



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VITOR MANOEL ALVES DE SOUZA

UM ESTUDO ACERCA DA MATRIZ REPUNIDADE E SUAS CARACTERÍSTICAS
VOLTADAS AO ENSINO DA MATEMÁTICA

ARRAIAS, TO

2026

Vitor Manoel Alves de Souza

**Um estudo acerca da Matriz Repunidade e suas Características Voltadas ao Ensino da
Matemática**

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS, TO

2026

<<https://sistemas.uft.edu.br/ficha/>>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S729e Souza, Vitor Manoel Alves de.
UM ESTUDO ACERCA DA MATRIZ REPUNIDADE E SUAS
CARACCTERISTICAS VOLTADAS AO ENSINO DE MATEMÁTICA. / Vitor
Manoel Alves de Souza. – Arraias, TO, 2025.
63 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus
Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.
Orientador: Eudes Antonio da Costa Costa

1. Sequência Repunidade. 2. Matriz Repunidade. 3. Engenharia Didática. 4.
Teoria das Situações Didáticas. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer
forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte.
A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184
do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da
UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

Vitor Manoel Alves de Souza

Um estudo acerca da Matriz Repunidade e suas Características Voltadas ao Ensino da Matemática

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 29 de outubro de 2025

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 03/11/2025 16:00:08-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (UFT)
Orientador (Presidente)

Documento assinado digitalmente
gov.br **THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE**
Data: 30/10/2025 11:20:17-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante (UFT)
Examinador 1

Documento assinado digitalmente
gov.br **RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA**
Data: 30/10/2025 09:41:47-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dra. Renata P. M. Vieira (SEDUC-CE)
Examinador 2

AGRADECIMENTOS

A realização deste Trabalho de Conclusão de Curso não teria sido possível sem o apoio e o incentivo de várias pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o seu desenvolvimento.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me dar sabedoria e discernimento para concluir este trabalho.

Expresso minha profunda gratidão ao meu orientador, Eudes Antonio da Costa, por todas as orientações, paciência, compreensão e pelo apoio constante ao longo de todo o processo. O senhor é um professor incrível; te admiro e sou imensamente grato ao senhor.

Agradeço também a todos os professores e colaboradores do Curso de Licenciatura em Matemática da UFT, pela troca de experiências e pelo aprendizado contínuo durante toda a minha jornada.

À minha família, em especial ao meu pai Elizafan Nascimento de Souza e a minha mãe Cleidismare Alves dos Santos Souza por todos os conselhos, broncas, por todo carinho e por sempre me apoiarem e me incentivarem a continuar lutando pelos meus sonhos e objetivos.

Quero agradecer aos meus amigos e colegas da faculdade, em especial à minha namorada, Sunamita, e ao meu amigo Francival, minha "dupla" durante esses quatro anos. Também agradeço a Thaíssa, Luan, Ricardo, Andressa, Sandrielle, Hanna, pelas nossas convivências e pelos momentos que compartilhamos, sou grato a Deus por ter conquistado amigos tão bons durante essa jornada.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho, manifesto meu sincero agradecimento.

RESUMO

O presente estudo visa, essencialmente, conceber e apresentar circunstâncias didáticas envolvendo a matriz repunidade, com ênfase no desenvolvimento do raciocínio matemático e na investigação de padrões numéricos. O presente estudo fundamenta-se nas abordagens metodológicas da Engenharia Didática (ED) e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), atribuindo prioridade às fases de análise preliminar e análise *a priori*. As atividades propostas visam investigar propriedades algébricas, estruturais e recursivas referentes à matriz repunidade, com o intuito de fomentar a construção de conhecimentos matemáticos por meio de situações didáticas intencionais. Com base nos resultados teóricos obtidos, foi possível compreender que o objeto de estudo e as suas características podem ser considerados uma relevante ferramenta para o ensino da matemática, promovendo a articulação entre conhecimentos conceituais. Nesse sentido, é esperado que este trabalho contribua para a formação do pensamento ativo, reflexivo e autônomo dos estudantes e que também sirva de inspiração para novas investigações no domínio do ensino de matemática.

Palavras-chave: Matriz Repunidade. Características. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

This study essentially aims to design and present teaching situations involving the matrix of repetition, with an emphasis on the development of mathematical reasoning and the investigation of numerical patterns. This study is based on the methodological approaches of Didactic Engineering (DE) and Didactic Situation Theory (DST), giving priority to the preliminary analysis and a priori analysis phases. The proposed activities aim to investigate algebraic, structural, and recursive properties related to the repunit matrix, with the goal of fostering the construction of mathematical knowledge through intentional teaching situations. Based on the theoretical results obtained, it was possible to understand that the object of study and its characteristics can be considered a relevant tool for teaching mathematics, promoting the articulation between conceptual knowledge. In this sense, it is expected that this work will contribute to the formation of active, reflective, and autonomous thinking in students and that it will also serve as inspiration for new research in the field of mathematics education.

Keywords: Repunit Matrix. Characteristics. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O triângulo didático	22
---	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Fundamental	26
Quadro 2 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Médio	27
Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental . . .	27
Quadro 4 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio	28

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Engenharia Didática
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFT	Universidade Federal do Tocantins

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO	14
2.1	Engenharia Didática	14
2.1.1	Análises Preliminares	16
2.1.2	Análise a Priori	17
2.1.3	Experimentação	18
2.1.4	Análise a Posteriori	20
2.2	Teoria das Situações Didática	21
2.3	Sequências e Matrizes na BNCC	24
3	ANÁLISES PRELIMINARES	29
3.1	Sequência Repunidade	29
3.2	Ensino de Matrizes	30
3.2.1	Elementos de uma matriz:	31
3.2.2	Operações com Matrizes	33
3.3	Matriz Repunidade	37
3.4	Algumas características e propriedades da matriz repunidade de segunda ordem:	39
3.4.1	Determinantes de uma Matriz	40
3.4.2	Expansão de Laplace:	40
3.5	Análise dos livros Didáticos	46
4	ANÁLISE A PRIORI E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	48
4.1	Construção das Situações Didáticas	48
5	REFLEXÕES SOBRE A ANÁLISE A POSTERIORI E O PROCESSO DE VALIDAÇÃO	55
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

O componente curricular Matemática é fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes, apresentando diversas peculiaridades que geram dificuldades para os estudantes bem como para os professores durante o processo de ensino e aprendizagem. Essas dificuldades, por vezes, estão relacionadas à complexidade de conteúdos mais simbólicos e formais. Dessa forma, torna-se necessário buscar abordagens inovadoras e contextualizadas no ensino de matemática, com objetivo de romper com o ensino tradicional dos conteúdos escolares.

Entre os temas abordados na Educação Básica, o estudo de matrizes, por vezes, é tratado de maneira mecanizada, tornando o ensino pouco significativo. Nesse sentido, esse trabalho propõe utilizar a matriz repunidade como recurso didático-pedagógico para a abordagem do conteúdo de matrizes no Ensino Médio, explorando suas propriedades, características e aplicações a partir de uma sequência de situações didáticas.

Nessa pesquisa, utilizamos a Engenharia Didática (ED) como metodologia, que estabelece uma analogia ao trabalho de um engenheiro, associado ao professor, como um pesquisador em potencial. Essa metodologia pode “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOU, 2007, p.167). No que se refere às fases da ED, abordamos as duas primeiras fases: a análise preliminar e a concepção com análise *a priori*. É importante destacar que as etapas seguintes da ED, que não foram desenvolvidas neste trabalho, correspondem à fase de experimentação e à análise *a posteriori* e validação, isto justifica-se pela possibilidade de validação interna das hipóteses formuladas, mesmo sem a realização de experimentações formais no ambiente escolar.

Desse modo serão apresentadas algumas atividades ancoradas nessa abordagem, com o objetivo de abordar o ensino de matrizes, especificamente, a matriz repunidade. Para fundamentar as atividades propostas utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Brousseau (1982), que busca relacionar o conhecimento como resultado da interação entre o estudante e um meio didaticamente estruturado. Essa abordagem possibilita a criação de situações-problema que incentivam os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico-matemático, bem como estratégias para construir conceitos por meio da própria experiência, promovendo uma maior autonomia. Desenvolvemos estas atividades com base nas quatro fases da TSD, sendo elas: (1) ação, (2) formulação, (3) validação e (4) institucionalização, desse modo, essa teoria tem como

objetivo estruturar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, promovendo uma relação dinâmica entre professor, discente e saber. Como destaca (ALMOULOU, 2007, p. 31), ela foi desenvolvida "no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos".

Desta forma, o estudo em questão demonstra a sua relevância no domínio do ensino da matemática, com resultados suscetíveis de utilização em investigações futuras relacionadas com o tema em estudo. Nessa perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo geral, investigar a utilização da matriz repunidade enquanto ferramenta pedagógica no ensino da álgebra matricial. Esta análise é empreendida por intermédio de situações didáticas intencionais que fomentem a interação dos estudantes com os problemas propostos, estimulando a formulação de suas próprias conjecturas.

No que diz respeito aos objetivos específicos, pode-se destacar os seguintes:

- apresentar as propriedades e características fundamentais da matriz repunidade, suas aplicações e relações com a recorrência de uma sequência;
- elaborar situações didáticas com base na TSD;
- refletir sobre o ensino de matrizes e sequências e a identificação de regularidades.

Esta pesquisa, justifica-se assim, pela sua importância para a área da matemática, podendo apresentar resultados que serão fundamentais para pesquisas futuras relacionadas ao tema investigado. Nesse contexto evidenciamos o potencial da matriz repunidade como um recurso didático para o ensino de matemática, mais especificamente o ensino de álgebra matricial.

Neste primeiro capítulo, apresentamos a introdução ao trabalho, os objetivos geral e específicos, a justificativa da pesquisa, as metodologias adotadas, bem como uma visão geral da estrutura dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, temos a fundamentação teórico-metodológica da pesquisa e do ensino, sendo elas a ED de Artigue (1988), em que apresentamos as quatro fases fundamentais da ED, e a TSD de Brousseau (1982), para orientação e elaboração das atividades destacando os principais estudos que abordam o tema.

O terceiro capítulo será dedicado às análises preliminares da pesquisa, com foco na análise matemática da matriz repunidade. Inicialmente, são discutidos os conceitos fundamentais relacionados ao termo geral de recorrências lineares para que seja possível compreender como a matriz repunidade é estruturada. Em seguida, têm-se algumas propriedades referentes à matriz

e algumas características algébricas de forma geral. É apresentado também a fundamentação teórica formal da sequência repunidade e da matriz companheira da sequência, com o intuito de explicitar, sob a perspectiva acadêmica, as propriedades algébricas, estruturais e recursivas que caracterizam esse objeto matemático, mostramos também como o assunto de matrizes é abordado nos livros didáticos de matemática destinados para o Ensino Médio. Os materiais analisados fazem parte da edição do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2021 e abrangem três coleções: "Matemática Interligada" de Andrade (2020), "Matemática em Contexto" de Dante e Viana (2020) e "Prisma Matemática" de Bonjorno, Giovanni-Júnior e Sousa (2020).

O quarto capítulo apresentará a elaboração das propostas de ensino e das situações didáticas, as quais constituem a fase de análise *a priori* da ED. Neste capítulo, descreve-se a construção das atividades didáticas propostas, com objetivo de estimular a identificação de padrões e a compreensão da generalização referente a matriz repunidade, propor atividades didáticas que explorem a matriz repunidade, suas características e propriedades.

O quinto capítulo apresentamos às reflexões acerca da análise *a posteriori* e do processo de validação da proposta, enquanto o sexto capítulo apresenta as considerações finais do autor, reunindo observações sobre o desenvolvimento da pesquisa, os resultados obtidos e possíveis desdobramentos para futuras investigações.

É importante ressaltar que este trabalho surgiu a partir do interesse e da familiaridade por questões relacionadas as componentes curriculares Introdução à Teoria dos Números e Álgebra Linear, cursados por este acadêmico em 2022 e 2023, respectivamente. Essas componentes foram fundamentais para um aprofundamento teórico acerca das características referentes a sequências e matrizes. Destaca-se também outro fator decisivo para desenvolvimento desta pesquisa que foi o convite do professor Eudes Antonio da Costa para participar de um projeto de pesquisa, este, posteriormente assumiu a orientação deste trabalho. Essa parceria impulsionou ainda mais o envolvimento com o tema, tendo como produto acadêmico 4 artigos científicos publicados, dos quais destaco Costa *et al.* (2024) e Costa *et al.* (2024), que serviram como referências para esta pesquisa. A partir da relação entre experiências e motivações, consolidou-se o interesse em desenvolver um estudo sobre a matriz repunidade, articulando fundamentos conceituais e metodológicos com vistas à contribuição para o ensino de matemática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA PESQUISA E DO ENSINO

No presente capítulo, são apresentadas as metodologias da pesquisa e do ensino que fundamentam o presente trabalho, nomeadamente a ED de (Artigue, 1988) e a TSD de (Brousseau, 1982). A ED é composta por quatro etapas fundamentais: (1) análises preliminares; (2) concepção e análise a priori; (3) experimentação; e (4) análise a posteriori e validação. No entanto, neste estudo, utilizamos as duas primeiras etapas, dada a possibilidade de validação interna, considerando que foi apresentada apenas uma proposta metodológica. Contudo, foi realizada uma breve caracterização de cada uma das etapas. Ademais, consideramos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma vez que esta orienta o currículo da educação básica e prevê, no ensino, o desenvolvimento de competências relativas ao estudo de sequências, matrizes e à utilização de tecnologias no ensino.

2.1 Engenharia Didática

Na concepção de Artigue (1988, p. 285), a ED é caracterizada "[...] como um esquema experimental fundamentado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino", ou seja, trata-se de uma abordagem experimental, voltada para a compreensão e aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem, a partir da estrutura de etapas metodológicas fundamentais. Sob esse viés, utilizaremos a ED como metodologia da pesquisa, para elaborar, desenvolver e analisar as situações e práticas de ensino que serão propostas.

A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Na concepção de Artigue (1988), a ED é concebida como uma metodologia específica de pesquisa, associada ao trabalho de um engenheiro. Da mesma forma que o engenheiro elabora e concebe soluções fundamentadas em princípios científicos, o professor ou pesquisador, organiza suas intervenções para o ensino e desenvolvimento na sala de aula. Entretanto, enquanto o engenheiro lida com sistemas físicos previsíveis e controláveis, o professor faz adaptações necessárias ao contexto da sala de aula, tornando o processo dinâmico e ajustável.

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto específico, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1996, p. 193).

Já Douady (1993), outro importante teórico, destaca a perspectiva do professor como engenheiro no processo de ensino e aprendizagem, demonstrando a importância da estruturação didática, a partir das interações entre professor e os estudantes durante o desenvolvimento das aulas. Isso mostra que o ensino não é um processo rígido, mas sim dinâmico e adaptativo.

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (DOUADY, 1993, p. 2).

Desse modo, os autores citados nos permitem compreender a ED como uma metodologia de pesquisa que articula, de maneira sistemática, a elaboração, a experimentação e a análise de situações de ensino, com base em referenciais teóricos consolidados. Ao fazerem referência ao trabalho do engenheiro, eles destacam o papel ativo do pesquisador na construção de intervenções pedagógicas fundamentadas e ajustadas à complexidade do processo de ensino-aprendizagem e às necessidades dos estudantes.

A ED estrutura-se em quatro fases essenciais: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. As etapas em questão, são de suma importância para elaboração de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, garantindo uma abordagem estruturada, alinhada aos objetivos pedagógicos. Entretanto, neste texto nem todas as fases serão implementadas. Serão desenvolvidas apenas as duas primeiras, a saber: análise preliminar e análise a priori, visto que o principal objetivo deste estudo é fundamentar teoricamente atividades propostas relacionadas a matriz repunidade.

Desse modo, a opção de não realizar as demais fases, se dá pela natureza teórica do trabalho, voltado à elaboração e à análise conceitual da proposta didática.

[...] Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 66).

Dessa forma, como aponta os autores Almouloud e Coutinho (2008), a ED possibilita essa validação interna sem a necessidade de desenvolvê-la em um contexto real, sem comprometer a validade metodológica da pesquisa, uma vez que o foco está na concepção e fundamentação teórica da proposta, e não na parte prática, o que justifica o uso exclusivo das duas primeiras etapas da pesquisa.

2.1.1 Análises Preliminares

De acordo com Artigue (1988), a concepção da engenharia didática é feita a partir de um contexto teórico geral dos conhecimentos já adquiridos nas áreas estudadas. Conforme a autora, essa etapa deve contemplar as seguintes vertentes:

- análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- análise do ensino atual e seus efeitos;
- análise das concepções dos estudantes, das dificuldades e dos obstáculos que marcam o seu desenvolvimento;
- análise do campo de restrições em que se situará a efetiva realização didática.

Naturalmente deve-se levar em conta os objetivos específicos da pesquisa. As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia, porém, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. É importante ressaltar que elas serão ou não realizadas a depender desse objetivos.

Nesse sentido Almouloud (2007) destaca:

[...] Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. (ALMOULOU, 2007, p. 173).

Desse modo, a análise preliminar “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p 202). Dessa maneira, as análises preliminares permitem que o docente elabore intervenções pedagógicas mais eficazes e bem estruturadas. Nesse sentido, reforça-se que a construção de situações-didáticas deve ser pensada de forma cuidadosa para superar, de forma intencional e progressiva, os obstáculos durante o desenvolvimento de novos saberes dos estudantes.

De acordo com Artigue (1988), cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Desse modo, o termo "preliminar" refere-se apenas a um primeiro nível de organização.

2.1.2 Análise a Priori

A análise a priori é uma etapa descritiva e preditiva do processo de elaboração e implementação de situações de ensino. Trata-se de uma análise do controle do sentido, em que o professor antecipa as percepções dos aprendentes, suas principais dificuldades e os obstáculos epistemológicos que podem surgir durante o desenvolvimento da situação didática.

Na perspectiva de Bachelard (1996), obstáculos epistemológicos são barreiras que surgem durante o processo de ensino e aprendizagem que impedem o sujeito de avançar em seu conhecimento.

E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é "o que se poderia achar" mas é sempre o que se deveria ter pensado. O pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização (BACHELARD, 1996, p. 17).

Nessa perspectiva, Bachelard (1996) afirma que o conhecimento científico não se constrói de maneira linear, mas parte da superação de saberes prévios que, embora aparentemente válidos, constituem obstáculos ao progresso do saber.

De acordo com Manguiera *et al.* (2021):

A concepção e análise a priori é o momento em que são definidas as variáveis, sendo então microdidáticas ou macrodidáticas. A microdidática, é dada pelos possíveis comportamentos dos estudantes durante as situações didáticas. A macrodidática realiza o direcionamento da pesquisa. (MANGUEIRA *et al.*, 2021, p. 277).

Nesse sentido, para orientar a definição dessas variáveis, Almouloud e Coutinho (2008) descrevem três perspectivas fundamentais sobre como realizar essa análise de forma eficaz. A análise a priori comporta uma parte de descrição e outra de previsão, estando centrada nas características de uma situação didática intencional a ser empregada aos educandos. As referidas perspectivas são:

1) Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida. 2) Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; 3) Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Diante do exposto, pode-se dizer que o principal objetivo da análise a priori conforme Artigue (1996) é:

determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela fundamenta-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori. (ARTIGUE, 1996, p. 202).

Assim, essa etapa visa antecipar e fundamentar as possíveis escolhas didáticas que serão adotadas no desenvolvimento da situação didática, identificando as variáveis relevantes que poderão ser manipuladas para orientar e interpretar os resultados obtidos, permitindo que a proposta didática seja pensada de forma coerente, intencional e fundamentada. Segundo Almouloud (2007):

Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (ALMOULOU, 2007, p. 176).

Desse modo, é fundamental considerar a possibilidade de transformar o conhecimento científico em um conteúdo a ser ensinado, no qual são elaboradas as hipóteses didáticas e situações-problema que serão aplicadas aos estudantes. Para isso, o utiliza-se a TSD para fundamentar essas situações, nas quais as questões formuladas são retomadas pelo pesquisador são estabelecidos os principais resultados dessa teoria.

2.1.3 Experimentação

A experimentação ocorre com o desenvolvimento das situações-problema previamente definidas na análise a priori para que então, essas possam ser analisadas na fase seguinte.

A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela”. (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p.67 68).

Essa fase, de acordo com Machado (2002), consiste na realização da Engenharia didática com um grupo de estudantes. Assim, a experimentação pressupõe:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação do instrumento de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação.

(MACHADO, 2002, p.206).

Segundo Brousseau (1996), no contrato didático é essencial que o professor não interfira no desenvolvimento dos conhecimentos, para isso, deve-se evitar explicações que facilitem o raciocínio dos estudantes, propiciando assim condições que permitam o aprendente enfrentar o problema e resolvê-lo totalmente ou de forma parcial, por meio da lógica e dos conhecimentos anteriores.

Em sua teoria, Brousseau (1998) também aborda sobre os tipos de contratos didáticos, que tem por objetivo a regulação das relações e dos objetivos implícitos do professor perante a situação didática. O contrato didático contém as responsabilidades de cada participante, as formas de avaliação e os compromissos implícitos ou não do estudante em relação ao professor e o conhecimento.

Conforme Brousseau (1998), é possível definir o contrato didático como sendo:

Uma relação que determina explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente- aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir, e então ele será de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro(parceiro). Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer, a parte do contrato que é específica ao conteúdo: O conhecimento matemático visado. (BROUSSEAU, 1998, p. 61).

Desse modo, o contrato didático caracteriza-se por um acordo não verbalizado, que regula comportamentos e define os papéis de cada um. A participação do aprendente não se restringe apenas à assimilação do conteúdo, mas se manifesta também, pela interação com o docente. Dessa forma, o professor orienta o ensino com base nas expectativas que tem sobre a participação e o desempenho dos discentes. Tal dinâmica mostra-se especialmente significativa no ensino da matemática, no qual o conhecimento visado exige mediações cuidadosas, desafios bem formulados e autonomia progressiva do discente. Assim, a análise do contrato didático possibilita ao professor reavaliar suas práticas pedagógicas e compreender determinados comportamentos e dificuldades dos estudantes, de modo que seja possível obter respostas condicionadas por esse acordo.

Na obra de Suleiman (2015), a autora apresenta os tipos de contratos didáticos na perspectiva de Brousseau, que podem surgir durante as interações, sendo esses os Contratos sem Intenção didática e os Contratos Pouco Didáticos. Os Contratos sem Intenção Didática são classificados em quatro tipos: (1) Contrato de Emissão; (2) Contrato de Comunicação; (3) Contrato de Habilidade e (4) Contrato de Produção do Saber. Temos também os Contratos Pouco Didáticos, aqueles que mostram um saber novo, também classificados em quatro tipos: (1) Contrato de Informação; (2) Contrato de Utilização dos Conhecimentos; (3) Contrato de Iniciação ou de Controle e (4) Contrato de Instrução ou de Direção de Estudos.

Dessa forma, pode-se perceber a complexidade das interações pedagógicas sob a perspectiva da TSD. O contrato didático regula as relações, geralmente implícitas entre professor e estudante no processo de ensino-aprendizagem. Portanto, é fundamental para o professor compreender e refletir sobre esses diferentes tipos de contratos. Tal prática permite o docente avaliar criticamente sua metodologia e promover mudanças que favoreçam de forma significativa a aprendizagem e a construção ativa do conhecimento matemático.

2.1.4 Análise a Posteriori

Por fim, a análise a posteriori se apoia nos dados que foram colhidos durante a experimentação e observação de cada uma das etapas e das produções dos estudantes durante esse processo.

Segundo Almouloud (2007):

A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que: (1) a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador; (2) os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori. (ALMOULOU, 2007, p.178).

Desse modo, é nesta fase que se dá o tratamento e a seleção dos dados pertinentes à análise a posteriori. Em alguns casos é necessário que haja a produção de dados complementares, tais como relatórios, questionários ou entrevistas individuais. Dessa forma, ao confrontar as análises a priori e a posteriori, que validam ou refutam as hipóteses inicialmente formuladas inicialmente pela engenharia didática, promovendo uma compreensão mais aprofundada da prática pedagógica e contribuindo para a construção de saberes profissionais mais consistentes.

2.2 Teoria das Situações Didática

A Teoria das Situações Didáticas, elaborada por (Brousseau, 1986), é uma das principais teorias da Educação Matemática, tendo por objetivo entender como o conhecimento dos estudantes é adquirido por meio de uma situação didática intencional. Tal abordagem evidencia a importância das interações entre professor e estudante, no qual o papel do professor é organizar o ambiente da sala de aula para facilitar essas interações de modo que o conhecimento seja repassado de maneira satisfatória.

Desse modo, a TSD é:

[...] um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. (TEIXEIRA; PASSOS, 2014, p.163).

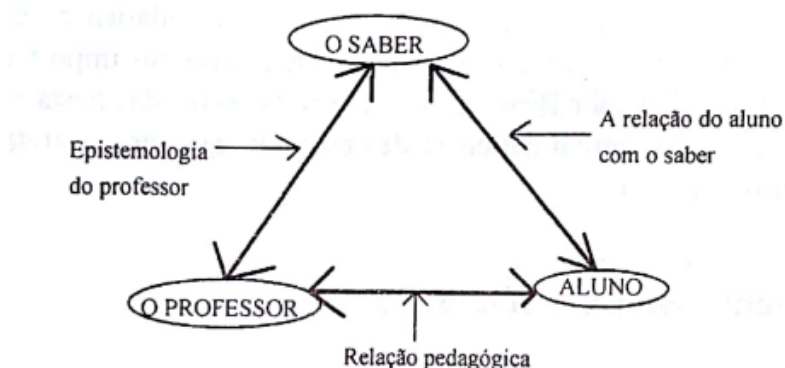
Para tanto, ao reconhecer que o ensino é um processo de construção de conhecimentos, os estudantes tornam-se sujeitos ativos durante esse processo. Dessa forma, cabe ao professor projetar atividades em que o estudante possa tomar decisões e interagir com o meio, transformando as informações adquiridas a partir da interação em conhecimento significativo.

De acordo com Brousseau (1982):

[...] Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio (compreendendo eventualmente instrumentos e objetos) e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição". (BROUSSEAU, 1982, p. 39).

Assim, a TSD propõe que o conhecimento matemático seja construído a partir de interações cuidadosamente organizadas pelo professor, em que o aprendente é desafiado a resolver problemas em um ambiente didático intencional. Essas interações, segundo Brousseau, constituem o que ele denomina de "triângulo didático", no qual a relação entre professor, educando e saber é mediada por situações que favorecem a autonomia, a tomada de decisões e a legitimação do saber pelo próprio estudante, promovendo uma aprendizagem mais ativa, reflexiva e significativa.

Figura 1 – O triângulo didático



Fonte: Almouloud (2007, p. 32).

A partir da observação dos vértices do triângulo didático na figura 1, é possível identificar que docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente. O espaço no interior do triângulo é representado pelo local onde surgem as dúvidas e dificuldades, os conflitos e as contradições inerentes ao processo de aprendizagem. Nesse momento os estudantes têm a oportunidade de confrontar as suas hipóteses, reformular as suas compreensões e evoluir cognitivamente. Dessa forma, o meio não apenas mede as interações entre os polos do triângulo, mas também impulsiona a superação dos obstáculos, sendo essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Almouloud (2007) afirma que:

Na TSD, o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão ao respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem. (ALMOULOUD, 2007, p. 35).

Em outras palavras, o *milieu* são os vários recursos com os quais o discente interage, com o objetivo de evoluir seus conhecimentos. Tais recursos podem ser situações-didáticas, simulações ou experiências e até mesmo os próprios conhecimentos dos colegas e professores.

Neste campo, emergem dois conceitos fundamentais: o de situação didática e o de situação adidática. A situação didática, portanto é o contexto organizado de forma intencional pelo professor com objetivo de repassar determinado saber ao estudante. Esse conceito envolve as interações pedagógicas estabelecidas entre professor, estudante e o saber, com o propósito de favorecer a construção do conhecimento pelo aprendente, promovendo a sua autonomia. Por outro lado, no contexto adidático, não há intervenção direta do professor, de modo a não expor

a estratégia pedagógica do discente, permitindo que este confronte diretamente o problema e busque soluções de forma autônoma a partir da sua interação com o meio.

Almouloud (2007), explicita os dois termos:

Uma situação didática se caracteriza pelo jogo de interações do aluno com os problemas colocados pelo professor. A forma de propor esses problemas ao aluno é chamada de devolução, e deve ter por objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo. (ALMOULOU, 2007, p. 34).

Para contextualizar as situações didáticas, Brousseau (2008) propõe cinco etapas, que são: devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

Na etapa de devolução os discentes aceitam participar do processo de aprendizagem. Nessa etapa, o discente torna-se responsável por parte da aprendizagem, antes condicionada somente na figura do professor. (FERREIRA *et al.*, 2016, p. 26).

Na etapa de ação, o estudante perante a situação didática interage com a aula e coloca em prática seus conhecimentos prévios sobre determinado assunto, criam procedimentos, planejam resoluções problemas e formulam hipóteses. (FERREIRA *et al.*, 2016, p. 26).

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação (ALMOULOU, 2007, p. 37).

Na formulação, há troca de conhecimentos entre os estudantes. Nessa etapa, eles procuram modificar a linguagem matemática e contextualizá-la para atender seus objetivos que antes foram planejados. (FERREIRA *et al.*, 2016, p. 26).

Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019, p. 268).

No processo de validação tudo que foi estudado é organizado e verificado pelos estudantes, com objetivo de afirmar se as informações obtidas condizem com o esperado, ou seja, é verificado o novo conhecimento que foi construído. (FERREIRA *et al.*, 2016, p. 26). Nessa perspectiva:

Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade (BROUSSEAU, 1976, p. 110).

Por fim, na institucionalização o professor e alunos validam o conhecimento. Nessa etapa, as intenções do professor perante a situação didática é revelada, promovendo a formalização e generalização do conhecimento. (FERREIRA *et al.*, 2016, p. 26).

O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno (TEIXEIRA; PASSOS, 2014, p. 166).

Conforme afirma Brousseau (2008), existe uma correlação entre cada etapa das situações durante o processo de ensino e aprendizagem, estas não se manifestam apenas como processos isolados, mas sim um movimento contínuo que permite o aprendente atingir diferentes níveis de aprendizagem durante a situação didática.

Para Monteiro (2023), na TSD, o papel do professor não é o de fornecer diretamente as soluções para os problemas propostos, mas sim estruturar situações que possibilitem a participação ativa do discente na construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, o estudante é incentivado a mobilizar saberes prévios, interagir com o meio e com os colegas, o que favorece o desenvolvimento de novos aprendizados.

2.3 Sequências e Matrizes na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é um documento de caráter normativo, que estabelece o conjunto de saberes essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Atualmente, o objetivo do professor, é promover uma aprendizagem conectada com a realidade dos estudantes. Para isso, são propostas 10 competências gerais, definidas como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho", (BRASIL, 2018, p. 8). Desse modo, espera-se que os educandos consigam desenvolver cada uma das competências propostas durante todas as etapas de ensino.

Portanto, é imprescindível que o ensino tenha por objetivo afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade. Nesse sentido, os conhecimentos e saberes obtidos no ambiente escolar devem estar interligados á realidade da sociedade e dos estudantes, para que estes compreendam seu papel de cidadãos. Por meio da educação, é possível contribuir para a construção de uma sociedade mais justa, consciente e comprometida com a transformação do mundo em que vivemos.

A Álgebra possui um importante papel nos currículos do Ensino Fundamental. Nesta etapa, os discentes são incentivados a compreender o papel das variáveis em expressões matemáticas, identificar regularidades em sequências numéricas, generalizar propriedades e

explorar relações entre grandezas. Desse modo, o desenvolvimento do pensamento algébrico é favorecido, permitindo assim uma argumentação, abstração e a resolução de problemas, consolidando a base necessária para os estudos matemáticos mais complexos nos anos subsequentes.

Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2018, p. 270).

De acordo com a BNCC, as competências estabelecidas para o Ensino Médio desempenham um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem de matemática, estas não têm uma ordem preestabelecida, mas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. Um dos principais desafios nesse processo é demonstrar que a Matemática não se limita a fórmulas e procedimentos mecânicos, mas está intrinsecamente ligada à cultura, à história e à maneira como compreendemos e transformamos a realidade. Desse modo, ao verificar as competências específicas da área de matemática, temos a número 5, que propõe:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Dessa maneira, é possível compreender o papel das sequências e matrizes no desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo da educação básica. O estudo desses assuntos permite que os estudantes identifiquem padrões, formulem conjecturas e compreendam o comportamento de determinadas regularidades matemáticas. Tais habilidades se tornam essenciais para o avanço em conteúdos mais complexos. Por conseguinte, a matriz repunidade, possui características e padrões que a tornam um objeto de estudo rico para o ensino de Álgebra, permitindo trabalhar conceitos estruturais de forma, investigativa e atrativa. Seu uso pode promover um ensino mais dinâmico, centrado na construção do conhecimento e no desenvolvimento do raciocínio matemático. Desse modo, as sequências e matrizes assumem um papel central como elo entre a Matemática escolar e a construção de uma visão crítica, investigativa e significativa desse campo do conhecimento.

Diante disso, abaixo temos as habilidades e competências que mais se assemelham às características apresentadas neste trabalho, estando organizadas em quadros para facilitar a visualização de como estas aparecem nos currículos do ensino básico.

Quadro 1 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Fundamental

<i>UNIDADES TEMÁTICAS</i>	<i>OBJETOS DE CONHECIMENTO</i>	<i>HABILIDADES</i>
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Números	Números inteiros: usos, história, ordenação associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros
Álgebra	[...] identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura
Álgebra	[...] identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA15) [...] expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Álgebra	Potenciação e radiciação	(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros, [...]
Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica,[...]	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, [...]
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva, [...].
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva, [...].
Álgebra	Resolução de equações polinomiais do 2º grau, [...]	(EF09MA09) [...] resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 2 – Habilidades da BNCC – Matemática - Ensino Médio

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas [...].
COMPETÊNCIA NÚMERO 4	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau [...].
COMPETÊNCIA NÚMERO 4	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau [...].
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas, [...], reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas, [...], reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
COMPETÊNCIA NÚMERO 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Fonte: (BRASIL, 2018).

Quadro 4 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio

COMPETÊNCIA NÚMERO 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
COMPETÊNCIA NÚMERO 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
COMPETÊNCIA NÚMERO 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Ao analisar a BNCC, é possível perceber que o assunto sobre matrizes aparece de forma implícita, integrada a equações lineares e técnicas algébricas, conforme a habilidade (EM13MAT301): "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais"(BRASIL, 2018, p. 536). Percebe-se, portanto, a necessidade de integrar tal assunto ao ensino de maneira contextualizada e significativa. Tal abordagem, facilita a construção de um conhecimento mais significativo, aproximando o conteúdo da realidade dos estudantes e estimulando o desenvolvimento de competências como a modelagem, a generalização e a análise crítica de situações diversas.

3 ANÁLISES PRELIMINARES

Neste capítulo, inicia-se a primeira fase prevista na metodologia de pesquisa, que consiste nas análises preliminares. Para a presente etapa, foram consideradas três dimensões fundamentais: epistemológica, cognitiva e didática. No presente estudo foram consideradas às dimensões epistemológicas e didáticas.

Nesta seção, serão apresentados elementos introdutórios sobre sequências e matrizes, bem como propriedades e características fundamentais da matriz repunidade. Apresenta-se também a análise da abordagem do conceito de matrizes em livros didáticos utilizados na educação básica.

O objetivo central desta etapa é reunir subsídios teóricos e práticos que sustentem a elaboração do experimento durante a fase de análise *a priori*, respeitando as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas, conforme os pressupostos da Engenharia Didática.

3.1 Sequência Repunidade

A matriz repunidade é uma construção algébrica estruturada a partir de uma recorrência linear de segunda ordem associada a chamada sequência repunidade, conforme abordamos na Seção (3.3).

Os números repunidades são caracterizados pela justaposição ou concatenação do dígito ou algarismo 1, o conjunto dos números repunidades constitui uma classe particular dos números naturais e também no campo dos inteiros. Apesar de sua estrutura aparentemente simples, esses números apresentam propriedades matemáticas relevantes e com potencial pedagógico. O termo repunidade foi utilizado para designar os números naturais compostos exclusivamente pelo dígito 1 em sua forma decimal, citado pela primeira vez nas obras de Beiler (1966) e posteriormente abordado por diversos autores, dos quais podemos destacar Carvalho e Costa (2015), Costa e Santos (2022), Costa, Santos e Bezerra (2023), entre outros.

Referente à sequência repunidade, como mencionado anteriormente, esta é definida por uma recorrência linear de segunda ordem, em que os termos iniciais são denotados por $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$.

Proposição 1. (COSTA et al., 2024, p.1). A sequência repunidade é definida pela seguinte relação de recorrência:

$$r_n = 11r_{n-1} - 10r_{n-2}, \quad n \geq 2$$

sendo r_n o n -ésimo termo da sequência, com condições iniciais $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$.

A recorrência gera a seguinte sucessão de elementos:

$$\{0, 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \dots\}, \quad (3.1)$$

em Sloane (2025).

Proposição 2. (COSTA et al., 2024, p.3). A sequência da repunidade estendida para os inteiros é definida para todo $n \in \mathbb{Z}$ pela relação de recorrência:

$$r_{-(n+1)} = \frac{11}{10}r_{-n} - \frac{1}{10}r_{-(n-1)} \quad \text{com } r_{-1} = -0,1 \text{ e } r_{-2} = -0,11; \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

.

É essencial conhecer a sequência repunidade para que possamos compreender os padrões numéricos e comportamentos da matriz repunidade, associada à sequência (3.1). Mais estudos sobre diversos tipos de sequências e os números repunidade podem ser encontrados em algumas obras, das quais podemos citar: Yates (1992), Kamada (1999–2023), Jaroma (2007), Carvalho e Costa (2015), Catarino, Campos e Vasco (2016), Vieira e Alves (2019), Costa e Santos (2022), Costa e Santos (2022), Costa, Santos e Bezerra (2023), Costa et al. (2024) entre outras.

3.2 Ensino de Matrizes

O estudo das matrizes na Álgebra do Ensino Médio desempenha um papel essencial na formação do pensamento lógico, na organização de dados, na observação de padrões e nas experimentações. Além de sua importância teórica, a BNCC propõe que tal conteúdo, deve ser orientado por situações-problema que favoreçam a compreensão conceitual e a aplicação em contextos diversos, inclusive com o uso de tecnologias, dessa forma, é possível integrar tal assunto ao ensino de maneira contextualizada e significativa.

A seguir, abordaremos os principais conceitos e propriedades fundamentais sobre matrizes, para situar o leitor. Vale ressaltar que todas as definições desta subseção foram retiradas do livro de Álgebra Linear de Boldrini, Costa e Witter (2004), bibliografia essencial do curso de Introdução à Álgebra Linear da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Dessa forma, o assunto será abordado da maneira que é retratado no livro.

Definição 1. (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.1). Chama-se de matriz uma tabela, ordenada por números dispostos em linhas e colunas.

A matriz pode ser utilizada para representar informações, para resolver sistemas de equações, bem como modelar transformações lineares e criar algoritmos computacionais. Por exemplo, ao apresentarmos os dados referentes as notas de alguns estudantes, nas disciplinas de português, matemática e história, podemos representá-los na matriz:

Notas dos alunos por disciplina			
	Português	Matemática	História
Aluno 1	7	6,5	8
Aluno 2	9	10	9,6
Aluno 3	5	6,3	7,5

Fonte: Elaborado pelo Autor

Dessa maneira, ao transformar esses dados em uma matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 6,5 & 8 \\ 9 & 10 & 9,6 \\ 5 & 6,3 & 7,5 \end{bmatrix}$$

Ao se tratar de um problema que envolva uma maior quantidade de variáveis, essa estrutura ordenada facilita a visualização dos dados, bem como as operações que serão abordadas ao decorrer dessa seção.

3.2.1 Elementos de uma matriz:

Como vimos, a matriz é ordenada por linhas e colunas, em que cada "dado" da matriz, é chamado de elemento. Esses elementos podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes, conforme Boldrini, Costa e Witter (2004). Assim, definimos a matriz $m \times n$, sendo m o número de linhas e n o número de colunas, composta por elementos a_{ij} , em que i representa o número da linha e j o número da coluna que localiza o valor. Dessa forma, representamos a matriz de m linhas e n colunas:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Alguns exemplos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 5 & 6x \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1}.$$

Existem também outras notações para matriz, como os parênteses ou duas barras, sendo este último o menos utilizado, neste trabalho utilizaremos a representação por colchetes.

Para localizar um elemento na matriz, dizemos a linha e a coluna que ele está. Como exemplo, tendo:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & -25 \end{bmatrix}.$$

O elemento que está na segunda linha e na terceira coluna é o -25 , isto é, $a_{23} = -25$, da mesma forma, o elemento da primeira linha e primeira coluna, $a_{11} = 2$, de modo semelhante, conseguimos representar todos os elementos dessa matriz: $a_{11} = 2$; $a_{12} = 7$; $a_{13} = 9$; $a_{21} = 5$, $a_{22} = 6$ e $a_{23} = -25$.

Definição 2. (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.3). Dizemos que duas matrizes A e B , $A_{m \times n} = a_{ij}$ e $B_{r \times s} = b_{ij}$ são iguais, se estas possuem o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $(a_{ij} = b_{ij})$

Exemplo 1. Veja que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \sin(0) \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 9 & \cos(0) & 0 \\ 2^1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = B$$

são iguais.

Conforme Boldrini, Costa e Witter (2004), a diagonal principal de uma matriz é o conjunto dos elementos cujos índices de linha e de coluna são iguais. E, a matriz identidade é uma matriz cujo os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é, $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$:

Exemplo 2. Temos

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são respectivamente as matrizes identidade de ordem 3 e 2.

3.2.2 Operações com Matrizes

Ao trabalharmos com matrizes, naturalmente surge a necessidade de realizarmos algumas operações, como a adição, multiplicação, multiplicação por escalar e propriedades derivadas.

A adição de duas matrizes de ordem $A_{m \times n} = a_{ij} = B_{m \times n} = b_{ij}$, é uma matriz $m \times n$, denotada por $A + B$, cujos elementos são soma dos elementos correspondentes de A e B , ou seja, a soma os elementos é realizada termo a termo, isto é,

$$A + B = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemplo 3. Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, então :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

de forma que $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ é a soma de $A+B$.

É importante salientar, que pela forma em que a adição de matrizes foi definida, ela tem as mesmas propriedades da adição de números reais.

Algumas propriedades elementares de adição de matrizes:

- i) **Comutatividade da adição:** $A + B = B + A$;
- ii) **Associatividade da adição:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- iii) **Elemento neutro da adição:** $A + 0 = A$.

A multiplicação por escalar; dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número real, então definimos uma nova matriz:

$$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

Exemplo 4. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ e $k = 2$, então:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 10 & -18 \end{bmatrix}$$

de forma que $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 10 & -18 \end{bmatrix}$, é o resultado de $k \cdot A$.

Dadas as matrizes, A, B de mesma ordem $m \times n$ e os números k, k_1 e k_2 , temos as seguintes propriedades:

- i) $k(A + B) = kA + kB$;
- ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$;
- iii) $0 \cdot A = 0$, isto é, se multiplicarmos 0 por qualquer matriz, obtemos a matriz nula;
- iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.

A matriz transposta de uma matriz $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$, é denotada por $A^T = \{b_{ij}\}_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji}$, na qual A^T é dita transposta de A .

Exemplo 5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, a transposta de A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

em que A^T , é a transposta de A .

Matriz nula é aquela cujos elementos são iguais a 0, isto é $a_{ij} = 0$.

Exemplo 6. Dadas as matrizes $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, perceba que todos os elementos de ambas as matrizes são iguais a zero.

De acordo com (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.10), a multiplicação de matrizes é realizada multiplicando linha por coluna. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos $A \times B = [c_{uv}]_{m \times p}$, no qual:

$$[c_{uv}]_{m \times p} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \cdots + a_{un} b_{nv}.$$

Observações:

- i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{l \times p}$, se o número de linhas da primeira for igual o número de colunas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz resultado $C = A \times B$ terá ordem $m \times p$.
- ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Exemplo 7. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, então:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 9 + 1 \cdot 7 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 8 & 0 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 0 + 7 \cdot 1 & 5 \cdot 5 + 7 \cdot 8 & 5 \cdot 9 + 7 \cdot 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 25 \\ 3 & 24 & 21 \\ 7 & 81 & 94 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

de modo que o produto $A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 3}$ resulta em $C_{3 \times 3}$ uma matriz 3×3 .

Exemplo 8. Dados $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ e $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, de forma análoga:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 7 \cdot 9 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 65 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

em que o produto $A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 2}$ resulta em $C_{2 \times 2}$ uma matriz 2×2 .

Observação:

- i) Em geral $A \times B \neq B \times A$, isto é, em geral a propriedade comutativa não é válida para multiplicação de matrizes.

Algumas Propriedades elementares da multiplicação de matrizes:

- i) **Elemento neutro (matriz identidade):** $AI = IA = A$;
- ii) **Distributiva:** $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;
- iii) **Associativa:** $A(BC) = (AB)C$;
- iv) **Multiplicação pela Transposta:** $(AB)^T = B^T A^T$;
- v) **Multiplicação pela matriz nula:** $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$.

Exemplo 9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 & -3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Fazendo agora $B \times A$:

$$\begin{aligned}
 B \times A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Desse modo, conseguimos comprovar que a comutativa das matrizes nem sempre é válida.

No caso da matriz repunidade, temos uma situação em que essa comutação é válida, veremos na seção seguinte.

3.3 Matriz Repunidade

A Matriz Repunidade, objeto de estudo deste trabalho, foi abordado pela primeira vez por Santos e Costa (2024) e posteriormente por (COSTA *et al.*, 2024), estes estudos apresentam à representação matricial da sequência repunidade. O primeiro trabalho desenvolve essa proposta, com foco nas propriedades estruturais dessa matriz e em sua aplicação no Ensino de Álgebra e, o segundo trabalho, trás um aprofundamento do assunto abordado no primeiro.

Inicialmente apresentaremos as propriedades e características da matriz repunidade propostas por Santos e Costa (2024), em seguida o aprofundamento realizado por Costa *et al.* (2024).

De acordo com Kalman e Mena (2003), para um número natural n , $\{L_n\}$ é a sequência de Lucas definida pela relação de recorrência de segunda ordem, em que p e q são os números inteiros que fixos que satisfazem:

$$L_{n+1} = pL_n + qL_{n-1}, n \geq 1. \quad (3.2)$$

Daí, obtêm-se a matriz companheira associada à sequência linear de ordem 2, dada pela Equação (3.2), é da forma:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

fazendo $L_n = r_n$ e admitindo $p = 11, q = -10, R_0 = 0$ e $R_1 = 1$, na Equação (3.2), obtemos a recorrência:

$$r_{n+1} = 11r_n - 10r_{n-1}. \quad (3.3)$$

Assim, quando se tem a sequência repunidade, obtemos a seguinte matriz:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ao fazermos $\mathcal{R}^2$, o elemento a_{11} da matriz é $a_{11} = 111$, isto é, o termo sucessor da recorrência.

Exemplo 10. Veja que $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$, de fato determina o termo sucessor de r_n :

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 & -110 \\ 11 & -10 \end{bmatrix}$$

Os autores mostram que a potência n da matriz $\mathcal{R}$, a posição a_{11} determina o termo R_{n+1} da sequência repunidade.

Proposição 3. (SANTOS; COSTA, 2024, p.6). Dada a matriz (3.4), para todo natural $n \geq 1$, tem-se:

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Prova: Aplicando o Princípio de Indução sobre n . Para $n = 1$ temos que :

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1+1} & -10r_1 \\ r_1 & -10r_{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix},$$

o que atesta a validade para $n = 1$.

Supondo que a proposição é válida para algum $n \geq 1$, vamos mostrar a validade para todo $n + 1$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} - 10r_n & -10r_{n+1} \\ 11r_n - 10r_{n-1} & -10r_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10r_{n+1} \\ r_{n+1} & -10r_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para $n + 1$. ■

Dessa forma, aplicando o Princípio de Indução, os autores mostram que essa é a matriz geradora dos termos da sequência.

De acordo com Santos e Costa (2024), é possível fazer a permutação de linhas e colunas e obter novas matrizes com propriedades análogas a anterior.

Considere $\tilde{\mathcal{R}}$ obtida pela permutação das linhas e colunas da matriz $\mathcal{R}$.

Proposição 4. (SANTOS; COSTA, 2024, p.6) Para todo $n \geq 1$, seja $\tilde{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$, então:

$$\tilde{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -10r_{n-1} & r_n \\ -10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix}$$

Para realizar a demonstração, basta aplicar a indução em n , como na Proposição 3.

3.4 Algumas características e propriedades da matriz repunidade de segunda ordem:

Proposição 5. (SANTOS; COSTA, 2024, p.7). Para quaisquer m, n naturais, temos que:

$$\mathcal{R}_{m+n} = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_{n+1} - 10 \mathcal{R}_{m-1} \mathcal{R}_n.$$

Proposição 6. (SANTOS; COSTA, 2024, p.7). Para m, n naturais com $m \geq 1$, tem-se:

$$\mathcal{R}_{m+n}^2 - \mathcal{R}_{m+n+1} \mathcal{R}_{m+n-1} = -10^{m+n+1}.$$

Corolário 7. (SANTOS; COSTA, 2024, p.8). Para todo $m \geq 1$, tem-se:

$$\mathcal{R}_m^2 - \mathcal{R}_{m+1} \mathcal{R}_{m-1} = 10^{m+1}.$$

Desse modo, no Corolário 7, temos a *Identidade de Cassini*. A demonstração pode ser verificada ao fazer $n = 0$ na Proposição 5.

Sobre a sequência repunidade em linguagem matricial temos que:

Proposição 8. (SANTOS; COSTA, 2024, p.8). Para todo n natural, tem-se $R^{n+2} = 11R^{n+1} - 10R^n$.

Em conformidade com Santos e Costa (2024), a sequência repunidade na forma matricial admite a Fórmula de Binet das repunidades, obtida pela diagonalização de matrizes.

Proposição 9. (SANTOS; COSTA, 2024, p.8). Para todo $n \geq 0$, tem-se $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

3.4.1 Determinantes de uma Matriz

O determinante de uma matriz é uma função que associa a cada matriz quadrada um escalar (número real). O determinante de uma matriz A é denotado por $\det A = a$ ou ainda por $|A|$.

3.4.2 Expansão de Laplace:

De modo geral, é possível calcular o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$, por meio do processo conhecido como expansão de Laplace.

Lema 10. (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.70). *Seja M_n uma matriz de ordem n e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tem-se:*

$$\det M_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det M_{n-1}^{ij}. \quad (3.5)$$

Observações:

- i) Para matriz de ordem 1, que possui uma linha e uma coluna, o determinante é o próprio elemento, isto é,

$$\det[a] = a$$

- ii) Para matriz de ordem 2, basta fazer a multiplicação dos elementos da diagonal principal e subtraí-los do resultado a multiplicação dos elementos da diagonal secundária, ou seja,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- iii) Para matriz de ordem 3, temos que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg)$$

Lema 11. (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.69). *Dadas as matrizes A e B de ordem n , tem-se que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$*

Exemplo 11. *Dada a matriz*

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Temos que} \quad \begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

Dessa forma, fazendo uso do Lema 11, temos $\begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = 10^n$.

O polinômio característico de uma determinada matriz A de ordem n é denotado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, em que I é a matriz identidade de ordem n . Se existirem raízes do polinômio, estas devem satisfazer a relação $AX = \lambda X$, sendo X um vetor não nulo. Neste caso, o escalar λ é denominado um autovalor de $X \neq 0$ de autovetor. Mais detalhes podem ser encontrados em Boldrini, Costa e Witter (2004).

Exemplo 12. (SANTOS; COSTA, 2024, p.4). Os autovalores associados a matriz $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10$, e os autovetores são $v_1(1, 1)$ e $v_2 = (10, 1)$. De fato:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 10.$$

Fatorando a expressão:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 11\lambda + 10 &= \lambda^2 - \lambda - 10\lambda + 10 \\ \lambda(\lambda - 1) - 10(\lambda - 1) &= (\lambda - 1) \times (\lambda - 10) \end{aligned}$$

Perceba que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10$, são solução da equação, portanto são os autovalores associados ao polinômio característico da matriz.

Para determinar os autovetores associados aos autovalores, considerando $\lambda_1 = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 11x & -10y \\ x & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 11x - 10y = x \\ x + 0 = y \end{cases} &= x = y, \text{ se } x = y, \Rightarrow v_1 = (1, 1) \end{aligned}$$

Daí obtêm-se $v_1(y, y)$, $= y(1, 1)$, fazendo $y = 1$ tem-se $v_1 = (1, 1)$. De maneira análoga, para $\lambda = 10$, têm-se:-:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 10 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 11x & -10y \\ x & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10x \\ 10y \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 11x - 10y = 10x \\ x + 0 = 10y \end{cases} &= x = 10y \end{aligned}$$

Substituindo em $11x - 10y = 10x$:

$$\Rightarrow 11 \cdot 10y - 10 = 10x = 100y = 10x \Rightarrow x = 10$$

Substituindo o valor de x em $x = 10y$:

$$10 = 10y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow v_2 = (10, 1)$$

Dessa forma comprovamos que os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10$, e os autovetores são $v_1(1, 1)$ e $v_2 = (10, 1)$.

Estes são os principais resultados e características sobre a matriz repunidade. Para demais complementações, o leitor pode conferir Santos e Costa (2024). Dando continuidade, abordaremos agora as contribuições de Costa *et al.* (2024) sobre o assunto.

Dada uma matriz quadrada A , esta é inversível quando existe outra matriz denotada por A^{-1} , a multiplicação das duas matrizes resulta em uma matriz identidade, isto é, $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$, sendo I a matriz identidade de ordem n

Exemplo 13. (BOLDRINI; COSTA; WITTER, 2004, p.76). Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sabemos que

a inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, desde que o determinante seja diferente de zero, isto é, $\det A \neq 0$.

Exemplo 14. (COSTA *et al.*, 2024, p.4). Especificamente para a matriz $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$, sabendo que $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 11$, e que o $\det \mathcal{R} = 10$, a matriz de inversa de R , como no Exemplo (13) é:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathcal{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10r_0 & r_1 \\ 10r_1 & r_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Elevando essa matriz ao quadrado, temos:

$$\mathcal{R}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \\ -\frac{11}{100} & \frac{111}{100} \end{bmatrix} = \frac{1}{10^2} \begin{bmatrix} -10 & 110 \\ 11 & -111 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10r_1 & 110 \\ -11 & 111 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $\mathcal{R}^{-1}$ é dita a matriz repunidade inversa.

De acordo com os autores, fazendo uso da Proposição 3, como no Exemplo 14, obtêm-se o seguinte resultado:

Proposição 12. (COSTA *et al.*, 2024, 3) Dada a matriz $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$. Para todo $n \geq 1$, têm-se:

$$\mathcal{R}^{-n} = \frac{1}{10^n} \begin{bmatrix} -10r_{n-1} & -r_n \\ 10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix}$$

Os autores fazem referência a Costa *et al.* (2024), neste artigo, os pesquisadores apresentaram uma extensão da sequência repunidade com índice negativo. Costa *et al.* (2024) afirmam que dada relação de recorrência (3.3) dos números repunidades coincidem com a sequência de matrizes para $\{\mathcal{R}^n\}_{n \geq 0}$.

Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
11 \cdot \mathcal{R}^n - 10 \cdot \mathcal{R}^{n-1} &= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{n+1} & -r_n 10 \\ r_n & -r_{n-1} 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n & -r_{n-1} 10 \\ r_{n-1} & -r_{n-2} 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} & -110r_n \\ 11r_n & -110r_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10r_n & 100r_{n-1} \\ -10r_{n-1} & 100r_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} + 10r_n & -110r_n + 100r_{n-1} \\ 11r_n - 10r_{n-1} & -110r_{n-1} + 100r_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10(11r_n - 10r_{n-1}) \\ r_{n+1} & -10(r_{n-1} - 10r_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10r_{n+1} \\ r_{n+1} & -10r_n \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Proposição 13. (COSTA et al., 2024, p.4). Para todo natural $n \geq 1$, a matriz repunidade $\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}$, satisfaz a seguinte recorrência:

$$\mathcal{R}^{n+1} = 11(I_2) \cdot \mathcal{R}^n - (10I_2) \cdot \mathcal{R}^{n-1} \quad (3.6)$$

Proposição 14. (COSTA et al., 2024, p.4). Para todo natural $n \geq 1$, a matriz repunidade $\mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{10^n} \begin{bmatrix} -10r_{n-1} & -r_n \\ 10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix}$, satisfaz a seguinte recorrência:

$$\mathcal{R}^{-(n+1)} = \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \mathcal{R}^{-n} - \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \mathcal{R}^{-(n+1)}. \quad (3.7)$$

A demonstração dessa proposição pode ser conferida em Costa et al. (2024).

A matriz repunidade $\{\mathcal{R}^n\}_{n \geq 0}$, apresenta a clássica Fórmula de Binet.

Proposição 15. (COSTA et al., 2024, p.6). Para todo $n \geq 1$ temos:

$$R^n = \begin{bmatrix} \frac{10^{n+1} - 1}{9} & -10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) \\ \frac{10^n - 1}{9} & -10 \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) \end{bmatrix}.$$

De modo análogo, a matriz $\{\mathcal{R}^n\}_{n \leq 0}$, também apresenta a clássica Fórmula de Binet, uma extensão da sequência repunidade com índice negativo.

Proposição 16. (COSTA et al., 2024, p.6). Para todo $n \geq 1$ temos:

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} -10 \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9 \cdot 10^{n-1}} \right) & -\frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} \\ -10 \left(\frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} \right) & -\frac{10^{n+1} - 1}{9 \cdot 10^{n+1}} \end{bmatrix}.$$

A demonstração dessa proposição pode ser conferida em Costa et al. (2024).

Como vimos, em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa. O seguinte resultado pode ser encontrado em Santos e Costa (2024):

Lema 17. (COSTA et al., 2024, p.6). Para quaisquer m e n naturais, temos:

$$\mathcal{R}_m \mathcal{R}_{n+1} - 10 \mathcal{R}_{m-1} \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{m+n}.$$

Proposição 18. (COSTA et al., 2024, p.7). Para quaisquer naturais m e n , temos que:

$$\mathcal{R}^m \cdot \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^n \cdot \mathcal{R}^m.$$

Prova:

Pela proposição (3.2), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^m \cdot \mathcal{R}^n &= \begin{bmatrix} r_{m+1} & -10r_m \\ r_m & -10r_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{m+1} \cdot r_{n+1} + (-10r_m) \cdot r_n & r_{m+1} \cdot (-10r_n) + (-10r_m) \cdot (-10r_{n-1}) \\ r_m \cdot r_{n+1} + (-10r_{m-1}) \cdot r_n & r_m \cdot (-10r_n) + (-10r_{m-1}) \cdot (-10r_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{m+1} \cdot r_{n+1} - 10r_m \cdot r_n & -10(r_{m+1} \cdot r_n - r_m \cdot r_{n-1}) \\ r_m \cdot r_{n+1} - 10r_{m-1} \cdot r_n & -10(r_m \cdot r_n + r_{m-1} \cdot r_{n-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso do Lema 17, temos:

$$\mathcal{R}^m \cdot \mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} r_{(m+1)+n} & -10r_{(m+1)+(n-1)} \\ r_{m+n} & -10r_{m+(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Usando as propriedades associativa e comutativa nos inteiros, na Equação (3.8), obtemos que

$$\mathcal{R}^m \cdot \mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} r_{(n+1)+m} & -10r_{(n+1)+(m-1)} \\ r_{n+m} & -10r_{n+(m-1)} \end{bmatrix} = \mathcal{R}^n \cdot \mathcal{R}^m.$$

Assim, os autores mostram, que para esse caso, a comutativa é válida. ■

Estes são alguns dos resultados principais que Costa *et al.* (2024) apresentam em sua obra, temos ainda as identidades clássicas de Catalan, d’Ocagne, Cassini e Tagiuri-Vajda, estas podem ser encontradas no artigo da bibliografia.

Dessa forma, para finalizar esta seção, mostraremos a seguir os autovalores e autovetores, bem como o polinômio característico da matriz $\mathcal{R}^n$.

Proposição 19. *De acordo com Costa et al. (2024), o polinômio característico associado a matriz $\mathcal{R}^n$ é $p(\lambda) = \lambda^2 - (10^n + 1)\lambda + 10^n$, os autovalores associados a matriz, são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10^n$.*

Proposição 20. *(COSTA et al., 2024, p.11). Para todo $n \geq 1$, os autovalores associados à matriz, $\mathcal{R}^n$, são $v_1 = (x, x)$ e $v_2 = (10x, x)$. O polinômio característico da matriz $\mathcal{R}^{-n}$ é feito de forma análoga, e pode ser encontrado no artigo dos autores.*

Assim, finaliza-se essa seção com os principais resultados e características da matriz repunidade. Vale ressaltar, que serão selecionados elementos específicos para conduzir um processo investigativo do objeto de estudo. Para isso, serão elaboradas de situações-didáticas fundamentadas na metodologia de pesquisa e ensino, com o objetivo de incentivar o desenvolvimento do pensamento investigativo dos estudantes e a construção de saberes matemáticos.

3.5 Análise dos livros Didáticos

Esta seção apresenta uma análise do tratamento dado ao conteúdo de matrizes nos livros didáticos de matemática destinados para o Ensino Médio, distribuídos gratuitamente pela rede pública por meio do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Os materiais analisados fazem parte da edição do PNLD de 2021 e abrangem três coleções: **Matemática Interligada**, **Matemática em Contexto** e **Prisma Matemática**, com foco na introdução, nas operações e nas aplicações do conceito de matrizes.

Conforme demonstra Andrade (2020), na obra "**Matemática Interligada**", o conteúdo de matrizes é introduzido de forma direta e objetiva, com ênfase na compreensão da estrutura matricial como um arranjo bidimensional de números. Os conceitos de ordem da matriz, elementos a_{ij} , matrizes linha, coluna, quadrada e nula, estes, são apresentados de forma clara, complementada com exemplos e atividades, com objetivo de facilitar a fixação dos conceitos abordados. Além disso, a referida coleção, trata também das operações fundamentais, como

adição, subtração e multiplicação de matrizes por escalar, destacando suas propriedades e regras. No entanto, a multiplicação entre matrizes é apresentada com mais cautela, sendo explorada a partir de situações contextualizadas e exercícios graduais.

Já a coleção **Matemática em Contexto**, de Dante e Viana (2020), destaca-se por uma abordagem mais aplicada do conteúdo, iniciando com exemplos do cotidiano que envolvem organização de dados em tabelas e planilhas, o que favorece uma compreensão contextualizada das matrizes. Os autores apresentam os conceitos iniciais de forma acessível e simples, com uso de imagens para ilustrar os arranjos numéricos. A coleção em questão destaca a utilidade das matrizes para resolução de problemas práticos, tais como análise de dados, programação de horários e relações entre grandezas. Apresentam-se também as operações entre matrizes, com foco na compreensão do seu significado, mais do que no uso técnico. Nessa perspectiva, esta abordagem é compatível com os objetivos propostos pela BNCC, que estabelece conexões entre conteúdos matemáticos e contextos reais.

Na obra **Prisma Matemática**, de Bonjorno, Giovanni-Júnior e Sousa (2020), o estudo de matrizes é conduzido com maior rigor formal, iniciando-se com a definição de matriz como função de um par ordenado de números naturais. A presente coleção explora detalhadamente os tipos de matrizes e suas classificações, introduzindo posteriormente as operações entre matrizes com exemplos variados e exercícios resolvidos. A multiplicação entre matrizes é apresentada com o apoio de exemplos geométricos e aplicações algébricas, incluindo a discussão sobre matriz identidade e matriz inversa (em casos específicos). Além disso, os autores apresentam também a relação entre as matrizes e sistemas lineares, mostrando como a representação matricial pode facilitar a resolução desses sistemas. Dessa forma, tal abordagem favorece a construção de uma base sólida para conteúdos futuros, como determinantes e espaços vetoriais.

De modo geral, as três coleções analisadas tratam de matrizes em diferentes níveis de formalismo e contextualização. Enquanto a coleção **Prisma** investe numa abordagem mais estruturada e formal, **Matemática em Contexto** valoriza aplicações práticas, por sua vez, **Matemática Interligada** propõe uma introdução gradual e focada em operações básicas. Tais diversificações permitem que os professores escolham abordagens apropriadas ao perfil de suas turmas, mantendo consonância com as diretrizes da BNCC ao articular conhecimento matemático com competências gerais e habilidades específicas do Ensino Médio.

4 ANÁLISE A PRIORI E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Neste capítulo, são apresentadas as situações didáticas desenvolvidas com suporte na Teoria das Situações Didáticas (TSD), voltadas para o ensino da matriz repunidade. A proposta tem como objetivo promover a compreensão e a construção do conceito em questão pelos discentes, por meio de atividades que abrangem as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, conforme delineado pela TSD.

Retomando os conteúdos matemáticos desenvolvidos no campo epistêmico da matemática, parte-se do estudo das operações com matrizes, que já foram abordadas anteriormente. Assim, os discentes serão induzidos a mobilizar seus conhecimentos ao interagir com os problemas que serão propostos.

4.1 Construção das Situações Didáticas

Neste tópico, serão descritas as situações didáticas e os objetivos esperados nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD durante a resolução de situações-problema envolvendo a matriz repunidade.

Situação Didática 1

Como vimos,

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz geradora dos termos da sequência repunidade, e ao comutar as linhas e colunas é possível determinar novas matrizes com propriedades análogas a anterior. Dessa forma, faça a comutação das linhas e colunas (dos elementos), mantendo a forma de uma matriz de ordem 2, e calcule as potências da matriz, como exemplo para $n = 2$ e $n = 3$.

Ação: É necessário que o conteúdo esteja bem fundamentado no conhecimento referente recorrências, às matrizes e operações entre matrizes, dessa forma, conhecendo suas fórmulas de recorrência e após a realização da aula referente às matrizes, a apresentação da matriz repunidade será definida a partir da estruturação da recorrência

$$r_{n+1} = 11r_n - 10r_{n-1},$$

com os valores iniciais $r_0 = 0$ e $r_1 = 1$. Essa parte é fundamental para que os estudantes

compreendam como a matriz repunidade surge, sendo assim, torna-se necessário que a aula referente a recorrências preceda essa aula sobre matrizes. Nessa perspectiva, conhecendo as recorrências e como a matriz repunidade é definida, apresentar algumas características e propriedades, e deixar que os discentes operem livremente com a matriz, para que assim eles usem os seus conhecimentos prévios e consigam resolver o problema proposto.

Formulação: Depois de encontrarem as matrizes resultantes do cálculo das potências, espera-se que os estudantes percebam as regularidades que surgem nos elementos das matrizes, especialmente na diagonal principal e nos elementos fora dela. Como por exemplo, permutando os elementos da matriz geradora e fazendo o quadrado da matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 & -10 \\ 11 & -109 \end{bmatrix}$$

Pode-se perceber que o elemento $a_{21} = 11$, ou seja, 11 corresponde ao elemento $r_1 = 11$ da sequência repunidade e o elemento r_n da matriz geradora.

Validação: A fase de validação envolve a verificação das conjecturas elaboradas na fase anterior, é esperado que ao fazer as potências da matriz os aprendentes consigam fazer as associações como no exemplo da fase anterior. espera-se também que estes façam os cálculos das potências da matriz original, para comparação com as matrizes resultantes. Assim, os discentes conseguem determinar quais elementos da sequência podem surgir durante esse processo.

Institucionalização O professor retoma o domínio da situação didática com o objetivo de analisar as soluções encontradas pelos estudantes e verificar a sua validade. O docente apresenta aos estudantes a finalidade da atividade proposta, pois as potências da matriz evidenciam regularidades que podem ser exploradas com mais afinco, a construção das potências da matriz repunidade gera os termos da sequência repunidade, e a depender da comutação esse padrão se altera, mas continua com as propriedades semelhantes com a da matriz original. Dessa forma, o professor calcula as potências da matriz (3.4) para que os estudantes possam comparar com seus resultados e identificar o padrão de formação. Neste momento, o conhecimento é institucionalizado como objeto matemático, e os estudantes passam a reconhecer a sequência de repunidade e a matriz repunidade como estruturação de uma sequência linear de segunda ordem de estrutura própria.

Situação Didática 2

Dada a matriz

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule o determinante da matriz $\mathcal{R}^n$. Em seguida, permuta as linhas, colunas (os elementos). Compare os determinantes das matrizes resultantes com o determinante da matriz $\mathcal{R}^n$, e elabore uma conclusão sobre os efeitos dessas transformações.

Fase da Ação: Os estudantes devem calcular o determinante de $\mathcal{R}^n$, e fazer as devidas permutações da matriz original, como pede o enunciado, espera-se que eles consigam perceber que ao fazer as devidas trocas, os determinantes podem mudar, ou não, isto é, podem ser iguais ao $\det \mathcal{R}^n = 10$ ou não.

Formulação: Com o valor dos determinantes das matrizes resultantes, os discentes devem formular conjecturas, como por exemplo, "Quando trocamos as linhas ou colunas, o sinal do determinante muda, ou obtemos um outro valor". O professor pode propor que os estudantes calculem o determinante da matriz (3.4), para que através da comparação, eles consigam propor hipóteses sobre os efeitos de cada tipo de transformação no determinante. Antes da validação, pode-se estimular os aprendentes a apresentar suas hipóteses para a turma, discutindo quais foram os padrões observados.

Validação: Os aprendentes devem identificar um padrão para os determinantes da matriz resultante, como por exemplo, transformando a primeira coluna na segunda linha e a segunda linha da matriz na primeira linha, obtemos:

$$\det(\mathcal{R}^n) = \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 110$$

Para este exemplo o determinante da matriz resultante é 110, ou seja, o resultado da matriz original foi multiplicado por 11, é esperado que eles consigam perceber essas características e em quais casos elas se repetem, validando assim as hipóteses com experimentação e cálculos.

Institucionalização: O professor deve retomar a atividade e formalizar os conceitos referentes ao determinante, como exemplo:

- ao multiplicar todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz por uma escalar k , o determinante da nova matriz passa a ser multiplicado por k ;

- ao permutar duas linhas (ou duas colunas) de posição em uma matriz, o valor do determinante passa a ser o oposto do determinante da matriz original, isso explica o fato de alguns determinantes das matrizes, apresentarem o sinal oposto do original.

Formalizando assim os resultados obtidos pelos estudantes.

Situação Didática 3

Dada a matriz

$$\begin{bmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Calcule o determinante da matriz, em seguida, determine as raízes da equação polinomial obtida.

Ação O professor deve entregar aos discentes apenas a matriz com o parâmetro λ , sem explicar nada sobre autovalores ou polinômio característico. Eles devem calcular o determinante e obter a seguinte expressão:

$$\lambda^2 - 11\lambda + 10$$

Por ser uma expressão do segundo grau, podem obter as raízes dela, colocando em prática seus conhecimentos das equações de segundo grau. Podem surgir dúvidas durante as operações com λ , então caso aconteça, o professor pode auxiliar.

Formulação: Com os raízes encontradas, os estudantes devem discutir se as raízes aparecem na sequência repunidade, se existe uma fórmula para os termos da sequência e se há relação com as potências.

Validação: Os estudantes expressam suas ideias e estratégias para resolver a equação $\lambda^2 - 11\lambda + 10$, registrando seus procedimentos em grupo ou individualmente. Podem surgir diferentes métodos de resolução, o que possibilita a comparação de caminhos distintos para alcançar as raízes da equação.

Institucionalização: Ao retomar a atividade, o professor deve apresentar que o λ surge a partir da expressão $p(A - \lambda I)v = 0$, em que I é a matriz identidade. Dessa forma, temos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Explicitando como o λ surge, o professor pode dizer que esta definição, é dita o polinômio característico da matriz, e as raízes para equação encontrada representam valores fundamentais

da estrutura da sequência, os autovalores, assim o professor consegue introduzir um conteúdo um pouco mais avançado da Álgebra, mas sem usá-lo totalmente, de maneira formal.

Situação Didática 4

Dada a matriz, $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sabemos que ela gera a seguinte dos termos:

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Faça manipulações nas entradas da matriz repunidade, construa uma nova matriz e determine a recorrência gerada por ela. Compare-a com a sequência original.

Fase da Ação: Os estudantes constroem e apresentam uma nova matriz, por exemplo, trocando sinais ou multiplicando as entradas por outras constantes, calculando as potências e observando os termos.

Fase da Formulação: Eles propõem uma nova regra de formação da sequência gerada pela nova matriz, criando uma nova relação de recorrência baseada nos elementos obtidos.

Fase da Validação: Verificam se a recorrência criada se mantém para valores maiores de n , comparando resultados e corrigindo os possíveis equívocos.

Fase da Institucionalização: O professor formaliza a ideia de que diferentes matrizes podem gerar diferentes sequências por recorrência e sistematiza o raciocínio dos discentes.

Situação-Problema 5

Como estudado anteriormente, sabemos que a fórmula de Binet da sequência de repunidade, válida para números naturais, é dada por:

$$r_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Essa expressão nos permite calcular rapidamente qualquer termo da sequência quando n é um número natural.

Agora, queremos investigar se essa fórmula pode ser feita para uma representação da matriz repunidade estendida também para valores inteiros negativos. Para isso, proponha a substituição de n por $-n$ na fórmula e analise o que acontece com a expressão. A partir dessa substituição, construa uma nova forma de representar r_{-n} , válida para $n \in \mathbb{N}^*$, e interprete o resultado obtido.

Fase da Ação: os discentes retomam a fórmula de Binet da sequência de repunidade para $n \in \mathbb{N}$, dada por $r_n = \frac{10^n - 1}{9}$. A proposta é que eles substituam n por valores negativos, como $-1, -2, -3$, e observem o comportamento da expressão $r_{-n} = \frac{10^{-n} - 1}{9}$. Essa atividade tem como objetivo ativar conhecimentos prévios sobre potências com expoente negativo, recordando que $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$, o que introduz a presença de frações na sequência. Com isso, os estudantes iniciam um processo exploratório, buscando identificar regularidades ou padrões que surjam nesses novos termos.

Fase da Formulação os estudantes, com base nos resultados obtidos na fase anterior, devem levantar hipóteses sobre uma possível expressão geral para os termos com índices negativos da sequência. Eles são incentivados a conjecturar uma forma funcional para r_{-n} , observando como ela se relaciona com os termos positivos da sequência. Essa etapa favorece o desenvolvimento da capacidade de generalização e o raciocínio algébrico, permitindo aos discentes propor uma extensão da fórmula de Binet para $n \in \mathbb{Z}$.

Fase da Validação tem como foco a análise crítica das hipóteses construídas. Os estudantes comparam os valores gerados pela expressão proposta para r_{-n} com os resultados obtidos diretamente pela substituição na fórmula. Também podem utilizar a recorrência da sequência, caso já tenha sido trabalhada, para verificar a consistência dos valores. Nesse momento, a turma discute se a generalização proposta se sustenta matematicamente e se mantém coerente com o padrão da sequência. A validação pode incluir o uso de calculadoras ou softwares

de apoio, como o GeoGebra.

Fase da institucionalização:, o professor retoma a discussão coletiva e sistematiza os conhecimentos construídos ao longo da atividade. Ele formaliza a extensão da fórmula de Binet para índices negativos e destaca a importância da compreensão das potências com expoente negativo para esse processo. É o momento de explicitar que a sequência de repunidade pode ser estendida para todo $n \in \mathbb{Z}$, consolidando a ideia de generalização e reforçando o valor do raciocínio algébrico na construção de fórmulas. Assim, a atividade é encerrada com a validação conceitual da extensão da fórmula para o conjunto dos inteiros.

A organização do ensino a partir das fases da TSD permite que o aprendente seja introduzido no processo de ensino-aprendizagem. Nessa perspectiva, ao trabalhar com a matriz repunidade, o estudante tem a oportunidade de explorar, conjecturar, validar e formalizar conceitos por meio de situações-didáticas intencionais, que promovem a construção ativa do saber. Além disso, o uso de um objeto matemático recente e inovador confere um caráter investigativo à prática pedagógica, o que vai de encontro com as habilidades e competências previstas na BNCC, estimulando assim, o pensamento crítico, a argumentação e o engajamento com a matemática.

5 REFLEXÕES SOBRE A ANÁLISE A POSTERIORI E O PROCESSO DE VALIDAÇÃO

Essa fase consiste no conjunto de resultados obtidos a partir da exploração dos dados coletados durante o desenvolvimento da Engenharia Didática. Esta por sua vez, contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo, que ocorre em duas etapas, interna e externa. Nesta pesquisa, não foi realizada uma experimentação real com os estudantes, e por isso, não há dados empíricos para serem validados diretamente. No entanto serão feitas reflexões sobre as expectativas e intenções do estudo. É importante ressaltar que, mesmo sem a aplicação prática, esta pesquisa apresenta características de uma validação interna.

A validação interna é realizada por meio da comparação dos dados obtidos ao longo da pesquisa com as hipóteses previamente formuladas, durante a análise a priori. A comparação é realizada considerando o mesmo objeto de estudo, possibilitando avaliar se os resultados estão de acordo com o que foi inicialmente previsto.

É importante apresentar uma descrição geral dos alunos, da turma como um todo, de seus comportamentos em sala e dos tipos de produções mais frequentes. Deve-se também analisar como essas produções evoluem ao longo da aplicação da sequência didática, observando a adequação das propostas às características dos estudantes. (LABORDE, 1997, p. 105, tradução nossa).

Nessa perspectiva, o autor destaca a relevância de uma abordagem pedagógica que enfatiza a observação e a análise de forma contínua dos estudantes ao longo do processo de ensino. Os comportamentos em sala de aula, as interações entre os estudantes e os tipos de produções permite ao professor identificar padrões, avanços e lacunas durante o processo de ensino e aprendizagem, o que permite ajustar as propostas pedagógicas de maneira mais eficaz.

A validação externa é uma etapa fundamental na Engenharia Didática, especialmente quando se busca confirmar a eficácia de uma proposta pedagógica em contextos reais. Esta por sua vez, quando os dados previstos na análise a priori são comparados com os resultados obtidos durante a experimentação.

Validações externas à sequência envolvem a comparação das produções dos alunos antes ou no início da sequência e após sua realização, por meio de entrevistas e/ou questionários, bem como a comparação com produções de outros alunos. Douady e Perrin-Glorian (1989), por exemplo, comparam produções de sua sequência sobre áreas com respostas ao questionário de Rogalski (1983). O que nos parece diferente após a oficialização da engenharia é a preocupação em analisar a evolução dos alunos em relação ao processo como um todo, e não mais apenas como uma microgênese. (LABORDE, 1997, p. 105, tradução nossa).

Dessa forma, reportado nas contribuições de Laborde (1997) sobre a validação interna e externa, pode-se afirmar que esse trabalho caracteriza-se como validação interna, devido à não aplicação em contexto real com estudantes. Assim, essa análise foi realizada a partir de uma projeção fundamentada nos princípios didáticos envolvidos e nas expectativas de aprendizagem para o conteúdo de matrizes, uma vez que as situações propostas foram elaboradas com o objetivo de acompanhar o progresso dos estudantes ao longo da sequência didática, sem levar em conta fatores externos ao processo.

Desse modo, a metodologia proposta, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e voltada para a construção de situações de aprendizagem relacionadas à matriz repunidade, visa promover a produção autônoma de conhecimento pelos aprendentes, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo realizar uma pesquisa e análise acerca da matriz repunidade, procurando apresentar algumas características ou propriedades desse objeto de estudo. Para tanto, foram exploradas diversas representações da matriz repunidade, bem como a fórmula de recorrência, a expressão fechada (Binet) para a matriz geradora e algumas identidades clássicas, das quais podemos destacar, Catalan, Cassini e d'Ocagne.

A partir disso, foram elaboradas cinco Situações Didáticas (SD), a luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD), estruturadas conforme as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, com o intuito de promover um ensino investigativo e significativo no estudo de matrizes. As atividades propostas visam incentivar os estudantes e formalizar conceitos que promovam a construção ativa do saber.

Utilizamos também a Engenharia Didática, uma importante ferramenta para o campo da Educação Matemática. De acordo com Artigue (1988), a Engenharia Didática tem como finalidade orientar pesquisas aplicadas ao ensino de conteúdos específicos. É importante salientar que foram utilizadas as etapas iniciais da ED, uma vez que se trata de uma pesquisa teórico-metodológica, não sendo desenvolvida em ambiente escolar. Diante do exposto, foram realizados estudos epistemológicos, didáticos e cognitivos que subsidiaram a elaboração de situações didáticas voltadas ao ensino da matriz repunidade e suas características. A TSD, por sua vez, proposta por Brousseau (1986), fornece um modelo teórico que compreende o conhecimento como produto das interações entre o estudante e o meio (*milieu*), organizadas intencionalmente pelo professor. Nesse sentido, o aprendente, torna-se protagonista do processo de aprendizagem, sendo desafiado a construir, validar e institucionalizar o saber a partir de situações planejadas com objetivos didáticos bem definidos.

Desse modo, o presente trabalho teve como objeto de estudo a matriz repunidade, com o intuito de explorar o ensino de matrizes de forma mais investigativa e significativa no Ensino. Dessa forma, fundamentados pela Teoria das Situações Didáticas e na Engenharia Didática, as situações-didáticas propostas articulam propriedades matemáticas relevantes, estando em conformidade com as competências previstas na BNCC.

Para a elaboração das situações-didáticas, foram consultadas referências na BNCC, documento fundamental nos currículos do ensino básico. Desse modo, foram selecionadas habilidades e competências dos componentes curriculares do Ensino Fundamental e do Ensino

Médio, relacionadas à identificação de padrões, à resolução de problemas, à dedução de fórmulas, matrizes e demais habilidades que são fundamentais aos estudantes. Estas habilidades estão em conformidade com escopo do presente trabalho, que se propõe a trabalhar com matrizes, explorando suas propriedades e características bem como a sua estruturação a partir de uma recorrência linear de segunda ordem.

A matriz repunidade, com suas características e padrões, não apenas amplia o repertório de conteúdos matemáticos a serem trabalhados na escola, como também permite o desenvolvimento de competências que vão além do domínio técnico. Ao investigar as regularidades emergentes de seus termos, os estudantes são instigados a levantar hipóteses, estabelecer conexões com outras áreas da matemática (como funções, álgebra e progressões), e a formular generalizações com base em padrões reconhecíveis. Nesse sentido, as situações didáticas aqui propostas podem contribuir para a construção de um ensino de Matemática mais significativo, no qual os estudantes se tornam sujeitos ativos na produção do conhecimento, ressignificando sua relação com a disciplina e com o próprio processo de aprender.

Além disso, o estudo dessas matrizes pode servir como recurso educacional, podendo ser utilizado por docentes para despertar o interesse dos estudantes pelas propriedades das matrizes e suas aplicações. Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresenta diversas competências e habilidades que definem as aprendizagens que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Na área da matemática, a competência específica 5 do Ensino Médio, aborda que é necessário

investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540).

Espera-se que este trabalho sirva como referência para professores e pesquisadores interessados em explorar novas possibilidades didáticas com matrizes, bem como incentivar a produção de sequências a partir de objetos matemáticos não usuais, mas ricamente exploráveis no ambiente escolar. Como continuidade, sugere-se a implementação prática das situações elaboradas e a coleta de dados empíricos que permitam avaliar, com maior profundidade, os efeitos da proposta no processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, o ensino de matemática pode contribuir para uma abordagem mais ativa e positiva em relação a esta área do conhecimento. Sob esse viés, os professores podem propor aos discentes problemas semelhantes ou iguais aos que foram apresentados neste trabalho, com a

finalidade de promover um ambiente em que o aprendizado é guiado e construído pela exploração, interação e descoberta. Dessa forma, as atividades em sala de aula se tornam mais envolventes e familiarizando os aprendentes com a matriz repunidade.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. [S.l.]: Editora da Universidade Federal de Paraná, 2007. 31–32 p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **Revemat**, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008. Acesso em: 12 set. 2025. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/24781/1/Almouloud2008Engenharia.pdf>>.
- ANDRADE, T. M. (Ed.). **Coleção Matemática Interligada**. São Paulo: Editora Scipione, 2020.
- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage-Éditions, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.
- ARTIGUE, Michèle. Engenharia didática. In: BRUN, Jean (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, (Horizontes Pedagógicos). p. 193.
- BACHELARD, Gaston. A formação do espírito científico. **Rio de Janeiro: Contraponto**, v. 1938, 1996.
- BEILER, A. H. **Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains**. 1. ed. New York: Dover, 1966.
- BOLDRINI, José; COSTA, João R.; WITTER, José R. **Álgebra Linear**. 4. ed. São Paulo: Harbra, 2004. 415 p.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI-JÚNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma Matemática**. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ministério da educação. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 12 set. 2025.
- BROUSSEAU, Guy. La problématique et l’enseignement de la mathématiques. In: **Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l’Etude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques**. Louvain-la-Neuve: [s.n.], 1976. p. 101–117.
- BROUSSEAU, Guy. Ingénierie didactique. d’un problème à l’étude à priori d’une situation didactique. In: **Actes de la deuxième école d’été de didactique des mathématiques**. Olivet: IREM d’Orléans, 1982. p. 39–60.
- BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean (Ed.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. cap. 1, p. 35–113. Tradução de Maria José Figueiredo.
- BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, Grenoble, n. 7.2, p. 33–115, 1998.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. 128 p.

CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o número 111...111 como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, n. 87, p. 15–19, 2015.

CATARINO, Paula; CAMPOS, Helena; VASCO, Paulo. On the mersenne sequence. **CM-Centro de Matemática**, Tibor Tómacs, 2016.

CATARINO, P. M. M.C.; COSTA, Eudes Antonio. Uma peculiar ligação entre sucessões numéricas e matrizes. **Gazeta de Matemática (SPM)**, v. 207, p. 24–29, 2025.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Algumas propriedades dos números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47–58, 2022.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio; BEZERRA, Cesar Santos. Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 37–47, 2023. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6827>>. Acesso em: 12 set. 2025.

COSTA, E. A. *et al.* On the repunit sequence at negative indices. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, p. 1–12, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.11062161>>.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Algumas propriedades da sequência de pell. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, 2022. Disponível em: <<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/345>>. Acesso em: 12 set. 2025.

COSTA, Eudes Antonio *et al.* Uma nota acerca da matriz repunidade. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 24, p. e24010, 2024. Disponível em: <<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index>>. Acesso em: 12 set. 2025.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contexto**. São Paulo: Editora Ática, 2020.

DOUADY, Régine. L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. **Cahier de DIDIREM**, n. 19, p. 2, 1993.

FERREIRA, MVV *et al.* Teoria das situações didáticas e seus elementos para o ensino de física e matemática. **VII ENCONTRO CIENTÍFICO DE FÍSICA APLICADA**, v. 7, 2016.

JAROMA, John H. Factoring generalized repunits. **Bulletin of the Irish Mathematical Society**, n. 59, p. 29–35, 2007.

KALMAN, Dan; MENA, Robert. The fibonacci numbers—exposed. **Mathematics Magazine**, Mathematical Association of America, v. 76, n. 3, p. 167–181, jun. 2003.

KAMADA, Makoto. **Factorization of 11...11 (Repunit)**. 1999–2023. Disponível em: <<https://stdkmd.net/nrr/repunit/>>. Acesso em: 12 set. 2025.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 10, n. 1, p. 97–112, 1997.

LUCAS, Carita; QUIRINO, Maria Eduarda. Uma proposta para o ensino de matrizes no ensino médio. In: **Anais da XI Bienal de Matemática**. [S.l.: s.n.], 2023.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia didática. In: **Educação Matemática: uma introdução**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. 197–208.

MANGUEIRA, Milena *et al.* Uma experiência da engenharia didática no processo de hibridização da sequência de leonardo. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, v. 10, n. 02, p. 271–297, 2021.

MONTEIRO, Ana Cibely Aragao. **A construção de sequências lineares recursivas por meio de uma engenharia didática com a aplicação da teoria das situações didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio**. Dissertação (Dissertação (mestrado profissional)) — Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Sobral, 2023. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profissional. Orientação: Prof. Pós-Dr. Daniel Brandao Menezes. Recurso eletrônico.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta - Coleção PROFMAT**, 12. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. Números repunidades e a representação matricial. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 81–96, abr. 2024. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/19491>>.

SLOANE, Neil J. A. **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Sequence A002275**. 2025. [S.l.]: The OEIS Foundation Inc. Disponível em: <<http://oeis.org/A002275>>.

SULEIMAN, Rahif Amal. Introdução ao estudo das situações didáticas: Conteúdos e métodos de ensino. **EDUCAÇÃO: Teoria e Prática**, v. 25, p. 200, 04 2015.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2014. Acesso em: 29 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602>>.

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Regis Vieira. Propriedades das extensões da sequência de padovan. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, jul. 2019. Disponível em: <<https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/233>>.

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Régis Vieira; CATARINO, Paula Margarida Martins da Costa. Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019.

YATES, Samuel. **Repunits and Repetends**. Boynton Beach, Florida: Star Publishing Co., Inc., 1992.