relação geral:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

em que $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ e $c_k \neq 0$, conforme discutido por Koshy (2011).

O termo *linear* é utilizado porque cada termo da sequência é obtido a partir de uma combinação linear dos anteriores, sem a ocorrência de potências ou produtos entre os coeficientes e os termos precedentes. O estudo das equações de recorrência lineares homogêneas permite determinar uma *forma geral de solução*, obtida a partir das raízes da equação característica associada. Dessa forma, a solução geral pode ser expressa como:

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e x_1, x_2 correspondem às raízes da equação característica da recorrência. Alguns resultados teóricos sobre equações lineares de recorrência podem ser encontrados em Lima *et al.* (2016), onde são apresentados teoremas fundamentais acerca de suas soluções.

Teorema 1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Prova: Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = 0.$$

Agrupando de forma conveniente os termos, temos:

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

■

Exemplo 11. *Determine a solução da recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$, dados $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$.*

Solução. Considere a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$. A equação característica é

$$r^2 - 4r - 5 = 0,$$

cujas raízes são -1 e 5 . De acordo com o teorema 2, todas as formas

$$a_n = C_1 (-1)^n + C_2 (5)^n$$

são soluções da recorrência.

Substituindo $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$, obtemos:

$$a_0 = C_1(-1)^0 + C_2(5)^0 = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = C_1(-1)^1 + C_2(5)^1 = 1,$$

chegando ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 5C_2 = 1. \end{cases}$$

cuja solução é $C_1 = \frac{2}{3}$ e $C_2 = \frac{1}{3}$.

Logo, a solução da recorrência é dada por:

$$a_n = \frac{2(-1)^n + 5^n}{3}.$$

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apresentada no Teorema 2.

Teorema 2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, sendo C_1 e C_2 constantes, a expressão $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é denominada forma fechada do tipo Binet para a sequência $\{a_n\}_{n \geq 0}$.*

Exemplo 12. *Encontre uma fórmula fechada para a recorrência $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, com $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.*

Resolução: A equação dada é uma recorrência linear de segunda ordem:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$$

Escrevendo-a na forma padrão:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$$

Obtemos a equação característica associada:

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos as raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = 1$. Como são reais e distintas, a solução geral da recorrência é:

$$x_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 1^n = C_1 \cdot 3^n + C_2$$

Agora usamos as condições iniciais dadas no problema para encontrar C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \text{como então} & 3C_1 + C_2 = 0 \\ x_2 = 1 & \text{como sendo} & 9C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$(9C_1 + C_2) - (3C_1 + C_2) = 1 - 0 \quad \text{resulta em} \quad 6C_1 = 1 \quad \text{equivalentemente} \quad C_1 = \frac{1}{6}$$

Substituindo em $3C_1 + C_2 = 0$:

$$3 \cdot \frac{1}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + C_2 = 0 \quad \text{assim, obtemos} \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a fórmula fechada da sequência é:

$$x_n = \frac{3^n - 3}{6}$$

•

Teorema 3. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, com $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + n \cdot C_2 r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com as condições iniciais x_0 e x_1 , e os valores de C_1 e C_2 constantes a determinar.

Prova: Como as raízes são iguais, então $r = \frac{-p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r^{n+2} + nC_2 r^{n+2} + p [C_1 r^{n+1} + nC_2 r^{n+1}] + q [C_1 r^n + nC_2 r^n] = 0.$$

Agrupando de forma conveniente os termos, temos:

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + nC_2 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n (0) + nC_2 r^n (0) + C_2 r^n (0) = 0.$$

Por meio das condições iniciais, as constantes são determinadas. ■

Exemplo 13. Encontre uma fórmula fechada para a recorrência $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0$, dados $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$.

Resolução: Considere a recorrência $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0$. A equação característica é

$$r^2 - 8r + 16 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = 4$. De acordo com o Teorema 4, todas as formas

$$a_n = C_1 4^n + n C_2 4^n$$

são soluções da recorrência.

Substituindo $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$, obtemos:

$$a_0 = C_1 4^0 + 0 C_2 4^0 = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = C_1 4^1 + 1 C_2 4^1 = 1,$$

o que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 4C_1 + 4C_2 = 1. \end{cases}$$

Cuja solução é $C_1 = 1$ e $C_2 = -\frac{3}{4}$.

Logo, a solução da recorrência é dada por:

$$a_n = 4^n \left(1 - \frac{3n}{4} \right).$$

•

3.3 Sequência Repunidade

Criado a partir da justaposição do algarismo 1, o conjunto dos números da repunidade constitui uma classe particular dos números naturais. Apesar de sua estrutura aparentemente simples, esses números apresentam propriedades matemáticas relevantes, despertando o interesse de pesquisadores em teoria dos números. O termo repunidade foi utilizado para designar os números naturais compostos exclusivamente pelo dígito 1 em sua forma decimal, tendo sido citado pela primeira vez na obra de Beiler (1966) e posteriormente abordado por Carvalho e Costa (2015). No caso da sequência repunidade definida por uma recorrência linear de segunda ordem, os termos iniciais são dados por $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$, o que gera a seguinte sucessão de elementos: $\{0, 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \dots\}$

Veja que $r_{n+1} = 10r_n + 1$, $r_0 = 0$ ou seja, os números repunidade são dados por uma recorrência não homogênea. Fazendo a diferença de $r_{n+1} - r_n$ obtém-se uma recorrência homogênea.

Proposição 3. (SANTOS; COSTA, 2023, p. 243) A sequência repunidade é definida pela seguinte relação de recorrência:

$$r_{n+1} = 11r_n - 10r_{n-1}, \quad n \geq 1$$

em que r_n representa o n -ésimo termo da sequência, com valores iniciais $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$.

A extensão da sequência da repunidade para os inteiros é formalizada a partir de uma relação de recorrência, válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 4. (COSTA et al., 2024b, p. 3) Temos a seguinte proposição, que descreve a lei de formação da sequência r_{-n} :

$$r_{-(n+1)} = \frac{11}{10}r_{-n} - \frac{1}{10}r_{-(n-1)} \quad \text{com } r_{-1} = -0,1 \text{ e } r_{-2} = -0,11;$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

A sequência da repunidade admite uma fórmula fechada do tipo Binet, construída a partir das raízes da equação característica associada à sua recorrência.

Proposição 5. (SANTOS; COSTA, 2023, p. 242) Para todo $n \geq 0$ inteiro, temos:

$$r_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

sendo r_n o n -ésimo termo repunidade.

Resolução: Escrevendo-a na forma padrão:

$$r_n - 11r_{n-1} + 10r_{n-2} = 0.$$

Obtemos a equação característica associada:

$$\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos as raízes $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 1$. Como são reais e distintas, a solução geral da recorrência é:

$$r_n = C_1 \cdot 10^n + C_2 \cdot 1^n = C_1 \cdot 10^n + C_2.$$

Agora usamos as condições iniciais dadas no problema para encontrar C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} r_0 = 0 & \Rightarrow C_1 + C_2 = 0, \\ r_1 = 1 & \Rightarrow 10C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$(10C_1 + C_2) - (C_1 + C_2) = 1 - 0 \Rightarrow 9C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{9}.$$

Substituindo em $C_1 + C_2 = 0$:

$$\frac{1}{9} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{9}.$$

Portanto, a fórmula fechada da sequência é:

$$r_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

•

A sequência da repunidade estendida aos inteiros também admite uma representação fechada por meio de uma fórmula do tipo Binet, expressa em termos das raízes da equação característica associada à sua recorrência.

Proposição 6. (*COSTA et al., 2024b, p. 4*). Para todo $n \geq 0$ inteiro, temos:

$$r_{-n} = -\frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n}.$$

sendo r_{-n} o n -ésimo termo repunidade de índice negativo.

Uma alternativa para determinar os termos de uma sequência é por meio de sua função geradora, que possibilita resolver recorrências lineares com coeficientes constantes, conforme destacado por Koshy (2001).

Proposição 7. (*COSTA et al., 2024a, p. 4*). A função geradora para os números da repunidade $\{R_n\}_{n \geq 0}$, denotada por $G_{R_n}(x)$, é dada por

$$G_{R_n}(x) = \frac{x}{1 - 11x + 10x^2}, \quad \text{com } x \neq 1.$$

Prova: Seja $G_{R_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n$ a função geradora dos números da repunidade. Então, ao expandir as equações $G_{R_n}(x)$, $-11xG_{R_n}(x)$ e $10x^2G_{R_n}(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} G_{R_n}(x) &= R_0 + R_1x + R_2x^2 + \dots + R_nx^n + \dots, \\ -11xG_{R_n}(x) &= -11R_0x - 11R_1x^2 - 11R_2x^3 - \dots - 11R_nx^{n+1} + \dots, \\ 10x^2G_{R_n}(x) &= 10R_0x^2 + 10R_1x^3 + 10R_2x^4 + \dots + 10R_nx^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Somando os dois lados, temos:

$$\begin{aligned} (1 - 11x + 10x^2)G_{R_n}(x) &= R_0 + (R_1 - 11R_0)x + (R_2 - 11R_1 + 10R_0)x^2 \\ &\quad + (R_3 - 11R_2 + 10R_1)x^3 + \dots + (R_n - 11R_{n-1} + 10R_{n-2})x^n + \dots \\ &= x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots, \end{aligned}$$

o que implica no resultado. ■

Proposição 8. (COSTA et al., 2024b, p. 4). A função geradora para a repunidade r_{-n} , denotada por $gr_{-n}(x)$, é dada por:

$$gr_{-n}(x) = \frac{x}{10 - 11x + x^2}, \quad \text{com } x \neq 1.$$

Prova: Seja $gr_{-n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{-n}x^n$ a função geradora dos números da repunidade com índices negativos. Então, ao expandir as equações $gr_{-n}(x)$, $-\frac{11x}{10}gr_{-n}(x)$ e $\frac{x^2}{10}gr_{-n}(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} gr_{-n}(x) &= r_0 + r_{-1}x + r_{-2}x^2 + \dots + r_{-n}x^n + \dots \\ -\frac{11x}{10}gr_{-n}(x) &= -\frac{11x}{10}r_0 - \frac{11x}{10}r_{-1}x - \frac{11x}{10}r_{-2}x^2 - \dots - \frac{11x}{10}r_{-n}x^n - \dots \\ \frac{x^2}{10}gr_{-n}(x) &= \frac{x^2}{10}r_0 + \frac{x^2}{10}r_{-1}x + \frac{x^2}{10}r_{-2}x^2 + \dots + \frac{x^2}{10}r_{-n}x^n + \dots \end{aligned}$$

Somando os três termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{11x}{10} + \frac{1}{10}x^2\right)gr_{-n}(x) &= r_0 + \left(r_{-1} - \frac{11}{10}r_0\right)x + \left(r_{-2} - \frac{11}{10}r_{-1} + \frac{1}{10}r_0\right)x^2 \\ &\quad + \left(r_{-3} - \frac{11}{10}r_{-2} + \frac{1}{10}r_{-1}\right)x^3 + \dots \\ &\quad + \left(r_{-n} - \frac{11}{10}r_{-n+1} + \frac{1}{10}r_{-n+2}\right)x^n + \dots \end{aligned}$$

Como os termos da sequência satisfazem a recorrência

$$r_{-n} = \frac{11}{10}r_{-n+1} - \frac{1}{10}r_{-n+2},$$

segue que os coeficientes de todos os x^n com $n \geq 2$ são nulos, e o lado direito reduz-se a:

$$\frac{x}{10} + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots$$

Portanto,

$$\left(1 - \frac{11x}{10} + \frac{x^2}{10}\right) gr_{-n}(x) = \frac{x}{10} \Rightarrow gr_{-n}(x) = \frac{x}{10 - 11x + x^2}.$$

■

Com o objetivo de verificar a validade das expressões obtidas para as funções geradoras da sequência repunidade, tanto para os índices positivos quanto para sua extensão aos índices negativos, foi utilizada a ferramenta computacional Software Máxima. Esse software, gratuito, permite realizar manipulações algébricas simbólicas e operar com séries formais, além de possibilitar a visualização gráfica de expressões matemáticas.

As divisões apresentadas a seguir correspondem ao quociente entre os numeradores das funções geradoras e seus respectivos denominadores, conforme deduzidos anteriormente. A obtenção dos termos das sequências por meio dessa abordagem evidencia a correção das fórmulas propostas. As imagens abaixo mostram as saídas geradas pelo Software Máxima, confirmando os resultados teóricos.

Figura 3 – Função geradora dos números da repunidade positiva utilizando o software Máxima.

```
(%i2)
f(x) := x / (1 - 11*x + 10*x^2);

taylor(f(x), x, 0, 40);

.

(%o1) f(x) :=  $\frac{x}{1 - 11x + 10x^2}$ 

(%o2)/T/  $x + 11x^2 + 111x^3 + 1111x^4 + 11111x^5 + 111111x^6 + 1111111x^7 + 11111111x^8 + 111111111x^9 + 1111111111x^{10} + 11111111111x^{11} + 111111111111x^{12} + 1111111111111x^{13} + 11111111111111x^{14} + 111111111111111x^{15} + 1111111111111111x^{16} + 11111111111111111x^{17} + 111111111111111111x^{18} + 1111111111111111111x^{19} + 11111111111111111111x^{20} + 111111111111111111111x^{21} + 1111111111111111111111x^{22} + 11111111111111111111111x^{23} + 111111111111111111111111x^{24} + 1111111111111111111111111x^{25} + 11111111111111111111111111x^{26} + 111111111111111111111111111x^{27} + 1111111111111111111111111111x^{28} + 11111111111111111111111111111x^{29} + 111111111111111111111111111111x^{30} + 1111111111111111111111111111111x^{31} + 11111111111111111111111111111111x^{32} + 111111111111111111111111111111111x^{33} + 1111111111111111111111111111111111x^{34} + 11111111111111111111111111111111111x^{35} + 111111111111111111111111111111111111x^{36} + 1111111111111111111111111111111111111x^{37} + 11111111111111111111111111111111111111x^{38} + 111111111111111111111111111111111111111x^{39} + 1111111111111111111111111111111111111111x^{40} + \dots$ 
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 4 – Função geradora dos números da repunidade negativa utilizando o software Máxima.

```
(%i4)
g(x) := x / (10 - 11*x + x^2);

taylor(g(x), x, 0, 40);

(%o3) g(x) :=  $\frac{x}{10 - 11x + x^2}$ 

(%o4) T/
 $\frac{x}{10} + \frac{11x^2}{100} + \frac{111x^3}{1000} + \frac{1111x^4}{10000} + \frac{11111x^5}{100000} + \frac{111111x^6}{1000000} + \frac{1111111x^7}{10000000} + \frac{11111111x^8}{100000000} + \frac{111111111x^9}{1000000000} + \frac{1111111111x^{10}}{10000000000} + \frac{11111111111x^{11}}{100000000000} + \frac{111111111111x^{12}}{1000000000000} +$ 
 $\frac{1111111111111x^{13}}{10000000000000} + \frac{11111111111111x^{14}}{100000000000000} + \frac{111111111111111x^{15}}{1000000000000000} + \frac{1111111111111111x^{16}}{10000000000000000} + \frac{11111111111111111x^{17}}{100000000000000000} + \frac{111111111111111111x^{18}}{1000000000000000000} + \frac{1111111111111111111x^{19}}{10000000000000000000} +$ 
 $\frac{11111111111111111111x^{20}}{100000000000000000000} + \frac{111111111111111111111x^{21}}{1000000000000000000000} + \frac{1111111111111111111111x^{22}}{10000000000000000000000} + \frac{11111111111111111111111x^{23}}{100000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111x^{24}}{1000000000000000000000000} +$ 
 $\frac{1111111111111111111111111x^{25}}{10000000000000000000000000} + \frac{11111111111111111111111111x^{26}}{100000000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111111x^{27}}{1000000000000000000000000000} + \frac{1111111111111111111111111111x^{28}}{10000000000000000000000000000} +$ 
 $\frac{11111111111111111111111111111x^{29}}{100000000000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111111111x^{30}}{1000000000000000000000000000000} + \frac{1111111111111111111111111111111x^{31}}{10000000000000000000000000000000} + \frac{11111111111111111111111111111111x^{32}}{100000000000000000000000000000000} +$ 
 $\frac{11111111111111111111111111111111x^{33}}{1000000000000000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111111111111x^{34}}{10000000000000000000000000000000000} + \frac{1111111111111111111111111111111111x^{35}}{100000000000000000000000000000000000} +$ 
 $\frac{11111111111111111111111111111111111x^{36}}{1000000000000000000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111111111111111x^{37}}{10000000000000000000000000000000000000} + \frac{1111111111111111111111111111111111111x^{38}}{100000000000000000000000000000000000000} +$ 
 $\frac{11111111111111111111111111111111111111x^{39}}{1000000000000000000000000000000000000000} + \frac{111111111111111111111111111111111111111x^{40}}{10000000000000000000000000000000000000000} + \dots$ 
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

De acordo com os resultados apresentados em Santos e Costa (2024), a sequência $\{r_n\}_{n \geq 1}$, denominada repunidade positiva.

Proposição 9. *Obtém-se as seguintes relações::*

$$(a) \sum_{k=0}^n r_k = \frac{10r_n - n}{9},$$

$$(b) \sum_{k=0}^n r_{2k} = \frac{10^2 r_{2n} - nr_2}{99},$$

$$(c) \sum_{k=0}^n r_{2k+1} = \frac{r_{2n+3} - (n+1)r_2}{99}.$$

De acordo com os resultados apresentados em Santos e Costa (2024), a sequência $\{r_{-n}\}_{n \geq 0}$, denominada repunidade negativa.

Proposição 10. *Obtém-se as seguintes relações::*

$$(a) \sum_{k=0}^n r_{-k} = -\frac{n - r_{-n}}{9},$$

$$(b) \sum_{k=0}^n r_{-2k} = -\frac{nr_2 - r_{-2n}}{99},$$

$$(c) \sum_{k=0}^n r_{-(2k+1)} = -\frac{(n+1)r_2 - r_{-(2n+1)}}{99}.$$

Definição 6. (COSTA; CARVALHO, 2024, p. 5). Para todo $n \geq 1$, os polinômios repunidade são definidos pela seguinte relação de recorrência .

$$R_1(x) = 1, \quad R_2(x) = x + 10, \quad e \quad R_{n+2}(x) = 11xR_{n+1}(x) - 10R_n(x),$$

em que x é uma variável real. Esses polinômios são denominados polinômios repunidade.

Com base na definição da recorrência dos polinômios de repunidade, apresentamos na Tabela 1 os primeiros cinco termos $R_n(x)$, para $1 \leq n \leq 5$.

Tabela 1 – Polinômios de repunidade para $1 \leq n \leq 5$

n	$R_n(x)$
1	1
2	$x + 10$
3	$11x^2 + 110x - 10$
4	$121x^3 + 1210x^2 - 120x - 100$
5	$1331x^4 + 13310x^3 - 1430x^2 - 2200x + 100$

Definição 7. Para todo $n \geq 0$, os polinômios de repunidade negativa são definidos pela seguinte relação de recorrência.

$$R_1(x) = 1, \quad R_0(x) = x - 1, \quad e \quad R_{-n}(x) = \frac{11x \cdot R_{-(n-1)}(x) - R_{-(n-2)}(x)}{10},$$

em que x é uma variável real. Esses polinômios são denominados polinômios repunidade negativa.

Tabela 2 – Polinômios repunidade para $-4 \leq n \leq 0$

n	$R_{-n}(x)$
0	$x - 1$
-1	$\frac{11x^2 - 11x - 1}{10}$
-2	$\frac{121x^3 - 121x^2 - 21x + 10}{100}$
-3	$\frac{1331x^4 - 1331x^3 - 341x^2 + 220x + 10}{1000}$
-4	$\frac{14641x^5 - 14641x^4 - 4961x^3 + 3630x^2 + 320x - 100}{10000}$

Dessa forma, serão selecionados elementos específicos para conduzir um processo investigativo sobre a sequência repunidade por meio da elaboração de situações-didáticas fundamentadas na metodologia de pesquisa e ensino. Busca-se, com isso, incentivar o desenvolvimento do pensamento investigativo dos estudantes e a construção de saberes matemáticos. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Santos (2019) e Bezerra (2022), que elaboraram atividades voltadas à sequência repunidade no campo dos números naturais, evidenciando seu potencial como ferramenta didática para o ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental.

3.4 Análise de livros didáticos

Esta seção mostra a análise dos livros didáticos de matemática usados no ensino médio. Esses livros são distribuídos de forma gratuita para os estudantes da rede pública por meio do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Os materiais avaliados fazem parte da edição do PNLD 2021, com foco no conceito de sequências e/ou recorrências. Entre os livros analisados, percebe-se que as coleções tratam o conceito de sequência numérica de forma direta ou indireta, principalmente por meio do estudo das progressões aritmética (PA) e geométrica (PG). Nem todas as atividades têm uma seção chamada "Sequência", mas há construções conceituais distribuídas ao longo dos capítulos e das atividades.

Na coleção **Matemática Interligada** de Andrade (2020), identifica-se uma introdução ao conceito de sequência por meio de exercícios envolvendo as progressões. Além disso, há

referência específica à sequência de Fibonacci, que é trabalhada em um exercício, o que permite abordar a noção de regularidade e recorrência. A coleção também apresenta de forma clara a fórmula dos n termos e o termo geral da PA, estrutura que se repete para a PG. Assim, ainda que não traga uma definição explícita de sequência, constrói-se um entendimento progressivo do conceito por meio da prática e do desenvolvimento de habilidades relacionadas.

A coleção **Matemática em Contexto** dos autores Dante e Viana (2020), por sua vez, apresenta uma abordagem mais detalhada. No início de um dos capítulos, há a exploração da fórmula do termo geral de algumas sequências numéricas, relacionando cada termo a_n à posição n que ocupa na sequência. Essa abordagem destaca a importância da relação funcional entre a posição e o valor do termo, reforçando a conexão entre funções e progressões. A coleção também trabalha conjecturas envolvendo a PG e associa explicitamente a lei de formação das funções com as progressões aritmética e geométrica, ampliando a compreensão do conceito de sequência dentro de um contexto mais amplo da álgebra.

A obra também aborda, ainda que brevemente, o conceito de fractais, destacando o Triângulo de Sierpinski, criação do matemático polonês Wacław Sierpinski. Apesar de não abordar o conceito de sequência numérica de forma direta, essa referência incorpora elementos de padrão e repetição que interagem com a ideia de estrutura e regularidade, características centrais no estudo de sequências.

A coleção **Prisma** de Bonjorno, Giovanni-Júnior e Sousa (2020) apresenta uma abordagem didática e contextualizada sobre o conceito de sequências numéricas, iniciando com exemplos do cotidiano como os dias da semana e os anos de realização das Olimpíadas para introduzir a ideia de regularidade. A noção formal de sequência é construída progressivamente, com destaque para a representação por termos e índices, além da introdução da sequência de Fibonacci como exemplo histórico e funcional. Essa sequência é trabalhada tanto em sua lei de formação por recorrência quanto em suas aplicações, como o crescimento populacional de coelhos, promovendo uma compreensão interdisciplinar. A obra diferencia sequências gerais e numéricas, abordando estas últimas como aquelas compostas apenas por números, e formaliza sua representação por funções matemáticas. São exploradas também as formas de determinar elementos da sequência: por recorrência, como em Fibonacci, e por termo geral.

Além disso, a coleção dedica capítulos específicos às progressões aritméticas e geométricas. A progressão aritmética (PA) é apresentada como uma sequência de razão constante, com destaque para a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, sendo contextualizada por

situações como o crescimento de uma planta. Já a progressão geométrica (PG) é introduzida a partir da multiplicação de um termo por uma razão fixa, com exemplos visuais como a organização de caixas em patamares. Também são exploradas propriedades relevantes, como a soma de termos equidistantes e extremos em PAs finitas. A abordagem da coleção favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico e a aplicação de conceitos em contextos reais, sendo coerente com os objetivos da BNCC ao articular conteúdo matemático com linguagem acessível e situações práticas.

As coleções analisadas dão preferência a sequências vinculadas à função afim, com ênfase nas progressões aritméticas. Isso acontece porque, antes das orientações da BNCC, os estudantes estudavam principalmente sequências aritméticas e geométricas.

As progressões aritméticas e geométricas são temas quase obrigatórios já no primeiro ano do Ensino Médio. Embora esses conteúdos tenham sua essência ligada à exploração de padrões numéricos, ao delimitar os casos possíveis de sequências a apenas duas possíveis regras de formação (uma ligada à adição e outra à multiplicação), as possibilidades de investigação dessas sucessões ficam extremamente limitadas (SILVA; PIRES, 2013, p. 33).

A citação de Silva e Pires (2013) reforça a ideia de que o estudo das sequências numéricas é limitado quando se trabalha apenas com progressões aritméticas e geométricas. Isso se deve ao fato de que tais progressões seguem regras muito específicas, relacionadas à adição e à multiplicação, o que dificulta a exploração de outros padrões. Para que os discentes desenvolvam a capacidade de investigar, identificar diferentes regularidades e formular generalizações, é importante apresentar outros tipos de sequências e propor atividades que estimulem a observação e a descoberta de novas regras.

4 ANÁLISES A PRIORI E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

4.1 Concepções das Situações Didáticas

O presente capítulo aborda situações didáticas desenvolvidas com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD), voltadas para o ensino da sequência repunidade. A proposta tem como objetivo promover a compreensão e a construção do conceito em questão pelos discentes, por meio de atividades que abrangem as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, conforme delineado pela TSD.

Retomando os conteúdos matemáticos desenvolvidos no campo epistêmico da matemática, parte-se do estudo das sequências numéricas clássicas, como as progressões aritmética (PA) e geométrica (PG), que já foram abordadas anteriormente. Com referência a este conhecimento prévio, os discentes são conduzidos à exploração e à construção da sequência repunidade.

Durante as atividades, os discentes não apenas construirão os termos da sequência, mas também serão incentivados a determinar sua equação característica, buscar suas raízes e, por fim, deduzir uma fórmula fechada, semelhante à de Binet. As situações-problema apresentadas foram elaboradas com o propósito de fomentar a construção ativa do conhecimento, demandando dos discentes habilidades previamente adquiridas acerca de sequências numéricas, uma vez que os mesmos princípios trabalhados em PA e PG serão retomados na formulação e compreensão da nova sequência apresentada.

4.2 Construção das Situações Didáticas

Neste tópico, serão descritas as situações didáticas e os objetivos esperados nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD durante a resolução de situações-problema envolvendo a sequência repunidade.

Situação Didática 1

Sobre o estudo de sequências numéricas, analisamos um interessante problema envolvendo os números formados apenas pelo algarismo 1, denominados números repunidade. Vimos que os termos dessa sequência podem ser determinados pela seguinte fórmula de recorrência:

$$r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1}$$

com $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$.

Dessa forma, apresente os cinco primeiros termos dessa sequência.

Fase da ação: Fundamentado no conhecimento referente às progressões aritméticas e progressões geométricas, conhecendo suas fórmulas de recorrência e após a realização da aula referente às sequências lineares recursivas, a apresentação da sequência repunidade será feita por meio de sua fórmula de recorrência, dada por

$$r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1},$$

com os valores iniciais $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$. Espera-se que o aprendente tenha a princípio a ideia de substituir o índice n por valores numéricos maiores ou iguais a 1 e resolva a expressão para determinar os próximos termos da sequência utilizando os valores iniciais. Por exemplo, o educando deverá obter $r_2 = 11 \cdot r_1 - 10 \cdot r_0 = 11$, $r_3 = 11 \cdot r_2 - 10 \cdot r_1 = 121 - 10 = 111$, entre outros.

Nesse momento, poderá haver dificuldades por parte dos educandos para encontrar os primeiros termos dessa sequência. Poderão ter dúvidas na hora de usar a lei de recorrência dada quanto à substituição dos índices dos termos da sequência. O professor então poderá questionar ao aprendente como ele faria se estivesse buscando os termos de uma progressão aritmética, por exemplo. Já com os valores dos termos iniciais, o professor poderá junto aos educandos pedir que observem como se comportam os números da sequência. Espera-se que o educando encontre os primeiros termos da sequência: 0, 1, 11, 111, ...

Fase da formulação: Depois de encontrarem os primeiros termos da sequência repunidade, espera-se que o aprendente possa observar como um termo posterior é determinado, ou seja, que o discente consiga compreender como se dá a construção da sequência, visto que após a construção inicial da sequência é possível que seja visto o padrão que ela segue. O aprendente poderá perceber que mesmo sem o uso de cálculos na fórmula de recorrência ele será capaz de determinar os próximos termos da sequência, uma vez que o professor já comentou

sobre essa possibilidade durante o momento da aula. O professor, ao observar as dificuldades dos educandos, poderá fazer questionamentos que os levem a refletir sobre as estratégias de resolução da situação didática. Pode-se, por exemplo, discutir a multiplicação do termo anterior por 11 e a subtração de 10 vezes o termo anterior a ele, ou investigar padrões no crescimento dos valores.

Fase da validação: A partir da fórmula de recorrência

$$r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1},$$

espera-se que o discente possa confirmar a ideia intuitiva que teve na etapa anterior observando que n e $n - 1$ são os índices dos números da sequência repunidade utilizados para determinar o termo seguinte. Logo, o discente pode concluir que poderá determinar os demais termos dessa sequência por meio da aplicação sistemática da fórmula. Essa percepção deve ser feita quando o estudante tem os valores dos primeiros termos e compreende que a estrutura da sequência se mantém constante, permitindo prever e validar os próximos termos da sequência por meio da verificação da recorrência.

Fase da institucionalização: O professor retoma o domínio da situação didática com o objetivo de analisar as soluções encontradas pelos aprendentes e verificar a sua validade. O docente apresenta aos estudantes a finalidade da atividade proposta, ressaltando a obtenção da construção da sequência repunidade pelos discentes e a validação do seu padrão de formação. Neste momento, o conhecimento é institucionalizado como objeto matemático, e os estudantes passam a reconhecer a sequência de repunidade como uma sequência linear de segunda ordem com aplicação de fórmula de recorrência e estrutura própria.

Situação Didática 2

A sequência repunidade é definida pela seguinte recorrência:

$$r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1}, \quad \text{valores iniciais } r_0 = 0, r_1 = 1, \quad n \geq 1.$$

Verifique se é possível a extensão da sequência repunidade para índices inteiros, ou seja, encontre os termos com índices negativos para esta sequência. Determine uma recorrência que permita encontrar esses termos.

Fase da ação: Nesta primeira fase esperamos que os aprendentes encontrem alguns termos com índices negativos da seguinte forma:

Partindo da recorrência $r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1}$, com $n \geq 1$ e $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, os aprendentes deverão perceber que, se escolherem valores para $n \leq 1$ na fórmula de recorrência e das condições iniciais, pode-se obter os termos da sequência para índices inteiros não positivos.

Fase da formulação: Os discentes, apropriados das ideias iniciais, irão substituindo os valores para n , conforme formulado na situação anterior, e assim obter os seguintes valores, por meio de manipulações algébricas na fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned} r_{-1} &= \frac{11 \cdot r_0 - r_1}{10} = \frac{0 - 1}{10} = -\frac{1}{10} \\ r_{-2} &= \frac{11 \cdot r_{-1} - r_0}{10} = \frac{11 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - 0}{10} = -\frac{11}{100} \\ r_{-3} &= \frac{11 \cdot r_{-2} - r_{-1}}{10} = \frac{11 \cdot \left(-\frac{11}{100}\right) + \frac{1}{10}}{10} = -\frac{111}{1000} \\ r_{-4} &= \frac{11 \cdot r_{-3} - r_{-2}}{10} = \frac{11 \cdot \left(-\frac{111}{1000}\right) + \frac{11}{100}}{10} = -\frac{1111}{10000} \end{aligned}$$

Fase da validação: Os discentes deverão estabelecer uma definição que permita encontrar qualquer termo da sequência com índices inteiros não positivos. Poderão perceber essa relação a partir dos casos particulares que foram encontrados na situação de ação. Assim, poderão chegar na seguinte relação de recorrência para os negativos:

$$\begin{aligned} r_{n+1} = 11 \cdot r_n - 10 \cdot r_{n-1} \quad \text{daí} \quad 10 \cdot r_{n-1} = 11 \cdot r_n - r_{n+1} \quad \text{obtemos} \quad r_{n-1} = \frac{11 \cdot r_n}{10} - \frac{r_{n+1}}{10} \\ \text{equivalentemente} \quad r_{-n} = \frac{11 \cdot r_{-(n-1)} - r_{-(n-2)}}{10} \end{aligned}$$

Fase da institucionalização: O professor deverá analisar as produções dos educandos com o objetivo de auxiliá-los a construir uma nova fórmula de recorrência para os termos negativos da sequência, com base na definição 1. Como a fórmula original exige manipulações algébricas para calcular os termos com índices negativos, esta etapa busca encontrar uma maneira mais direta e prática de calcular esses termos.

Situação Didática 3

A sequência repunidade é definida por uma relação de recorrência cuja **equação característica** é dada por:

$$r^2 - 11r + 10 = 0.$$

Determine as raízes da equação característica da sequência.

Fase da Ação: Os estudantes são convidados a analisar a equação do segundo grau apresentada e explorar estratégias para determinar suas raízes, utilizando conhecimentos prévios sobre fatoração ou fórmula de Bhaskara. Nesta fase, não há intervenção do professor, permitindo a mobilização autônoma dos saberes dos educandos.

Fase da Formulação: Os estudantes expressam suas ideias e estratégias para resolver a equação $r^2 - 11r + 10 = 0$, registrando seus procedimentos em grupo ou individualmente. Podem surgir diferentes métodos de resolução, o que possibilita a comparação de caminhos distintos para alcançar as raízes da equação.

Fase da Validação: Após obterem os valores de r_1 e r_2 , os estudantes são incentivados a verificar se essas soluções realmente satisfazem a equação característica. Essa fase pode envolver substituições, discussões coletivas e confrontos entre respostas diferentes, promovendo a validação interna do conhecimento construído.

Fase da Institucionalização: O professor intervém sistematizando os conhecimentos mobilizados, destacando a importância da equação característica no contexto das sequências recorrentes. Formaliza o uso das raízes na construção da fórmula fechada da sequência repunidade, consolidando os saberes e conectando-os a conceitos matemáticos mais amplos.

Situação Didática 4

Sabemos que a sequência repunidade é definida pela relação de recorrência $r_{n+1} = 11r_n - 10r_{n-1}$, com $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$.

A equação característica associada é $r^2 - 11r + 10 = 0$, cujas raízes reais foram obtidas anteriormente.

De acordo com a teoria das equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, a solução geral da sequência pode ser escrita como:

$$r_n = c_1 \cdot 10^n + c_2 \cdot 1^n$$

Fase da Ação: Os educandos retomam a fórmula geral $r_n = c_1 \cdot 10^n + c_2 \cdot 1^n$ e, substituindo os valores iniciais $n = 0$ e $n = 1$, obtêm as equações $r_0 = c_1 \cdot 10^0 + c_2 \cdot 1^0$ e $r_1 = c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 1^1$, que compõem um sistema linear. Essa retomada tem como objetivo ativar o conhecimento previamente explorado e conduzir a resolução algébrica do sistema.

Fase da Formulação: A partir do sistema obtido, os estudantes propõem estratégias para encontrar os valores de c_1 e c_2 . Eles organizam os cálculos e discutem a coerência dos

coeficientes com os termos conhecidos da sequência.

Fase da Validação: Com os coeficientes determinados, os aprendentes substituem na expressão geral para testar a fórmula de Binet obtida. Calculam, por exemplo, r_2 , r_3 e r_4 , comparando com os valores já conhecidos da sequência repunidade.

Fase da Institucionalização: O professor formaliza a construção da fórmula de Binet, destacando sua importância e aplicação no contexto das equações de recorrência. Enfatiza-se que essa técnica permite obter qualquer termo da sequência de maneira direta.

Situação Didática 5

Como estudado anteriormente, sabemos que a fórmula de Binet da sequência repunidade, válida para números naturais, é dada por:

$$r_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Essa expressão nos permite calcular rapidamente qualquer termo da sequência quando n é um número natural.

Agora, queremos investigar se essa fórmula pode ser estendida também para valores inteiros negativos. Para isso, proponha a substituição de n por $-n$ na fórmula e analise o que acontece com a expressão. A partir dessa substituição, construa uma nova forma de representar r_{-n} , válida para $n \in \mathbb{N}^*$, e interprete o resultado obtido.

Na **fase da ação**, os educandos retomam a fórmula de Binet da sequência repunidade para $n \in \mathbb{N}$, dada por $r_n = \frac{10^n - 1}{9}$. A proposta é que eles substituam n por valores negativos, como $-1, -2, -3$, e observem o comportamento da expressão $r_{-n} = \frac{10^{-n} - 1}{9}$. Essa atividade tem como objetivo ativar conhecimentos prévios sobre potências com expoente negativo, recordando que $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$, o que introduz a presença de frações na sequência. Com isso, os estudantes iniciam um processo exploratório, buscando identificar regularidades ou padrões que surjam nesses novos termos.

Na **fase da formulação**, os educandos, com base nos resultados obtidos na fase anterior, devem levantar hipóteses sobre uma possível expressão geral para os termos com índices negativos da sequência. Eles são incentivados a conjecturar uma forma funcional para r_{-n} , observando como ela se relaciona com os termos positivos da sequência. Essa etapa favorece o desenvolvimento da capacidade de generalização e o raciocínio algébrico, permitindo aos educandos propor uma extensão da fórmula de Binet para $n \in \mathbb{Z}$.

A **fase da validação** tem como foco a análise crítica das hipóteses construídas. Os estudantes comparam os valores gerados pela expressão proposta para r_{-n} com os resultados obtidos diretamente pela substituição na fórmula. Também podem utilizar a recorrência da sequência, caso já tenha sido trabalhada, para verificar a consistência dos valores. Nesse momento, a turma discute se a generalização proposta se sustenta matematicamente e se mantém coerente com o padrão da sequência.

Por fim, na **fase da institucionalização**, o professor retoma a discussão coletiva e sistematiza os conhecimentos construídos ao longo da atividade. Ele formaliza a extensão da fórmula de Binet para índices negativos e destaca a importância da compreensão das potências com expoente negativo para esse processo. É o momento de explicitar que a sequência repunidade pode ser estendida para todo $n \in \mathbb{Z}$, consolidando a ideia de generalização e reforçando o valor do raciocínio algébrico na construção de fórmulas. Assim, a atividade é encerrada com a validação conceitual da extensão da fórmula para o conjunto dos inteiros.

5 REFLEXÕES SOBRE A ANÁLISE A POSTERIORI E O PROCESSO DE VALIDAÇÃO

A etapa final de uma Engenharia Didática consiste na análise a posteriori ou validação. Nesse estágio, executa-se a averiguação e a interpretação dos dados obtidos durante a implementação das situações ou sequências didáticas, contrastando-os com as hipóteses e projeções estabelecidas na análise a priori. Conforme Laborde (1997), essa validação pode ocorrer de duas formas: interna e externa. No âmbito desta pesquisa, não foi realizada uma experimentação com educandos, e por isso, não há dados empíricos para serem validados diretamente. Não obstante, serão realizadas reflexões acerca das expectativas e intenções do estudo. É importante ressaltar que, mesmo sem a aplicação prática, esta pesquisa apresenta características de uma validação interna.

A validação interna em uma Engenharia Didática é realizada por meio da comparação dos dados obtidos ao longo da pesquisa com as hipóteses formuladas previamente, durante a análise a priori. A comparação é realizada considerando o mesmo objeto de estudo, possibilitando avaliar se os resultados estão de acordo com o que foi inicialmente previsto. Ademais, conforme a perspectiva de Laborde (1997), em um contexto mais específico, há ainda outras considerações relevantes sobre o processo de validação interna em uma Engenharia Didática.

É importante apresentar uma descrição geral dos alunos, da turma como um todo, de seus comportamentos em sala e dos tipos de produções mais frequentes. Deve-se também analisar como essas produções evoluem ao longo da aplicação da sequência didática, observando a adequação das propostas às características dos estudantes (LABORDE, 1997, p. 105, tradução nossa).

Deste modo, é possível compreender que a validação interna numa Engenharia Didática requer uma observação dos estudantes durante a aplicação da sequência. O acompanhamento do comportamento dos estudantes, dos seus produtos e da sua evolução permite compreender se as propostas estão efetivamente adequadas ao grupo. Conforme indicado por Laborde (1997), esta análise é fundamental para confirmar a aplicabilidade do plano teórico em contexto prático e a consecução dos objetivos do estudo.

Já no que diz respeito à validação externa, é quando os dados previstos na análise a priori são comparados com os resultados obtidos durante a experimentação. Adicionalmente, este processo de validação implica a comparação dos dados da pesquisa em apreço com os dados provenientes de outras pesquisas de natureza análoga.

Validações externas à sequência envolvem a comparação das produções dos alunos antes ou no início da sequência e após sua realização, por meio de entrevistas e/ou questionários, bem como a comparação com produções de outros alunos. Douady e Perrin-Glorian (1989), por exemplo, comparam produções de sua sequência sobre áreas com respostas ao questionário de Rogalski (1983). O que nos parece diferente após a oficialização da engenharia é a preocupação em analisar a evolução dos alunos em relação ao processo como um todo, e não mais apenas como uma microgênese (LABORDE, 1997, p. 105, tradução nossa).

De acordo com as definições apresentadas por Laborde (1997) acerca da validação interna e externa, é possível afirmar que o presente estudo adotou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, o que, caso validada, caracterizaria esta pesquisa como uma pesquisa de validação interna. Ainda que não tenha sido realizada a fase de experimentação, é possível identificar os dois primeiros critérios apontados por Laborde (1997) para esse tipo de validação, uma vez que as situações propostas foram elaboradas com o objetivo de acompanhar o progresso dos estudantes ao longo da sequência didática, sem levar em conta fatores externos ao processo.

Dessa forma, a metodologia proposta, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e voltada à construção de situações de aprendizagem relacionadas à sequência repunidade, visa promover a produção autônoma de conhecimento pelos educandos, favorecendo, consequentemente, sua aprendizagem e melhor desempenho em sala de aula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo objetivou investigar e analisar a sequência repunidade, estendendo seu escopo ao conjunto dos números inteiros e buscando propor atividades didáticas que favoreçam a compreensão de suas propriedades e regularidades. Para tanto, foram exploradas diversas representações da sequência, tais como a fórmula de recorrência, a expressão fechada (binet) e a função geradora, tanto para os índices positivos quanto para os negativos. A partir dessa fundamentação, foram elaboradas Situações Didáticas pautadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD), estruturadas conforme as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, com o intuito de promover um ensino investigativo e significativo no estudo das sequências numéricas. As atividades propostas têm como objetivo incentivar o protagonismo dos estudantes na construção do conhecimento, permitindo que explorem padrões, formulem conjecturas e desenvolvam estratégias próprias de resolução.

Nos últimos anos, tem-se observado uma ampliação do interesse por sequências numéricas que ultrapassam as tradicionais progressões aritméticas e geométricas, incorporando elementos que favorecem o raciocínio matemático investigativo e a compreensão de regularidades. Nesse contexto, a presente pesquisa se debruçou sobre a sequência repunidade, formada por números compostos exclusivamente pelo algarismo 1, buscando não apenas apresentar suas propriedades aritméticas e algébricas, mas também estendê-la ao conjunto dos inteiros e analisá-la como ferramenta didática no ensino de Matemática. A proposta visa, sobretudo, explorar padrões e relações pouco discutidos nos livros didáticos convencionais e nas práticas pedagógicas habituais, fornecendo novos caminhos para o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional no Ensino Médio.

Para tanto, fundamentamo-nos em duas importantes abordagens da Didática da Matemática: a Engenharia Didática (ED) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD). A Engenharia Didática, conforme concebida por Artigue (1988), tem como finalidade orientar pesquisas aplicadas ao ensino de conteúdos específicos. No presente trabalho, foram utilizadas as etapas iniciais da ED, uma vez que se trata de uma proposta metodológica ainda não implementada em ambiente escolar. Nessa perspectiva, realizamos estudos epistemológicos, didáticos e cognitivos que subsidiaram a elaboração de situações didáticas voltadas ao ensino da sequência repunidade e de suas extensões para os números inteiros. A TSD, por sua vez, proposta por Brousseau (1986), fornece um modelo teórico que compreende o conhecimento como produto das interações entre

o estudante e o meio (*milieu*), organizadas intencionalmente pelo professor. Nessa abordagem, o educando é protagonista do processo de aprendizagem, sendo desafiado a construir, validar e institucionalizar o saber a partir de situações planejadas com objetivos didáticos bem definidos.

A construção das situações didáticas levou em consideração a BNCC, que recomenda o estudo de sequências como estratégia para o desenvolvimento da argumentação, da modelagem e da generalização. Em particular, foram selecionadas habilidades dos componentes curriculares do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, relacionadas à identificação de padrões, à resolução de problemas e à dedução de fórmulas. Tais habilidades se alinham ao escopo do presente trabalho, que se propõe a trabalhar com sequências recursivas e não recursivas, explorando suas propriedades por meio de expressões fechadas, funções geradoras, equações de recorrência e representações polinomiais.

A sequência repunidade, em sua versão estendida para os inteiros, não apenas amplia o repertório de conteúdos matemáticos a serem trabalhados na escola, como também permite o desenvolvimento de competências que vão além do domínio técnico. Ao investigar as regularidades que emergem de seus termos, os estudantes são instigados a levantar hipóteses, estabelecer conexões com outras áreas da matemática (como funções, álgebra e progressões), e a formular generalizações com base em padrões reconhecíveis. Nesse sentido, as situações didáticas aqui propostas podem contribuir para a construção de um ensino de Matemática mais significativo, no qual os estudantes se tornam sujeitos ativos na produção do conhecimento, ressignificando sua relação com a disciplina e com o próprio processo de aprender.

Assim, espera-se que este trabalho inspire futuras pesquisas e práticas docentes voltadas ao ensino de sequências numéricas em contextos investigativos, especialmente aquelas que busquem articular saberes teóricos e práticos com o uso de recursos tecnológicos. Ao propor um olhar inovador sobre a sequência repunidade, ainda pouco explorada nos contextos escolares, oferecemos aos educadores um conjunto de ferramentas conceituais e metodológicas que possibilitam enriquecer suas aulas e potencializar a aprendizagem dos estudantes, contribuindo para a formação de sujeitos críticos, reflexivos e autônomos.

Diante do exposto, o ensino de matemática por meio de desafios e curiosidades pode propiciar uma relação mais interativa dos estudantes com a disciplina. Quando os conteúdos estão associados a problemas instigantes e envolventes, há um maior engajamento dos estudantes, o que contribui para desfazer a percepção de que a matemática se resume à memorização de fórmulas e procedimentos.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica, 1999. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/263807597_A_Matematica_na_Educacao_Basica>.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. [S.l.]: Editora da Universidade Federal de Paraná, 2007. 31–32 p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **Revemat**, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008. Acesso em: 09 jul. 2025. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/24781/1/Almouloud2008Engenharia.pdf>>.
- ANDRADE, T. M. (Ed.). **Coleção Matemática Interligada**. São Paulo: Editora Scipione, 2020.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage-Éditions, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.
- ARTIGUE, Michèle. Engenharia didática. In: BRUN, Jean (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, (Horizontes Pedagógicos). p. 193.
- BEILER, A. H. **Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains**. 1. ed. New York: Dover, 1966.
- BEZERRA, César Santos. **Os Números Repunidades na Base b**. 48 p. Monografia (Graduação) – Curso de Matemática, Arraias-TO, 2022.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI-JÚNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma Matemática**. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ministério da educação. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 05 jun. 2025.
- BROUSSEAU, Guy. La problématique et l’enseignement de la mathématiques. In: **Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l’Etude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques**. Louvain-la-Neuve: [s.n.], 1976. p. 101–117.
- BROUSSEAU, Guy. Ingénierie didactique. d’un problème à l’étude à priori d’une situation didactique. In: **Actes de la deuxième école d’été de didactique des mathématiques**. Olivet: IREM d’Orléans, 1982. p. 39–60.
- BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, Grenoble, n. 7.2, p. 33–115, 1998.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. 128 p.
- CARMO, Jéssica Laiz Sena do; FONSECA, Rubens Vilhena. Conceito de milieu1: Uma contribuição teórica para a educação matemática. 2016.

- CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, UNICAMP, Campinas, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.
- CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o número 111...111 como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, n. 87, p. 15–19, 2015.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1998. 196 p.
- COSTA, Eudes; CARVALHO, Fernando. On repunit polynomials sequence. **BRAZILIAN ELECTRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS**, v. 5, p. 1–15, 11 2024.
- COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Algumas propriedades dos números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47–58, 2022.
- COSTA, Eudes Antonio *et al.* On gaussian and quaternion repunit numbers. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, 2024.
- COSTA, E. A. *et al.* On the repunit sequence at negative indices. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, p. 1–12, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.11062161>>.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contexto**. São Paulo: Editora Ática, 2020.
- DOUADY, Régine. L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. **Cahier de DIDIREM**, n. 19, p. 2, 1993.
- JAROMA, John H. Factoring generalized repunits. **Bulletin of the Irish Mathematical Society**, n. 59, p. 29–35, 2007.
- KAMADA, Makoto. **Factorization of 11...11 (Repunit)**. 1999–2023. Disponível em: <<https://stdkmd.net/nrr/repunit/>>. Acesso em: 30 jun 2025.
- KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.
- LABORDE, Colette. Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. défis et tentatives. **Didaskalia**, Persée-Portail des revues scientifiques en SHS, v. 10, n. 1, p. 97–112, 1997.
- LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT**, 11. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- LIMA, Maria Luziana Oliveira. Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas: um contributo da engenharia didática. 2019.
- MONTEIRO, Ana Cibely Aragao. **A construção de sequências lineares recursivas por meio de uma engenharia didática com a aplicação da teoria das situações didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio**. Dissertação (Dissertação (mestrado profissional)) — Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Sobral, 2023. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profissional. Orientação: Prof. Pós-Dr. Daniel Brandao Menezes. Recurso eletrônico.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta - Coleção PROFMAT**, 12. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, Francisco Soares. **O estudo das sequências através de padrões numéricos**. 31 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Campina Grande-PB, 2011.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Régis Vieira; CAMPOS, Helena Maria de Barros. O desenvolvimento de uma situação didática no ensino do triedro de frenet por intermédio da engenharia didática e uso do software geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 14, n. 1, p. 025–043, 2025.

POMMER, Wagner Marcelo. **A engenharia didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares**. São Paulo: s.e., 2013. 72 p.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. A note on repunit number sequence. **Intermaths**, v. 5, n. 1, p. 54–66, 2024.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio da. Um passeio pela sequência repunidade. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, p. 241–254, 2023.

SANTOS, Douglas Catulio dos. **Números repunits: uma abordagem a partir da resolução de problemas**. 67 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Federal do Tocantins, Araias-TO, 2019. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

SILVA, Marcio Antonio da; PIRES, Célia Maria Carolino. A riqueza nos currículos de matemática do ensino médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos. **Zetetiké**, v. 21, n. 1, p. 19–52, 2013.

SOUZA, Thamires Silva Aquino de; ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática como instrumento metodológico no estudo e no ensino da sequência de jacobsthal. **Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, 2018. Acesso em: 12 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/3119>>.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013.

VIEIRA, Renata Passos Machado. **Engenharia didática (ED): o caso da generalização e complexificação da sequência de Padovan ou Cordonnier**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020. 267f. Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Régis Vieira; CATARINO, Paula Margarida Martins da Costa. Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019.

YATES, Samuel. **Repunits and Repetends**. Boynton Beach, Florida: Star Publishing Co., Inc., 1992.