



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARRAIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

IARA MARTINS CÔELHO

**EXPLORAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E DINAMIZAÇÃO DO TEOREMA DE
VIVIANI COM O GEOGEBRA**

Arraias, TO

2025

Iara Martins Côelho

EXPLORAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E DINAMIZAÇÃO DO TEOREMA DE VIVIANI COM GEOGEBRA

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário de Arraias para obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientador (a): Dr^a. Mônica Suelen Ferreira de Moraes

Arraias, TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M386e Martins Coêlho, Iara.
 EXPLORAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E DINAMIZAÇÃO DO TEOREMA
 DE VIVIANI COM O GEOGEBRA. / Iara Martins Coêlho. – Arraias, TO, 2025.
 59 f.

 Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus
 Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.
 Orientadora : Mônica Suelen Ferreira de Moraes
 Coorientador: Luis Andrés Castillo Bracho

 1. Ensino de Geometria. 2. Geogebra. 3. Demonstração visuais. 4. Teorema
 de Viviani. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer
forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte.
A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184
do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da
UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

Iara Martins Coêlho

EXPLORAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E DINAMIZAÇÃO DO TEOREMA DE VIVIANI COM GEOGEBRA

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática foi avaliado para a obtenção do título de Licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 10 / 12 /2025

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
 **MONICA SUELEN FERREIRA DE MORAES**
Data: 22/12/2025 16:52:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes,
(UFT)
Orientadora

Documento assinado digitalmente
 **LUIS ANDRES CASTILLO BRACHO**
Data: 19/12/2025 07:30:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luis Andrés Castillo Bracho,
(UFNT)
Coorientador

Documento assinado digitalmente
 **DAILSON EVANGELISTA COSTA**
Data: 19/12/2025 13:27:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Dailson Evangelista Costa,
(UFT)
Examinador 1

Documento assinado digitalmente
 **IVONNE COROMOTO SANCHEZ SANCHEZ**
Data: 19/12/2025 07:29:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Dra. Ivonne Coromoto Sánchez Sánchez,
(UFNT)
Examinadora 2

Documento assinado digitalmente
 **ROBSON MARTINS DE MESQUITA**
Data: 18/12/2025 22:21:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita,
(UFT)
Examinador 3

Dedico este trabalho a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste sonho. À minha família, pelo amor incondicional, apoio constante e por acreditarem em mim mesmo nos momentos mais difíceis. Vocês são a base de tudo.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes, pela parceria, paciência durante esse processo. Ao professor Luis Castillo e à professora Ivonne Sanchez por despertar em mim interesse pela geometria dinâmica. Agradeço a todos os meus professores da graduação, pela paciência, orientação e por compartilhar seu conhecimento e experiência. Aos professores e funcionários da Universidade Federal do Tocantins do Câmpus Arraias, pelo suporte, apoio e ensinamentos ao longo dos anos. Cada um de vocês contribuiu para minha formação acadêmica e pessoal. E, finalmente, a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a concretização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre as potencialidades do software GeoGebra no ensino de Geometria, articulando-o ao uso de fontes históricas, em especial ao Teorema de Viviani. Inserido no contexto das orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e de pesquisas internacionais sobre o uso de fontes primárias no ensino de Matemática, o estudo fundamenta-se na integração entre tratados matemáticos antigos dos séculos XVI e XVII e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), destacando o potencial dessas ferramentas para promover contextualização, problematização e exploração investigativa. A literatura aponta que softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, favorecem múltiplas representações, mediação interativa e visualização de propriedades, aspectos essenciais para o ensino de Geometria Plana. Neste sentido, o trabalho descreve e analisa possibilidades didático-pedagógicas do GeoGebra na construção de uma abordagem interativa para a demonstração do Teorema de Viviani. Para isso, busca: (a) investigar o contexto histórico e matemático relacionado ao teorema; (b) identificar potencialidades do GeoGebra no desenvolvimento de atividades investigativas; (c) descrever uma proposta de exploração interativa; e (d) elaborar uma oficina voltada a estudantes do Ensino Médio com base em princípios de educação ativa. Foram construídas e analisadas quatro demonstrações do Teorema de Viviani, utilizando o GeoGebra para explorar propriedades geométricas de forma dinâmica. Além disso, foi elaborada e desenvolvida uma atividade de ensino de Geometria Plana para estudantes do Ensino Médio, envolvendo construção, análise e investigação de triângulos. Os resultados mostraram forte engajamento dos alunos, favorecido pela visualização, pela correção imediata de erros e pela exploração interativa, evidenciando que o uso do GeoGebra potencializa a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Assim, a pesquisa contribui para a prática docente, oferecendo um recurso didático que integra história, tecnologia e argumentação geométrica.

Palavras-chaves: Ensino de Geometria. Geogebra. Demonstração visuais. Teorema de Viviani.

ABSTRACT

This work presents an investigation into the potential of GeoGebra software in teaching Geometry, linking it to the use of historical sources, especially Viviani's Theorem. Within the context of the guidelines of the Brazilian National Common Curriculum Base (BNCC) and international research on the use of primary sources in mathematics teaching, the study is based on the integration between ancient mathematical treatises from the 16th and 17th centuries and Digital Information and Communication Technologies (DICT), highlighting the potential of these tools to promote contextualization, problematization, and investigative exploration. The literature indicates that dynamic geometry software, such as GeoGebra, favors multiple representations, interactive mediation, and visualization of properties, essential aspects for teaching Plane Geometry. In this sense, the work describes and analyzes the didactic-pedagogical possibilities of GeoGebra in constructing an interactive approach to the demonstration of Viviani's Theorem. To this end, it seeks to: (a) investigate the historical and mathematical context related to the theorem; (b) identify the potential of GeoGebra in the development of investigative activities; (c) describe a proposal for interactive exploration; and (d) develop a workshop aimed at high school students based on principles of active education. Four proofs of Viviani's Theorem were constructed and analyzed, using GeoGebra to explore geometric properties dynamically. In addition, a teaching activity in Plane Geometry for high school students was developed and implemented, involving the construction, analysis, and investigation of triangles. The results showed strong student engagement, favored by visualization, immediate error correction, and interactive exploration, demonstrating that the use of GeoGebra enhances conceptual understanding and the development of geometric reasoning. Thus, the research contributes to teaching practice, offering a didactic resource that integrates history, technology, and geometric argumentation.

Key-words: Teaching Geometry. GeoGebra. Visual Demonstrations. Viviani's Theorem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	13
3	GEOMETRIA NO CURRÍCULO ESCOLAR	15
4	O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA	19
4.1	O que é o GeoGebra?	20
4.2	Para que serve?.....	20
4.3	Quais as características?.....	21
4.4	Quais conteúdos (objetos matemáticos) podem ser ensinados por meio do GeoGebra?	21
4.5	Interface do GeoGebra	22
4.6	Janela de Visualização Versus Janela de Álgebra	23
4.7	Barra de Ferramentas	24
5	VINCENZO VIVIANI E SEU TEOREMA	27
6	O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO I	30
7	O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO II.....	36
8	O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO III.....	38
9	O TEOREMA VIVIANI NO ESPAÇO - DEMONSTRAÇÃO IV.....	40
10	PROPOSTA DE ATIVIDADE	41
11	ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO	47
12	CONSIDERAÇÕES.....	52
13	REFERÊNCIAS.....	54
	ANEXO.....	58

1 INTRODUÇÃO

No decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, vivenciamos diversas experiências que contribuem para a formação acadêmica do discente. Tais experiências possibilitaram e influenciaram a escolha de um tema e do método de pesquisa para desenvolver este trabalho. A seguir, descrevo como percorri esse caminho.

Quando estava no 2º período da graduação, cursando a componente curricular Geometria Euclidiana Plana, ministrada pelo professor Luis Castillo Bracho, tive o meu primeiro contato com o software Geogebra, utilizado por ele para dinamizar suas aulas. Confesso que das áreas da Matemática a que tinha menos afinidade foi por muito tempo a Geometria. No meu caso, quando iniciei a graduação já haviam passados mais de 6 anos que havia concluído o ensino médio, na época toda a parte de geometria era deixada para o final último bimestre de cada ano e acontecia de não ser contemplada antes do encerramento das aulas, então muito desta área não era visto ou passado de maneira superficial. Então no início da disciplina tive sim muita dificuldade principalmente com as demonstrações usando casos de congruências e semelhanças. Então sempre buscava interagir ao máximo nas aulas a fim de aprender realmente o que o professor estava ensinando. Comecei a questionar tudo que ele fazia no Geogebra durante as aulas porque queria aprender, pois tudo parecia mais simples, conseguia visualizar e compreender os conteúdos trabalhados. Juntamente com um outro colega da turma muito próximo, fui convidada pelo professor para um grupo de estudo e pesquisa sobre o GeoGebra, passamos a nos reunir virtualmente todas as segundas feiras. Nesses encontros estudávamos sobre a pesquisa científica, produções e apresentações de artigos e também aprendemos a utilizar o GeoGebra. Aprender a utilizá-lo mudou o meu desempenho durante o curso além de me auxiliar nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial, contribuiu para a minha aprovação em outras componentes como Cálculo I, II, III e IV a partir do momento que passei a utilizar o software com ferramenta de apoio nos estudos.

Sabemos que a representação geométrica desempenha um papel essencial na Geometria Plana e será utilizado neste trabalho para diferenciar propriedades específicas de triângulos equiláteros. Além disso, seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), empregaremos softwares de geometria dinâmica, possibilitando a reprodução das construções geométricas por professores e estudantes de forma interativa e precisa.

O uso de Fontes Primárias, como tratados históricos do desenvolvimento da matemática, no ensino da Matemática tem sido uma abordagem de interesse de pesquisa e didática na comunidade internacional (Maanen, 1997; Isoda; Aoyama, 2000; Jankvist, 2014; Thomsen; Jankvist, 2019). Logo, tal interesse ultrapassou as fronteiras, tendo uma ampla expansão de trabalhos desenvolvidos no contexto brasileiro, especificamente no uso de tratados matemáticos dos séculos XVI e XVII (Pontes *et al.*, 2021; Pereira, 2022; Silva Junior *et al.*, 2022).

Neste sentido, o desenvolvimento de atividades baseadas em informações históricas, como tratados antigos, em sala de aula permitem aos estudantes aprender matemática conectada com as necessidades de “contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade”, e ainda mais quando a atividade de aprendizagem pode ser mediada com apoio das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) (Mendes, 2015), pois, as tecnologias têm o efeito catalisador nas ações pedagógicas da História da Matemática na sala de aula (Kántor; Tóth, 2016; Jankvist; Geraniou, 2019).

Dependendo do tipo de tecnologia digital e da forma de inseri-la na prática pedagógica dos professores, os estudantes podem enfrentar determinadas dificuldades (Carvalho, 2021). Neste trabalho, consideramos que um tipo de tecnologias digital ideal para mediar as atividades baseadas em tratados antigos ou de outras fontes, são aqueles que podem auxiliar os alunos a traduzir e interpretar conceitos por meio de várias representações (Isoda, 2002), entre estes, temos os: *Graphing Software (Algebraic Expresser, Function Probe, Calculus Unlimited)*; Software de Geometria Dinâmica (DGS) (Jankvist; Geraniou, 2021; Meadows; Caniglia, 2021), como o Cabri (Baki; Guven, 2008), Geometer's Sketchpad (Dennis; Confrey, 1997); GeoGebra (Zengin, 2018; Thomsen, 2021; Sousa, 2021); Planilhas (Excel, Lotus etc.); Sistemas de álgebra computacional (CAS) (Hašek; Zahradník, 2015).

Nas atividades com tratados antigos mediadas por tecnologias digitais, temos por um lado, aquelas que focalizam em instrumentos nos referidos tratados e abordam tanto a matemática na construção deste tipo de artefato (Pereira; Alves, 2019; Brito da Silva; Batista, 2022), bem como, aquela implícita no seu manuseio (Alves, 2019). Por outro lado, existem atividades que pretendem permitir um olhar com uma perspectiva mais atual, por intermédio destas tecnologias, de problemas ou demonstrações nesses tratados.

Um exemplo dessa nova perspectiva seria a combinação do sistema de álgebra computacional *wxMaxima* e do software de matemática dinâmica GeoGebra para resolver um problema geométrico sobre cônicas e lugar geométrico de um livro didático do século XVIII. Onde no contexto da atual o uso desses recursos poderia reproduzir a sua resolução

e/ou suas possíveis demonstrações realizadas naquele contexto, bem como também permitir explorá-las em contextos atuais, como afirmam Hašek e Zahradník (2015), quando descrevem o uso GeoGebra para (re)explorar uma validação do teorema de Pitágoras e para dinamizar a demonstração planteada por Sócrates, registrada na obra intitulada *The Pythagorean Proposition* de autoria de *Elisha Scott Loomis*, publicada no ano de 1968 (Sánchez; Castillo, 2022).

Pela perspectiva exposta, nosso objetivo é descrever as potencialidades do uso do software GeoGebra na construção de uma nova abordagem para a demonstração do Teorema de Viviani, com vistas a promover práticas de educação ativa voltadas a estudantes do Ensino Médio. Para alcance e viabilização da proposta foram assim definidos os seguintes objetivos específicos: (a) investigar o contexto histórico e matemático do Teorema de Viviani, situando sua formulação por Vincenzo Viviani (1659) e suas implicações geométricas; (b) identificar e analisar possibilidades didático-pedagógicas de uso do GeoGebra no ensino de geometria, especialmente em atividades investigativas; (c) descrever e validar uma abordagem interativa do Teorema de Viviani utilizando recursos do GeoGebra, contemplando construção, exploração e argumentação matemática; (d) elaborar e desenvolver uma oficina didática sobre o Teorema de Viviani para estudantes do Ensino Médio, fundamentada em princípios de educação ativa e uso de tecnologia digital. Dessa forma, acreditamos que este trabalho pode servir como um recurso didático, fornecendo suporte tanto para educadores quanto para estudantes que desejam aprimorar sua compreensão da geometria.

2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Fundamentando-se nos pressupostos da teoria histórico-cultural que, de acordo com Damazio (2007 p.01), “tenta explicar as mudanças qualitativas das formas especificamente humanas de vida social”. Buscar-se-á fazer uso de uma metodologia que vise uma postura crítico-reflexiva diante do processo ensino aprendizagem.

A metodologia adotada neste trabalho caracteriza-se como uma abordagem qualitativa, de natureza descritivo-exploratória, fundamentada na articulação entre estudo histórico, experimentação com tecnologias digitais e aplicação didático-pedagógica. O percurso metodológico foi organizado em quatro etapas complementares.

Realizou-se inicialmente um levantamento bibliográfico sobre o Teorema de Viviani, contemplando sua formulação original no século XVII, aspectos históricos associados ao matemático Vincenzo Viviani e estudos contemporâneos que discutem o papel das fontes primárias no ensino de Matemática. Essa etapa permitiu situar a relevância histórica e geométrica do teorema e fundamentar a escolha do problema de estudo.

A segunda etapa consiste na exploração e construção geométrica no GeoGebra. Com base no referencial teórico, foram desenvolvidas quatro demonstrações visuais e interativas do Teorema de Viviani utilizando o software GeoGebra. Cada construção foi analisada quanto à precisão geométrica, às possibilidades de manipulação e às potencialidades para gerar investigação matemática. Essa fase teve caráter exploratório, permitindo compreender como diferentes representações podem favorecer a visualização de propriedades e relações no triângulo equilátero.

A elaboração da proposta didática ocorreu na terceira etapa da pesquisa. A partir das construções produzidas, estruturou-se uma atividade para o Ensino Médio, organizada em tarefas sequenciadas que contemplam revisão conceitual, construção geométrica, análise de propriedades, levantamento de conjecturas e formalização do teorema. A atividade foi planejada com base nos princípios de educação ativa e nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), priorizando autonomia, investigação e uso pedagógico de tecnologias digitais.

A última etapa apresenta o desenvolvimento e análise da prática pedagógica. A proposta foi aplicada em uma turma de Ensino Médio do Colégio Estadual Joana Batista Cordeiro, utilizando chromebooks e o GeoGebra Classic Online. Durante o desenvolvimento das tarefas, foram observados aspectos como participação dos estudantes, dificuldades encontradas, interações, engajamento e formas de argumentação. As observações foram

registradas e posteriormente analisadas para compreender como a atividade contribuiu para o entendimento das propriedades dos triângulos e para a demonstração do Teorema de Viviani.

De forma geral, a metodologia buscou integrar história, tecnologia e prática pedagógica, permitindo compreender tanto a construção matemática envolvida quanto o potencial das ferramentas digitais para apoiar processos investigativos no ensino da Geometria Plana.

3 GEOMETRIA NO CURRÍCULO ESCOLAR

No âmbito da Matemática a geometria representa um dos conhecimentos mais antigos e fundamentais da humanidade, exercendo um papel importante no cotidiano e na trajetória evolutiva da civilização. Sua presença se estende por diversas áreas do saber, como a engenharia, e está incorporada em inúmeras teorias e aplicações contemporâneas. Compreender a história da geometria é essencial para acompanhar a evolução do pensamento matemático ao longo dos séculos, além de permitir uma análise das contribuições das civilizações antigas. Dentre esses povos, destacam-se os egípcios, que, por volta de 2000 a.C., já utilizavam princípios geométricos na medição de terras e na construção de suas edificações monumentais.

Segundo Eves (2011), a sistematização da geometria como um corpo formal de conhecimento teve início com Euclides, por meio de sua obra *Os Elementos*, uma coletânea de treze livros que reúne o conhecimento geométrico da época. Nessa obra, Euclides estabelece a geometria euclidiana com base em axiomas e teoremas, criando um marco na história da matemática e influenciando, posteriormente, o desenvolvimento da geometria não euclidiana (Eves, 2011). Entre os instrumentos fundamentais da geometria, destacam-se a régua e o compasso, conhecidos como instrumentos euclidianos. Compreender seu uso e suas aplicações é essencial para o estudo da geometria. Segundo Eves (2011), a régua serve para traçar uma linha infinita que passa por dois pontos distintos, enquanto o compasso é utilizado para desenhar circunferências com centro em um ponto e raio definido por outro. O instrumento empregado por Euclides não mantinha sua abertura fixa ao ser levantado, desfazendo-se ao perder contato com o desenho, diferindo dos modelos atuais. Apesar de o compasso moderno parecer mais conveniente, ambos são equivalentes, já que permitem construir circunferências de qualquer raio. Essa equivalência constitui um princípio essencial da geometria clássica e tem grande relevância no estudo de problemas em que o compasso exerce papel decisivo.

A abordagem da geometria na educação básica respeita a tradição matemática consolidada ao longo da história e valoriza sua aplicação prática e sua relevância para a formação do pensamento lógico. A progressão do ensino geométrico, desde as noções intuitivas até a sistematização formal, reflete a própria evolução da geometria como campo do conhecimento. Assim como os antigos matemáticos utilizaram instrumentos como a régua e o compasso para construir conceitos fundamentais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de explorar representações espaciais e relações

geométricas desde os primeiros anos escolares, preparando os estudantes para desafios mais complexos nos níveis seguintes (Brasil, 2018).

A BNCC estabelece diretrizes normativas para as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir ao longo da educação básica. Segundo a BNCC, a geometria abrange um amplo conjunto de conceitos e procedimentos essenciais para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, permitindo conexões com situações do cotidiano. No ensino fundamental, especialmente nos anos iniciais, espera-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de estabelecer relações espaciais, identificar pontos de referência e compreender a localização e o deslocamento de objetos. Além disso, essa etapa enfatiza o reconhecimento e a manipulação de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais, incentivando a exploração de suas planificações.

Como destaca a BNCC: “a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou ao teorema de Pitágoras” (Brasil, 2018, p. 272). A unidade temática de geometria nos anos iniciais é estruturada para refletir as vivências das crianças em seu meio, utilizando suas experiências como base para a sistematização das noções geométricas.

Nesse processo, as explicações devem ser claras, mas é igualmente essencial estimular os alunos a estabelecerem conexões entre suas percepções geométricas e o cotidiano. Para isso, o uso de materiais didáticos, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é altamente recomendado. Esses recursos ampliam as possibilidades de aprendizado e podem tornar a experiência do aluno mais significativa.

Entre os principais objetos de conhecimento abordados nos anos iniciais, na unidade temática de geometria, destacam-se: o reconhecimento de figuras geométricas planas, como círculo, quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e paralelogramo, incluindo a análise de suas propriedades. Além disso, trabalha-se o conceito de congruência entre figuras geométricas planas.

A BNCC destaca que, nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria deve desenvolver habilidades de visualização espacial, raciocínio lógico e resolução de problemas, e recomenda o uso de tecnologias digitais (como softwares e aplicativos interativos) para ampliar a compreensão dos conceitos e favorecer aprendizagens significativas. Destaca que, nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria

deve desenvolver habilidades de visualização espacial, raciocínio lógico e resolução de problemas, e recomenda o uso de tecnologias digitais (como softwares e aplicativos interativos) para ampliar a compreensão dos conceitos e favorecer aprendizagens significativas. Recomenda-se que os professores incorporem ferramentas digitais (softwares de geometria dinâmica, aplicativos de simulação, ambientes virtuais) para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. As tecnologias devem ser usadas para: explorar representações visuais e interativas de figuras geométricas; facilitar a compreensão de conceitos abstratos, como transformações geométricas e relações métricas; promover engajamento e autonomia dos estudantes, permitindo que testem hipóteses e construam conhecimento de forma ativa.

A BNCC também ressalta a importância de formar alunos capazes de interagir criticamente com diferentes fontes de informação, incluindo recursos digitais. Em resumo a BNCC orienta que, nos anos finais do Ensino Fundamental, a Geometria seja ensinada de forma contextualizada e apoiada por tecnologias digitais, fortalecendo a autonomia dos estudantes e ampliando sua capacidade de compreender e aplicar conceitos matemáticos em diferentes situações.

Na BNCC etapa do Ensino Médio, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. São definidas competências e habilidades, nas diferentes áreas, que permitem aos estudantes: usar diversas ferramentas de *software* e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (Brasil, 2018).

São competências específicas da Área da Matemática e Suas Tecnologias: compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas; e investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a

necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018).

Na Documento Curricular do Território do Tocantins (DCT-TO) - Etapa Ensino Médio, na habilidades específica **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. Tem os seguintes objetos de conhecimento: Geometria Plana: Polígonos regulares e suas características: ângulos internos, ângulos externos etc; Pavimentações no plano (usando o mesmo tipo de polígono ou não); Áreas de figuras plana; Linguagem algébrica: fórmulas e habilidade de generalização. Nela orienta a utilização de Ferramentas Tecnológicas: O Geogebra e a construção dos mosaicos e o desenvolvimento de atividades que possibilitem o uso de técnicas de ladrilhamento, tanto com os modelos de ladrilhos já existentes quanto para construir novos modelos, visto que, ladrilhar casas, praças e avenidas é uma prática bastante difundida no mundo inteiro. Assim, pode-se perceber quais tipos de polígonos serão eficientes para um ladrilhamento perfeito. As artes também fazem uso dos ladrilhos, deixando o mundo mais belo, o que permite desenvolver técnicas artísticas que contribuem com o projeto de vida. E a habilidade específica **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. Objetos de conhecimento: Geometria Plana: Polígonos regulares (perímetro e área); Linguagem algébrica: fórmulas e habilidade de generalização; Semelhança e ampliação de figuras. Orienta a promoção de atividades que oportunizem contato com os softwares de geometria dinâmica, para elevar exponencialmente as possibilidades de interiorização dos conceitos estudados sobre transformações geométricas, permitindo especialização no ramo de criação de imagens, colaborando com a elaboração do projeto de vida. As duas habilidades trabalham polígonos regulares e suas características e orientam quanto ao uso de software de geometria dinâmica e sendo o triângulo equilátero um dos casos de regularidade, vemos uma boa oportunidade para se trabalhar a demonstração do teorema de Viviani.

Para encerrar, destacamos que os conceitos e aplicações discutidos neste trabalho podem ser amplamente utilizados para apoiar a aprendizagem tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do Ensino Fundamental, e no Ensino Médio uma vez que estão alinhados às diretrizes da BNCC.

4 USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Durante anos, a régua e o compasso foram os principais instrumentos utilizados para construções geométricas. Atualmente, softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, têm ganhado cada vez mais espaço no ensino e na aprendizagem da Geometria, permitindo explorações interativas e facilitando a visualização de conceitos matemáticos. Esse trabalho tem como base o uso do software GeoGebra e, por isso, vamos descrever e apresentar seus principais recursos geométricos. A utilização desse software foi essencial para a realização deste estudo, pois permite a construção geométrica de forma didática e flexível. Diferentemente das construções manuais com régua e compasso, que também são eficientes, o software possibilita traços e construções com maior exatidão, reduzindo erros e permitindo uma exploração mais aprofundada das propriedades geométricas.

O uso das tecnologias digitais, há algum tempo, é um assunto que vem sendo bastante discutido por pesquisadores, para o ensino de matemática em sala de aula, como enfatiza (Sá; Machado, 2017, p. 1 apud Oliveira; Cunha, 2021),

“O uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto o aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa”.

A partir do trecho supracitado, vimos a necessidade de trazer para a sala de aula algum recurso didático mediado pelo uso das tecnologias digitais, pois segundo Oliveira e Cunha (2021, p. 1), “O uso de um recurso didático nas aulas leva os alunos a aprenderem o conteúdo de uma forma dinâmica e pensativa e não de uma forma já pronta e acabada, pois o recurso dispõe da capacidade de pensar do aluno, ou seja, é o momento em que o estudante coloca a mente para funcionar”.

Diante do exposto, percebemos a importância do uso das tecnologias digitais em sala de aula, para que haja uma contribuição significativa para os processos de ensino e de aprendizagem de determinado conteúdo, pois a partir das descrições de Coêlho (2022) e Teixeira (2023) sobre o uso do GeoGebra como ferramenta de *visualização e manipulação* e Castillo, Gutierrez e Sanchez (2020) como ferramenta de *construção, descoberta*, pelo fato de combinar álgebra e geometria em uma única interface. Entendemos que os diferentes modos de usar o GeoGebra possibilita integrar este software de matemática dinâmica em aulas de classes com diferentes propósitos.

Seguindo as ideias do uso do GeoGebra como um material didático, decidimos fazer um estudo detalhado do *software* para que possam ser respondidas as seguintes perguntas.

4.1 O que é o GeoGebra?

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria, álgebra, estatística e cálculo em uma interface interativa. É um programa/aplicativo com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos.

Segundo Cataneo (2011, p. 33-34) O GeoGebra “foi idealizado e desenvolvido por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, mais propriamente para educação matemática nas escolas”.

De acordo com Maia (2023) o GeoGebra é uma ferramenta poderosa no ensino de geometria, pois facilita a visualização e a compreensão de conceitos matemáticos através de representações gráficas e algébricas. Além disso, o software é frequentemente utilizado para promover a aprendizagem ativa e a exploração de conceitos matemáticos em diferentes níveis de ensino.

4.2 Para que serve?

O GeoGebra é um software dinâmico de matemática que integra várias áreas, como geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo, em uma única plataforma. Ele é amplamente utilizado em todos os níveis de educação, servindo de recurso pedagógico para auxiliar estudantes e professores a explorar e visualizar conceitos matemáticos de maneira interativa e intuitiva.

Quadro 1. Principais funcionalidades do GeoGebra

Áreas da Matemática	Descrição
Geometria	Permite criar e manipular figuras geométricas, facilitando a compreensão de conceitos espaciais.
Álgebra	Oferece ferramentas para resolver equações e visualizar funções.
Gráficos	Gera gráficos de funções e dados, ajudando na análise visual.
Estatísticas	Inclui ferramentas para análise estatística e probabilidade.
Cálculo	Suporta operações de cálculo diferencial e integral

Fonte: Autora.

Além disso, o GeoGebra possui uma plataforma online com mais de 1 milhão de recursos educacionais gratuitos, criados por uma comunidade global de usuários. Esses recursos podem ser compartilhados e utilizados em sala de aula para monitorar o progresso dos alunos em tempo real.

4.3 Quais as características?

As principais características do GeoGebra estão descritas no quadro 2.

Quadro 2. Principais características do GeoGebra

Característica	Descrição
Ambiente de Geometria Interativa (2D e 3D)	Permite criar e manipular figuras geométricas de forma dinâmica.
Álgebra e Cálculo	Oferece ferramentas para resolver equações, calcular derivadas e integrais, e identificar pontos especiais de funções, como raízes e extremos.
Planilhas Integradas	Facilita a análise de dados e a criação de tabelas de valores.
Gráficos e Estatísticas	Gera gráficos de funções e dados, e inclui ferramentas para análise estatística e regressão.
Sistema de Álgebra Computacional (CAS)	Suporta operações algébricas avançadas e manipulação simbólica.
Transformações com Deslizadores	Permite explorar transformações geométricas e funções usando deslizadores interativos.
Recursos educacionais online	A plataforma GeoGebra oferece mais de 1 milhão de recursos gratuitos criados pela comunidade, que podem ser compartilhados e utilizados em sala de aula.
Interface fácil de usar	Apesar de suas funcionalidades avançadas, o GeoGebra possui uma interface intuitiva e acessível para usuários de todos os níveis.

Fonte: Autora.

4.4 Quais conteúdos (objetos matemáticos) podem ser ensinados por meio do GeoGebra?

Os principais usos para o software geogebra são apresentados no Quadro 3.

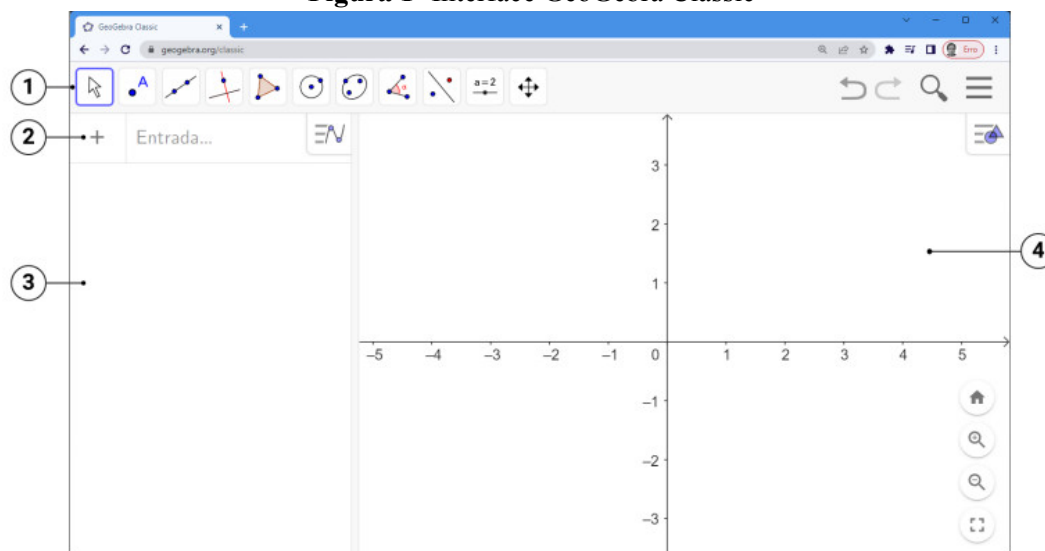
Quadro 3. Usos do GeoGebra

Áreas da Matemática	Descrição dos conteúdos
Geometria	Figuras Planas: Construção e manipulação de triângulos, quadriláteros, círculos etc;
	Medidas de Ângulos: Cálculo e visualização de ângulos em diferentes figuras.
	Transformações Geométricas: Reflexões, rotações, translações e homotetias.
	Teoremas: Exploração de teoremas como o de Pitágoras e o de Tales.
Álgebra	Equações e Inequações: Resolução e visualização gráfica de equações e inequações.
	Funções: Representação gráfica de funções lineares, quadráticas, polinomiais, exponenciais etc.
	Sistemas de Equações: Solução gráfica e algébrica de sistemas de equações lineares e não lineares.
Cálculo	Derivadas e Integrais: Cálculo e visualização de derivadas e integrais de funções.
	Limites: Exploração de conceitos de limites e continuidade.
	Séries e Sequências: Análise de séries e sequências numéricas.
Estatística e Probabilidade	Gráficos Estatísticos: Criação de histogramas, gráficos de barras, gráficos de setores etc.
	Análise de Dados: Cálculo de medidas de tendência central (média, mediana, moda) e dispersão (variância, desvio padrão).
	Distribuições de Probabilidade: Visualização de distribuições de probabilidade e cálculo de probabilidades.
Trigonometria	Funções Trigonômicas: Representação gráfica de senos, cossenos, tangentes etc.
	Identidades Trigonômicas: Exploração e verificação de identidades trigonométricas.
	Identidades Trigonômicas: Exploração e verificação de identidades trigonométricas.

Fonte: Autora.

4.5 Interface do GeoGebra

A interface padrão do GeoGebra instalado em um computador, ao ser carregado, apresenta a seguinte configuração.

Figura 1- Interface GeoGebra Classic

Fonte: autora

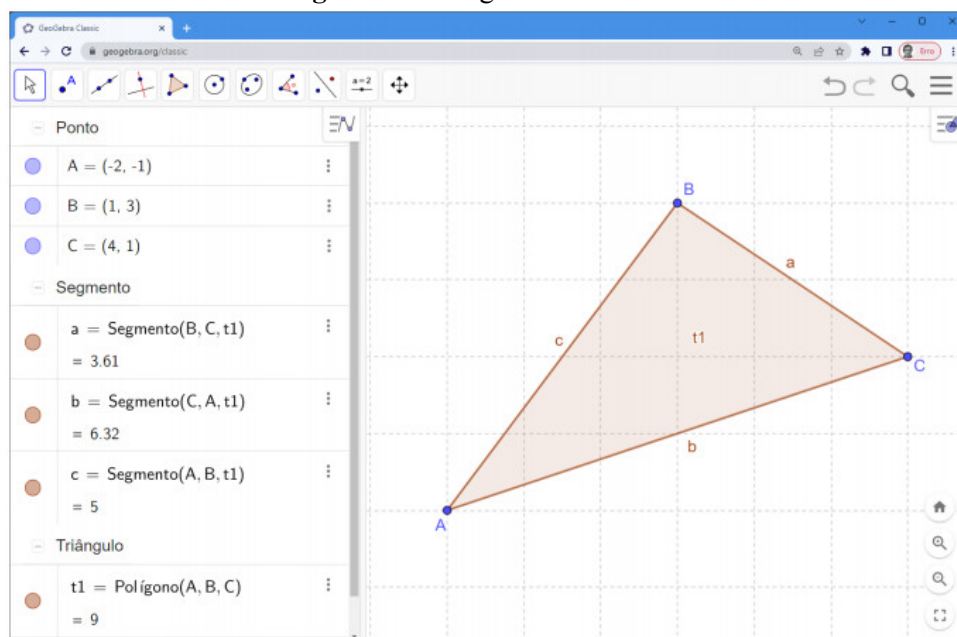
Na figura 1, o (1) indica a “Barra de Ferramentas” que concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse sobre o ícone. O (2) aponta para a “Entrada”, campo para digitação de comandos.

O (3) evidencia a “Janela de Álgebra”, área em que são exibidas as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos. O (4) sinaliza a “Janela de Visualização”, área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse, após clicar nos ícones da “Barra de Ferramentas”. As construções exibidas na “Janela de Visualização” também podem ser realizadas via comandos digitados na “Entrada”.

4.6 Janela de Visualização Versus Janela de Álgebra

O GeoGebra recebeu esse nome pela possibilidade de operar com as representações aritmética, algébrica e geométrica conjuntamente. Isso significa que um objeto construído com o mouse ou digitando sua sintaxe no campo “Entrada” pode possuir mais de uma representação: geométrica e aritmética ou algébrica.

Veja a “Janela de Visualização” representada na figura 2 que exibe um triângulo construído em um plano cartesiano.

Figura 2 - Triângulo no GeoGebra

Fonte: autora

Observe que na “Janela de Visualização” está representado geometricamente um triângulo com vértices A , B e C e lados a , b e c . Observe também que no lado esquerdo da tela, na “Janela de Álgebra”, são exibidas as coordenadas de cada vértice desse triângulo, a medida de cada um dos lados a , b e c e a área do triângulo (9 cm^2) que foi nomeado automaticamente pelo GeoGebra como $t1$.

4.7 Barra de Ferramentas

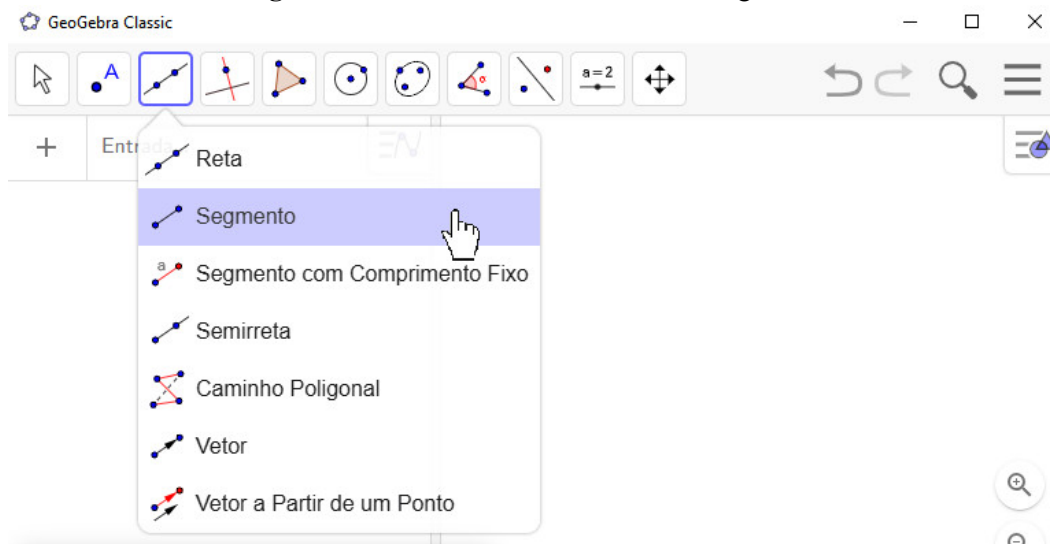
A “Barra de Ferramentas” localizada na parte superior do GeoGebra é composta de conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos. Ao abrir o GeoGebra a Barra de Ferramentas apresenta a seguinte configuração visual.

Figura 3 - Barra de ferramentas GeoGebra

Fonte: autora

Para ativar uma ferramenta clique em seu ícone. No entanto, para cada conjunto de ícones há apenas um visível, veja a seguir como acessar os ícones ocultos. Clique sobre o ícone que contém a ferramenta que deseja utilizar e clique novamente no item desejado.

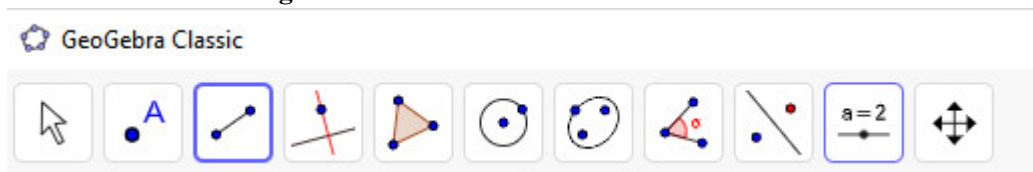
Figura 4 - Selecionando de ferramenta Segmento



Fonte: autora

A ferramenta selecionada fica ativa e seu ícone ocupa o lugar de destaque do conjunto que ela pertence.

Figura 5 - Barra de ferramentas 2D GeoGebra



Fonte: autora

Para realizar uma construção selecione a ferramenta desejada na “Barra de Ferramentas” e clique na “Janela de Visualização” ou digite os valores de entrada. Para construir uma reta basta clicar em *Reta* e, em seguida, clicar em dois pontos na “Janela de Visualização”. Os pontos são construídos no momento em que se clica na “Janela de Visualização”, ou ainda podem ser utilizados pontos construídos anteriormente. Uma reta pode ainda ser construída por meio do comando no campo Entrada:

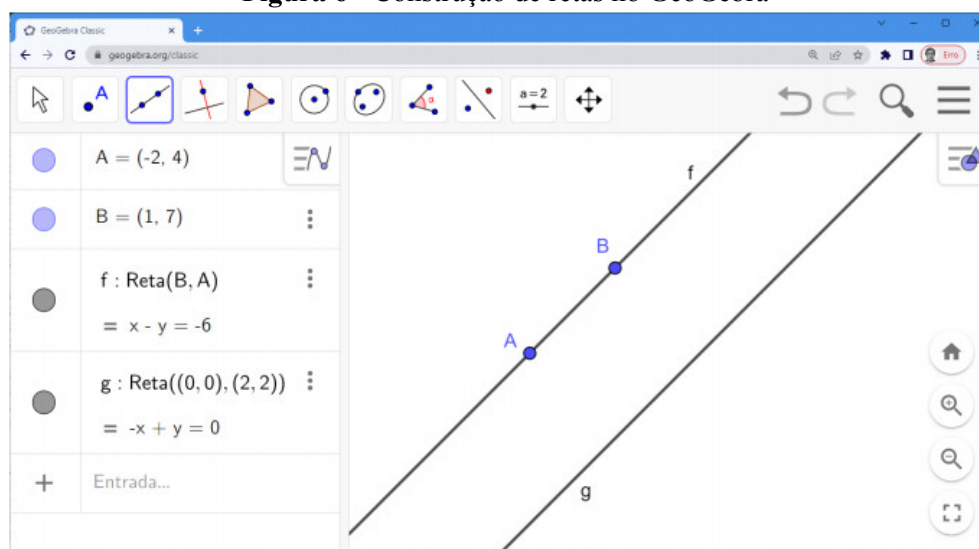
`Reta(<Ponto>, <Ponto>)`

Por exemplo, para construir uma reta pelos pontos (1, 2) e (3, 5), basta digitar o seguinte comando na Entrada:

$\text{Reta}((1, 2), (3, 5))$

Na figura 6 abaixo apresentamos duas retas construídas e exibidas na Janela de visualização.

Figura 6 - Construção de retas no GeoGebra



Fonte: autora

A reta f foi construída selecionando a ferramenta *Reta* e, em seguida, clicando-se em dois pontos na “Janela de Visualização”. A reta g foi construída digitando, na “Entrada”, o comando:

$\text{Reta}((0, 0), (2, 2))$

Perceba que na primeira construção o GeoGebra exibe a reta f e os pontos pelos quais ela é definida (A e B). Na segunda é construída e exibida apenas a reta g .

Em síntese, o software é bastante intuitivo e ao colocar o cursor do mouse sobre cada ferramenta, temos uma descrição da funcionalidade da mesma. Por ser desenvolvido para ser utilizado por estudantes e professores o software não exige do usuário seja um excelente programador, ao contrário disto, ele é auto explicativo e muitas construções de geometria voltadas para Ensino Fundamental e Médio são fáceis de fazer graças a versatilidade da plataforma Geogebra.

5 VINCENZO VIVIANI E SEU TEOREMA

Segundo Instituto e Museo di Storia della Scienza ([Museo Galileo](#)), o matemático Vincenzo Viviani (1622-1703), nasceu em Florença, 5 de abril de 1622. Em registros históricos, foi constatado que Viviani (Figura 7) estudou com os jesuítas em Florença e estudou matemática com Clemente Settimi da Scuole Pie (1612-?). O Settimi, que ficou impressionado com a inteligência e habilidade de Viviani, o apresentou a Galileu (1564-1642). A descrição de Settimi de seu aluno levou à sua apresentação ao Grão-Duque em 1638. O Grão-Duque forneceu 50 escudos por ano ao jovem para fornecer-lhe conhecimentos matemáticos, livros, e mais tarde ele conseguiu que Viviani fosse companheiro e pupilo de Galileu, um arranjo que começou no final de 1639 e durou até a morte de Galileu. Os anos com Galileu substituíram a formação universitária.

Figura 7 - Vincenzo Viviani (1622-1703)



Fonte: MacTutor: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani>

Entre as contribuições disciplinares de Viviani temos que, tentou restaurar o quinto livro dos *Elementos* de Euclides (325 a.C.-265 a.C) e reconstruir o conteúdo do quinto livro perdido das *Cônicas de Apolônio* e *De locis solidis* de Aristeu (370 a.C.-300 a.C.). Viviani preparou uma versão italiana do trabalho de Arquimedes (287a.C.-212 a.C.) sobre a retificação e a quadratura do círculo, e publicou uma tradução italiana de todos os *Elementos* de Euclides (O'Connor; Robertson, 2009).

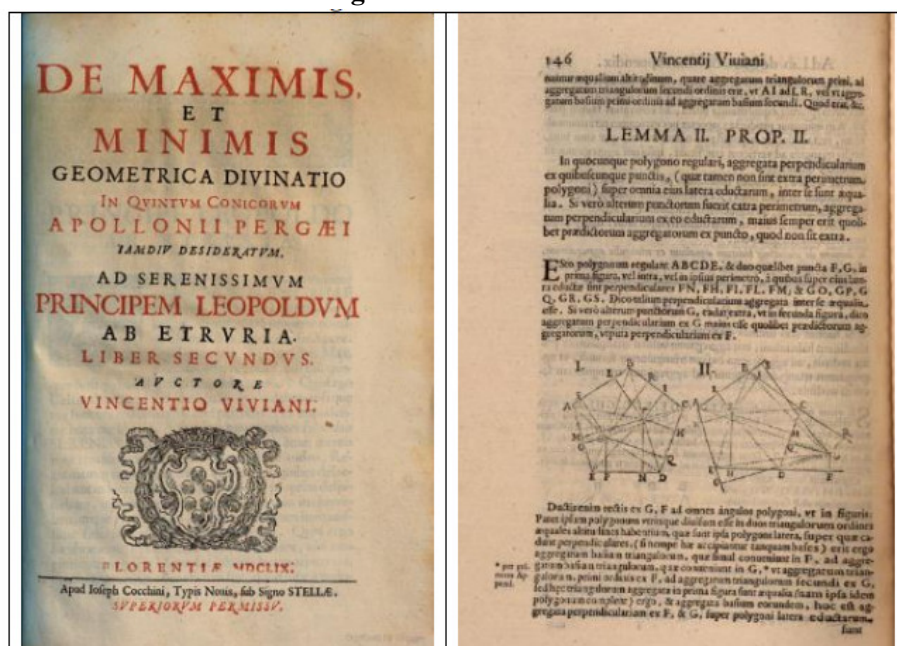
O principal interesse de Viviani era a matemática aplicada, por isso, a maioria dos seus estudos foram dirigidos nesse campo de atuação. Alguns fatos importantes a destacar,

por exemplo, no ano de 1660, é que por meio de um experimento no qual fez a correlação entre o intervalo de tempo entre o disparo de uma bala de um canhão e o som emitido conseguiu melhorar o cálculo da velocidade do som (O'Connor; Robertson, 2009). A história constata que Viviani constitui-se um bom exemplo do grande valor que se atribuía ao trabalho dos matemáticos na sua época, isto, baseados que entre as tantas descobertas e contribuições intelectuais que nos deixou. Uma destas tantas contribuições foi a exploração de uma curiosa propriedade intrínseca aos triângulos equiláteros.

Antes de chegar ao referido teorema, primeiro, precisamos conhecer a pesquisa do ponto de Fermat, o qual é o ponto dentro ou sobre o triângulo que minimiza a soma das distâncias aos vértices (Alsina; Nelsen, 2010). Quando foi levantado o questionamento desse ponto, que pode estar na região triangular ou nos lados do triângulo, das condições para minimizar a soma das distâncias perpendiculares aos lados do triângulo. Teve uma possibilidade que ao considerar que o triângulo seja equilátero, a soma das distâncias desde aos lados do triângulo é constante. Esse resultado é conhecido como teorema de Viviani, em homenagem a Vincenzo Viviani (Alsina; Nelsen, 2010).

Em outros termos, o teorema de Viviani pode ser enunciado da seguinte maneira: *A soma das distâncias perpendiculares a um ponto dentro ou sobre um triângulo equilátero é igual à altura do triângulo.* Viviani no seu tratado *De maximis et minimis geometrica divination in quintum Conicorum Apollonii Pergaei* (1659) (Figura 8), elaborou a demonstração, a partir do referido teorema que leva a generalização ao nível mais alto, para qualquer polígono regular ou equiângulo. Por tanto, para todo polígono convexo e regular, a soma das distâncias de um ponto **P** qualquer dentro do polígono aos lados do polígono é independente da posição do ponto.

Figura 8 - Folhas do Tratado



Fonte: play.google - https://play.google.com/books/reader?id=E9ZdAAAAcAAJ&pg=GBS.PP1&hl=en_US

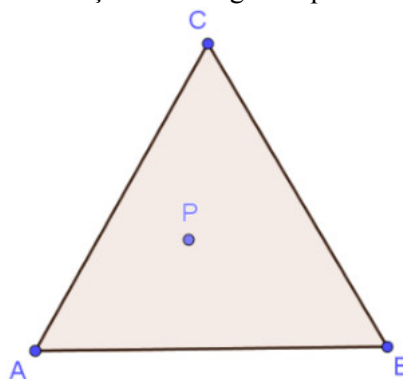
No próximo capítulo, iremos explorar as características e propriedades de triângulos equiláteros e o Teorema de Viviani apoiado no software GeoGebra e demonstrá-los de diferentes formas evidenciando a importância das definições para que as construções sejam concretas e não sofram deformações com teste dos arraste.

6 O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO I

Lembremos que o Teorema de Viviani diz que: A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo (Viviani, 1659). Para explorar o referido teorema, precisa-se representar vários objetos matemáticos, entre estes, temos $\triangle ABC$ um equilátero, um ponto **P** interior a este polígono, a altura do mesmo, três segmentos que convergem em desde os lados do referido triângulo equilátero.

Nossa abordagem dará início pela construção de um triângulo equilátero. Para isto, vamos na barra de ferramentas e escolhemos polígono regular , essa ferramenta garante que todos os lados do polígono seja do mesmo comprimento. Após selecionar a ferramenta, clique na “Janela de Visualização” do GeoGebra, construindo dois vértices do segmento base para o GeoGebra construir os outros lados do nosso triângulo equilátero. Após determinar a posição dos vértices o *software* abrirá uma janela emergente para que coloque a quantidade de vértices da figura que queremos construir, no nosso foi digitado 3, assim obteremos o triângulo equilátero. Depois, selecionaremos a na Caixa de Pontos, a ferramenta Ponto em objeto , e clique dentro da área do nosso triângulo, teremos o ponto (Figura 9), por meio da ferramenta mover, podemos arrastar tanto os vértices ou também o ponto no interior do triângulo, e nessa exploração observamos que o movimento de se limita à área do triângulo.

Figura 9 - Construção do triângulo equilátero e o ponto **P**

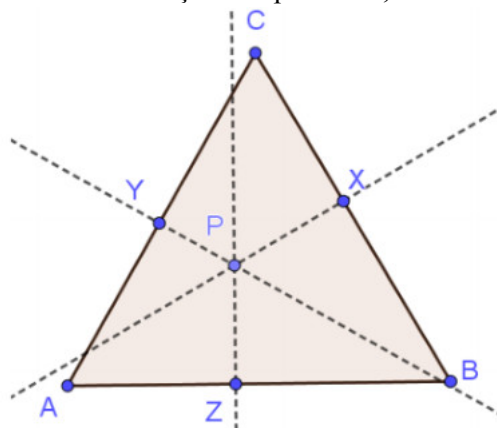


Fonte: autora

Neste momento, encontraremos os pontos **X**, **Y** e **Z**, situados nos lados **a**, **b** e **c** respectivamente. Para isto, devemos utilizar a ferramenta “Reta Perpendicular” 

clicando no ponto **P** nos lados **a**, **b** e **c** do referido triângulo. Depois com a ferramenta “Interseção de dois objetos” , selecionamos as retas criadas com seu respectivo lado de corte do triângulo, determinando assim a localização dos pontos **X**, **Y** e **Z** (Figura 10).

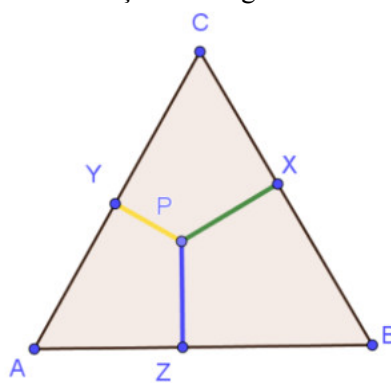
Figura 10 - Construção dos pontos **X**, **Y** e **Z**



Fonte: autora

Neste momento será dedicado na construção dos segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$, no nosso cenário tendo os extremos deles, só precisamos, mediante a ferramenta segmento , construir estes como se observa na figura 11. Destacamos que para uma melhor visualização foi decidido atribuir propriedades de cores diferentes.

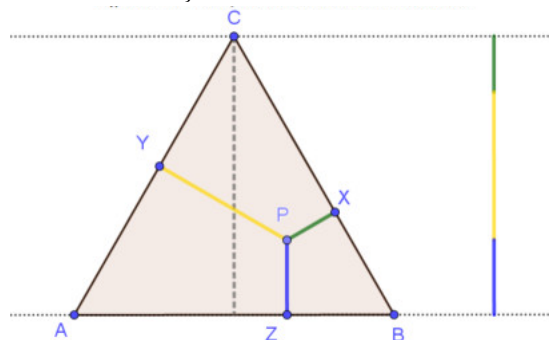
Figura 11 - Construção dos segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$



Fonte: autora

Finalmente, fazemos a construção do segmento, que representará nossa altura do triângulo, mediante as ferramentas reta perpendicular e interseção de dois objetos. Destacamos que na figura 12, construímos outros elementos que ajudam a demonstrar este teorema tanto por comprovação de comprimentos como de maneira geométrica e visual.

Figura 12 - Demonstração do Teorema de Viviani no GeoGebra



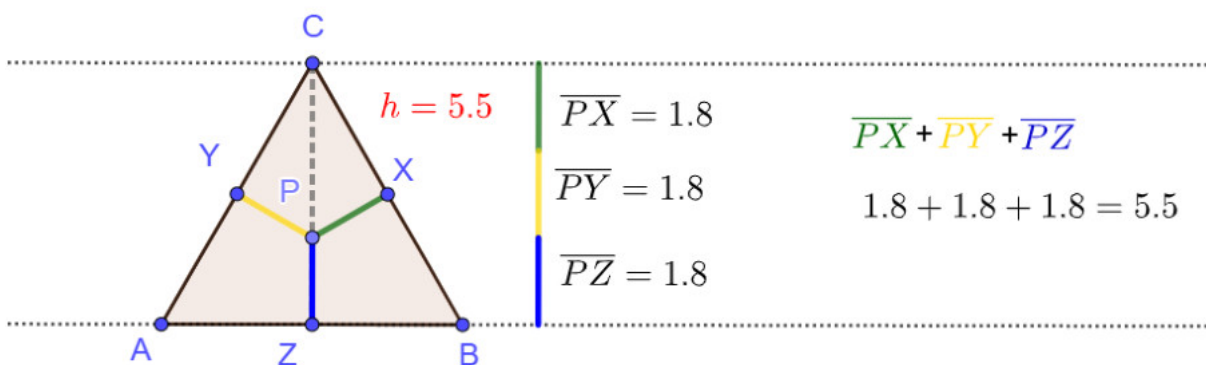
Fonte: autora

Até este momento, temos usado o GeoGebra como *ferramenta de construção*. Agora daremos encaminhamento para usar o *software* como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Viviani. Para isto, precisamos plantear algumas questões problematizadas, por exemplo: Seria possível o ponto **P** assumir uma localização dentro da região triangular em que as medidas dos segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$ sejam iguais? Se possível essa localização, seria um ponto notável?

Nessa exploração é possível que os estudantes, ao arrastar o ponto **P**, experimentem diferentes posições desse ponto até chegar num aproximado como se observa na figura 13. Com a ajuda do professor para orientar a atividade, pode-se dirigir a atenção ao fato que essa localização coincide com o um dos pontos notáveis de um triângulo, o incentro. Nesse sentido as questões apontadas foram fechadas, porém, agora surgem outras em aberto, por exemplo, como são os comprimentos desses segmentos de **P**.

O recurso construído pode ser acessado em <https://www.geogebra.org/classic/yknjjzcr>. Na figura 13, vemos que os segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$ têm a mesma medida e que ao posicionar estes segmentos verticalmente o tamanho coincide com a altura do triângulo ABC.

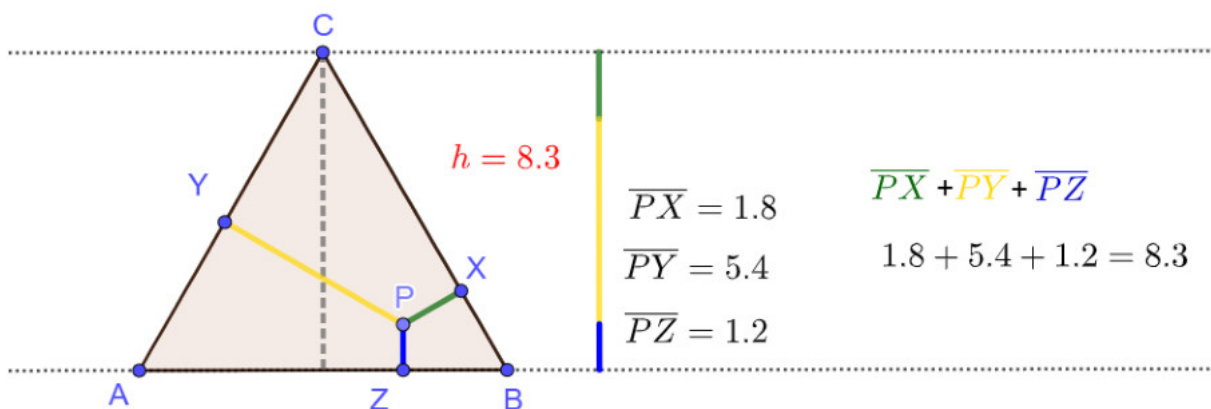
Figura 13 - Representação do Teorema de Viviani no GeoGebra.



Fonte: autora

Na figura 14, pode-se observar que ao arrastar o ponto P à um local qualquer no interior do triângulo o Teorema continua válido e pode ser verificado instantânea como a soma das medidas dos segmentos perpendiculares aos lados passando por P .

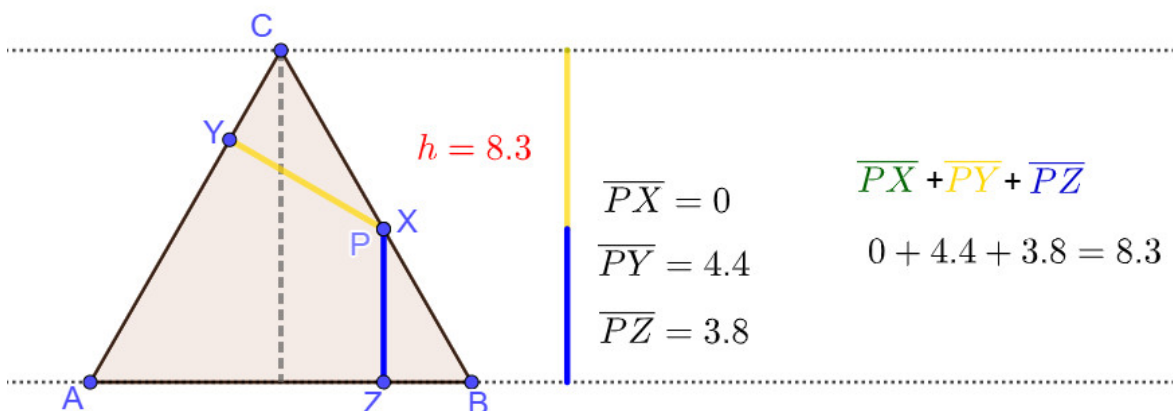
Figura 14 - Validação do teorema com arraste do ponto P



Fonte: autora

Na figura 15, pode-se observar que ao arrastar o ponto P à um local qualquer sobre o lado $\overline{AC}$ o Teorema continua válido e pode ser verificado instantânea como a soma $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$ das medidas dos segmentos perpendiculares aos lados passando por P .

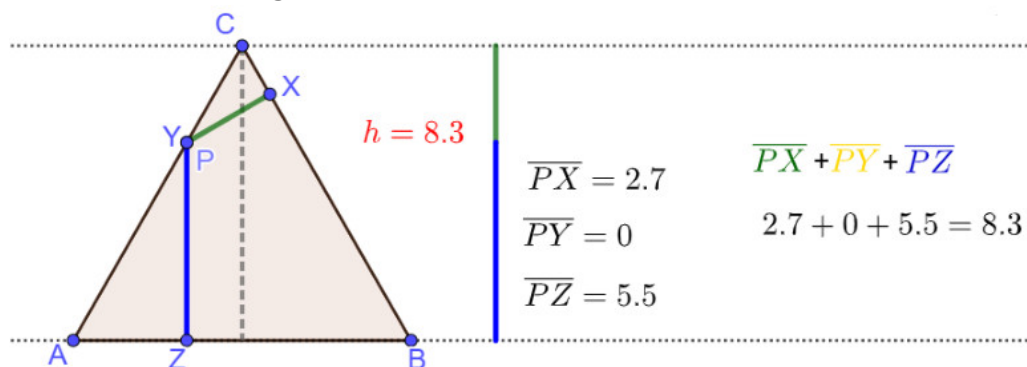
Figura 15 - Validação do Teorema com $\overline{PX} = 0$



Fonte: autora

Na figura 16, pode-se observar que ao arrastar o ponto **P** a um local qualquer sobre o lado $\overline{BC}$ o Teorema continua válido e pode ser verificado instantânea como a soma $\overline{PX}$ e $\overline{PZ}$ das medidas dos segmentos perpendiculares aos lados passando por **P**.

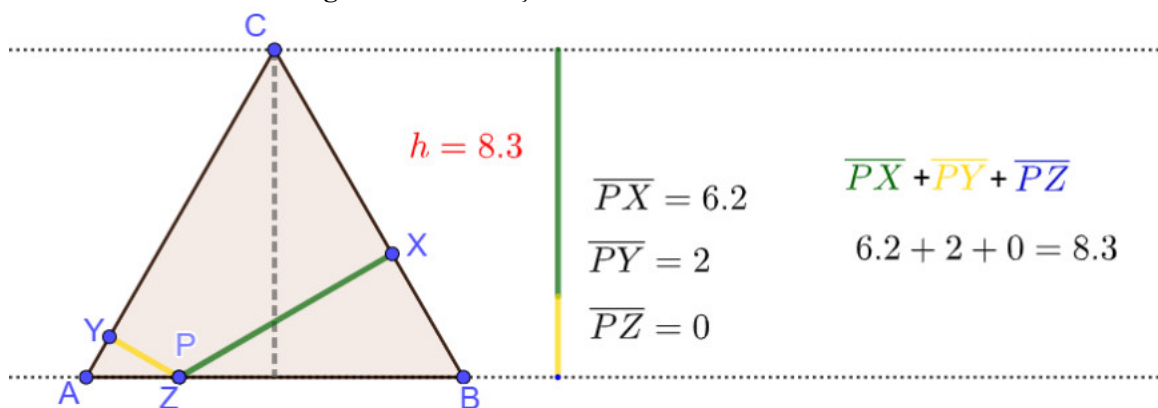
Figura 16 - Validação do Teorema com $\overline{PY} = 0$



Fonte: autora

Na figura 17, pode-se observar que ao arrastar o ponto **P** a um local qualquer sobre o lado $\overline{BC}$ o Teorema continua válido e pode ser verificado instantânea como a soma $\overline{PX}$ e $\overline{PZ}$ das medidas dos segmentos perpendiculares aos lados passando por **P**.

Figura 17 - Validação do Teorema com $\overline{PZ} = 0$



Fonte: autora

Assim, neste tópico foi descrito uma maneira de abordar uma maneira de muitas outras possíveis a serem considerados como pontos de inspiração para um novo olhar aos conhecimentos gerados pela criatividade humana, tendo como fundamentação informações históricas por meio de fontes primárias. Este olhar diferenciado pelo meio no qual foi materializado, neste caso, um software de matemática dinâmica, o GeoGebra. Destacamos que esta abordagem se inspira um pouco do movimento *Proof Without Words*¹, ou Prova Sem Palavras (Alsina; Nelsen, 2010), outros exemplos, para demonstrar este teorema que poderão ser dinamizados com GeoGebra ou outros softwares de Geometria dinâmica, é por Cevianas congruentes (Nicollier, 2016) ou por Vetores (Samelson, 2003).

Outras experiências semelhantes descrevem que o uso do GeoGebra, aliado a atividades fundamentadas na história da matemática, possibilita: visualizar conceitos matemáticos históricos; concretizar conceitos matemáticos históricos; compreender conceitualmente a história da matemática; superar as dificuldades em aprender a história da matemática, desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos; como também desenvolver o pensamento matemático (Zengin, 2018).

Para finalizar este capítulo, ressaltamos que a “interação entre fontes originais e ferramentas digitais não é suficiente por si só; requer atenção didática tanto dos professores quanto dos projetistas de tarefas” (Thomsen; Jankvist, 2019, p. 09). Com isto, entendemos, que não é usar a história da matemática e as tecnologias digitais de maneira aleatória, ao contrário, esse uso deve ser sempre com um propósito, com uma intencionalidade de ensino por parte do professor aos estudantes.

¹ "proof without words" (prova sem palavras) é uma ilustração visual ou um diagrama que demonstra uma identidade matemática ou afirmação de forma intuitiva, sem a necessidade de texto explicativo.

7 O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO II

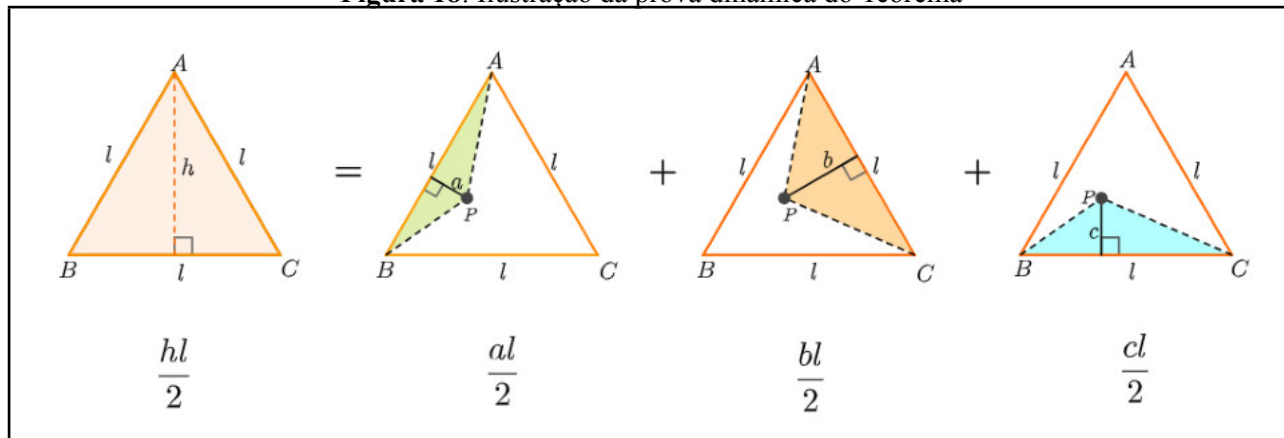
O professor de matemática da educação básica pode substituir provas formais, particularmente em geometria, por provas sem palavras (*Proofs Without Words*) (Nelsen, 1993; Nós; Fernandes, 2018; Nós; Fernandes 2019) ou por demonstrações dinâmicas (Nóbriga, 2019). Para estas, o professor pode empregar softwares de geometria dinâmica, como, por exemplo, o aplicativo gratuito GeoGebra.

Um dos aspectos que merece particular destaque no trabalho com o GeoGebra são as figuras que se obtêm em contraposição com as atividades geométricas apenas levadas a cabo com lápis e papel. Facilmente se podem adivinhar as dificuldades de compreensão que podem surgir quando os alunos tomam como referência um desenho e não uma figura. Um ambiente de geometria dinâmica permite superar definitivamente essas dificuldades. As figuras ou construções feitas em ambientes de geometria dinâmica comportam-se de acordo com as leis da geometria, isto é, refletem todas as consequências das propriedades que as definem (p. 646); [...] é fundamental estimular os alunos para demonstrações mais formais, com caráter explicativo e incentivá-los a utilizar raciocínios dedutivos e a justificar o surgimento de novos resultados na busca da compreensão. Deste modo, podemos concluir que os ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra, podem constituir um forte aliado da demonstração [...] (Amado; Sanchez; Pinto, 2015, p. 655)

Considere um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado l e P um ponto interior a $\triangle ABC$ como ilustrado na Figura 18. Então as perpendiculares passando pelos três lados do triângulo $\triangle ABC$ determinam três segmentos com comprimentos a , b e c , e cuja soma é igual à altura do triângulo denotada por h . Isto é:

$$h = a + b + c.$$

Figura 18: Ilustração da prova dinâmica do Teorema



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/mfmsucgt>

Demonstração. O resultado segue diretamente calculando as áreas dos triângulos ΔABC , ΔAPB , ΔAPC e ΔBPC .

$$\text{Área } (\Delta ABC) = \text{Área } (\Delta APB) + \text{Área } (\Delta APC) + \text{Área } (\Delta BPC)$$

Portanto,

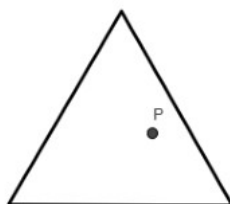
$$\frac{hl}{2} = \frac{al}{2} + \frac{bl}{2} + \frac{cl}{2} \text{ e } h = a + b + c.$$

A investigação dinâmica do Teorema pode ser empregada pelo professor de matemática na educação básica. O roteiro dessa investigação e uma animação gerada pelo mesmo está disponível na página oficial do GeoGebra, no endereço: <https://www.geogebra.org/m/mfmsucgt>. Acesse e em seguida clique no botão  para iniciar a animação.

8 O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA - DEMONSTRAÇÃO III

Uma nova demonstração animada deste teorema é mostrada a seguir levando em consideração a construção de um triângulo equilátero e um ponto **P** no interior do deste triângulo seguindo os passos da construção anterior.

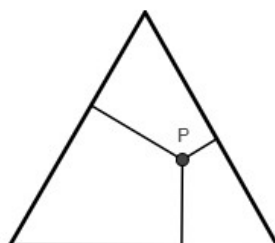
Figura 19 - Construção de triângulo e o ponto P



Fonte: autora

De maneira análoga ao que foi realizado na figura 10, construa os segmentos que são perpendiculares aos lados do triângulo passando pelo ponto **P**.

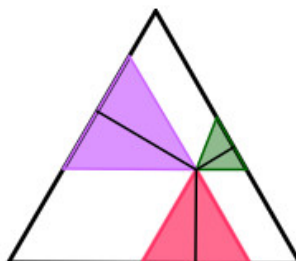
Figura 20 - Ligando lados ao ponto P



Fonte: autora

A partir do ponto **P**, construa três triângulos equiláteros de forma que as distâncias do ponto **P** aos lados do triângulo sejam suas respectivas alturas.

Figura 21 - Construção dos 3 triângulos



Fonte: autora

A seguir iremos demonstrar visualmente o Teorema de Viviani a partir da rotação dos triângulos construídos.

Demonstração. Pelo ponto P traçamos retas paralelas aos lados do triângulo $\triangle ABC$ obtendo três triângulos equiláteros figura 21 (roxo, vermelho e verde). A seguir rotacionamos os triângulos (vermelho e verde) obtendo a configuração à direita como esboçado na Figura 22.



Fonte: autora

Para visualizar a animação acesse o link <https://www.geogebra.org/classic/tnsxbett> e clique no botão , a animação se iniciará. Com essa demonstração visual é possível perceber que a soma das distâncias do ponto P aos lados do triângulo equilátero corresponde à soma das alturas de cada um dos triângulos equiláteros internos construídos.

A recíproca do teorema de Viviani é também verdadeira, ou seja, se a soma das distâncias do ponto P aos lados de um triângulo $\triangle ABC$ é independente de P , então $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero. Quando P é exterior ao triângulo devemos considerar a distância com sinal. Temos 6 regiões, e com a convenção de sinais, levando em consideração a orientação, temos que

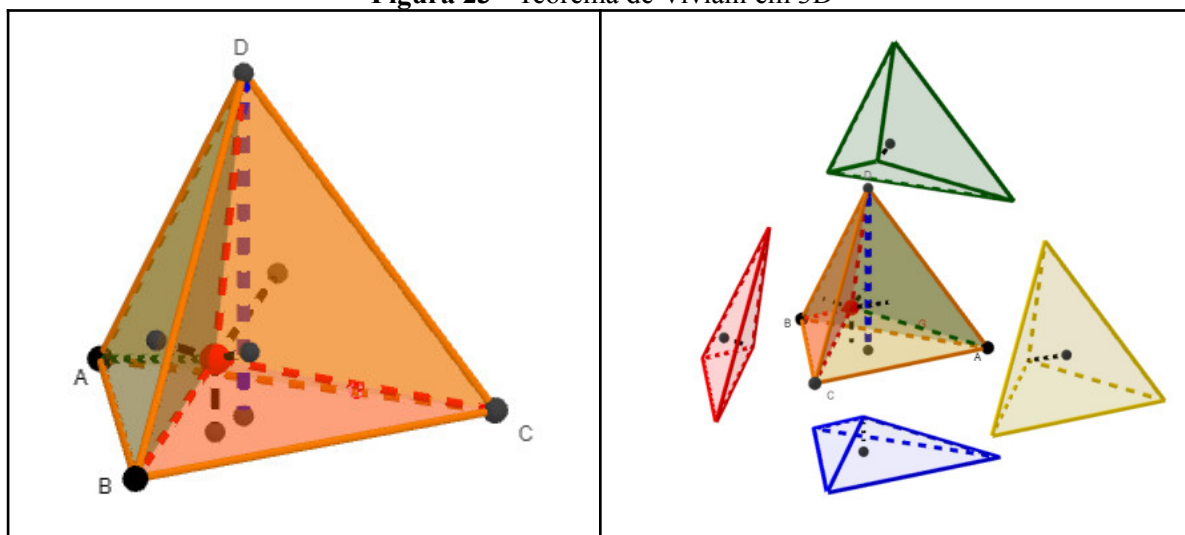
$$\pm a \pm b \pm c = \pm h.$$

Para um quadrilátero, a soma das distâncias de um ponto interior P aos lados é independente de P se, e somente se, o quadrilátero é um paralelogramo. Este teorema pode ser explorado posteriormente.

9 O TEOREMA VIVIANI NO ESPAÇO - DEMONSTRAÇÃO IV

Uma generalização do Teorema de Viviani para o espaço 3D é apresentada por De Villiers (2013). A Figura 23, ilustra a animação realizada no GeoGebra.

Figura 23 - Teorema de Viviani em 3D



Fonte: autora

Demonstração. Consideremos o ponto G interior ao tetraedro regular $ABCD$ de altura h e seja A área de cada face. Notemos que G divide $ABCD$ em quatro outros tetraedros de altura h_i . Então,

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{Ah}{3} = \frac{Ah_1}{3} + \frac{Ah_2}{3} + \frac{Ah_3}{3} + \frac{Ah_4}{3}$$

Portanto, $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Ou seja, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

A animação da generalização do Teorema de Viviani em 3D pode ser acessada no link a seguir <https://www.geogebra.org/classic/whb8axfv>. A construção foi feita no Geogebra Classic.

O Teorema pode ser generalizado para qualquer poliedro cujas faces possuem a mesma área. E, portanto, não inclui apenas os outros quatro poliedros regulares, mas também os irregulares que satisfazem tal condição.

10 PROPOSTA DE ATIVIDADE

A partir da construção dos recursos anteriores apresentaremos uma proposta de atividade para o ensino do teorema para uma turma de Ensino Médio abordando conceitos fundamentais de Geometria Euclidiana Plana.

Materiais:

chromebook (para acesso ao software GeoGebra)

material impresso (anexo I)

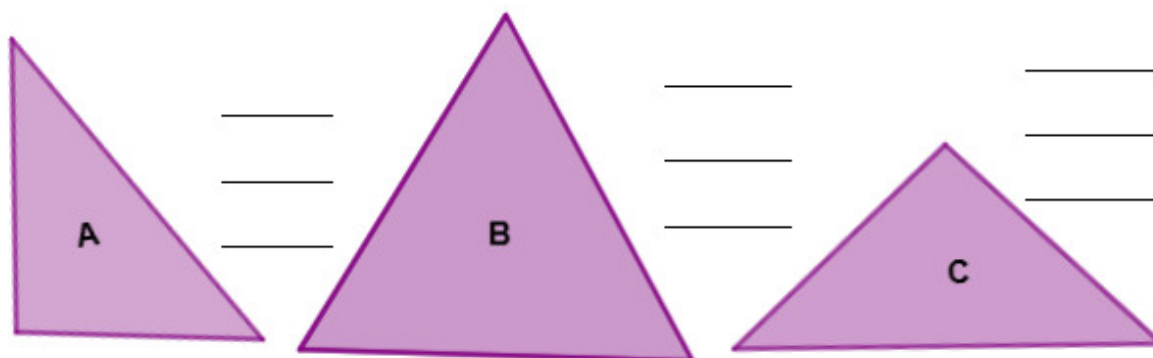
régua (uma para cada aluno)

Introdução: Inicie lembrando a classificação dos triângulos em relação às medidas dos lados e peça aos alunos que preencham o quadro a seguir com características e propriedades que conhecem a respeito de cada um.

Orientação ao professor: Imprima a atividade que está em anexo. Ela está organizada em 4 tarefas. Distribua aos alunos de maneira individual.

Tarefa 01: Obtenha, o auxílio de uma régua, as medidas dos triângulos **A**, **B** e **C**.

Objetivo: Identificar e classificar triângulos quanto às medidas dos lados



Nomeie cada triângulo de acordo com a medida dos lados, isósceles, equilátero, escaleno e retângulo.

A _____

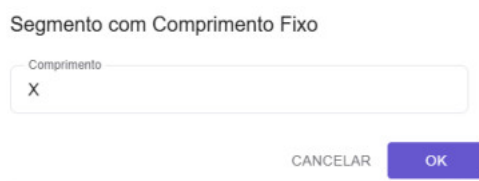
B

C

Tarefa 02: Construa no GeoGebra os triângulos A, B e C. Para isso vamos utilizar as medidas da Tarefa 01.

Objetivo: Construir os triângulos A, B e C usando software de Geometria dinâmica GeoGebra.

1º Abra o software GeoGebra na barra de ferramentas clique sobre o ícone “Segmento com Comprimento Fixo” , abrirá uma caixa onde você deve digitar a medida de um dos lados do triângulo e aperte em ok, em seguida utilize a mesma ferramenta para criar os outros dois lados sempre utilizando um dos extremos do segmento anterior para criar os demais.



2º Clique na ferramenta “Polígono”  e depois sobre os vértices que unem os segmentos.

3º Clique na ferramenta “Ângulo”  e em seguida sobre um dos triângulos, aparecerá as medidas dos ângulos internos do triângulo. Faça o mesmo para cada triângulo.

4º Para traçar a altura dos triângulos Clique na ferramenta “Reta Perpendicular”  em seguida sobre um dos vértices e depois sobre o lado oposto a este vértice.

5º Com a ferramenta “Interseção entre Dois Objetos”  clique sobre a reta perpendicular e depois sobre o triângulo. Perceba que serão criados 2 novos pontos. Selecione a ferramenta “Segmento”  e clique sobre eles.

6º Selecione a ferramenta “Mover”  e clique em qualquer lugar da reta fora do segmento e pressione as teclas Ctrl + G simultaneamente para ocultá-la. Repita o processo com os demais triângulos.

7º Selecione ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”  e clique sobre os extremos do segmento. Na “Janela de visualização” aparecerá uma pequena caixa com o tamanho do segmento que corresponde a altura do triângulo. Repita o mesmo procedimento com os demais triângulos.

8º Na Caixa de Pontos, clique na ferramenta “Ponto” em objeto , e clique dentro da área do nosso triângulo. Ao criar o ponto e iremos renomeá-lo, basta clicar com o botão direito do mouse e clicar em renomear, digite **P** clique em ok.

9º Encontraremos os pontos **X**, **Y** e **Z**, situados nos lados dos triângulos por onde passam as retas perpendiculares aos lados passando por **P**. Para isto, devemos utilizar a ferramenta “Reta Perpendicular”  clicando no ponto **P** nos lados do referido triângulo. Depois com a ferramenta “Interseção de dois objetos” , selecionamos as retas criadas com seu respectivo lado de corte do triângulo, determinando assim a localização dos pontos interseção e iremos renomeá-los de **X**, **Y** e **Z**.

10º Construiremos os segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$, no nosso cenário tendo os extremos deles, só precisamos criá-los utilizando a ferramenta segmento . Em seguida clique em cada uma das retas suportes dos segmentos e pressione as teclas Ctrl + G para ocultá-las.

11º Selecione ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”  e clique sobre os $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$.

12º Clique em um dos lados do triângulo e veja o rótulo (como o segmento está nomeado).

Selecione ferramenta “Texto” , dentro da caixa digite a soma dos rótulos de cada segmento e clique em ok. Faça para os demais triângulos. Como o exemplo:

Texto

B **I** Serif Fórmula LaTeX

q+p+r=

► Avançado

CANCELAR

OK

13º Movimento o ponto **P** com a ferramenta “Mover” e observe as medidas das alturas e valor apresentado na caixa de ao lado de cada triângulo.

Orientação ao professor: No momento da construção, ao mencionar cada ferramenta, o professor deve trabalhar a definição de cada uma para então os alunos utilizarem. Ao finalizar toda a construção aguarde os alunos analisarem e se nada for percebido peça para preencher o quadro da tarefa 3.

Tarefa 03: Preencha o quadro a seguir com as informações obtidas de cada triângulo.

Objetivo: Analisar os triângulos construídos evidenciando uma propriedade exclusiva para triângulos equiláteros.

Aluno:			
ANÁLISE DE TRIÂNGULOS			
DADOS	(A)	(B)	(C)
Tipo			
Ângulos			
Lados			
Altura			
$\overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ}$			

- a) O que você conseguiu perceber ao analisar os triângulos (A), (B) e (C) no GeoGebra e diante das informações obtidas no quadro anterior?

- b) Ao mover o ponto **P** o que você consegue perceber em relação a altura e o resultado da $\overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ}$ em cada um dos triângulos?

Orientação ao professor: Espera-se ao final desta tarefa que os alunos percebam que ao mover o ponto **P** a soma das suas distâncias aos lados do triângulo se mantém sempre constante igual a altura no triângulo equilátero. O professor deve aproveitar o momento para apresentar o Teorema de Viviani.

Teorema de Viviani: *A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo.*

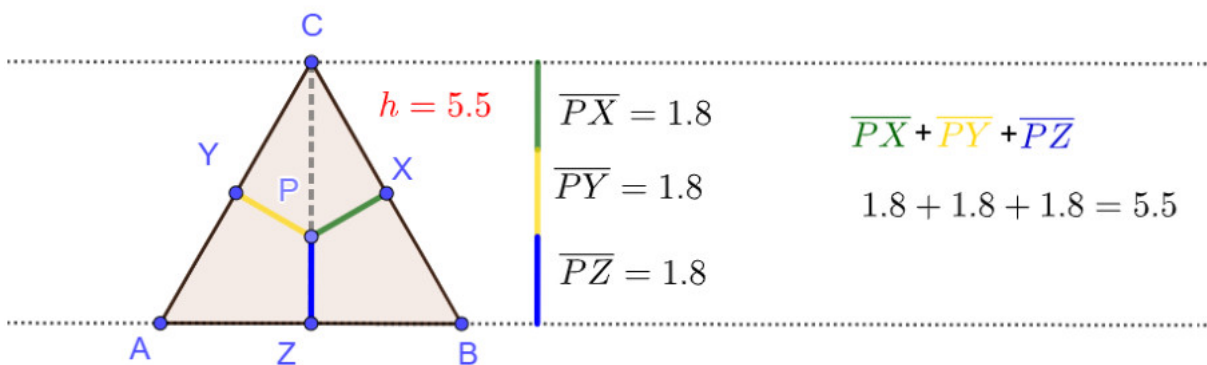
Tarefa 04: Apresente as demonstrações a seguir se possível compartilhe o link de cada uma com os alunos para que acessem individualmente. O professor pode também projetá-la na sala de aula e pedir aos alunos que venham individualmente até a mesa e movam o ponto P com mouse observando juntamente com os demais colegas o que está acontecendo.

Objetivo: Formalização do Teorema de Viviani utilizando demonstrações visuais

Perguntas Investigativas que podem ser feitas no durante o desenvolvimento da tarefa:

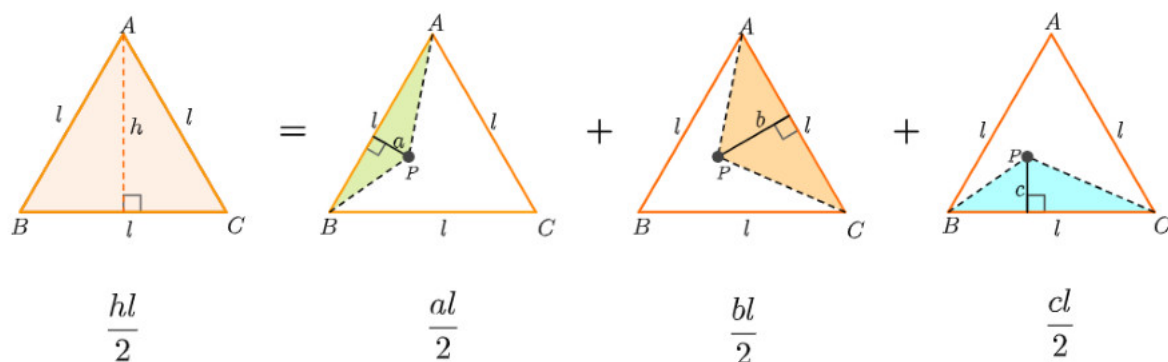
- a) O que você consegue observar ao movimentar o ponto P?
- b) Ele pode sair da área do triângulo ou está limitado aos lados da figura?
- c) Qual a relação dos segmentos que unem o ponto P aos lados e a altura do triângulo?
- d) O que acontece quando o ponto P assume uma posição sobre os lados do triângulo?
- e) Essa relação se mantém nos demais triângulos isósceles ou escaleno?

Demonstração I



<https://www.geogebra.org/classic/yknjjzcr>

Demonstração II



<https://www.geogebra.org/m/mfmsucgt>

Demonstração III



<https://www.geogebra.org/classic/tnsxbett>

11 ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO

No dia 25 de novembro de 2025, no Colégio Estadual Joana Batista Cordeiro (JBC), localizado em Arraias-TO, no período vespertino com a turma 23.02 realizei o desenvolvimento desta proposta pedagógica. Para isto, foram necessários a utilização dos *chromebooks* da unidade escolar, material impresso e réguas. Foi feita a mudança de ambiente da sala de aula para o pátio da escola para melhor aproveitamento do sinal de internet. Antes de iniciar a atividade expliquei aos alunos qual era a proposta e como iríamos proceder. A proposta foi constituída em atividades e em cada uma houve momentos de investigação com algumas questões norteadoras buscando debater e fixar as ideias e conceitos principais.

Em primeiro momento foi reservado para relembrar as definições e classificações de triângulos quanto às medidas dos lados, para então os estudantes realizarem a tarefa 1 com o auxílio da régua para tirar as medidas dos triângulos. Esse momento foi importante porque a maioria não lembrava da nomenclatura que cada um recebia a depender da medida dos lados. Aproveitamos o momento para trabalhar uma condição de existência de um triângulo: *A soma de dois lados quaisquer de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado (Desigualdade Triangular)*. Pedi aos estudantes que construíssem na folha usando régua e lápis um triângulo com lados medindo 3cm, 4cm e 8cm verificasse nos triângulos da atividade. Após tentativas sem êxito de construção com essas medidas por parte dos alunos, mesmos colocando os segmentos em diferentes posições. Afirmei que realmente é impossível de construí-lo pois a condição de existência exprime que deve valer a desigualdade triangular. Depois pedi que verificassem a desigualdade triangular nos triângulos A, B e C da tarefa 1 e viram que para aqueles triângulos realmente era válido.

No segundo momento, fiz a apresentação do software GeoGebra para a turma e até aquele instante nenhum estudante o conhecia. Pedi que acessassem em seu *chromebooks* o GeoGebra Classic Online, e fiz uma breve introdução das ferramentas e dos ambientes de trabalho para que eles se familiarizassem com a plataforma.

Figura 24 - Alunos conhecendo o GeoGebra



Fonte: autora

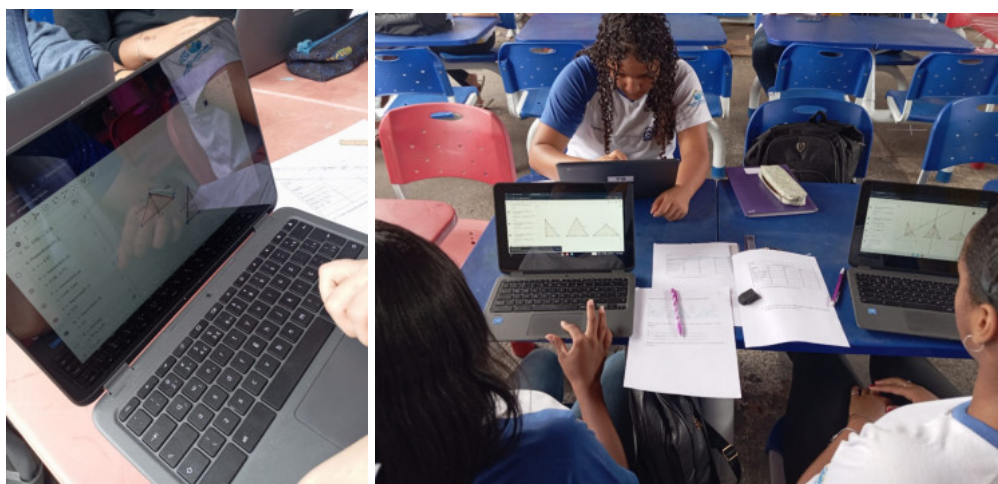
A figura 24 retrata o momento dos alunos concentrados tendo contato pela primeira vez com o software GeoGebra. Reservei alguns minutos para que pudessem acessar e interagir um pouco com a plataforma, mas a maioria preferiu aguardar as orientações. Importante ressaltar que para melhor aproveitamento do sinal de internet da escola que o local Conforme Carvalho (2021), dependendo do tipo de tecnologia digital e da forma de inseri-la na prática pedagógica dos professores, os estudantes podem enfrentar determinadas dificuldades.

Para a tarefa 2, propus aos estudantes que construíssem no Geogebra os triângulos A, B e C com as reais medidas de cada um, como foi pedido na tarefa anterior. Para isso fui orientando com informações a respeito das ferramentas que deveriam utilizar. A cada ferramenta utilizada trabalhávamos as definições como de ponto, reta, segmento, reta perpendicular, distância, ângulos entre retas, posições de retas no plano, altura e outras de forma que ao momento que se apropriavam do conceito conseguiam utilizar a ferramenta correta. Durante a realização da atividade, observou-se que a cada ferramenta utilizada na construção, o auxílio do GeoGebra favoreceu significativamente a compreensão dos conceitos trabalhados. E isto foi percebido na fala dos alunos, quando estes mencionavam, por exemplo, se poderia utilizar a ferramenta “reta” ao invés da “reta perpendicular” como reta suporte dos segmentos que ligavam o ponto P aos lados dos triângulos. Essa pergunta em particular contribuiu para trabalhar a definição de distância como sendo o menor segmento que une o ponto P e o lado triângulo e que este forma um ângulo reto com lado. Essas reflexões diante a utilização de cada ferramenta foram apresentadas pela maioria dos alunos, o que nos levou a verificar que o uso do software geogebra, no ensino da matemática,

possibilita a reflexão, análise e verificação do conteúdo, possibilitando ao aluno abstrair significativamente o conceito estudado.

Assim como Alencar *et al* (2022) perceberam, com essa tarefa destacamos que o GeoGebra fornece aspectos visuais dinâmicos relevantes para a compreensão das demonstrações dos resultados da geometria euclidiana plana. E vai de encontro com que Maia (2023) afirma o GeoGebra é uma ferramenta poderosa no ensino de geometria, pois facilita a visualização e a compreensão de conceitos matemáticos através de representações gráficas e algébricas.

EFigura 25 - Construção no GeoGebra



Fonte: autora

O terceiro momento foi marcado pela exploração dos estudantes, após construírem o recurso, pedi que preenchessem a tabela e analisassem o que acontecia com as medidas dos segmentos e a altura de cada triângulo (figura 25). O objetivo era que percebessem que dos três triângulos construídos com ponto **P** móvel em seu interior, apenas no triângulo equilátero a soma dos segmentos que o ligam aos lados sempre se igualam a altura.

Os estudantes construíram o recurso e ficaram em média 6 minutos analisando, até que dois deles disseram que sabiam o que estava acontecendo. No momento pedimos para que socializassem com os demais colegas e aproveitamos para formalizar que o que haviam percebido era na verdade um teorema famoso em relação aos triângulos equiláteros chamado Teorema de Viviani (figura 26).

Assim como afirma Borges Neto (1998 apud SOUZA, 2001, p.47):

O computador é um instrumento excepcional que torna possível simular, praticar ou vivenciar verdades matemáticas (podendo até sugerir conjecturas abstratas), de visualização difícil por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, mas fundamentais à compreensão plena do que está sendo proposto.

Figura 26 - Exploração no GeoGebra



Fonte: autora

Como proposto nas competências e habilidades da BNCC na etapa do Ensino Médio, os estudantes devem utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (Brasil, 2018).

A mesma construção realizada por diferentes alunos, demonstra que é a partir da reflexão que cada um faz diante a cada ferramenta que o leva ao êxito da construção. Assim se pode concluir que os estudantes compreenderam que cada conceito trabalhado, já que não houveram construções divergentes.

Na tarefa 4, solicitei aos estudantes que acessassem a aba de pesquisa do GeoGebra e digitassem o nome Iara Martins Coêlho para terem acesso às outras demonstrações visuais do teorema disponíveis no meu perfil no GeoGebra. Após visualizarem cada uma das demonstrações os alunos ficaram bastante empolgados e relataram que queriam aprender a fazer as outras construções. Além de oferecer possibilidade de análise de cada informação visivelmente, reforçou-se a explicação do professor, melhorando e contribuindo para compreensão do aluno perante o objeto estudado.

Com essa proposta foi possível identificar conhecimentos importantes de geometria plana e contribuir para a fixação das ideias por meio de uma atividade interativa de construção, juntamente com definições de conceitos fundamentais de geometria plana até a apresentação do Teorema de Viviani. A vantagem da utilização da tecnologia para a

aprendizagem ficou evidente, pois a percepção do erro era instantânea, ao contrário de uma atividade tradicional em que a falta de correção imediata prejudica a percepção e até a aprendizagem, pois uma vez que utilizavam a ferramenta errada percebiam no mesmo momento qual conceito ainda não sabia definir. Isso se alinha, conforme Alencar *et al* (2022) com o que se espera de ambientes dinâmicos de geometria: possibilitar experimentação, ajustes imediatos, reconfigurações e autoavaliação.

Durante a atividade, observamos os estudantes debatendo e trocando ideias, o que ressalta a importância de proporcionar situações de análise e trabalho em grupo. Além disso, foi notável a vibração a cada nova descoberta e a busca por ajuda ao errarem, evidenciando que o movimento de buscar compreender o erro é fundamental para efetivar a aprendizagem, uma vez que o aluno já conhece o caminho correto a seguir.

12 CONSIDERAÇÕES

Demonstrar com o GeoGebra amplia nossa compreensão e nosso raciocínio sobre os Teoremas. Com essa ferramenta, conseguimos ir além do conhecimento apresentado tradicionalmente, pois podemos visualizar conjecturas, explorar suas propriedades e observar o comportamento geométrico envolvido. Essa visualização favorece a interpretação, tornando o conteúdo mais acessível e intuitivo.

Além disso, o GeoGebra possibilita realizar novas análises e testar diferentes configurações, permitindo observar tanto casos particulares quanto situações mais gerais. Dessa forma, podemos formular inferências, investigar padrões e aprofundar a compreensão matemática de maneira dinâmica e interativa.

De fato, para usar este programa antes de tudo devemos ter o conhecimento teórico das definições de tudo que engloba a Geometria ou conteúdo a ser trabalhado, pois o software é composto por diversas ferramentas, e cada uma exige conhecimento específico para ser utilizada adequadamente. Não é possível construir figuras para análise ou realizar a demonstração de um teorema sem compreender os conceitos e as definições associados a cada recurso disponível no ambiente de trabalho, assim a partir do momento em que se tem esse entendimento é possível trabalhar de diversas formas e fazer construções de modo que estarão mantidas todas as propriedades ao qual queremos demonstrar. Só conseguimos trabalhar com Geogebra quando nos apropriamos do conteúdo relacionado a determinadas figuras geométricas para então demonstrá-las.

O GeoGebra auxilia no aprendizado, uma vez que é dinâmico e visual, além de ser uma forma prática de exercitar e a aplicar o que aprendemos. Tornou-se um grande instrumento de estudo, aprendizagem e de exercício. Aliado ao estudo teórico, em que aprendemos de forma abstrata os contextos, a experiência no software pode ser muito vantajosa uma vez que para conseguir construir, manipular, demonstrar por ele devemos aprofundar os conhecimentos, e a partir do seu uso passamos a exercitar, fixar e entender tudo de forma mas ampla, clara e objetiva.

Podemos ressaltar a versatilidade do GeoGebra para construção, verificação ou demonstração e validação de teoremas da Geometria, pois possibilitou a construção de diferentes recursos visuais para demonstração do Teorema de Viviani no plano e de maneira análoga podem ser construído no espaço para os demais polígonos e poliedros.

No ensino, destacamos a importância do uso de desenhos geométricos e de softwares de geometria dinâmica, como sugerido pela BNCC. Essas ferramentas ajudam professores e

alunos a visualizar e entender melhor os conceitos geométricos, tornando o aprendizado mais dinâmico e interativo.

Portanto, ao invés de tentar desenhar manualmente uma figura para demonstrar uma propriedade ou teorema válidos, é muito mais viável a utilização deste programa, pois ele abre os horizontes para tudo aquilo que não conseguimos desenhar com lápis no papel. E o que estava oculto passa a ser visto e debatido podendo ser questionado, analisado e provado.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, evidenciados pelo envolvimento dos estudantes nas atividades, pela progressiva apropriação do conteúdo e pela resolução instantânea de dúvidas por meio do apoio tecnológico. A dinamização da aula promoveu significativa participação dos estudantes, favorecendo a interação mútua entre eles e aproveitamento do tempo de aula com qualidade uma vez que todos alcançaram o objetivo final. Observamos, de modo geral, engajamento da turma e interesse pela realização da proposta, o desafio da construção casou entusiasmo, curiosidade tornando o ambiente perfeito para a formalização e concretização de conceitos e definições fundamentais da geometria plana.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; CÂNDIDO, Larissa; GARCIA, Ronaldo; MATHIAS, Carmen. O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria. **Professor de Matemática Online**, v. 10, p. 482-501, 2022.

<https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1033>

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. A utilização do GeoGebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 637-657, 2015. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>.

ALSINA, Claudi; NELSEN, Roger. **Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics**. American Mathematical Society, 2010.

<https://doi.org/10.5948/UPO9781614442011>

BAKI, Adnan.; GUVEN, Bulent. Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment. **Teaching Mathematics and Its Applications**, 28(1), 1–9, 2008.

<https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001>

BORGES, Neto, Hermínio. et.al. Manual do

Geogebra. <http://ftp.multimeios.ufc.br/~geomeios/geogebra/manual.html>

BRITO DA SILVA, Francisco; BATISTA, Antonia. Aspectos matemáticos e materiais da fabricação do báculo de Petrus Ramus frente à concepção de licenciandos em Matemática.

Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 165–180, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8031>.

CASTILLO, Luis.; GUTIÉRREZ, Rafael; SÁNCHEZ, Ivonne. O uso do comando sequência na elaboração de simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 106–119, 2020.

<https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119>.

CATANEO, Vanessa. O uso do software GeoGebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino-aprendizagem da Matemática no ensino fundamental séries finais. 2011.

Monografia (Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Centro Universitário Barriga Verde – UNIBAVE, Orleans, 2011.

CARVALHO, Josimauro. Uma revisão sistemática sobre metodologias ativas no ensino da matemática: aprendizagem ativa, protagonismo dos estudantes. **Journal of Education Science and Health**, 1(4), 1–13, 2021. <https://doi.org/10.52832/jesh.v1i4.47>

DAMAZIO, Ademir. **Educação Matemática e Psicologia: Um Estudo da Abordagem Histórico-Cultural**. Criciúma, SC, UNESC, 2007.

DENNIS, David; CONFREY, Jere. Drawing logarithmic curves with Geometer's Sketchpad: a method inspired by historical sources. In: KING, J. R.; SCHATTSCHEIDER, D. (ed.). **Geometry turned on!**. Washington, DC: MAA, 1997. p. 147–156.

HAŠEK, Roman; ZAHRAĐNÍK, Jan. Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, [S.l.], v. 22, n. 2, p. 53–58, 2015. https://doi.org/10.1564/tme_v22.2.02.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

De VILLIERS, Michael. 3D Generalisations of Viviani's theorem. **The Mathematical Gazette**. 97 (540): 441–445, 2013. <https://doi.org/10.1017/S0025557200000188>

ISODA, Masami. Inquiring mathematics with history and software. In: FAUVEL, John.; MAANEN, Jan (ed.). **History in mathematics education**. New ICMI Study Series. Dordrecht: Springer, 2002. p. 351–358. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10.

ISODA, Masami.; AOYAMA, Kazuhiro. The change of belief in mathematics via exploring historical text with technology in the case of undergraduates. In: YANG, W.-C.; CHU, S.-C.; CHUAN, J.-C. (ed.). **Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics**. 2000. p. 132–141.

JANKVIST, Uffe. On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In: MATTHEWS, Michael. (ed.). **International handbook of research in history, philosophy and science teaching**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. p. 873–908. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7654-8_27.

JANKVIST, Uffe; GERANIOU, Eirini. Digital technologies as a way of making original sources more accessible to students. In: BARBIN, E. et al. (ed.). **Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education**. Oslo: Metropolitan University, 2019. p. 107–130.

JANKVIST, Uffe; GERANIOU, Eirini. “Whiteboxing” the content of a formal mathematical text in a dynamic geometry environment. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, p. 222–246, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6>.

SILVA JUNIOR, Francimar; SANTOS, Andressa; PEREIRA, Ana. Um primeiro olhar sobre *A short Treatise of the Description of the Sector*. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 374–385, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8034>.

KÁNTOR, Tünde; TÓTH, Ana. Teaching of old historical mathematics problems with ICT tools. **Teaching Mathematics and Computer Science**, v. 14, n. 1, p. 13–24, 2016. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0400>

MAANEN, Jan. New maths may profit from old methods. **For the Learning of Mathematics**, v. 17, n. 2, p. 39–46, 1997. <https://doi.org/10.2307/40248239>.

MAIA, Dennys. **Ensinar Matemática com o uso de tecnologias digitais: uma análise a partir da representação social de estudantes de Pedagogia**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Educação, Curso de Mestrado Acadêmico em Educação, Fortaleza, 2012, 190 f.

MEADOWS, Michelle; CANIGLIA, Joana. That was then... this is now: utilizing the history of mathematics and dynamic geometry software. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, v. 9, n. 2, p. 198–212, 2021. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1106>.

MENDES, Irã. **História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MUSEO GALILEO. Vincenzo Viviani. Firenze, 2025. Disponível em: <https://encurtador.com.br/igTi> >. Acesso em: 28 nov. 2025.

NELSEN, Roger. **Proofs without words: exercises in visual thinking**. Washington. The Mathematical Association of America, 1993.

NICOLLIER, Grégoire. Proof without words: Viviani for congruent cevians. **Mathematics Magazine**, v. 89, n. 3, p. 216–217, 2016. <https://doi.org/10.4169/math.mag.89.3.216>

NÓBRIGA, Jorge. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2019. <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e61725>.

NÓS, Rudimar; FERNANDES, Flávia. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018. <https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0272>.

NÓS, Rudimar.; FERNANDES, Flávia. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121-137, 2019.

O'CONNOR, John.; ROBERTSON, Edmund. **Vincenzo Viviani**. 2009. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani>. Acesso em: 15 nov. 2025.

OLIVEIRA, Edvaldo; CUNHA, Douglas. O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau. **Revista Educação Pública**, v. 21, nº 36, 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribicoes-do-isofwarei-geogebra-no-ensino-da-funcao-do-1-grau>

PEREIRA, Ana. (Ed.). **Ensino de matemática: conversas didáticas a partir de tratados históricos**. 1. ed. Fortaleza: EdUECE, 2022.

PEREIRA, Ana; ALVES, Verusca. A reconstrução dos círculos de proporção no GeoGebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 5, p. 19–28, 2019. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/41>

PONTES, Livia; BATISTA, Antonia; PEREIRA, Ana. A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. **Revemop**, v. 3, e202101, 2021. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202101>.

SAMELSON, Hans. Proof without words: Viviani's theorem with vectors. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 3, p. 225, 2003. <https://doi.org/10.2307/3219327>.

SÁNCHEZ, Ivonne; CASTILLO, Luis. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 214–226, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030>.

SOUSA, Giselle. de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>.

TEIXEIRA, Lucas; COELHO, Iara; CASTILLO, Luis ; SÁNCHEZ, Ivonne. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 9, p. e2002, 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467>

THOMSEN, Marianne. Working with Euclid's geometry in GeoGebra – experiencing embedded discourses. In: Bringing Nordic Mathematics Education into the Future: Proceedings of NORMA 20, **The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education**, 2020. p. 257–265, 2021.

THOMSEN, Marianne.; JANKVIST, U. T. Mathematical thinking in the interplay between historical original sources and GeoGebra. **ICTMT-15 Book of accepted contributions: 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – Making and Strengthening “Connections and Connectivity” (C&C) for Teaching Mathematics with Technology**. Danish School of Education, 2019. p. 283–291.

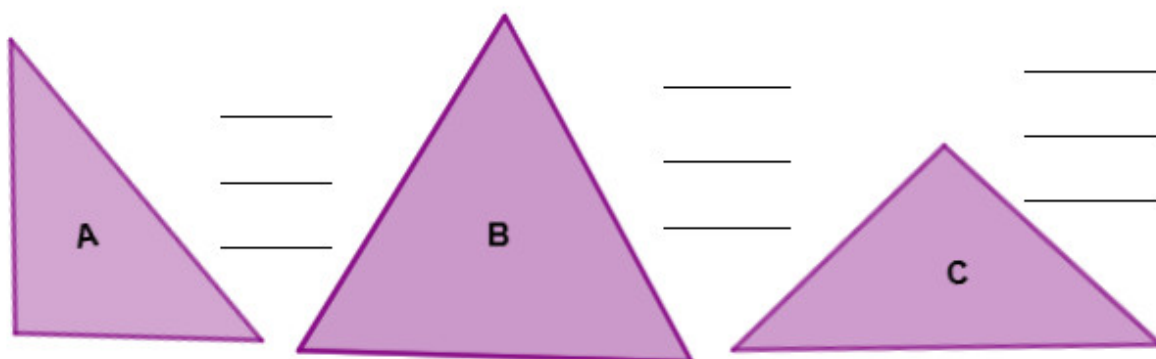
TOCANTINS. SEDUC. DCT- Documento Curricular do Território do Tocantins. Etapa Ensino Médio. Caderno 02, Matemática e Suas Tecnologias. Palmas, 2022.

VIVIANI, Vincenzo. *De maximis et minimis geometrica divination in quintum Conicorum Apollonii Pergaei*. 1659.

ZENGİN, Yilmaz. Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 7, p. 1083–1098, 2018. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850>.

ANEXO I - Atividade

Tarefa 01: Obtenha, o auxílio de uma régua, as medidas dos triângulos A, B e C.



Nomeie cada um de acordo com a medida dos lados, isósceles, equilátero, escaleno e retângulo.

A _____
 B _____
 C _____

Tarefa 02: Construa no GeoGebra os triângulos A, B e C. Para isso vamos utilizar as medidas da Tarefa 01.

Aluno: _____			
ANÁLISE DE TRIÂNGULOS			
DADOS	(A)	(B)	(C)
Tipo			
Medidas dos Ângulos			
Medidas dos Lados			
Medida da Altura			
$\overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ}$			

c) O que conseguiu analisar nos triângulos (A), (B) e (C)?

d) Ao mover o ponto P o que você consegue perceber em relação a altura e o resultado da $\overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ}$ em cada um dos triângulos?