



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA PROFISSIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO**

ARNALDO COELHO TEIXEIRA JUNIOR

FRAZIONE: um aplicativo para ensinar e aprender equivalência fracionária

**Palmas, TO
2024**

Arnaldo Coelho Teixeira Junior

FRAZIONE: um aplicativo para ensinar e aprender equivalência fracionária

Relatório técnico apresentado à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Câmpus Universitário de Palmas, para obtenção do título de **Mestre em Educação**.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos da Silveira Freire
Coorientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli

Palmas, TO
2024

FOLHA DE APROVAÇÃO

ARNALDO COELHO TEIXEIRA JUNIOR

FRAZIONE: um aplicativo para ensinar e aprender equivalência fracionária

Relatório técnico apresentado à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Câmpus Universitário de Palmas, para obtenção do título de Mestre em Educação.

Aprovado em: 15 / 03 / 2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



JOSE CARLOS DA SILVEIRA FREIRE

Data: 15/07/2025 16:29:39-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Carlos da Silveira Freire

Presidente e Orientador - PPGE/UFT

Documento assinado digitalmente



IDEMAR VIZOLLI

Data: 15/07/2025 13:15:08-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Idemar Vizolli

Coorientador - PGEDEA - UFT

Documento assinado digitalmente



CLAUDIO DE CASTRO MONTEIRO

Data: 15/07/2025 16:14:40-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Claudio Castro Monteiro

Examinador Externo - ProfEPT/IFTO

Prof. Dr. Valtuir Soares Filho

Documento assinado digitalmente

Examinador Interno - PPPGE/UFT



VALTUIR SOARES FILHO

Data: 15/07/2025 15:33:47-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T266f Teixeira Junior, Arnaldo Coelho.

FRAZIONE: um aplicativo para ensinar e aprender equivalência fracionária. / Arnaldo Coelho Teixeira Junior. – Palmas, TO, 2024.

61 f.

Relatório Técnico (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Educação, 2024.

Orientador: José Carlos da Silveira Freire

Coorientador: Idemar Vizolli

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Frações equivalentes. 4. Aplicativo. I.
Título

CDD 370

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Venham a mim, todos os que estão cansados e sobrecarregados, e eu darei descanso a vocês. Tomem sobre vocês o meu jugo e aprendam de mim, pois sou manso e humilde de coração, e vocês encontrarão descanso para as suas almas. Pois o meu jugo é suave e o meu fardo é leve (Mateus 11:28-30).

Gostaria de agradecer inicialmente a Deus, pelo dom da vida e por ter me sustentado nos momentos que mais precisei. Posso dizer, de forma convicta, que até aqui me ajudou o Senhor.

Registro meus agradecimentos a minha esposa, Eneida, e minhas filhas, Manuela e Ana Laura, minhas companheiras de cada dia, as quais me acolhem e me recebem com o seu amor, apesar de todos dos meus defeitos. É por elas que acordo todo dia com vontade de vencer e conquistar coisas maiores.

Aos meus pais, Arnaldo e Diomar, meus eternos agradecimentos por todo amor dado a mim, por serem meus apoiadores em todos os momentos e sempre terem acreditado em minhas capacidades. Nada que eu faça irá retribuir tudo que fizeram, o esforço empreendido para nos dar o melhor que vocês podiam oferecer. Tudo o que sou e conquistei só foi possível graças a vocês!

Ao meu irmão, André Felipe, meu agradecimento por ser meu companheiro e referência de estudos. Meu melhor amigo, ao qual posso me apresentar sem máscaras e sem medo de ser julgado ou mal compreendido.

RESUMO

O tratamento e a conversão de frações equivalentes configuram-se como barreiras no estudo deste campo matemático, dada a variedade e a singularidade dos registros de representação semiótica. A fim de auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de frações equivalentes, esta pesquisa visa a construção de um aplicativo para trabalhar equivalência fracionária na relação parte-todo, tomando como base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, mais especificamente em relação ao tratamento e à conversão. Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, constituída de revisão bibliográfica, a partir da qual se desenvolveu o aplicativo Frazione, cuja construção se deu através das fases de análise, projeto, desenvolvimento e teste de *software*. Ao aplicativo foram agregadas atividades, implementadas a fim proporcionar a racionalização de problemas envolvendo equivalência fracionária, trabalhando fração nos enunciados das atividades, nos desafios e nas mensagens de retorno para o usuário, considerando diferentes tipos de representação. No aplicativo, as atividades foram dispostas trazendo, gradativamente, o aumento da complexidade dos problemas propostos, novos elementos interativos e representações fracionárias. Conclui-se que a utilização do Frazione se configura como uma relevante ferramenta metodológica para se trabalhar equivalência fracionária, tanto com estudantes do Ensino Fundamental, quanto na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática, especialmente quando se considera o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica.

Palavras-chave: Ensino. Aprendizagem. Frações equivalentes. Aplicativo.

ABSTRACT

The treatment and conversion of equivalent fractions represent barriers in the study of this mathematical field, given the variety and uniqueness of semiotic representation registers. In order to assist in the teaching and learning processes of equivalent fractions, this research aims to build an application to work with fractional equivalence in the part-whole relationship, based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, more specifically regarding treatment and conversion. This study is characterized as qualitative research, consisting of a bibliographic review from which the Frazione application was developed, whose construction took place through the phases of analysis, design, development and software testing. Activities were added to the application, implemented in order to provide the rationalization of problems involving fractional equivalence, working with fractions in the activity statements, challenges and feedback messages for the user, considering different types of representation. In the application, the activities were arranged gradually increasing the complexity of the proposed problems, with new interactive elements and fractional representations. It is concluded that the use of Frazione is a relevant methodological tool for working with fractional equivalence, both with Elementary School students and in the initial and continuing training of teachers who teach mathematics, especially when considering the treatment and conversion of records of semiotic representation.

Keywords: Teaching. Learning. Equivalent fractions. Application.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1. Valores de notas e pausas	12
Figura 1. Habilidades pretendidas com o estudo de frações no 6º ano do Ensino Fundamental	20
Quadro 2. Tipos de funções das representações	23
Quadro 3. Categorização para o número racional	26
Figura 2. Representações de frações equivalentes.....	28
Figura 3. Captura de tela do aplicativo Representar por Frações	36
Figura 4. Projeto de atividade para o aplicativo	38
Figura 5. Aplicativo renderizado em um smartphone	40
Figura 6. Aplicativo renderizado em um desktop.....	41
Figura 7. Sistema de navegação entre atividades	42
Figura 8. Sistema de recompensas como aspecto pedagógico	43
Figura 9. Atividade 5 do Frazione	44
Figura 10. Atividade 2 do Frazione	46
Figura 11. Múltiplas alternativas corretas na atividade 5	48
Figura 12. Mecanismo de contagem de tentativas na atividade 6	49
Figura 13. Relacionamento de frações equivalentes em duas colunas na atividade 10.....	51

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CSS	<i>Cascading Style Sheets</i>
HTML	<i>Hyper Text Markup Language</i>
IFTO	Instituto Federal do Tocantins
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
PPPGE	Programa Profissional de Pós-Graduação em Educação
PWA	<i>Progressive Web App</i>
RRS	Registro de Representação Semiótica
UFT	Universidade Federal do Tocantins
URL	<i>Uniform Resource Locator</i>
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1	PARTE INTRODUTÓRIA.....	11
2	A FRAÇÃO NO CURRÍCULO ESCOLAR.....	15
3	ASPECTOS TEÓRICOS DO OBJETO DA PESQUISA.....	22
3.1	Registro de representação semiótica.....	22
3.2	O estudo de fração: dimensão conceitual e operacional.....	24
3.3	Teorias de aprendizagem.....	31
4	O FRAZIONE COMO FERRAMENTA PARA APRENDIZAGEM.....	34
4.1	Aplicativos e jogos eletrônicos na educação.....	34
4.2	O processo de construção do Frazione.....	37
4.3	Aspecto metodológico de cada atividade do Frazione.....	45
4.4	Propostas metodológicas de uso do Frazione.....	52
5	CONSIDERAÇÕES CONCLUSIVAS.....	53
5.1	Contribuições da pesquisa.....	53
5.2	Trabalhos futuros.....	54
	REFERÊNCIAS.....	56
	APÊNDICE.....	58

1 PARTE INTRODUTÓRIA

Pela experiência como Professor do Instituto Federal do Tocantins (IFTO), observo que os estudantes da atualidade apresentam características peculiares, principalmente em termos de capacidade de concentração e do elevado nível de ansiedade, refletindo no interesse destes para com métodos tradicionais de ensino. Tais fatores podem ter relação com a exacerbada quantidade de informações a que os jovens estão expostos atualmente. Segundo Pereira (2019), o surgimento de novas tecnologias e o anseio por estar sempre informado contribuem para o crescimento da chamada ansiedade informacional.

Por conseguinte, pensar em estratégias metodológicas diferenciadas, que considerem o uso de tecnologias de informação e comunicação, pode contribuir positivamente para os processos de ensino e aprendizagem. Por fazerem parte do cotidiano dos jovens, há um grande potencial na aplicação de recursos tecnológicos no processo educacional. Tal discussão se faz necessária, pois o emprego da metodologia inadequada de ensino é um dos fatores que pode influir em dificuldades de aprendizagem, refletindo na compreensão das disciplinas da Educação Básica, em especial na matemática. Em seu estudo, Santana (2013) aponta que os estudantes apresentam dificuldade de articular a fração com outras formas de sua representação, o que acaba por prejudicar a realização de tarefas diárias e outras atividades.

Neste contexto, entendo que a noção de frações matemáticas é fundamental e faz parte do cotidiano das pessoas. Ao pedir uma pizza, por exemplo, nos deparamos com a necessidade de especificar a quantidade a ser pedida, processo no qual fazemos a contagem da quantidade de pessoas que farão parte da refeição, bem como conjecturamos o quanto cada um comerá, para então decidirmos pela quantidade de pizzas e os tamanhos das mesmas. Assim, mesmo sem perceber, fazemos operações fracionárias mentalmente, pois se considerarmos que uma pizza grande possui oito fatias, uma média, seis, e uma pequena, quatro, bem como João come $\frac{3}{4}$ de uma pizza grande e Maria come a metade de uma do mesmo tamanho, poderemos pedir uma pizza grande e uma média, duas médias ou ainda três pequenas, caso queiramos ter o mínimo de desperdício possível.

A fração também se faz muito presente em minha vida, como, por exemplo, na área musical. Por tocar instrumentos como violão, guitarra e teclado, preciso ter consciência da parte rítmica das músicas, a qual pode ser expressa em termos de fração. A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais.

A forma mais comum para se escrever uma música é através da partitura, cujo sistema dispõe de símbolos aos quais se associam os sons. Quanto à parte rítmica, o elemento a ser

observado é o compasso, unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso (CARVALHO, 2017). Em um compasso quaternário simples, 4/4, o quatro do numerador indica que cada compasso possui quatro tempos e o quatro do denominador indica em quantas partes se divide a semibreve para obter a figura que vale um tempo na música. Neste compasso, teríamos os valores apresentados no quadro a seguir para as figuras musicais.

Quadro 1 - Valores de notas e pausas

NOME	PAUSA	NOTA	VALOR (tempo)
Semibreve			4
Mínima			2
Semínima			1
Colcheia			$\frac{1}{2}$
Semicolcheia			$\frac{1}{4}$
Fusa			$\frac{1}{8}$
Semifusa			$\frac{1}{16}$

Fonte: Tressino (2014).

Como exemplo, se a fórmula de compasso for 4/4, poderíamos ter um compasso com duas mínimas, quatro semínimas, oito colcheias, e assim sucessivamente. Dados os exemplos acima, observa-se o quanto as frações fazem parte do cotidiano das pessoas, sendo a sua compreensão um diferencial na realização de tarefas diárias. Logo, pontua-se que compreender a natureza das frações e suas equivalências não é apenas um mero capricho, mas sim uma forma do ser humano apreender o contexto em que está inserido e transformá-lo.

A fim de compreender melhor a problemática por trás do reconhecimento das diferentes representações para fração, tem-se a teoria de Registro de Representação Semiótica (RRS) de

Raymond Duval a qual afirma que o conhecimento matemático precisa ser abordado do ponto de vista cognitivo, de modo a contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos estudantes.

A confusão entre um objeto matemático e seus registros de representação semiótica é um dos principais problemas de compreensão em matemática, dado que, diferentemente do que acontece em outras ciências, o objeto de conhecimento matemático não é acessível por meio das observações diretas ou pelo uso de instrumentos (DUVAL, 2003). O objeto do conhecimento matemático só é acessado através de suas representações (SANTANA, 2018). Logo, para que haja compreensão em matemática, faz-se necessária a distinção entre um objeto e sua representação.

Mas como não fazer confusão entre um objeto matemático e suas representações, se a possibilidade de efetuar tratamentos sobre aquele depende diretamente do sistema de RRS utilizado? E, de modo inverso, como dominar os tratamentos matemáticos, se não há uma apreensão conceitual dos objetos representados? Para Duval (2012, p. 269), essa confusão é quase inevitável e, em suas palavras, ele acrescenta “este paradoxo cognitivo do pensamento matemático no ensino não é percebido, simplesmente porque existe muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas”.

O conjunto de imagens e as conceitualizações que se pode ter acerca de um objeto, uma situação e o que lhe é associado caracterizam as representações mentais. Por sua vez, as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, como, por exemplo, um enunciado em linguagem natural, uma fórmula algébrica, um gráfico geométrico, etc.

Mais do que um meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, as representações semióticas são igualmente essenciais para a percepção, a racionalização e o armazenamento das informações captadas pelos sentidos. Elas desempenham um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

Neste contexto, surge a necessidade de se compreender melhor a problemática por trás do aprendizado de fração matemática, bem como as dificuldades encontradas na transição de uma representação semiótica para outra. Além do mais, há de se investigar como e quais ferramentas podem cooperar para um aprendizado de fração de forma mais eficaz, mitigando as barreiras que impedem a identificação de frações equivalentes.

Para contribuir com a aprendizagem de fração, é fundamental que se trabalhe essas transições entre as variadas representações possíveis, uma vez que essa diversidade de situações

proporciona a construção de um conceito. Assim, por mais que o estudante tenha maior familiaridade com determinado registro, o mesmo poderá desenvolver a habilidade de compreender e transpor uma representação para outro registro.

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver um aplicativo web progressivo que proporcione atividades para o aprendizado de fração matemática, com foco nas equivalências de diferentes registros de representação semiótica, considerando significados de fração e as características das quantidades. Para tanto, os objetivos específicos são: apreender frações equivalentes com diferentes registros de representação semiótica; projetar e desenvolver um aplicativo web progressivo para trabalhar equivalência fracionária na relação parte-todo; implementar, no aplicativo, atividades didáticas que possibilitem o tratamento e a conversão entre registros de representação semiótica; sugerir propostas metodológicas de uso do aplicativo.

É importante frisar que, a princípio, o escopo do produto limita-se a apresentar atividades sequenciais, permitindo ainda a navegação direta entre elas, mas sem armazenar o histórico de aprendizagem do estudante e, por conseguinte, não oferecendo qualquer direcionamento com base no aprendizado. Tal delimitação justifica-se devido às limitações temporais, econômicas e técnicas para a implementação destas funcionalidades, haja vista a complexidade envolvida para desenvolvê-las, podendo, contudo, ser objeto de trabalhos futuros.

Este estudo está estruturado em cinco seções, sendo: seção 1 – parte introdutória da pesquisa; seção 2 – a fração no currículo escolar; seção 3 – aspectos teóricos do objeto da pesquisa; seção 4 – o uso do Frazione como ferramenta para aprendizagem; seção 5 – considerações finais acerca da pesquisa.

2 A FRAÇÃO NO CURRÍCULO ESCOLAR

Ao longo da história, o currículo vem sendo objeto de estudos e reformas que deveriam promover justiça social, mas que acabam sofrendo intervenções políticas, quando, na verdade, deveria ser um dos caminhos para propor uma reforma efetiva que possa responder potencialmente às necessidades dos indivíduos que representam a sociedade mais ampla (GESSER, 2002).

Segundo Schubert (1986), nos anos anteriores a 1900, o currículo focava basicamente o desenvolvimento de habilidades profissionais, baseando-se nas tradições históricas do ocidente. Os valores que norteavam o currículo eram fortemente direcionados por instituições religiosas. Os educadores da época acreditavam que esses valores eram perfeitos para os estudantes, os quais deveriam ser impostos por um processo de rígida disciplina.

Já nos anos 40, o foco era preparar os membros da aristocracia social para liderança ou posições de nobreza (SCHUBERT, 1986). A partir da Reforma, representada por Martin Luther (na Alemanha) e John Calvin (na França), a educação baseou-se na reforma da igreja e na disciplina imposta pelos pais, sendo os professores meros transmissores de conteúdos encontrados nos clássicos da cultura ocidental em disciplinas consagradas pela tradição (GESSER, 2002).

Em meio ao movimento iluminista, a educação sofrera forte influência de pedagogos e pensadores (Bacon, Descartes, Locke, Rousseau, Comenius) que enfatizavam metodologias científicas. Por conseguinte, o currículo deixa de basear na fé e passa a focar no método científico e nas experiências para promover a base de julgamento com relação às formas justas e adequadas para balizar a sociedade. Decorrente deste processo, surgem novas ideias que transformam o processo educacional e sua estruturação, como a proposta por Parker, a qual enfoca a formação de um currículo baseado nos interesses e nas experiências das crianças. Ao final do século XIX, tem-se, então, o aparecimento do campo do currículo e do campo de batalha para sua indagação (GESSER, 2002).

Por conta das mudanças sociais decorrentes do advento da sociedade industrial no final do século XIX e início do século XX, o currículo constitui-se efetivamente como campo sistêmico de trabalho na educação (MOREIRA, 2020).

Antes de adentrar o estudo de fração no currículo escolar, há que se rememorar um pouco da história da educação no Brasil, que teve início em 1549 com a chegada de padres jesuítas, os quais foram praticamente os únicos educadores por mais de 200 anos (GARCIA, 2011). Em 1759, os jesuítas foram expulsos de Portugal e de suas colônias, gerando um vazio

na educação. Então, a partir de 1808, com a mudança da sede do reino de Portugal e a vinda da Família Real para o Brasil Colônia, surgiram as primeiras instituições culturais e científicas, de ensino técnico e dos primeiros cursos superiores (BARBOSA, 2003).

Com a independência do país em 1822, foi estabelecida a Constituição de 1824, a qual firmava o compromisso do Império em assegurar instrução primária e gratuita a todos os cidadãos. No entanto, em 1834 a prerrogativa de legislar sobre a educação primária foi delegada às províncias, afastando a responsabilidade do governo central (LIMA, 1969). A descentralização da educação básica também foi mantida na Constituição de 1891, ampliando a distância entre as elites do país e as camadas sociais populares.

Ocorre que em 1931 foi implementada pelo Ministério da Educação e Saúde Pública a reforma Francisco Campos, estruturando o ensino secundário, comercial e superior. O Estado então estabelece um currículo seriado, a frequência obrigatória, dois ciclos de estudos – um fundamental e outro complementar – e a exigência de habilitações neles para o ingresso no ensino superior (GARCIA, 2011).

De acordo com Lima (1969), somente após a queda do Estado Novo, em 1945, foi elaborado o primeiro projeto de Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em 1948, consubstanciado a partir de ideais da década de 1930. A LDB é aprovada apenas em 1961, na forma da Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961.

No ano de 1996, tem-se a homologação da Lei nº 9.394/96, instituindo a nova LDB e apresentando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os quais, como resultado de meses de trabalho e discussão de especialistas e educadores de todo o país, surgiram como meio de auxiliar e orientar as equipes escolares na execução de seus trabalhos, cooperando nas discussões pedagógicas na escola, na elaboração de projetos educativos, no planejamento das aulas, na reflexão sobre a prática educativa e na análise do material didático.

Os PCNs especificavam objetivos gerais do Ensino Fundamental, visando que os alunos desenvolvam capacidades, tais como: compreender a cidadania como participação social e política; posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva em diferentes situações sociais; perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente; utilizar diferentes linguagens; questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los; entre outras capacidades.

Destaca-se que, além de ser dividido em volumes por áreas de conhecimento, os PCNs tinham como alvo o Ensino Fundamental. Cada volume era dividido em duas partes, uma com parâmetros referentes às quatro primeiras séries, e outra englobando da 5ª a 8ª séries. Em sua estrutura, o volume de matemática dos PCNs era organizado em 1ª e 2ª partes. Na primeira,

encontravam-se os seguintes tópicos: “caracterização da área de matemática”; “aprender e ensinar matemática no Ensino Fundamental”; “objetivos gerais de matemática para o Ensino Fundamental”; e “conteúdos de matemática para o Ensino Fundamental”. Na segunda parte, havia: “primeiro ciclo”; “segundo ciclo”; “orientações didáticas”; além da bibliografia.

Na primeira parte dos PCNs referentes ao ensino da matemática, considerando o estudo de fração, os números racionais aparecem como forma de levar os alunos a perceberem que os números inteiros são insuficientes para resolver determinados problemas, alertando que “a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada”.

Por sua vez, os objetivos de matemática para o segundo ciclo incluíam:

- Ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades.
- Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
- Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal.
- Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.

Quanto às orientações didáticas para alcançar tais objetivos, tinha-se que o estudo de dos números como objeto matemático deveria partir de contextos significativos para os alunos, envolvendo o reconhecimento de diferentes tipos de números e suas representações e classificações. Deste modo, especificava-se que as atividades de leitura, escrita, comparação e ordenação de notações numéricas deveriam tomar como ponto de partida os números que a criança conhecia. Por conseguinte, em um recorte exato, os PCNs traziam:

Esse trabalho pode ser feito por meio de atividades em que, por exemplo, o professor:

- elabora, junto com os alunos, um repertório de situações em que usam números;
- pede aos alunos que recortem números em jornais e revistas e façam a leitura deles (do jeito que sabem);
- elabora, com a classe, listas com números de linhas de ônibus da cidade, números de telefones úteis, números de placas de carros, e solicita a leitura deles;

- orienta os alunos para que elaborem fichas onde cada um vai anotar os números referentes a si próprio, tais como: idade, data de nascimento, número do calçado, peso, altura, número de irmãos, número de amigos, etc.;
- trabalha diariamente com o calendário para identificar o dia do mês e registrar a data;
- solicita aos alunos que façam aparecer, no visor de uma calculadora, números escritos no quadro ou indicados oralmente;
- pede aos alunos que observem a numeração da rua onde moram, onde começa e onde termina, e registrem o número de suas casas e de seus vizinhos;
- verifica como os alunos fazem contagens e como fazem a leitura de números com dois ou mais dígitos e que hipóteses possuem acerca das escritas desses números (PCN, 1998).

No módulo de matemática, dos PCNs, referente a etapa final do Ensino Fundamental, observava-se que, para a organização de conteúdos, fosse analisada a ênfase dada a cada item de modo a identificar quais pontos eram essenciais, o qual especificava: “... o estudo da representação decimal dos números racionais é fundamental devido à disseminação das calculadoras e de outros instrumentos que a utilizam”.

Nos objetivos de matemática para o terceiro ciclo, especificava-se que o ensino da matemática deveria visar ao desenvolvimento do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levassem o aluno a ampliar e construir novos significados para os números – naturais, inteiros e racionais; resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros e racionais; bem como identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros. Já quanto aos conteúdos propostos para o ensino da matemática no mesmo ciclo, o PCN enfatizava que o estudo dos números racionais merecia especial atenção nas suas representações fracionária e decimal, partindo da exploração de significados tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. Para tanto, a justificava era que a resolução de problemas com números naturais, racionais e inteiros permite a ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números.

No quarto ciclo, as diretrizes chamavam a atenção para a infinitude de racionais entre dois números naturais, e ainda deixava claro que, embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais fossem conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, constatou-se que os alunos chegavam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo. A justificativa

trazida para tal dificuldade era que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais.

Atualmente, os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, assim como as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil, devem ser referenciados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como prevê a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996).

A BNCC consiste em um documento de caráter normativo, o qual define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, dentre as quais se tem: valorizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo; exercitar a curiosidade intelectual; utilizar diferentes linguagens; compreender, utilizar e criar tecnologias digitais; entre outras.

Segundo à BNCC, o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, dada sua grande aplicação na sociedade, e não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos, uma vez que também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos que contêm ideias e objetos fundamentais para a compreensão de fenômenos.

Na BNCC, o estudo de fração está previsto na etapa denominada como “A ETAPA DO ENSINO FUNDAMENTAL”. Especificamente no 4º ano do Ensino Fundamental, na unidade temática Números, tem-se o objeto de conhecimento “Números racionais: frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$)”, que visa o desenvolvimento da habilidade: reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. Contudo, na unidade temática Números, do 3º ano, encontra-se o objeto de conhecimento “Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte”, que pressupõe o estudo de fração, mesmo que de forma indireta. Com esse último, pretende-se desenvolver a habilidade de associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

No currículo estabelecido pela BNCC, o estudo da identificação e representação de frações se faz presente no 5º ano do Ensino Fundamental, através do objeto de conhecimento

“Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica”. Com este objeto de conhecimento, pretende-se desenvolver no estudante a capacidade de identificar e representar frações (maiores e menores que a unidade), associando-se ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

No 6º do Ensino Fundamental, que compreende o início dos anos finais desta fase de formação, o estudo de fração aparece de forma mais direta, incluindo o objeto de conhecimento “Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo de fração de um número natural; adição e subtração de frações”, cujas habilidades pretendidas podem vistas na figura a seguir – recorte retirado da própria BNCC:

Figura 1 – Habilidades pretendidas com o estudo de frações no 6º ano do Ensino Fundamental.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Por sua vez, na unidade temática Números do 7º ano há o objeto de conhecimento “Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador”, que visa desenvolver no estudante as habilidades: resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos; comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador; utilizar a associação entre razão e fração na resolução de problemas, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Embora o estudo de fração não apareça de forma explícita nos 8º e 9º anos, encontram-se desdobramentos do estudo de porcentagem, que também caracteriza uma forma de representar fração, sendo necessária sua compreensão ao se estudar equivalência fracionária e seus diferentes significados.

Assim, tecendo um panorama acerca do estudo de fração na Educação Básica, observa-se que tudo tem início no 3º ano do Ensino Fundamental com o ensino de alguns conceitos

fundantes para a aprendizagem de fração, a qual aparece de forma mais explícita nos 5º e 6º anos, estendendo-se até o 9º ano, de forma indireta, por meio do estudo de porcentagem, marcando a conclusão do Ensino Fundamental.

Apesar do estudo de números racionais ter início no 4º ano, a identificação de diferentes representações fracionárias vai começar a se consolidar apenas no 5º ano, se firmando de forma mais ampla no 6º. Por conseguinte, por objetivar o estudo de equivalência fracionária de representações da parte de um todo, entende-se que o público alvo do produto gerado por esta pesquisa se concentra principalmente nos quintos e sextos anos do Ensino Fundamental, segundo a nova BNCC, apesar de também poder ser trabalhado em turmas anteriores e posteriores.

Neste contexto, produtos de *software* como o Frazione podem ser empregados como ferramentas metodológicas para auxiliar os professores na elaboração de planos de ensino, buscando diversificar a forma de trabalho dos objetos de conhecimento relacionados à fração previstos na BNCC, na tentativa de alcançar as habilidades relacionadas.

3 ASPECTOS TEÓRICOS DO OBJETO DA PESQUISA

São retratados nesta seção os aspectos teóricos relacionados ao objeto de pesquisa, a começar pela teoria de RRS de Duval, abordando as funções das representações semióticas, os tipos de funções das representações e as atividades cognitivas necessárias para a apreensão de uma representação semiótica. Por fim, serão discutidas as dimensões conceitual e operacional do estudo de frações equivalentes, por meio de temas como a categorização dos números racionais, a equivalência fracionária e as barreiras encontradas no processo de aprendizagem.

3.1 Registro de representação semiótica

A teoria de RRS de Duval foca na importância dos variados registros para a aprendizagem em matemática, que se dá justamente através desta variedade para compreensão de seu objeto de estudo. Para o autor, as representações semióticas cumprem as funções de comunicação, objetivação e tratamento. A primeira trata da produção de representações externas que permitem transmitir informações. A segunda diz respeito ao processo de apreensão de conhecimento por parte de um indivíduo, que se dá através do uso das representações para tornar uma ideia clara para si, tais como resumos, esquemas e sínteses, por exemplo. A última função remete-se a transformações de representação no próprio registro, tal como a resolução de uma equação que leva uma representação inicial a uma final.

A representação computacional, que ocorre de forma interna, está relacionada ao processo de tratamento e se caracteriza pela execução automática de uma determinada tarefa, traduzindo informações externas de um sistema em uma forma passível de recuperação e combinação em seu interior. Ela é não consciente, pois é executada por meio de regras e fórmulas sem a devida compreensão dos passos necessários para a execução (VIZOLLI, 2006).

O quadro a seguir traz os tipos e as funções cognitivas que as representações mentais, computacionais e semióticas desempenham:

Quadro 2 – Tipos de funções das representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
NÃO-CONSCIENTE	Computacional Função de tratamento automático ou quase-instantâneo	

Fonte: Duval (1995).

Segundo Duval, a passagem do não consciente para o consciente corresponde ao processo de objetivação pelo sujeito que toma consciência. No entanto, para haver a objetivação, é preciso ocorrer a significação da representação por quem a executou. As representações conscientes são intencionais e cumprem a função de objetivação, sendo elas as representações mentais e semióticas. Esta desempenha ainda as funções de tratamento intencional e de conversão. A representação externa trata daquilo que é diretamente visível ou observável por um sujeito em um organismo, ou em um sistema, enquanto a representação interna constitui aquilo que não pode ser observado (VIZOLLI, 2006).

Duval também afirma que é essencial entender e estabelecer a relação entre *semiose* e *noesis*. Aquela se refere a apreensão ou produção de uma representação semiótica. Esta consiste na apreensão conceitual de um objeto. Deste modo, pode-se afirmar que *noesis* é inseparável da *semiose*. A *semiose* está vinculada a três atividades cognitivas fundantes: a primeira enseja na definição de uma representação identificável, que estabelece regras de conformidade, determinando as representações possíveis de um registro; o tratamento, no que lhe concerne, é responsável pelas transformações internas em um registro, denominadas regras de expansão (DUVAL, 2003); por fim, a terceira atividade cognitiva é a conversão, a qual transforma um dado registro de um objeto em outro registro.

A conversão pode ocorrer conservando-se a totalidade ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. Compreende-se conservação como uma transformação externa ao registro inicial a ser convertido. Neste contexto, existem: a ilustração, que é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural; a tradução, sendo a conversão de uma representação linguística numa língua específica; e a descrição, conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística.

Durval ainda afirma que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento, o que pode ser facilmente percebido na realização de um cálculo numérico. Pode-se conseguir efetuar a adição de dois números decimais ou fracionários e não se pensar em converter, caso necessário, a expressão decimal em uma expressão fracionária, ou mesmo não conseguir efetuar a conversão.

Por conseguinte, observa-se que essa transição entre os vários registros de representações semióticas das frações pode trazer confusão. Inclusive, uma mesma fração pode ser classificada de forma diferente por autores distintos. Damico (2007) classifica a representação da fração $\frac{1}{2}$ em forma de número decimal como sendo quociente, enquanto Canova (2006) e Merlini (2005) veem essa representação apenas como um número.

3.2 O estudo de fração: dimensão conceitual e operacional

O estudo de fração está inserido no escopo da matemática elementar, onde se encontram os números racionais - números que podem ser representados na forma de fração - e que, por sua vez, fazem parte do conjunto dos números reais, o qual compõe os conjuntos numéricos.

O conceito de fração remete o pensamento à parte de algo, e também tem relação com a ação de “quebrar”, dividir em partes. Em sua origem, o termo fração relaciona-se com as palavras fracionário, infração, infrator e fracionamento. A ideia de infrator, por exemplo, está ligada a alguém que quebrou regras previamente estabelecidas (CARVALHO, 2017).

Para Lima (2013), a fração extrapola a visão dos egípcios de dividir em partes e considerar uma delas. Em suas palavras, o autor defende que a fração pode ser vista da seguinte maneira:

Procuramos um pequeno segmento de reta w , que caiba n vezes no segmento unitário u e m vezes em AB . Este segmento w será então uma medida comum de u e AB . Encontrando w , diremos que AB e u são comensuráveis. A medida de w será a fração $\frac{1}{n}$ e a medida de AB , por conseguinte, será m vezes $\frac{1}{n}$, ou seja, igual a $\frac{m}{n}$ (LIMA, 2013, p. 48).

Na matemática, a expressão gráfica do que se tem em mente constitui o registro de representação, o qual busca expressar conhecimento sobre o objeto de estudo. O objeto matemático em questão dever ser representado da forma mais fidedigna possível por meio de símbolos, gráficos, figuras, fórmulas, entre outros meios de representação gráfica, visando elucidar a ideia pretendida.

Neste contexto, não se pode confundir um objeto matemático com sua representação. Caso contrário, essa confusão pode acarretar perda de compreensão e na inutilização dos

conhecimentos adquiridos ao longo da conjuntura de aprendizagem, dado que as representações, por si só, não sugerem nenhum tipo de tratamento. Por conseguinte, a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da matemática (DUVAL, 2012).

No entanto, as representações de objetos matemáticos são absolutamente necessárias, conquanto eles não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, tal como os objetos “físicos” ou “reais”. A possibilidade de realização de tratamentos sobre objetos matemáticos depende do sistema de representação semiótico utilizado, sendo fundamental na atividade matemática.

O pesquisador Raymond Duval desenvolveu a teoria do RRS. A representação semiótica pode ser definida como uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais (HENRIQUES, 2016), ou ainda como uma produção constituída pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, o qual tem sua construção própria de significado e funcionamento (DUVAL, 2012).

No estudo de fração, também existem diversas formas de descrever o que se deseja representar, ou seja, frações equivalentes podem ser representadas de maneiras variadas. Mas antes de se preocupar em reconhecer todas as possíveis representações, é preciso compreender melhor as diferentes classificações para fração, bem como a natureza das quantidades.

A fração pode ser apresentada de diferentes formas, tornando seu aprendizado mais complexo. Para Maranhão e Iglioni (2003), ela pode ser representada através de registro simbólico – numérico ou algébrico, figural ou linguagem natural. Entende-se que o registro numérico pode ainda ser do tipo fracionário ou decimal. Por sua vez, o registro figural contempla quantidades contínuas e discretas. Três outros registros completam esta lista, sendo eles: concreto, percentual e de divisão (SANTANA, 2013).

Partindo da análise de problemas, Nunes propõe a seguinte classificação teórica da fração: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Considerando os parâmetros curriculares nacionais, Bezerra apresenta quatro significados para frações, os quais são parte-todo, quociente, razão e operador. Aos tipos anteriormente expostos, há ainda quem acrescente outra classificação segundo seu significado, a probabilidade (CAVALCANTI, 2007).

A ideia presente no significado Parte-todo é a da participação de um todo, seja contínuo ou discreto, em “n” partes iguais, sendo que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$ (MERLINI, 2005). Deste modo, considera-se um dado todo, dividido em partes iguais, sobre o

qual é aplicado um procedimento de dupla contagem, consistindo em denominador – quantidade de partes em que o todo foi dividido – e numerador – número de partes tomadas.

De forma geral, segundo seus significados, a classificação dos tipos de fração é apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Categorização para o número racional.

Significado	Definição	Exemplo
Parte/todo	Partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$. Um procedimento de dupla contagem, das partes do todo e das partes tomadas, no geral, é o suficiente para solucionar o problema.	Uma jarra com suco foi dividida entre 3 copos. João bebeu um copo. Que fração representa o que ele bebeu da jarra?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador.	Em uma festa foram distribuídos 2 bolos para 6 crianças igualmente. Quanto cada uma vai receber?
Probabilidade	A fração representa a chance de um evento ocorrer. (numero de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).	Jogando uma vez um dado que fração representa a possibilidade de tirar o número 3 ou 4?
Operador multiplicativo	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.	Numa jarra contendo 900ml de suco Pedro bebeu $1/3$ do líquido. Quantos mililitros ele bebeu?
Número	A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida numa dada situação.	Onde posso marcar na reta numérica $1/3$?
Medida	Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta quantas vezes? Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.	Tomando a reta CD como unidade de medida, quanto mede AB? $A \quad B$ $C \quad \quad \quad D$ Outro caso: Quantos copos de $1/3$ litro são necessários para encher um balde de 15 litros?

Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer um suco de laranja eu misturo numa jarra 2 copos de água para 1 de concentrado. Que fração de concentrado eu tenho na jarra?
-------	---	---

Fonte: Cavalcanti (2007).

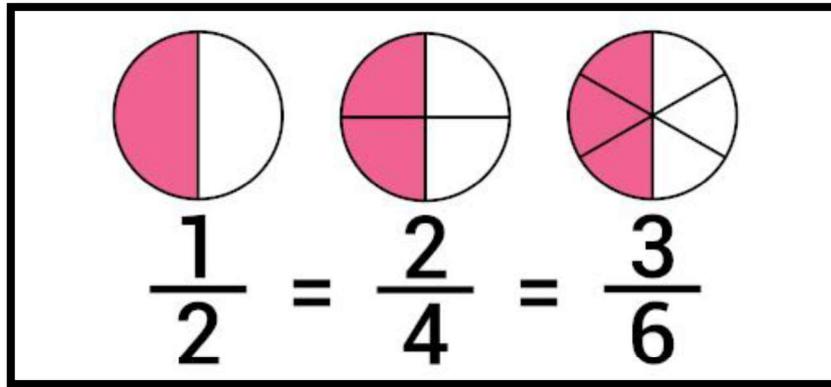
A porcentagem também é uma das maneiras de se representar fração, diferenciando-se desta apenas pelo fato de seu denominador ser uma constante, no caso, cem, que equivale a uma centena (VIZOLLI, 2001). A semelhança, nesse caso, advém de ambas representarem uma parte em relação a um todo.

Tal como a fração, o estudo da porcentagem envolve ideias que influenciam na forma como uma representação pode ser vista. Segundo o professor Vizolli, 20% pode significar: uma proporção – 20 a cada 100, por exemplo; uma fração – um inteiro é dividido em 100 partes iguais e toma-se 20 destas partes; uma divisão; uma razão – $20 \text{ para } 100 = 2 \text{ para } 10 = 1 \text{ para } 5 = 1/5 = 0,2$; entre outras representações.

Conforme suas características, uma fração também pode ser classificada em própria, imprópria, aparente, equivalente, irredutível e mista. A fração própria consiste naquela em que o numerador é menor que o denominador, tal como: $\frac{1}{2}$ e $\frac{10}{100}$. A fração imprópria é aquela em que o numerador é maior que o denominador, $\frac{10}{5}$, por exemplo. Chama-se uma fração de aparente quando ela representa um número inteiro, ou seja, quando o numerador é divisível pelo denominador. Dividindo-se 2 por 2, tem-se 1; ao dividir 8 por 4, chega-se ao valor 2.

As frações equivalentes representam a mesma parte em relação ao todo. Na figura 2, pode-se observar frações equivalentes que representam sempre a metade da figura geométrica. Mesmo tratando-se de frações diferentes, elas representam a mesma parte do todo (OLIVEIRA, 2023).

Figura 2 – Representações de frações equivalentes.



Fonte: Oliveira (2023).

Fração irredutível consiste na representação mais simples possível da quantidade, encontrada quando não existe nenhum número que divida o numerador e o denominador da fração simultaneamente. Uma vez que não existe nenhum número diferente de 1 que divida 4 e 5 simultaneamente, $4/5$ caracteriza-se como uma fração irredutível (OLIVEIRA, 2023).

A fração mista é uma forma de representar números que possuem uma parte inteira e outra parte fracionária. Por exemplo: 5 inteiros e $6/10$.

Ao se trabalhar com fração, outro aspecto a ser levado em consideração é a grandeza das quantidades. A grandeza diz respeito a tudo aquilo a que se pode associar um valor numérico. As grandezas contínuas são aquelas que, mesmo quando divididas exaustivamente, não perdem suas características. Uma pizza ou uma quantidade de areia podem ser divididas inúmeras vezes sem deixarem de ser pizza e areia.

Grandezas discretas consistem em um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, e o resultado da divisão deve produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades (CARVALHO, 2017). Ter que dividir dez canetas para cinco alunos caracteriza um cenário que recorre a quantidades discretas.

Baseado no estudo de Nunes (2005), Carvalho traz ainda as possibilidades de classificação de uma fração enquanto quantidade extensiva e intensiva, a qual considera o fato da quantidade se basear na comparação de quantidades da mesma natureza e na mesma lógica parte-todo. Quantidades contínuas e discretas são baseadas na mesma estrutura lógica, a relação parte-todo. Observa-se que a medida dessas quantidades é normalmente uma comparação entre duas quantidades de mesma natureza. Quando isso acontece, a medida se refere a quantidade extensiva.

Por ora, quando a medida se baseia em duas quantidades de naturezas diferentes, tem-se uma quantidade intensiva. Alguns dos exemplos citados por Carvalho são: “reais por litro, gramas de açúcar por litro de refrigerante, concentração de suco de limão por litro de água na limonada e colheres de achocolatado em pó por litro de leite”.

Por conta dessas peculiaridades, o estudo de fração apresenta dificuldades que precisam ser mitigadas para haver melhor aproveitamento no aprendizado. Bianchini (2001), em seus estudos sobre as questões de aprendizagem relacionadas à aquisição do conceito de número racional na forma de número decimal, constatou que as crianças que fizeram parte da pesquisa ainda apresentavam dificuldades de trabalhar com número racional na forma fracionária. Lembra-se que, geralmente, os números racionais são apresentados primeiramente na forma fracionária, para então se trabalhar a forma decimal.

A pesquisadora realizou este trabalho tendo como público alvo alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, baseando-se nas teorias de Brousseau, em relação ao contrato didático, e de Duval, quanto aos registros de representação semiótica. Na relação parte-todo, a autora afirma que a noção de número racional pode expressar a síntese de duas ideias matemáticas, a medida e a quantidade, devendo ser compreendida em suas representações (BEZERRA, 2017).

Por parte dos alunos, as dificuldades identificadas pela autora foram: a não compreensão do número racional; incapacidade de localizar valores decimais na reta numérica; dificuldades com a linguagem. Quanto à compreensão do número racional, considerando que a medida parte-todo divide o todo em partes iguais, os alunos apresentaram equívocos na representação figural da unidade – a porção da parte tomada do todo. Ao representar números decimais na reta numérica, também ocorreram alguns erros. Tendo que representar o decimal 9,1, um aluno acabou por observá-lo como dois decimais, escrevendo o 9 à esquerda e o 1 à direita. Em outro caso, um aluno teve que representar graficamente a fração $19/10$, episódio em que acabou desenhando dezenove retângulos e pintando dez. Neste caso, uma das soluções corretas seria desenhar dois retângulos divididos em dez partes iguais, pintar um dos retângulos em sua totalidade e, no outro, apenas nove partes.

Na referida pesquisa, os alunos apresentaram ainda agrura na compreensão do enunciado de algumas questões, bem como ao respondê-las em linguagem natural escrita. Observa-se a utilização de algumas expressões que não são claras quanto ao seu significado.

Bianchini afirma que as crianças menores têm dificuldade de pensar, simultaneamente, na mudança do número de partes e na variação do tamanho dessas partes, contribuindo para a não alteração do todo. Assim, considerando uma representação figural de fração que usa um objeto como exemplo, ocorrem impasses na hora de mentalizar e registrar outra representação

figural equivalente por meio de outro objeto. Se um exemplo foi realizado com laranjas, pode-se não conseguir evidenciar outro exemplo com melancias.

Resultado de um projeto de pesquisa sobre as estratégias e os erros da Matemática Secundária (equivalente à segunda fase do ensino fundamental no Brasil), o livro *Fractions: Children's Strategies and Errors* traz uma experiência de investigação acerca dos problemas enfrentados pelos alunos no estudo de fração e indica possibilidades de melhorias. Esta pesquisa foi realizada ao longo de seis anos, com aplicação de testes em dez mil crianças, em escolas na Inglaterra. As crianças tinham entre onze e quinze anos de idade. Foram investigados erros relacionados às seguintes áreas: razão, álgebra, gráficos, medidas e frações.

Em sua pesquisa, KERSLAKE (1986) realizou entrevistas com os alunos visando compreender os caminhos pelos quais eles pensavam as frações. Buscou-se observar se os alunos conseguiam pensar as frações como números ou se eles associavam a palavra “número” apenas a números inteiros. Tentou-se ainda descobrir que modelos de frações os alunos dispunham, e a determinar como eles visualizavam a ideia de equivalência.

Após vários testes, a autora relata que muitos alunos invertem os significados dos elementos que compõem uma fração, interpretando numerador como denominador e denominador como numerador, de modo que 3:5 é visto como 5:3. Também se evidenciou como problema o fato dos alunos observarem apenas os denominadores das frações. Perguntados sobre quantas frações existem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, os alunos responderam uma, referindo-se a $\frac{1}{3}$.

No que diz respeito ao aspecto parte de um todo de uma fração, foi observado que o uso de diagramas ajuda na resolução de problemas, mas também traz pontos negativos. Ao mesmo tempo em que pode contribuir na compreensão de um objeto matemático, o uso de diagramas também pode dificultar a identificação de uma fração enquanto um número. Outra problemática é encontrada ao se ilustrar, por exemplo, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, uma vez que a imagem dessas representações não ajuda na visualização imediata, sendo necessárias outras divisões na mesma figura para sua compreensão. Neste caso, igualando os numeradores, tem-se $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$.

A autora também argumenta que o conceito de número racional difere do de número natural, considerando que não fazem parte do meio natural das crianças, além das diversas interpretações do número racional resultarem em uma variedade de experiências necessárias.

Por fim, a autora conclui que o entendimento dos racionais como elementos de um campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão, havendo a necessidade de se entender o modelo parte-todo e incluir os aspectos quociente das frações.

No campo dos números naturais, pode-se falar em sucessor e antecessor. Contudo, esta ideia não faz sentido no campo das frações, uma vez que entre duas frações quaisquer é sempre possível encontrar outra fração, pontua Merlini (2005), enfatizando a importância da compreensão das diferenças entre os conjuntos numéricos.

3.3 Teorias de aprendizagem

Em seu livro intitulado “Teorias de Aprendizagem”, PRÄSS (2012) traz as ideias de diferentes pesquisadores a fim de explicar e melhorar o processo de aprendizagem. Para ele, o psicólogo americano Burrhus Frederic Skinner acreditava nos padrões de estímulo-resposta de uma conduta condicionada. Skinner baseava-se no condicionamento operante, em que um organismo opera sobre o ambiente, recebendo, logo em seguida, um estímulo reforçador ou adverso, e a natureza da consequência modifica a tendência do organismo repetir o comportamento no futuro.

Para explicar a teoria, PRÄSS (2012) traz como exemplo um rato em uma caixa, a qual possui um mecanismo que, quando acionado por meio de um pedal, libera uma porção de comida. Nesse caso, o rato circula pela caixa e, acidentalmente pisa no pedal, liberando uma porção de comida. Em seguida, ele pega a comida e se retira para um canto da caixa. O comportamento que precede o reforçador (a porção de comida) é chamado operante. Um comportamento seguido de um estímulo reforçador provoca um aumento na probabilidade desse comportamento futuro.

No sentido contrário, um comportamento seguido de um estímulo negativo ou adverso, que é algo que sentimos como ruim ou doloroso, reduz a probabilidade desse comportamento no futuro. Observa-se que o simples cessar do comportamento adverso traz bem-estar, funcionando como um reforço, porém negativo. Um comportamento seguido da ausência do estímulo adverso resulta num acréscimo da probabilidade de que esse comportamento ocorra novamente.

Na educação, o condicionamento operante pode ser utilizado para facilitar o processo de ensino através da aplicação e desenvolvimento de motivações específicas, bem como para permitir a aquisição, modificação e supressão de condutas pelo uso adequado de reforços.

Jean Piaget, nascido na Suíça, teve seu trabalho focado na natureza do conhecimento humano e, baseando-se no crescimento de seus filhos, elaborou a teoria da “inteligência sensório-motriz” que descrevia o desenvolvimento espontâneo de uma inteligência prática, baseada na ação, que se forma a partir dos conceitos incipientes que tem a criança dos objetos

a sua volta (PRÄSS), 2012. A partir de suas teorias, desenvolveu-se o método psicogenético, pedagogia que explica que o processo pedagógico se modifica sucessivamente, de acordo com o estágio de desenvolvimento mental (psicogênese). Por conseguinte, visando o aprendizado, o nível mental da criança deve ser levado em consideração ao apresentar as situações didáticas, pois em cada estágio do desenvolvimento ela tem uma maneira diferente de aprender.

A ideia básica da teoria de Piaget é de que as funções permanecem invariáveis, mas que as estruturas mudam, sistemicamente, conforme a criança se desenvolve. Esta mudança nas estruturas é o que se denomina desenvolvimento. Piaget traz também o termo “conteúdo”, refletindo estímulos e respostas observáveis, e, nessa linha, ele define como estrutura um relacionamento entre acontecimentos, cada qual contendo meios (olhar, estender a mão, agarrar) e o fim (estímulo do objeto na mão). Por sua vez, o termo “estruturas” diz respeito às propriedades sistêmicas de um acontecimento, abrange os aspectos internos e externos de um ato.

Outro conceito apresentado por Piaget é de “função”, que trata dos modos biologicamente herdados a partir da interação com o ambiente, o qual impõe condições necessárias às estruturas. Quanto às funções, tem-se basicamente a organização e a adaptação, de modo que todo ato é organizado e o aspecto dinâmico da organização é a adaptação. Assim sendo, ao longo do período de desenvolvimento as funções são permanentes, porém as estruturas são transitórias, motivo pelo qual há desenvolvimento.

Há que se falar também das invariantes funcionais, que são a assimilação e a acomodação, características de todo sistema biológico. A assimilação ocorre quando um organismo utiliza algo do ambiente e o incorpora. PRÄSS coloca que nem mesmo a percepção de um objeto é a reprodução fiel de um padrão de estímulo, uma vez que nossa percepção de objetos permanece a mesma, embora haja modificações na distância, ângulo de visão, forma, luminosidade e coloração da imagem que se projeta. Soma-se a isto a categorização do objeto por conta de suas propriedades. Assim, o que entra é transformado para se ajustar ao processo mediador existente. Por sua vez, a acomodação consiste na modificação das estruturas ou esquemas aos novos dados, que se dá a partir da transformação da entrada pelos processos mediadores, os quais são transformados pela entrada.

A construção do conhecimento se dá quando acontecem ações físicas ou mentais sobre objetos que, provocando o desequilíbrio, resultam em assimilação ou acomodação dessas ações. Quando a criança não consegue assimilar o estímulo, ela tenta fazer uma acomodação que, após uma assimilação, resulta em equilíbrio.

Nascido em 1896 na Bielo-Rússia, Lev Semenovich Vygotsky dedicou-se à psicologia evolutiva, educação e psicopatologia. Vygotsky enfatizava o processo histórico-social e o papel da linguagem no desenvolvimento do indivíduo, de modo que a aquisição do conhecimento se dá por meio da interação do sujeito com o meio. A partir da mediação o sujeito adquire conhecimentos pelas relações com o meio.

Vygotsky destacou o valor da cultura e o contexto social, que acompanha o crescimento da criança, tal como um guia e ajudante no processo de aprendizagem. Nesse contexto, a criança tem a necessidade de atuar com independência e de ter a capacidade de desenvolver um estado mental melhor. Embora ela tenha um papel ativo no processo de aprendizagem, esta não atua sozinha, sofrendo influência do meio em que está inserida.

Em suas ideias, Vygotsky destaca a importância da linguagem para o desenvolvimento cognitivo, demonstrando que as crianças são capazes de construir conceitos rapidamente, utilizando-se de palavras e símbolos. Desse modo, observou-se que a linguagem era a principal via de transmissão da cultura e o veículo principal do pensamento (PRÄSS).

Acerca da influência do contexto em que a criança está inserida sobre ela, Vygotsky traz o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), pregando que uma criança não pode ser considerada isoladamente do seu meio sociocultural. Por conseguinte, destaca-se as possibilidades de ajuda que um adulto pode oferecer na ZDP, seja por meio de imitação de atitudes, exemplos apresentados ou colaboração em atividades compartilhadas.

4 O FRAZIONE COMO FERRAMENTA PARA APRENDIZAGEM

Esta seção traz um panorama acerca do uso jogos eletrônicos e aplicativos como instrumentos metodológicos de aprendizagem, bem como seus efeitos. Importante destacar que o jogo eletrônico pode ser um aplicativo. Ademais, são apresentadas outras soluções tecnológicas aplicadas ao campo matemático, retratando suas características e evidenciando o diferencial do aplicativo aqui proposto. Em seguida, é descrito em que consiste o aplicativo Frazione e como se deu a sua construção, retratando as etapas do processo de desenvolvimento e da implementação de atividades para se trabalhar equivalência fracionária. Finalizando este capítulo, são feitas sugestões metodológicas de uso do Frazione como ferramenta de aprendizagem.

4.1 Aplicativos e jogos eletrônicos na educação

O uso de aplicativos e, principalmente, jogos eletrônicos contribuem para o processo de aprendizagem, pois agregam uma dimensão lúdica ao contexto representado (BRAGA, 2022), além de empregarem mecanismos que contribuem para o engajamento do usuário/jogador, tais como sistema de recompensas, *feedback* adequado, múltiplas soluções para desafios, entre outros.

Mark Prensky, visionário e gerador de novas ideias no ramo de aprendizado digital, famoso por cunhar o termo *nativos digitais* e por escrever livros como “Digital Game-Based Learning” e “Don’t Bother Me Mom – I’m Learning”, afirma que as crianças jogam jogos eletrônicos porque estão aprendendo, e adoram aprender quando o aprendizado não é forçado. Na prática, os jogos desenvolvem a capacidade de deduzir regras pela observação e manipulação de sistemas complexos, características que contribuem para o aprendizado. Segundo o autor, o que chamamos de falta de déficit de atenção, ou incapacidade de prestar atenção por longos períodos, queria na verdade dizer: não estou ouvindo!

O papel do fracasso em aplicativos de jogos eletrônicos, por exemplo, é muito diferente do que na escola, que não integra a colaboração e a competição como nos *games*. Neste, o custo do fracasso é diminuído, pois quando fracassam, os jogadores podem recomeçar novamente do ponto em que pararam. Outra perspectiva é a de que, no caso de fracasso ao enfrentar um inimigo, o jogador encare a situação como uma forma de aprender, visando melhorar suas habilidades nas próximas tentativas até que o objetivo seja alcançado, uma vez que o jogador pode tentar superar o desafio inúmeras vezes. Assim sendo, essas características de fracasso

nos jogos eletrônicos permitem que os jogadores se arrisquem e experimentem hipóteses que seriam muito difíceis de testar em situações em que o custo do fracasso é maior, ou que nenhum aprendizado derive do fracasso (MATTAR, 2010).

Ao ensino da matemática, que está tradicionalmente associado à realização de cálculos, à resolução de equações e à memorização de fórmulas e algoritmos, tem-se proposto aproximações com a história da matemática, resolução de problemas, jogos, entre outras práticas que emergem das vivências dos alunos, com o intuito de viabilizar o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático (BRAGA, 2022).

A fim de investigar como os recursos tecnológicos e os jogos podem auxiliar no aprendizado de frações, Braga fez um estudo com alunos de quatro turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, da Escola de Aplicação da UFPA, cada turma contendo aproximadamente 25 alunos. A pesquisa ocorreu em meio a pandemia de COVID-19. Metodologicamente, o estudo se desenrolou através das etapas de estudos teóricos acerca de frações, diagnóstico de aprendizagem dos alunos em aulas online, elaboração e aplicação de sequência de atividades, e aplicação de formulários para avaliar a efetividade do uso de aplicativos para a aprendizagem de frações.

Vale destacar que nem todos os alunos conseguiram participar das aulas *on-line*, por conta de dificuldades relacionadas à disponibilidade de acesso à internet ou de limitação dos dados móveis. Neste caso, o professor encaminhava as atividades para que realizassem e depois entregassem à escola.

Os estudos foram organizados e trabalhados de forma a compreender possíveis obstáculos na aprendizagem dos alunos, bem como a identificar aplicativos que poderiam minimizar tais dificuldades e auxiliar no aprendizado de fração.

Para este estudo, foram utilizados os aplicativos *Fractions* e *Representar por Frações*, ambos disponíveis para o sistema operacional *Android*, sendo que apenas o primeiro estava disponível para *IOS*. O *Fractions* visa auxiliar na aprendizagem de fração, estimulando o cálculo mental e reforçando conceitos matemáticos, tais como: representação de frações, simplificação de números fracionários e operações com frações. O aplicativo *Representar por Frações*, por sua vez, possibilita ao jogador representar frações como partes de um todo.

Figura 3 – Captura de tela do aplicativo *Representar por Frações*.



Fonte: APKPure, 2023.

A fim de mapear a eficácia dos aplicativos acima mencionados na superação das dificuldades previamente identificadas, foram encaminhados aos alunos formulários eletrônicos via *WhatsApp*, os quais abordavam aspectos relacionados ao uso dos aplicativos para o aprendizado de fração.

Como conclusão do referido estudo, o uso de jogos eletrônicos e aplicativos agregou um caráter lúdico às aulas, tornando-as mais interessantes e, conseqüentemente, motivando mais os alunos. Quanto ao estudo de frações, especificamente, conseguiu-se aproximar os conteúdos a uma dinâmica apreciada pelos alunos da faixa etária em questão, sendo o uso dessas tecnologias encorajado pelos autores tanto em aulas remotas quanto em presenciais. No entanto, ressalta-se a importância de deixar os objetivos educacionais às claras junto aos estudantes.

Em outra pesquisa, elaborada por HWANG (2022), foi desenvolvido um aplicativo baseado em *tablet* para ajudar na aprendizagem de frações por meio de contextos reais, considerando três tópicos: conceitos de frações, simplificação de fração e adição e subtração de frações. No que diz respeito ao aprendizado, foram considerados três variáveis: compreensão de fração, representação de fração e resolução de problemas. Foram trabalhados dois grupos de pesquisa, o grupo experimental, recorrendo ao aplicativo, e outro, o grupo de controle, aprendendo fração por meio de métodos tradicionais de aprendizagem.

Os resultados da referida pesquisa mostraram que o grupo experimental superou significativamente o grupo de controle dados os objetivos de aprendizagem. De acordo com os resultados das análises de correlação, foram encontradas correlações significativas entre as

anotações de atribuições, os pós-testes, a avaliação de pares e a avaliação do professor usando três alicerces – linguístico, lógico matemático e representação visual. Portanto, os estudantes do grupo experimental fizeram anotações mais significativas, assim como apresentaram melhor compreensão acerca das múltiplas representações para fração. Por fim, o estudo conclui que os objetivos de aprendizagem foram afetados pela qualidade do aprendizado dos alunos.

Resultados obtidos por estudos, como os apresentados acima, mostram como o uso de tecnologias digitais, como aplicativos, jogos eletrônicos, entre outros, podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem não só de fração, mas também de outras áreas de conhecimento.

Como retratado nas pesquisas acima, observam-se as dificuldades relacionadas ao acesso à internet para que o processo de aprendizagem possa fluir. Apesar do aplicativo proposto por esta pesquisa necessitar de uma primeira conexão para sua instalação, após este processo, destaca-se que o acesso à internet não é mais necessário, haja vista se tratar de um aplicativo web progressivo, tecnologia que funciona inclusive *off-line*.

4.2 O processo de construção do Frazione

O produto final desenvolvido por meio desta pesquisa consiste em um aplicativo web progressivo, em uma tradução livre da expressão em inglês *Progressive Web App* (PWA), com atividades voltadas para o aprendizado de fração matemática do tipo parte-todo, com foco principal na equivalência de frações. Para tanto, o *software* utiliza diferentes registros de representação semiótica e a natureza das quantidades para facilitar a compreensão do conteúdo por parte de seus usuários.

Diferentemente de um aplicativo *Android* nativo, um PWA não precisa ser instalado, dependendo apenas de um navegador web para ser renderizado¹ (processo pelo qual se obtém o produto final de um processamento digital). Outra vantagem de um PWA é que o mesmo pode funcionar sem conexão com a Internet, *offline*, de modo a possibilitar o aprendizado contínuo de seus usuários. Ademais, existem alguns recursos exclusivos desse tipo de tecnologia: pode ser instalado na tela inicial de um sistema *Android* diretamente da Web; pode ser compartilhado através de um link de *Uniform Resource Locator* (URL), endereço digitado para entrar em um site na Internet; pode ser descoberto por meio de pesquisa na Internet.

¹ Renderização é o processo pelo qual se obtém o produto final de um processamento digital qualquer.

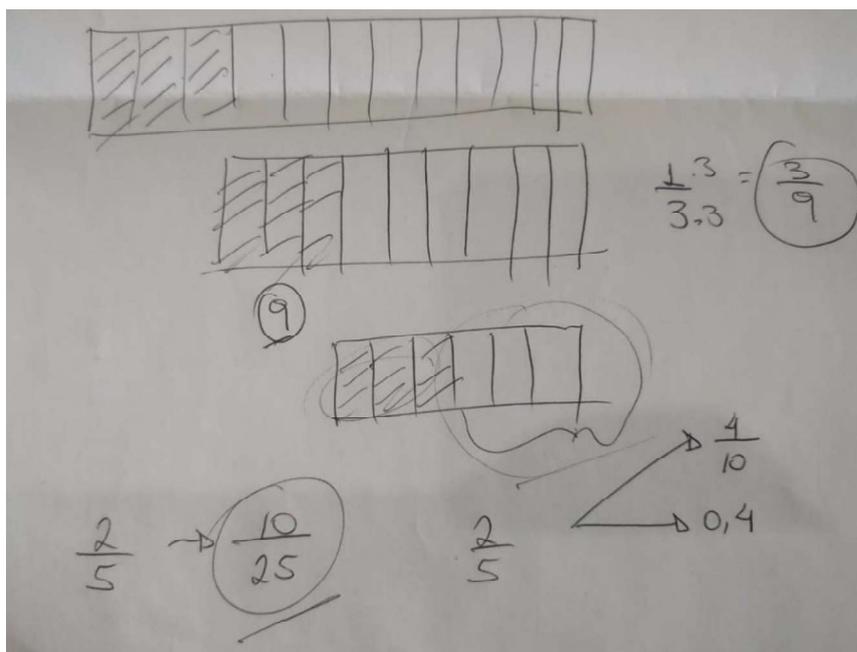
Ao produto desenvolvido por meio desta pesquisa foi dado o nome Frazione, que significa Fração em italiano. Inicialmente, este nome foi atribuído em caráter temporário, mas acabou permanecendo ao longo da pesquisa.

O processo de construção do aplicativo começou com a revisão bibliográfica, a fim de se investigar o estado de conhecimento do objeto de estudo. A partir daí, geraram-se os primeiros subsídios que embasaram o projeto e a implementação das atividades/exercícios que compõem o aplicativo. Essa ação perdurou durante toda a fase de desenvolvimento do produto de *software*.

A construção do aplicativo foi dividida nas seguintes fases: análise, projeto, desenvolvimento e teste. Na primeira, foram levantados os requisitos que serviram de base para o planejamento técnico do que seria construído, ou seja, a construção de modelos que ajudaram a determinar os problemas; além disso, os requisitos levantados durante a análise permitiram definir as fronteiras do sistema, alinhando as expectativas acerca do que, e como, o aplicativo deveria fazer.

No projeto do sistema, foram desenvolvidos modelos que serviram de base para a implementação do produto. Antes de se implementar uma atividade, por exemplo, foram realizados rascunhos que embasaram a etapa de desenvolvimento por meio dos modelos projetados. Um projeto descrevendo a ideia para a implementação de uma atividade pode ser visto na figura 4.

Figura 4 – Projeto de atividade para o aplicativo.



Fonte: Autoria própria.

Por sua vez, o desenvolvimento é a fase em que o sistema é codificado. Nesta etapa, foram implementadas as funções do aplicativo, tais como a seleção de itens na tela, a verificação de resultados, a navegação entre as atividades, a exibição de mensagens de erro e acerto, a aplicação de efeitos visuais, a adaptação em dispositivos com diferentes tamanhos de tela, entre outros recursos. É importante frisar que, ao longo desta etapa, se faz necessário algum mecanismo para controlar as versões dos códigos que vão sendo gerados, permitindo o acompanhamento de mudanças que vão sendo implementadas e a correção de eventuais erros de projeto ou codificação.

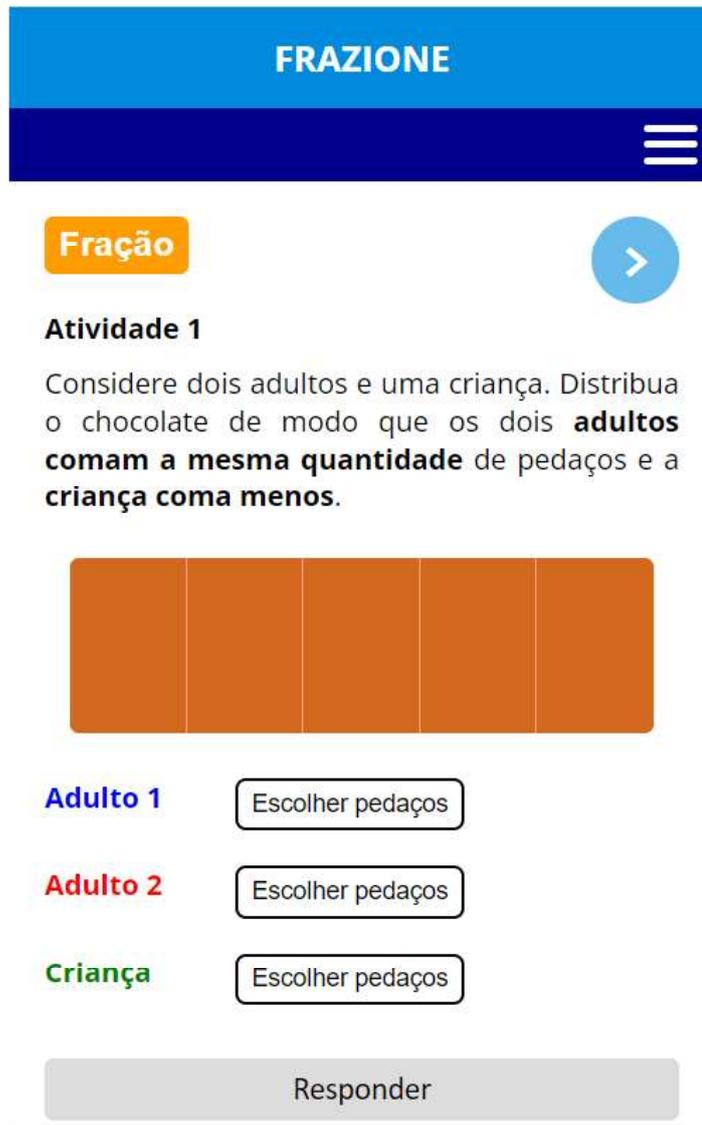
A fim de se manter o controle do código-fonte produzido ao longo do processo de desenvolvimento do aplicativo, foi realizado o versionamento do código por meio do Git. Assim, pôde-se criar *commits* do produto durante a sua construção, especificando o que fora implementado ou corrigido a cada versão. No início, as versões do código são mantidas em um repositório local, no computador do desenvolvedor. Contudo, esse código precisa ser enviado para um repositório remoto, de modo que todos os interessados e autorizados tenham acesso ao código-fonte do produto de *software*, permitindo o trabalho colaborativo. Para atender esta última demanda, utilizou-se a plataforma GitHub.

O Git é um sistema de controle de versão distribuído, gratuito e *open source*, projetado para gerenciar projetos de todos os portes com rapidez e eficiência. Um dos comandos oferecidos por este sistema é o *commit*, que consiste em um procedimento que permite registrar as mudanças no repositório de código, o qual contém os conteúdos atuais e oferece uma mensagem de log descrevendo as mudanças realizadas. Por exemplo, ao construir uma nova atividade no aplicativo, foi realizado um *commit* com uma mensagem indicando que uma nova atividade foi implementada. Seguindo o processo de trabalho, concluída uma nova implementação no código, a mesma é encaminhada para o repositório remoto do GitHub. Manter o código-fonte no repositório remoto permitiu a programação do aplicativo de diferentes localizações geográficas, agilizando o processo de desenvolvimento e oferecendo mais segurança por não centralizar o produto em um único computador.

Concluindo as fases de construção do aplicativo, ocorreram os testes de sistema. Os testes possibilitaram a verificação do funcionamento e da completude das atividades matemáticas propostas, direcionando ajustes pontuais frente eventuais erros. Também foram realizados ajustes nas mensagens de *feedback* oferecidas pelo aplicativo aos seus usuários, buscando valorizar o aprendizado percebido e oferecer orientações a fim de se atender aos objetivos previstos em cada atividade. Também foram realizados testes quanto à adaptação do *layout* do aplicativo em diferentes tamanhos de telas, garantindo a responsividade da aplicação.

Para tanto, a apresentação visual do aplicativo foi testada em diferentes dispositivos através do Chrome DevTools, ferramenta de desenvolvimento do Google Chrome, a qual possibilita a simulação de diferentes dispositivos. As figuras 5 e 6 apresentam os testes realizados em diferentes dispositivos na ferramenta Chrome DevTools.

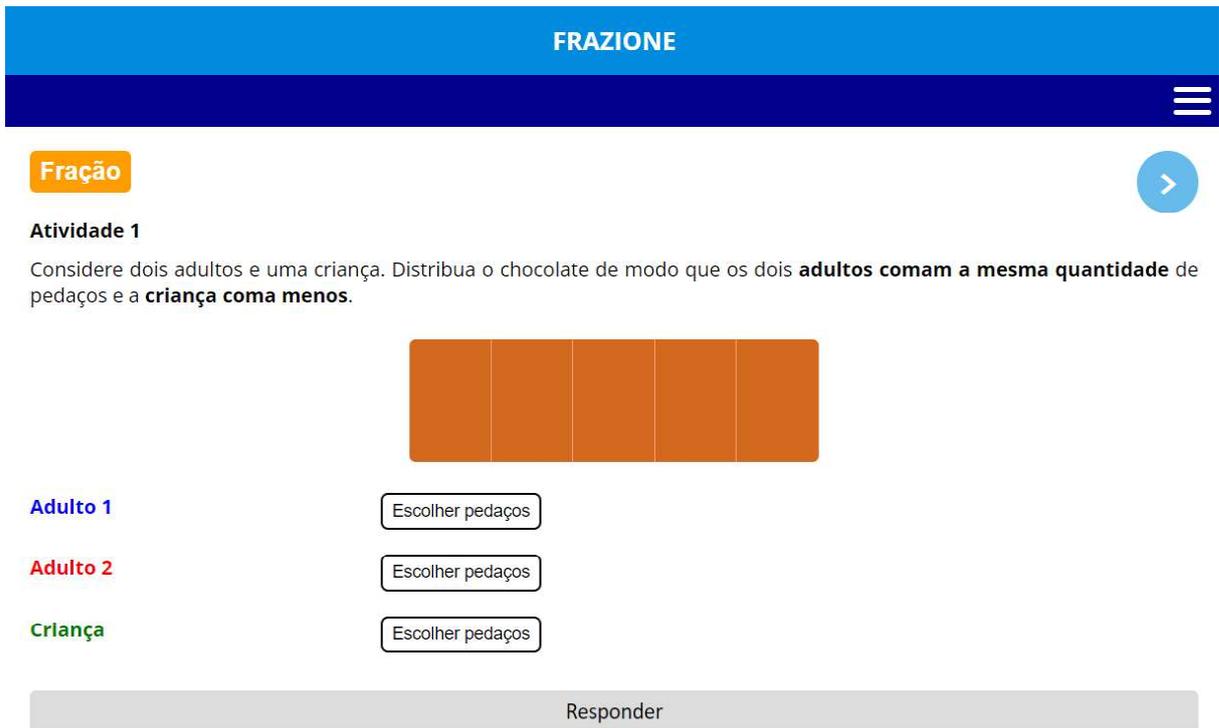
Figura 5 – Aplicativo renderizado em um *smartphone*.



The screenshot shows a mobile application interface. At the top, there is a blue header with the word "FRAZIONE" in white. Below the header is a dark blue bar with a white hamburger menu icon. The main content area has a white background. At the top of this area is an orange button labeled "Fração" and a blue circular button with a white right-pointing arrow. Below these is the title "Atividade 1" in bold black text. The problem text reads: "Considere dois adultos e uma criança. Distribua o chocolate de modo que os dois **adultos comam a mesma quantidade** de pedaços e a **criança coma menos**." Below the text is a horizontal bar divided into five equal orange segments, representing chocolate pieces. Underneath the bar, there are three rows of text and buttons: "Adulto 1" with a button "Escolher pedaços", "Adulto 2" with a button "Escolher pedaços", and "Criança" with a button "Escolher pedaços". At the bottom of the interface is a wide grey button labeled "Responder".

Fonte: Autoria própria.

Figura 6 – Aplicativo renderizado em um *desktop*.

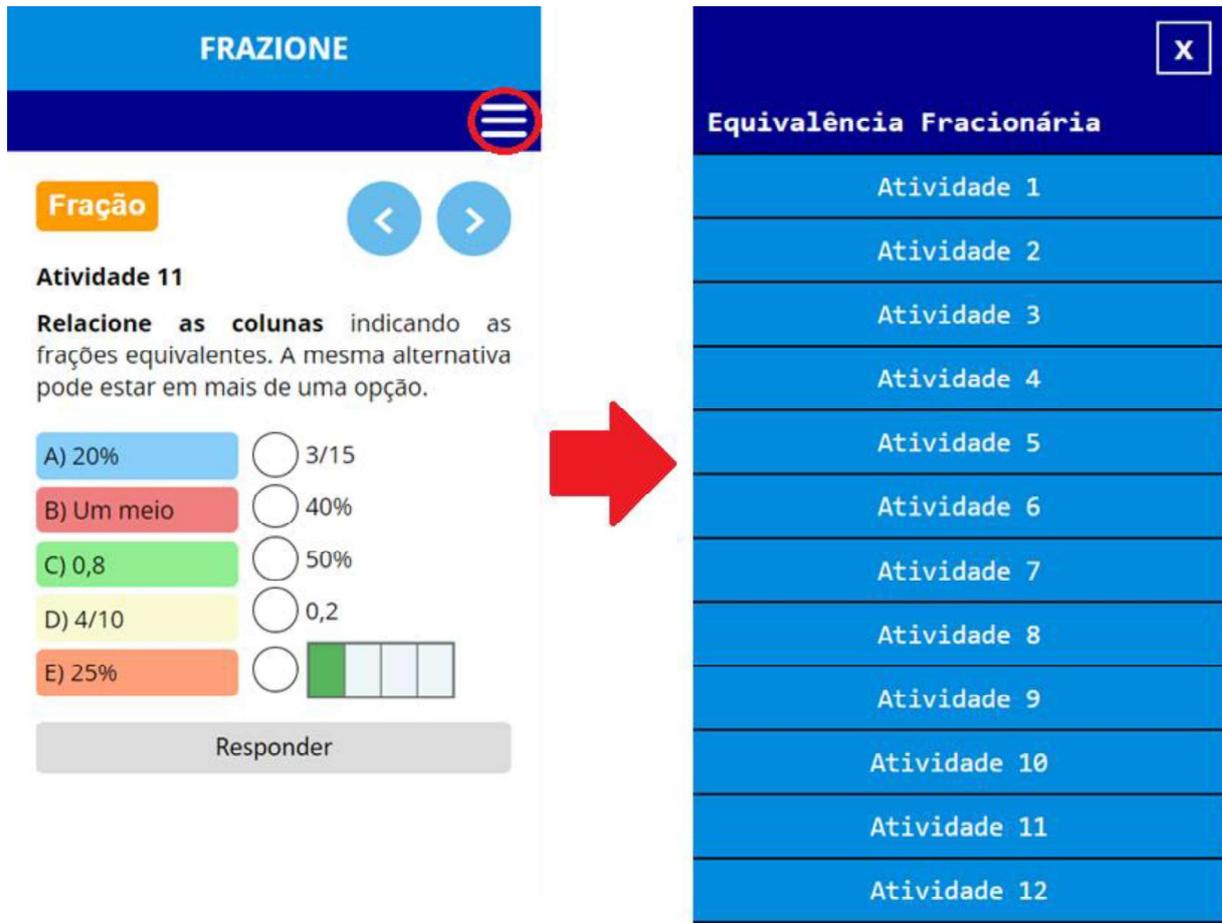


Fonte: Autoria própria.

As tecnologias de programação que fundamentam o aplicativo são basicamente HTML, CSS e JavaScript. A linguagem HTML foi utilizada para determinar os elementos que compõem o aplicativo, enquanto as Folhas de Estilo em Cascata (CSS) ficaram por conta da estilização do produto, a aparência. Com a linguagem de programação JavaScript foram implementados os comportamentos desejados, tais como seleção de elementos visuais, verificação de resultados e respostas, aplicação de estilo de forma dinâmica, criação de elementos de forma dinâmica, entre outras funções.

O funcionamento do aplicativo é direcionado a partir da interação do usuário, que pode interagir com as atividades propostas, bem como navegar entre atividades distintas, avançando e retornando livremente. No entanto, as atividades foram dispostas de forma intencional com níveis de dificuldade gradativos. A lista de navegação para as atividades pode ser acessada ao se clicar no menu, disposto no canto superior direito do aplicativo (ver Figura 7); depois, o usuário pode fechar o menu ou clicar em alguma atividade, que o mesmo será direcionado para ela.

Figura 7 – Sistema de navegação entre atividades.



Fonte: Autoria própria.

O aplicativo oferece diferentes atividades e problemas relacionados à equivalência fracionária na relação parte-todo, para serem racionalizados e resolvidos por seus utilizadores. As atividades são apresentadas de forma sequencial, com níveis de dificuldades gradativos, os quais exigem conhecimentos de atividades anteriores para solucionar as posteriores.

Os mecanismos de respostas de algumas questões são equivalentes, sendo que, em alguns casos, basta o usuário clicar no botão com a resposta escolhida, e o sistema por sua vez exibe uma mensagem em resposta à alternativa selecionada. Outras atividades exigem que o usuário selecione partes de um todo, indicando qual parte pertence a quem, e finalizando com um clique no botão “Responder”. Outro grupo de atividades é caracterizado por disponibilizar mais de uma alternativa correta, priorizando a descoberta de frações equivalentes. Por fim, há atividades que demandam o relacionamento de frações dispostas em uma coluna A com frações de uma coluna B, possibilitando também a marcação de N alternativas corretas.

Durante o desenvolvimento do aplicativo, alguns aspectos pedagógicos foram implementados, dentre os quais se destacam feedback adequado a cada ação do usuário, caráter

evolutivo das atividades, sistema de recompensas e múltiplas soluções para os desafios, através dos quais se objetivou criar mecanismos que contribuam para o engajamento do usuário, de modo a reduzir o desinteresse gerado por aplicativos educativos cujas atividades possuem uma progressão linear e repetitiva.

Cada um dos aspectos citados acima tem uma função específica no aplicativo. Se as atividades iniciais forem muito difíceis, o usuário pode acabar se frustrando; caso sejam muito simples e uniformes, o usuário pode não ser instigado a pensar, refletindo negativamente no desenvolvimento de sua capacidade cognitiva e no aprendizado de fração.

Por conto disto, as atividades presentes no aplicativo possuem um caráter evolutivo, evitando atividades repetitivas e lineares. Deste modo, as atividades iniciais são mais simples que as posteriores, sendo que algumas exigem do usuário conhecimentos preliminares para a sua resolução. Para algumas atividades, o usuário pode conjecturar estratégias diferentes para solucionar os desafios, refletindo diretamente no desenvolvimento do aprendizado.

O sistema de recompensas, no que lhe concerne, é de fundamental importância para o aspecto motivacional do aplicativo, por agregar prazer a sua mecânica. O usuário deve ser recompensado por cada tarefa realizada, variando o nível da recompensa consoante o grau de dificuldade do desafio proposto. Tal mecanismo tem a função de valorizar o aprendizado do usuário (figura 8). No Frazione, a valorização do aprendizado ocorre por meio de mensagens de incentivo, caso o usuário erre a resposta da atividade, e por mensagens de congratulação, nos casos em que o usuário resolve corretamente o desafio proposto.

Figura 8 – Sistema de recompensas como aspecto pedagógico.



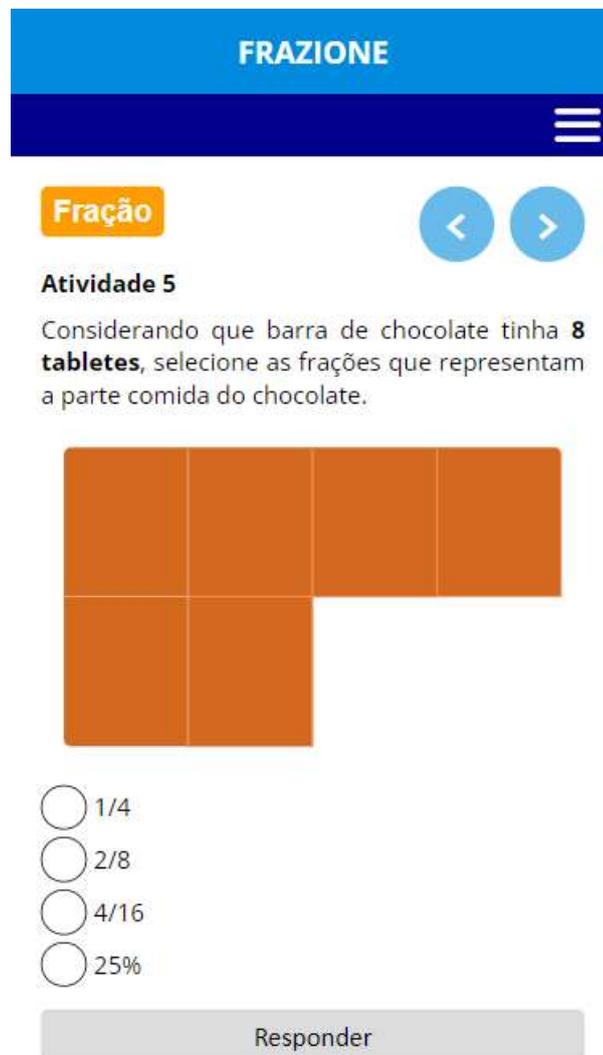
Fonte: Autoria própria.

O último aspecto pedagógico agregado ao Frazione é o feedback adequado, o qual consiste na resposta dada pelo aplicativo ao usuário por alguma ação realizada. Destarte, o usuário pode acompanhar os resultados de suas ações, modificando, caso ache necessário, sua

estratégia de pensamento visando à solução dos desafios. Toda ação realizada pelo usuário deve gerar um retorno até que o desafio seja solucionado.

Recorrendo à teoria de Duval, pode-se traçar um paralelo entre as atividades do aplicativo e o que diz a teoria em termos do processo cognitivo necessário para a aprendizagem matemática. A atividade 5 do aplicativo apresenta a figura de um tablete de chocolate dividido em 8 pedaços de tamanhos iguais, do qual 2 pedaços foram comidos, cujo enunciado traz a seguinte indagação: “Considerando que barra de chocolate tinha 8 tabletes, selecione as frações que representam a parte comida do chocolate”. As alternativas de respostas são: “ $1/4$ ”; “ $2/8$ ”; “ $4/16$ ”; e “25%”. A atividade descrita está representada por meio da figura a seguir.

Figura 9 – Atividade 5 do Frazione.



FRAZIONE

Fração

Atividade 5

Considerando que barra de chocolate tinha **8 tabletes**, selecione as frações que representam a parte comida do chocolate.

$1/4$

$2/8$

$4/16$

25%

Responder

Fonte: Autoria própria.

Primeiramente, observa-se que o objeto matemático em questão é descrito por meio de uma representação semiótica figural, sendo uma representação externa, cuja função inicial é comunicar o objeto matemático. Após ler o enunciado da questão, começa um processo de representação mental visando à objetivação do conhecimento. O sujeito irá racionalizar o contexto do problema buscando compreendê-lo para, então, tratá-lo. Neste ponto, ao ler as possibilidades de respostas apresentadas pela questão, o analisador irá possivelmente realizar uma conversão do registro de representação semiótica apresentado para outro registro de seu conhecimento, comparando o resultado com os registros apresentados pelas respostas. Este processo de conversão irá se repetir até que se encontre a resposta adequada. No fim, havendo a real compreensão do objeto matemático, consoma-se a objetivação do conhecimento. Na atividade em questão, todas as alternativas estão corretas, mostrando a equivalência fracionária entre diferentes registros de representação semiótica.

4.3 Aspecto metodológico de cada atividade do Frazione

Ressalta-se que elementos fracionários foram trabalhados nos enunciados das atividades, nos problemas a serem resolvidos e nos *feedbacks* dados pelo aplicativo, de modo a trabalhar equivalência fracionária em diferentes pontos e momentos. Desse modo, espera-se potencializar os ganhos cognitivos auferidos através do uso do Frazione.

Na atividade 1, o enunciado da questão pede que uma barra de chocolate seja distribuída entre dois adultos e uma criança, de modo que aqueles comam a mesma quantidade e esta coma menos que qualquer um daqueles. Para solucionar o problema, deve-se escolher um dos participantes e, posteriormente, quais pedaços estarão vinculados a este. Observa-se que a referida questão traz uma fração por meio de uma representação gráfica, a qual deve ser trabalhada para que a distribuição ocorra corretamente. Distribuídos os pedaços do chocolate, o usuário deve clicar no botão “Responder”, sendo retornada uma mensagem de congratulação, caso o problema tenha sido resolvido conforme o enunciado, ou de incentivo, caso não o tenha. Uma imagem da atividade 1 pode ser vista na Figura 4.

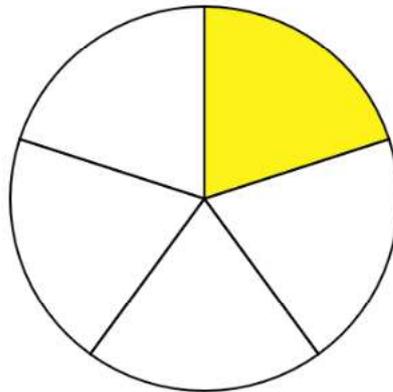
Avançando na apresentação de outros registros de representação semiótica, a atividade 2 exige que seja analisada a imagem de uma pizza, da qual foi comido um pedaço, e que seja indicada a alternativa que representa a fração equivalente à parte restante da pizza. Neste problema, o usuário tem que relacionar uma fração figural a outro tipo de representação semiótica equivalente. Tem-se, nessa atividade, os diferentes tipos de representação de fração: figural, textual, decimal, percentual e fracionária. Aqui, tem-se uma quantidade contínua, uma

vez que a pizza pode ser dividida em partes menores. Nesta atividade, todas as alternativas de respostas estão corretas, cujo intuito é mostrar que uma mesma fração pode ser representada de várias formas. Visando fomentar esse raciocínio, após o usuário selecionar alguma resposta, o aplicativo exibe a mensagem “Você acertou! Sabia que há outras alternativas corretas?”, direcionando-o para a busca de outras possibilidades (vide Figura 10).

Figura 10 – Atividade 2 do Frazione.

Atividade 2

A pizza a seguir foi dividida em **5 pedaços iguais**, dos quais **1 foi comido**. Que fração da pizza foi comida?



20%	0,2
um quinto	1/5

Você acertou! Sabia que há outras alternativas corretas?

Fonte: Autoria própria.

A atividade 3 adota quantidades contínuas, utilizando pessoas como exemplo. O enunciado da atividade pede que se selecione três quartos das pessoas mostradas, de modo que o usuário pode marcar ou desmarcar qualquer pessoa representada. Por sua vez, o sistema de *feedback* alerta o usuário acerca do quanto ele selecionou das pessoas representadas, abordando diferentes representações fracionárias para tanto. Como exemplo, caso o usuário selecione apenas uma pessoa, o aplicativo exibe a mensagem “você marcou $\frac{1}{4}$ das pessoas”; selecionando duas pessoas, tem-se “você marcou 50% das pessoas”. Enfatiza-se a abordagem por meio de

diferentes registros de representação semiótica trazendo fração no enunciado da questão, no problema a ser resolvido e nas mensagens de *feedback*.

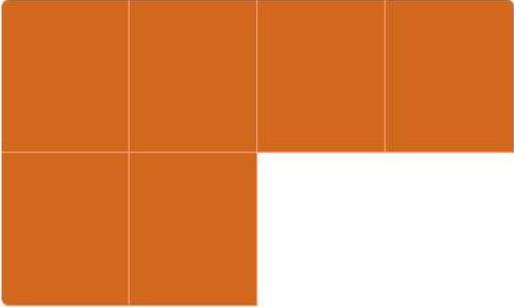
Enquanto outras atividades trabalham com os objetos pizza e barra de chocolate, a atividade 4 considera pessoa, caracterizando uma quantidade contínua, por ser indivisível. No enunciado da atividade, trabalha-se a unidade porcentagem, pedindo para serem selecionadas 75% das pessoas. A medida que o usuário vai tentando resolver o problema, vão sendo exibidas mensagens de *feedback* indicando a fração representativa da quantidade de pessoas selecionadas, adotando-se diferentes representações semióticas para evidenciação da quantidade. O universo considerado na atividade consiste em 8 pessoas e, portanto, selecionando-se 2 delas, é exibida uma mensagem informando que 25% das pessoas foram selecionadas. Conforme vão ocorrendo as seleções, têm-se as seguintes mensagens: “3/8”, no caso de 3 pessoas; “metade”, para 4 pessoas; e “0,625”, para 5 pessoas. São trabalhadas as representações: percentual, fracionária, textual e decimal. Assim sendo, por meio do sistema de *feedback*, o usuário vai acompanhando seu progresso até chegar na quantidade estipulada pelo problema.

Na atividade 5, é dada a representação figural de um chocolate dividido em 8 partes iguais, exigindo-se que o usuário indique a fração correspondente à parte comida do chocolate. As quatro alternativas de respostas apresentadas pela atividade são corretas, podendo o usuário marcar múltiplas delas. De acordo com a quantidade de alternativas selecionadas, são exibidas mensagens indicando a fração representativa da quantidade de respostas corretas. Ou seja, se forem selecionadas 3 alternativas, tem-se a mensagem “Você marcou 75% das alternativas corretas. Continue tentando!”. Esta última parte induz o usuário a continuar racionalizando o problema a fim de buscar mais uma resposta correta. Quanto às respostas possíveis, a questão apresenta: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{16}$ e 25%. Destas, pode-se dizer que a segunda alternativa é a mais intuitiva, pois decorre de uma contagem direta das quantidades representadas através da figura, a quantidade comida e a restante. Por sua vez, a primeira e a última alternativas pressupõem um tratamento diferenciado, exigindo-se a simplificação da fração. Por fim, a fração $\frac{4}{16}$ faz o movimento inverso da simplificação, mas também representa uma alternativa válida, por ser equivalente. Pode-se ver a atividade 5 na Figura 11.

Figura 11 – Múltiplas alternativas corretas na atividade 5.

Atividade 5

Considerando que barra de chocolate tinha **8 tabletes**, selecione as frações que representam a parte comida do chocolate.



1/4
 2/8
 4/16
 25%

Responder

Você marcou todas as alternativas corretas! Parabéns!
2 tentativas

Fonte: Autoria própria.

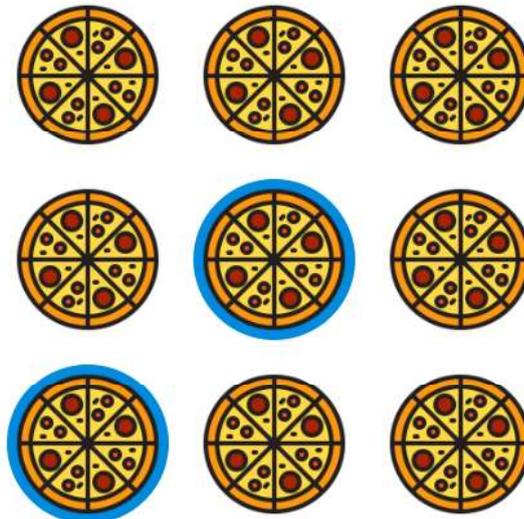
Embora a atividade 6 tenha semelhanças com as atividades 3 e 4, tem-se nessa atividade a alteração dos elementos tomados como exemplo. Essa simples alteração do objeto tido como exemplo, pode representar um obstáculo de aprendizagem, segundo estudos de Bianchini. Daí a importância de também se trabalhar com objetos figurais de natureza diferentes. A atividade 6, por sua vez, pede que se selecione um terço das pizzas representadas, em um total de 9. O usuário deve selecionar a quantidade que achar correta, sem importar a localização, e depois clicar no botão “Responder” para obter um *feedback* do aplicativo. A medida que o usuário vai tentando resolver o problema, vão sendo exibidas mensagens indicando, por meio de porcentagem, o quão próximo se está da resposta correta. Portanto, o usuário acaba por ter que tratar as representações textual, no enunciado, figural, no problema, e percentual no *feedback*. O Frazione oferece ao usuário o dinamismo de poder selecionar ou desfazer a seleção de uma mesma pizza.

Importa destacar o mecanismo de contagem de tentativas utilizado nesta atividade, e em outras também, que visa possibilitar o acompanhamento da quantidade de tentativas, bem como inibir o mero uso do mecanismo de tentativa e erro, sem qualquer trabalho cognitivo. Em alguns testes isolados, realizados com crianças, observou-se uma ligeira tendência de se adotar o procedimento de tentativa e erro para resolver as atividades. A quantidade de tentativas é exibida abaixo da mensagem de *feedback*, como se pode ver na Figura 12.

Figura 12 – Mecanismo de contagem de tentativas na atividade 6.

Atividade 6

Selecione **um terço** das pizzas.



Responder

Você marcou 66,66% da quantidade correta! Pense bem!

3 tentativas

Fonte: Autoria própria.

A atividade 7 se inicia informando que cada barra de chocolate representada foi dividida em 3 partes iguais, sendo que Maria comeu $\frac{4}{3}$ de uma barra. Então, considerando o enunciado e as barras de chocolate graficamente representadas, a atividade pede que seja marcada a quantidade de pedaços de chocolate que Maria comeu. Diante do exposto, o usuário precisa tratar a informação de que 100% de uma barra não representa todo o universo considerado, assim, precisa buscar a quantidade equivalente à fração referenciada. As mensagens de *feedback*

vão informando ao usuário o quanto foi selecionado de uma barra de chocolate, por meio de diferentes representações de fração.

No caso da atividade 8, tem-se a representação de uma barra de chocolate com 12 pedaços, sendo que há uma parte evidenciada em marrom-escuro. Desse modo, a atividade pede para que o usuário marque, dentre as múltiplas alternativas, as respostas que trazem representações equivalentes ao exposto na figura, sendo necessário racionalizar e tratar os diversos tipos de representação fracionária. Ao passo que o usuário vai respondendo à atividade, vão sendo exibidas mensagens trazendo, em forma de fração, a quantidade de respostas corretas, bem como se foi marcada alguma alternativa incorreta. Na resolução do problema proposto, o usuário possivelmente irá identificar algumas questões corretas, como a que traz o valor “ $4/12$ ”, pois retrata o objeto como ele de fato é, bastando que seja feita uma contagem simples. No entanto, para identificar outras alternativas corretas, é necessário que seja feito um movimento de simplificação, permitindo chegar às alternativas como: “ $1/3$ ” e “um terço”.

A atividade 9 exibe duas colunas, uma com valores e representações distintas de frações, e outra apenas com representações figurais de fração, contendo elipse, hexágono e triângulo. No enunciado, pede-se que seja relacionada cada representação gráfica com sua fração correspondente na outra coluna, considerando a parte pintada das figuras. Para responder à questão, o usuário precisa selecionar uma figura fracionária e, posteriormente, clicar na fração equivalente. A figura elíptica contendo 10 partes possui apenas a fração “70%” para representá-la corretamente nesta questão. Por sua vez, a figura do triângulo dividido em três partes, contendo uma parte pintada, pode ser representada corretamente por meio de duas frações equivalentes, sendo a fração “um terço” mais intuitiva, bastando apenas uma contagem simples para chegar nela, e a fração “ $2/6$ ” que, se simplificada, leva a “um terço”. Observa-se também que o hexágono dividido em 6 partes possui duas respostas equivalentes, sendo “ $2/6$ ” e “um terço”, de modo que as duas estão corretas. Para relacionar a fração “um terço” com a figura hexagonal, pode-se realizar o procedimento da simplificação, vindo daquele para este, ou o inverso, indo da figura para aquela fração.

A atividade 10 traz duas colunas com diferentes frações representadas, pedindo que sejam relacionadas as frações representadas em uma coluna com as frações da outra coluna. Embora na primeira coluna haja apenas cinco frações, identificadas pelas primeiras letras do alfabeto, há na outra coluna várias frações equivalentes com as quais elas devem ser relacionadas, sendo um total de dez. Nesta atividade, uma fração da coluna à esquerda pode ter múltiplas frações equivalentes na coluna à direita. A atividade 10 é mostrada na Figura 13.

Figura 13 – Relacionamento de frações equivalentes em duas colunas na atividade 10.

Atividade 10
 Relacione as colunas indicando as **frações equivalentes**.

(A) 

(B) 1/5

(C) 75%

(D) 

(E) Um quarto

(B) 20%

(D) 2/3

(C) 3/4

(E) 25%

(A) 0,5

(A) 50%

(D) 4/6

(B) 0,2

(E) 1/4

(C) 

Responder

Fonte: Autoria própria.

A atividade 11 tem uma proposta semelhante a da atividade 9, mas com a diferença de que aqui se tem apenas uma figura fracionária. No mais, o problema consiste em relacionar as alternativas das duas colunas visando conectar as frações equivalentes. Observa-se que uma mesma alternativa pode estar em mais de uma opção, permitindo que o usuário, em seu trabalho cognitivo, chegue às respostas corretas por diferentes caminhos. Ao fim, o sistema de *feedback* vai conduzindo o usuário até a resposta correta por meio de mensagens que também incluem fração.

Na atividade 12, solicita-se que a barra chocolate seja fracionada entre 3 pessoas, sendo que o enunciado da atividade considera duas representações fracionárias distintas na condução à resolução do problema. Assim, o enunciado pede 0,5 da barra seja distribuída para Manu, ao passo que Eneida tenha o triplo da quantidade de Ana. Para resolver o problema, o usuário pode, por exemplo, realizar a transformação de “0,5 do chocolate” para “metade do chocolate”, facilitando o raciocínio concentrando-se em apenas uma representação fracionária. No caso de Eneida ficar com 2 pedaços e Ana apenas com 1, é exibida a mensagem de que “Eneida comeu 200% a mais que Ana”, visando conduzir à quantidade especificada no enunciado. Por conta

do dinamismo dado pelo aplicativo, o usuário pode livremente marcar e desmarcar qualquer tablete do chocolate para cada participante.

4.4 Propostas metodológicas de uso do Frazione

No que diz respeito à aplicação do Frazione na aprendizagem, existem diversas possibilidades que podem colaborar com o aprendizado de fração. Como observado no estudo de Bianchini, na relação parte-todo, algumas crianças possuem dificuldades em pensar o objeto matemático em outros formatos, por não vislumbrarem uma variação do tamanho das partes. Ou seja, dado um registro de representação figural de uma fração por meio de exemplos com maçãs, não se consegue imaginar exemplo equivalente por meio de outros objetos. Neste aspecto, o Frazione pode ser empregado como instrumento para mostrar diferentes representações figurais de frações equivalentes.

No seu estado atual, o Frazione pode ser utilizado tanto na educação de crianças quanto na formação de professores. Por ser um aplicativo web progressivo, ele pode ser acessado a partir de qualquer lugar que tenha acesso à Internet, ainda que esse acesso ocorra uma única vez, momento em que o usuário pode instalar a ferramenta no seu próprio *smartphone* ou computador, podendo acessá-lo novamente mesmo sem Internet.

Na educação de crianças, o Frazione configura-se como um instrumento metodológico para se trabalhar equivalência fracionária e para aprendizagem de conceitos fundamentais relacionados ao estudo de frações. Ao longo da resolução das atividades, vai se aprendendo novos conceitos e representações que proporcionam uma nova ótica acerca do objeto de estudo, dada a dinâmica do aplicativo, podendo o estudante navegar livremente pelas atividades estrategicamente dispostas.

5 CONSIDERAÇÕES CONCLUSIVAS

Apesar de não conter todas as possibilidades de trabalho com fração matemática, o aplicativo desenvolvido contempla o objetivo proposto, de oferecer atividades para estudo de equivalência fracionária considerando os diferentes registros de representação semiótica, abordando as naturezas das quantidades.

O Frazione pode ser acessado através navegadores de Internet por meio de sua URL (*Uniforme Resource Locator*), sendo o seu acesso independente do sistema operacional do dispositivo do usuário. Além disso, o aplicativo pode ser instalado no dispositivo do usuário, facilitando o seu acesso em outros momentos. Por ser um aplicativo web progressivo, vale destacar que ele pode ser acessado mesmo sem Internet, desde que ele já tenha sido instalado depois do primeiro acesso. O aplicativo Frazione pode ser acessado através do endereço eletrônico (<https://frazione-c58cd.web.app/>, acesso em 12 fevereiro 2024).

Com base na pesquisa, foram elaboradas propostas de trabalho, as quais foram descritas na seção 4.2 deste documento. Algumas das propostas sugeridas carecem da implementação de novas funções no aplicativo, implicando na refatoração do *software* para a inclusão de novos recursos. As outras sugestões de pesquisa lá descritas podem ser executadas considerando-se o Frazione no estado em que se encontra.

Conclui-se que o aplicativo Frazione se configura como uma relevante ferramenta metodológica para se trabalhar equivalência fracionária, considerando diferentes representações para fração. A sua aplicação pode ser tanto focada no aluno, quanto no professor. Naquele, o aplicativo exerce a função de auxiliar nos estudos, possibilitando a resolução de diversas atividades com níveis de dificuldade diversos. Neste, o aplicativo pode se apresentar como um aliado na preparação de estratégias de ensino.

5.1 Contribuições da pesquisa

No seu estado atual, o aplicativo Frazione pode ser utilizado como instrumento metodológico para trabalhar o estudo de equivalência fracionária e diferentes representações de fração na Educação Básica de escolas da rede pública e privada. Conquanto o estudo de equivalência de frações esteja previsto apenas no 6º ano do Ensino Fundamental na BNCC, o Frazione pode ser trabalhado desde anos anteriores, de modo a contribuir para a compreensão de conceitos iniciais relacionados à fração. No entanto, recomenda-se sua utilização a partir do

5º do Ensino Fundamental, uma vez que os estudantes já terão, pelo menos teoricamente, desenvolvido a habilidade de reconhecer as frações mais usuais.

O Frazione também pode ser aplicado na formação de professores que ensinam matemática, tanto na capacitação de professores para o uso de recursos tecnológicos como instrumento metodológico para o ensino, quanto na reafirmação do aprendizado de fração pelo próprio professor. Naquele caso, o professor pode descobrir novos caminhos que contribuam para a consolidação do aprendizado do aluno.

Por estar disponibilizado na Internet, o Frazione pode ser adotado como ferramenta de estudo para o aprendizado de fração por estudantes do mundo todo, principalmente por aqueles de países que tenham o domínio da língua portuguesa. Para ter acesso ao aplicativo, basta digitar seu endereço na Internet, a URL. Ademais, ao acessar pela primeira vez o aplicativo, o usuário tem a opção de criar um atalho para acessá-lo na área de trabalho do seu *smartphone*, aparecendo para ele como se fosse um aplicativo nativo, mas funcionando no navegador *web*.

5.2 Trabalhos futuros

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foram identificadas algumas possibilidades de melhoria e de continuação a partir de futuras pesquisas, as quais incluem: avaliação da efetividade do Frazione no aprendizado de equivalência fracionária; utilização do Frazione para trabalhar operações com frações, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; criação e customização de atividades por meio do Frazione; ampliação do alcance do Frazione por meio da adaptação para novos idiomas. Os três últimos casos demandariam, necessariamente, uma ampliação das funções do aplicativo.

Na primeira proposta, pode-se trabalhar em uma linha de pesquisa que faça uso do aplicativo do jeito que ele se encontra, aplicando-o em turmas do Ensino Fundamental e utilizando-se de estratégias diversas para atestar a efetividade da ferramenta no aprendizado de equivalência fracionária, talvez por meio da aplicação de testes antes e depois da implantação do Frazione como estratégia de ensino. A outra linha a ser seguida demanda a implementação de novas funções no aplicativo, de modo que ele mesmo, com o auxílio de um sistema *backend* (responsável por conter as regras de negócio e fornecer acesso a um sistema de armazenamento) e um banco de dados, possa registrar e armazenar um histórico de atividades realizadas pelo estudante ao longo do tempo, possibilitando o acompanhamento do seu desempenho.

Na segunda proposta, por sua vez, podem ser implementadas novas atividades que demandem a realização de operações com frações para a sua resolução, situação em que haverá

um aprofundamento no estudo de frações, haja vista as novas atividades com um maior nível de complexidade, além de demandar conhecimentos prévios. No próprio aplicativo, as atividades podem ser organizadas e dispostas conforme os tipos de operações possíveis.

No último caso, o Frazione pode ser adaptado para permitir que os próprios professores criem suas atividades segundo as regras de fração. Assim, o aplicativo pode oferecer recursos pré-configurados, os quais podem ser dispostos de diferentes maneiras durante a criação de atividades, tais como imagens, gráficos, diferentes representações de fração, etc. Ademais, pode-se oferecer estratégias diversificadas para a resposta das atividades: campo para o estudante digitar a resposta; questões do tipo múltipla escolha com uma ou mais alternativas corretas; colunas para relacionamento; entre outras.

Desse modo, os professores terão autonomia para criar suas próprias atividades, podendo inclusive elaborar trilhas de atividades específicas para cada aluno, conforme objetivos individuais de aprendizagem. Neste caso, há um potencial ganho na efetividade do aplicativo para o aprendizado de fração matemática, por considerar as especificidades de cada estudante.

O aplicativo Frazione também pode ter seus horizontes ampliados, bastando que sejam adicionados novos idiomas para a tradução dos textos. Assim, conforme a origem ou a linguagem do dispositivo que acessa o aplicativo, os textos podem ser ajustados para o idioma correspondente. Além disso, pode ser disponibilizada de forma direta e clara a função para a alteração do idioma, impactando nos textos, gráficos e imagens exibidos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Luis M. O que aconteceu com a educação no Brasil? 2003.

BRAGA, Karen Luana Luana et al. O uso de aplicativos no ensino de frações: reflexões no âmbito da iniciação à docência. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 4, p. 167-201, 2022.

CAVALCANTI, Érica; GUIMARÃES, Gilda. Diferentes Significados de Fração: Análise de Livros Didáticos das Séries Iniciais. 2007.

BEZERRA, José Geraldo de Lima. **Os significados de fração em livros didáticos de matemática: uma análise com base nos parâmetros curriculares nacionais**. 2017.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif et al. Estudo sobre a aplicação de uma sequência didática para o ensino dos números decimais. 2001.

CANOVA, Raquel Factori et al. Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração. 2006.

CARVALHO, Euvaldo de Souza. Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração. 2017.

DAMICO, Alecio et al. Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental. 2007.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern, Berlin, Frankfurt/M. New York, Paris, Wien: Peter Lang, éditions scientifiques européennes, 1995.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, Raymond; THADEU, Mércles. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GESSER, Veronica. A evolução histórica do currículo: dos primórdios à atualidade. **Revista Contrapontos**, v. 2, n. 1, p. 69-81, 2002.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

HWANG, Wu-Yuin et al. Evaluation of fraction learning in authentic context using Ubiquitous Fraction App. *Education and Information Technologies*, p. 1-25, 2022.

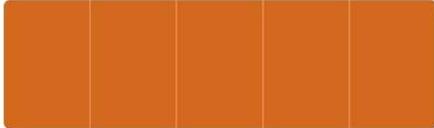
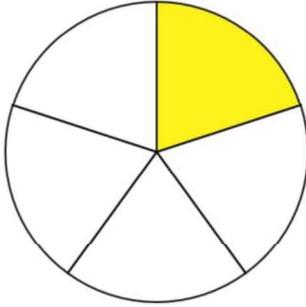
GARCIA, Janaina Pires. Breve percurso histórico para pensar a questão dos PCNs na educação brasileira. **Revista Educação Pública**, 2011.

KERSLAKE, Daphne. **Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project**. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd., Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF, England., 1986.

- LIMA, L. O. Estórias da educação no Brasil: de Pombal a Passarinho. Rio de Janeiro: Brasília, 1969.
- MATTAR, João. Games em educação: como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- MERLINI, Vera Lucia et al. O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005.
- MOREIRA, Antônio Flávio Barbosa. **Currículos e programas no Brasil**. Papirus Editora, 1990.
- NUNES, Terezinha et al. Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.
- OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Fração"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/fracao.htm>. Acesso em 12 de março de 2023.
- PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. **Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.**
- PRÄSS, Alberto Ricardo. Teorias de aprendizagem. ScriniaLibris. com, p. 23, 2012.
- PEREIRA, Stheve Balbinotti. Ansiedade informacional: o caso dos estudantes do Emancipa da unidade Centro Histórico de Porto Alegre. 2019.
- SANTANA, Larissa Elfisia de Lima et al. Fração e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. **Anais do XI ENEM–Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. SBEM: Curitiba, 2013.**
- SANTANA, Larissa Elfisia de Lima. A conversão entre representações semióticas: um estudo no domínio das frações à luz de Duval e Vergnaud. 2018.
- SCHUBERT, William Henry. Curriculum: Perspective, paradigm, and possibility. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1986.
- TRESSINO, Chirley Inês Fraporti. OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE. Produções Didático-Pedagógicas. VOLUME II. 2014.
- VIZOLLI, Idemar et al. Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem. 2001.
- VIZOLLI, Idemar. Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção/porcentagem. Curitiba/Paraná, 2006.

APÊNDICE

APÊNDICE A – Telas das Atividades do Aplicativo Frazione

<div data-bbox="279 472 783 600"><p>FRAZIONE</p></div> <div data-bbox="304 624 405 667"><p>Fração</p></div> <div data-bbox="691 624 756 689"><p>></p></div> <div data-bbox="304 696 424 719"><p>Atividade 1</p></div> <div data-bbox="304 741 759 846"><p>Considere dois adultos e uma criança. Distribua o chocolate de modo que os dois adultos comam a mesma quantidade de pedaços e a criança coma menos.</p></div> <div data-bbox="312 882 746 1010"></div> <div data-bbox="304 1043 392 1066"><p>Adulto 1</p></div> <div data-bbox="443 1043 608 1077"><p>Escolher pedaços</p></div> <div data-bbox="304 1111 392 1133"><p>Adulto 2</p></div> <div data-bbox="443 1111 608 1144"><p>Escolher pedaços</p></div> <div data-bbox="304 1178 392 1200"><p>Criança</p></div> <div data-bbox="443 1178 608 1211"><p>Escolher pedaços</p></div> <div data-bbox="304 1249 756 1294"><p>Responder</p></div>	<div data-bbox="885 472 1390 600"><p>FRAZIONE</p></div> <div data-bbox="911 624 1011 667"><p>Fração</p></div> <div data-bbox="1219 624 1284 689"><p><</p></div> <div data-bbox="1299 624 1364 689"><p>></p></div> <div data-bbox="911 696 1031 719"><p>Atividade 2</p></div> <div data-bbox="911 741 1366 824"><p>A pizza a seguir foi dividida em 5 pedaços iguais, dos quais 1 foi comido. Que fração da pizza foi comida?</p></div> <div data-bbox="983 860 1289 1167"></div> <div data-bbox="911 1200 1150 1234"><p>20%</p></div> <div data-bbox="1177 1200 1364 1234"><p>0,2</p></div> <div data-bbox="911 1263 1150 1296"><p>um quinto</p></div> <div data-bbox="1177 1263 1364 1296"><p>1/5</p></div>
--	---

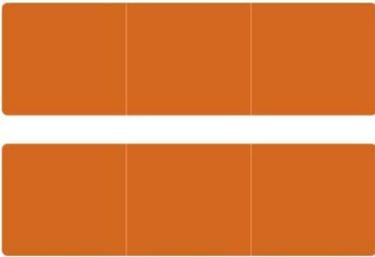
<div data-bbox="316 241 748 353"> <p>FRAZIONE</p> </div> <div data-bbox="336 376 724 434"> <p>Fração < ></p> </div> <div data-bbox="331 439 718 499"> <p>Atividade 3 Selecione três quartos das pessoas a seguir.</p> </div> <div data-bbox="363 524 699 757"> </div> <div data-bbox="336 792 724 833"> <p>Responder</p> </div>	<div data-bbox="922 241 1355 353"> <p>FRAZIONE</p> </div> <div data-bbox="943 376 1331 434"> <p>Fração < ></p> </div> <div data-bbox="938 439 1324 499"> <p>Atividade 4 Selecione 3/4 das pessoas a seguir.</p> </div> <div data-bbox="970 524 1305 891"> </div> <div data-bbox="943 927 1331 967"> <p>Responder</p> </div>
<div data-bbox="316 1144 748 1256"> <p>FRAZIONE</p> </div> <div data-bbox="336 1279 724 1337"> <p>Fração < ></p> </div> <div data-bbox="331 1341 730 1447"> <p>Atividade 5 Considerando que barra de chocolate tinha 8 tabletes, selecione as frações que representam a parte comida do chocolate.</p> </div> <div data-bbox="341 1473 719 1700"> </div> <div data-bbox="331 1727 416 1879"> <p><input type="radio"/> $1/4$ <input type="radio"/> $2/8$ <input type="radio"/> $4/16$ <input type="radio"/> 25%</p> </div> <div data-bbox="336 1897 724 1937"> <p>Responder</p> </div>	<div data-bbox="922 1144 1355 1256"> <p>FRAZIONE</p> </div> <div data-bbox="943 1279 1331 1337"> <p>Fração < ></p> </div> <div data-bbox="938 1341 1324 1402"> <p>Atividade 6 Selecione um terço das pizzas.</p> </div> <div data-bbox="959 1429 1321 1787"> </div> <div data-bbox="943 1823 1331 1863"> <p>Responder</p> </div>

FRAZIONE

Fração < >

Atividade 7

Sabendo que Maria comeu o equivalente a $\frac{4}{3}$ de uma barra de chocolate. Marque a quantidade de pedaços que ela comeu.



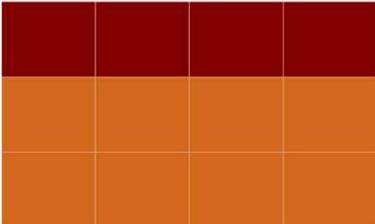
Responder

FRAZIONE

Fração < >

Atividade 8

Marque as alternativas que representam a fração evidenciada em **marrom escuro**.



Um terço $\frac{4}{12}$
 $\frac{8}{12}$ $\frac{1}{3}$
 33% 30%
 0,3333 0,4

Responder

FRAZIONE

Fração < >

Atividade 9

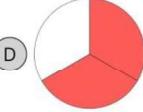
Relacione a parte pintada de cada figura com sua fração correspondente.

(A) 

70%
 $\frac{2}{6}$
 Um terço
 $\frac{2}{3}$

(B) 

(C) 

(D) 

Responder

FRAZIONE

Fração < >

Atividade 10

Relacione as colunas indicando as **frações equivalentes**.

(A) 

20%
 $\frac{2}{3}$
 $\frac{3}{4}$
 25%
 0,5
 50%
 $\frac{4}{6}$
 0,2
 $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) 75%

(D) 

(E) Um quarto



Responder

FRAZIONE

Fração

<

>

Atividade 11

Relacione as colunas indicando as frações equivalentes. A mesma alternativa pode estar em mais de uma opção.

A) 20%	<input type="radio"/>	3/15
B) Um meio	<input type="radio"/>	40%
C) 0,8	<input type="radio"/>	50%
D) 4/10	<input type="radio"/>	0,2
E) 25%	<input type="radio"/>	<div style="display: flex; gap: 2px;"> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: #008000;"></div> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: #ADD8E6;"></div> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: #ADD8E6;"></div> <div style="width: 15px; height: 15px; background-color: #ADD8E6;"></div> </div>

Responder

FRAZIONE

Fração

<

Atividade 12

Divida o chocolate de modo que Mano coma a fração **0,5** da barra e Eneida coma o **triplo** da quantidade de Ana.

Mano Escolher pedaços

Ana Escolher pedaços

Eneida Escolher pedaços

Responder