UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RODRIGO PEREIRA DOS SANTOS

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL: Base Numérica

ARRAIAS-TO
2022

RODRIGO PEREIRA DOS SANTOS

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL: Base Numérica

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Profº. Drº. Eudes Antonio da Costa.

Orientador: Profº. Drº. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S237s Santos, Rodrigo Pereira dos.
Sistema de numeração posicional: base numérica . / Rodrigo Pereira dos Santos. – Arraias, TO, 2022.
39 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Base. 2. Sistema Posicional. 3. Numeração. 4. Sistema Decimal. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

FOLHA DE APROVAÇÃO

RODRIGO PEREIRA DOS SANTOS

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL: Base Numérica

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de licenciatura em Matemática para obtenção do título de graduado e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 28 / 06 / 2022

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (Orientador), UFT

Prof. Dr. Elis Gardel da Costa Mesquita (Examinador), UFT

Douglas Catulio dos Santos

Prof. Me. Douglas Catulio dos Santos (Examinador), IFBA

ARRAIAS/TO
2022

Dedico este trabalho
A minha mãe em nome de toda minha família, por ser um dos maiores motivos pelo qual luto diariamente.
Ao meu orientador, que jamais mediu esforços para me orientar durante a realização desta pesquisa. E enfim a todos que de alguma forma essa pesquisa possa ajudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me abençoar e me manter com fé e foco em alcançar meus objetivos.

Agradeço à minha mãe Geni Pereira da Cunha, meu pai Izaias Dias dos Santos e minha madrasta Gertrudes Moreira, por me motivar a sempre buscar alcançar as minhas metas e objetivos, e pelo apoio e incentivo prestados durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço à meus irmãos Geane, Idean, Keylla, Marllon, Ramon, Regimara, Wemerson, em especial a minha irmã Renaldete por tamanha ajuda durante toda a minha jornada acadêmica. Aos meus tios, principalmente a minha tia, Aureliana Santos, a qual me prestou grandes motivações e incentivação.

Agradeço aos amigos (as), Denise Valadares, Edilson Galdino, Jarilda Aquino, Jordana Martins, Juami Aquino, Lourienny Ellen, Luan Mendes, Márcio Júnior, Olívia Ribeiro, Rodrigo Reges, Samara Carvalho e Vanessa Farias pessoas que sempre estiveram ao meu lado e me deram total apoio.

Agradeço a banca examinadora que contribuiu grandemente para a melhoria deste trabalho.

Agradeço aos professores (as) e colegas que de alguma forma colaboraram no meu processo de ensino e aprendizagem no curso de Licenciatura em Matemática.

Agradeço especialmente ao professor Eudes Antonio, pela orientação para realização desta pesquisa.

Muito Obrigado!

"Verdadeiramente, o nosso sistema decimal, baseado em contagem de 10, dá-nos diretrizes e, sapiência para atentar, que temos bem próximos, 5 amigos e 5 inimigos."

Kabral Araujo

RESUMO

Neste trabalho apresento uma monografia intitulada por *"Sistema de Numeração Posicional: Base Numérica"*. Este trabalho seguiu o método de pesquisa bibliográfica de forma exploratória com o intuito de representar ou exibir os números inteiros negativos sem o sinal de menos, mostrar ainda que essa forma é única em uma base b fixada. Para a realização desta pesquisa tivemos como principais embasamentos teóricos os seguintes autores Domingues, Eves, Garbi e Santos. Com esse estudo foi possível mostrar que qualquer número inteiro pode ser escrito sem o sinal de menos, e que esta escrita é única. Portanto podemos concluir que existe uma bijeção entre os números inteiros diferentes de zero e os números naturais diferentes de zero, provando assim mais uma vez, que há uma igualdade entre o número de elementos entre o conjunto de números inteiros não nulos e o conjunto dos números naturais. Diante dos resultados encontrados, mostra-se que o intuito e os objetivos do trabalho foram alcançados, por outro lado esta pesquisa, considerada como pesquisa básica, me proporcionou a oportunidade de conhecer um pouco mais sobre notação de numeração posicional, além de um amadurecimento como pesquisador e profissionalmente.

Palavras-chave: Bases; Sistema Posicional; Numeração.

ABSTRACT

In this work I present a monograph entitled *"Positional Numbering System: Numerical Base"*. This work followed the method of bibliographic research in an exploratory way in order to represent or display negative integers without the minus sign, further showing that this shape is unique on a fixed b basis. For the accomplishment of this research we had as main theoretical bases the following authors Domingues, Eves, Garbi and Santos. With this study it was possible to show that any integer number can be written without the minus sign, and that this writing is unique. Therefore, we can conclude that there is a bijection between nonzero integers and nonzero natural numbers, thus proving once again that there is an equality between the number of elements among the set of non-zero integers and the set of natural numbers. In view of the results found, it is shown that the purpose and objectives of the work were achieved, on the other hand this research, considered as basic research, provided me with the opportunity to know a little more about positional numbering notation, in addition to a maturation as researcher and professionally.

Keywords: Bases; numbering; Positional System.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este presente Trabalho de Conclusão de Curso apresenta uma monografia intitulada por *"Sistema de Numeração Posicional: Base Numérica "*. Rodrigues (2015) aponta que a necessidade de representar os números levou a humanidade à criação de diversos diversos métodos com tal finalidade, chamados sistemas de numeração.

Domingues (1991, p. 1) aponta que a ideia de *Sistema de Numeração Posicional ou Base* surgiu devido a necessidade de contar conjuntos cada vez mais numerosos, efetuar cálculos, de maneira que sem a sistematização do processo de contagem e analogamente ao procedimento de escrever ou representar essas quantidades, seria um processo trabalhoso ou enfadonho. Porém mesmo com esse papel de destaque para a representação dos números, a definição ou conceito dos sistemas de numeração e o posicional de base b, ainda é pouco explorado na educação básica, sendo trabalhado de maneira primária apenas nas primeiras séries do ensino fundamental 1 e 2. Neste sentido, por este papel de destaque nas ciências, em especial a Matemática esse tema ou assunto tem o objetivo de proporcionar um melhor entendimento sobre a representação de um número inteiro através de um *Sistema de Numeração Posicional* de base $b > 1$ fixa.

Comumente utilizamos *Sistema de Numeração Posicional* para representar ou indicar os números inteiros, usamos ainda o sinal de menos quando necessário para indicar os números negativos, com base neste fato surgem algumas dúvidas, tais como: Podemos representar qualquer número inteiro sem o sinal de menos? Podemos garantir a unicidade dessa representação, isto é, que essa forma de é única? Assim, debruçando-se em uma pesquisa bibliográfica este presente trabalho objetiva-se em exibir os números inteiros sem o sinal de menos, mostrar ainda a unicidade desta escrita para qualquer base b fixada, com $|b| > 1$. Além disso, esperamos contribuir futuramente para novas pesquisas ou até mesmo novas abordagens sobre o referido tema.

Este trabalho está organizando em 5 capítulos correlacionados. Neste capítulo 1, Introdução, apresenta por meio de uma contextualização histórica o tema proposto no trabalho e além disso são abordadas as limitações do trabalho permitindo uma visão clara do escopo proposto. O capítulo 2 aborda o procedimentos metodológicos e uma caracterização do estudo através do problema de pesquisa, na qual apresenta o problema de pesquisa, hipótese, justificativa, definição dos objetivos e metodologia adotada. O capítulo 3 trata do referencial teórico, cujo capítulo inicia abordando a contextualização histórica do *Sistema de Numeração Posicional*, em seguida discorre sobre a base b, as operações em uma base b e outras técnicas operatórias ainda pouco difundidas. O capítulo 4 apresenta a representação de um número inteiro qualquer de uma base b negativa, abordando ainda como esse processo finaliza e sua unicidade, mudanças entre bases negativas, reconhecimento dos números inteiros numa base negativa e a ordenação de números em base negativa. E para finalizar o capítulo 5 traz as considerações, as quais são abordadas mediante o decorrer da pesquisa.

2 Procedimentos Metodológicos e a Pesquisa

Neste capítulo serão apresentados os elementos norteadores para a realização dessa pesquisa e a metodologia escolhida para a realização da mesma.

2.1 Problema de pesquisa

Rodrigues (2015) enfatiza que ao nos referimos a Matemática, os sistemas de numeração juntamente com as formas, constituem o principal objeto de estudo da Matemática, da mesma maneira são os sistemas de numeração que nos fornecem argumentos para justificar os procedimentos adotados para efetuar as operações aritméticas básicas (adição e multiplicação). Assim é de suma importância que o professor de Matemática tenha uma excelente compreensão sobre notação acerca do sistemas de numeração, principalmente, do *Sistema de Numeração Posicional Decimal.*

Portanto afim de uma melhor compreensão sobre notação de sistema numeração podem surgir vária indagações, na qual uma delas é; em relação ao *Sistema de Numeração Posicional* (processo de escrita dos números) é possível escrever ou representar um número inteiro negativo sem usarmos o sinal de menos? Caso seja, possível algo nos garante que essa maneira seja única?

2.2 Hipótese

De acordo com Santos (2015), qualquer número inteiro pode ser escrito sem o sinal de menos, mesmo que sejam negativos, visto que podemos descrevê-los utilizando um agrupamento, o qual chamaremos de base, de quantidades menores que zero, isto é, existe um $b < 0$, uma base negativa. Dessa forma, descrevemos uma maneira única de representar um número inteiro em um *Sistema de Numeração Posicional Decimal.* com uma base $b < 0$ fixa.

2.3 Justificativa

A pesquisa realizará a verificação de como qualquer número inteiro pode ser descrito sem o sinal de menos. A pesquisa sobre *"Sistema de Numeração Posicional ou Base"* tem como finalidade proporcionar um melhor entendimento sobre notação posicional, além disso, podendo futuramente contribuir para novas abordagens na apresentação ou ensino deste assunto no Ensino Fundamental.

2.4 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é exibir os números inteiros sem o sinal de menos, mostrar ainda que essa forma é única em uma base b fixada. Para alcançar o objetivo geral, primeiramente pretende-se atingir os seguintes objetivos específicos: explorar o tema *"Sistema de Numeração Posicional"*, identificar as suas principais propriedades, escrever números inteiros negativos sem a utilização de sinal de menos e por outro lado, sendo possível essa escrita, mostrar que essa maneira é única.

2.5 Metodologia

Nossa pesquisa é classificada como pesquisa bibliográfica de forma exploratória, na qual tem como referenciais de pesquisa os estudos de livros e artigos. Sendo assim para alcançar os objetivos propostos essa pesquisa tem como principais embasamentos teóricos os escritos de Domingues (1991), Garbi (2021) e Santos (2015).

Para Gonsalves (2003) a pesquisa exploratória

> é aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de fornecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominada "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema. (GONSALVES, 2003, p. 65 apud MENESES, 2019)

Ainda segundo Gonsalves (2003 apud Meneses 2019), esse tipo de pesquisa ajuda o pesquisador a compreender ou aprimorar o conhecimento sobre um determinado assunto, de modo que ao seu término, seus resultados possam levar a outras pesquisas e novas abordagens, assim podemos notar que retrata exatamente um dos objetivos da pesquisa.

Vergara (2006, p. 48 apud Meneses 2019) afirma que esse tipo de pesquisa "fornece instrumental analítico para qualquer outro tipo de pesquisa, mas também pode esgotar-se em si mesma". Isso equivale a dizer que uma pesquisa dessa natureza pode anteceder outra, mais descritiva ou explicativa, valendo-se de um aprofundamento na área (ou no tema) em que deseja-se pesquisar.

Já Dalberio e Dalberio (2009 apud Meneses 2019) destacam que esse tipo de pesquisa tem a vantagem de possibilitar, sem muitos custos, o acesso do pesquisador a uma amplitude de fontes. Porém, esses autores alertam que "o pesquisador deve tomar cuidado com a fidedignidade e validade científica das informações (sob o risco de) incorrer em possíveis incoerências e contradições causadas por materiais de baixa credibilidade" (DALBERIO e DALBERIO, 2009, p. 167 apud MENEZES 2019). Sendo esse material impresso ou até mesmo digital. Para que não ocorra esse tipo de erro, é de importância que o pesquisador certifique-se de que as fontes utilizadas são de fato fontes confiáveis, através de observações e da análise de estudos utilizados das mesmas fontes.

3 Sistema de Numeração Posicional ou Bases

Neste capítulo será abordado o referencial teórico, ou seja, abordaremos a contextualização histórica do *Sistema de Numeração Posicional*, adição e multiplicação na base b, divisão euclidiana e algumas técnicas operatórias utilizadas por outros povos.

Para a realização desta pesquisa discutimos principalmente os seguintes trabalhos, Domingues (1991) aborda nos "Fundamentos de Aritmética" um dos tópicos, o *Sistemas de Numeração Posicional ou Base*; enquanto Eves (2011) apresenta uma Introdução da História da Matemática; já Garbi (2014) descreve sobre a base 2 e sua importância no mundo digital; Por fim Santos (2015) discorre sobre os números inteiros sem o sinal de menos (negativo).

3.1 Contextualização histórica

Para Eves (2011) a Matemática é considerada como conhecimento ou ciência mais antiga sendo resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número; portanto iniciaremos destacando a origem do conceito primitivo de número (representar quantidades) e do processo de contar ou medir. O autor afirma que o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se bem antes dos primeiros registros históricos, afirmando ainda que é razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, tendo pelo menos a capacidade de distinguir "mais" ou "menos" quando se acrescentavam ou retiravam respectivamente alguns objetos de uma determinada coleção. Há estudos que mostram que alguns animais também são dotados de tal senso, para coleções pequenas.

De acordo com Domingues (1991) a aritmética tem início quando o homem começa a contar e, por consequência, a associar números (ainda que implicitamente) a coleção de objetos, e seres que os rodeavam. Segundo ele, até nas culturas menos desenvolvidas poderiam distinguir entre um e dois, e ainda que esse fato é confirmado pela antropologia, por meio de estudos sobre culturas primitivas que permaneceram até a nossa época. Como algumas tribos aborígenes da Austrália capazes de contar apenas até dois, podendo quantificar qualquer coleção com mais de um par de elementos simplesmente por "muitos".

Domingues (1991) registra ainda que:

> Dessa maneira é que talvez há uns 30000 anos atrás começaram a preocupar-se com o registro de quantitativos de entes e coisas ligadas à sua vida tribal: os familiares, cabeça de gado, dias que se passaram desde de um certo evento e etc. É bem provável que esse registro era feito através da ideia de correspondência biunívoca, ou seja, através da associação de cada elemento a ser quantificado, por uma marca ou elemento de outro conjunto (mais fácil de ter junto a si ou de manipular), o qual passava a servir de referência. (DOMINGUES, 1991, p. 1).

Domingues (1991, p. 1) cita ainda como exemplo, "os dedos da mão e se necessário, os dos pés, poderiam ser usados para indicar os membros de uma família". Porém, ao se tratar de um clã ou de um rebanho, na maioria das vezes poderia acontecer do rebanho possuir mais elementos que todos os dedos de um indivíduo. Assim sendo necessário a utilização de pedras para a contagem (associação) dos rebanhos nas saídas e voltas dos pastoreios, sendo uma pedra para cada animal que saísse para o pastoreio, caso faltasse um animal na volta eles saberiam, pois restaria uma pedra no monte, porém essa estratégia ainda estava muito longe de ser um sistema quantitativo ideal.

Praticamente nessa mesma época foi encontrado um registro de correspondência (associação) um-a-um, porém esse registro não era assentado em coleção de animais, familiares etc, sendo provavelmente uma nova forma do uso da idéia de correspondência biunívoca.

> Em 1937 Karl Absolom encontrou na Tchecoslováquia uma tíbia de lobo de aproximadamente 7 polegadas de comprimento, datando de cerca de 30000 anos, na qual estão gravadas 55 cortes transversais, em grupos de 5, sendo que os 25 primeiros se acham separados dos demais por um par de cortes maiores. (DOMINGUES, 1991, p. 2)

Ainda por Domingues (1991, p. 2) "foi suposto que por trás desse fato estaria o embrião de outra das ideias fundamentais da Matemática, ou seja, a ideia de base de um sistema de numeração, no caso de base 5". Assim:

> Cada cinco unidades simples formava uma unidade de ordem imediata superior e cinco destas últimas formavam uma unidade da seguinte, se essa era a ideia usada, sem dúvidas estaríamos diante de um exemplo de emprego de base 5. Mas é claro que apenas esse achado arqueológico, apesar de sua importância, não permite nenhuma conclusão definitiva. (DOMINGUES, 1991, p. 2).

Até hoje algumas tribos da América do Sul contam com as mãos: "um", "dois", "três", "quatro", "mão", "mão e um"e assim por diante. Domingues (1991) também afirma que

> "com o desenvolvimento da sociedade vai-se tornando necessário contar conjuntos cada vez mais numerosos, efetuar cálculos, o que tornaria muito difícil sem uma sistematização do processo de contagem e paralelamente do procedimento de escrever os números". (DOMINGUES, 1991, p.3)

Por outro lado Eves (2011) destaca que o sistema quinário, ou sistema de numeração de base 5, foi o primeiro a ser usado extensivamente. Diante dessa necessidade a relação biunívoca é uma relação a um-a-um (relação entre conjuntos de objetos a seus familiares, rebanhos entre outros), que o homem sempre utilizou nesse sentido desde os tempos primordiais, foi substituído pela escolha de uma base, para formar grupo de elementos.

Domingues (1991) também define a ideia de base (agrupamentos) da seguinte maneira: sendo b um número natural qualquer, tal que $b > 1$ é considerado como base. Isso significa que um agrupamento de b unidades simples (de 1ª ordem) forma uma unidade (de 2ª ordem), assim um agrupamento de b unidades de uma (2ª ordem) forma uma unidade de (3ª ordem), e assim por diante.

Como exemplo, consideramos o nosso sistema posicional decimal, que é especificamente um agrupamento de coleções de 10 membros ou elementos. Desta maneira um grupo de 10 unidades formam uma dezena, um grupo de dez dezenas formam uma centena e um grupo de dez centenas forma uma unidade de milhar etc. São atribuídos nomes e símbolos especiais para $0, 1, 2, \cdots, b-1$, apenas quando $b = 10$ e ainda se for o caso $(b^0, b^1, b^2, b^3 \cdots)$, os nomes e símbolos para os demais números são introduzidos a partir daqueles já mencionados anteriormente, de acordo com as regras mencionadas anteriormente, (DOMINGUES, 1991, p. 3). O autor aponta também que, temos diferentes tipos de base, pois cada base depende do conjunto tomado como referência em relação ao qual todos os elementos são avaliados. E assim podemos citar o sistema decimal, que "Aristóteles afirma como sendo uma escolha pelo simples fato do acidente anatômico de termos dez dedos nas mãos". É importante observar ainda que a palavra dígito, que atualmente é também usada para indicar as quantidades de 0 a 9 unidades, originou-se do lema latino *dígitos*, que significa dedos, (DOMINGUES, 1991, p. 3).

Fomín (1975) salienta que o sistema de numeração decimal demorou muito para ocupar a posição dominante que possui hoje, na antiguidade muitos povos usaram outros sistemas numéricos além do decimal. Podemos citar como exemplo o sistema duodecimal que era bastante utilizado, e da mesma forma que o decimal teve sua origem também ligada ao cálculos pelos dedos. Visto que os quatro dedos da mão (exceto o polegar) possuem 12 falanges no total. Dessa maneira passando o polegar sobre essas falanges, podemos contar de 1 até 12. Então, 12 pode ser tomado como unidade da segunda ordem, e sucessivamente.

Por qual motivo o número 10 desempenha um papel privilegiado? Segundo Fomin (1975)

> una persona ajena a estas custiones contestaria quizá sin vacilar que se trata sencilhamente de que el número 10 es redondo y resulta cómodo multiplicar por él qualquier número, así como contar decenas, centenares, etc. Hemos visto, sin embargo, que la situación es precisamente la opuesta: el número 10 es redondo debido a que se toma por base del sistema de numeración. (FOMÍN, 1975, p.9).

Fomín (1975) ressalta ainda que as motivações pelas quais precisamente o sistema decimal foi universalmente aceito estão longe de ser matemáticas, e sim os 10 dedos das mãos constituíram a origem do sistema que para nós é completamente natural. Pelo fato de ser fácil associar os dedos com a contagem até 10, ao chegar até 10, pode-se assumir o número 10 como um grupo de segunda ordem, 10 dezenas formam um grupo de terceira ordem e assim por diante.

Domingues (1991) ainda cita outros sistemas de numeração, o primeiro foi o sistema hieroglífico, no qual foi desenvolvido pelos egípcios, esse sistema de numeração utiliza a base 10, ele era representado por símbolos diferentes para as quantidades 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, ou seja, ele usava símbolos diferentes para as potências de 10 e sendo esse sistema de numeração assentado no princípio aditivo, nisto obriga o princípio da adição dos valores dos símbolos. Nesta mesma época surgia na Mesopotâmia os princípios do sistema que usamos atualmente, o sistema posicional; porém nessa época eles usavam a base 60. Isso pois os valores dos símbolos dependiam da sua posição na escrita do número.

> Esse sistema costuma ser chamado de sistema de numeração babilônico, cujo sistema provavelmente tenha utilizado a base 60 através do fato de 60 unidades admitir várias subdivisões, por exemplos; em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos. Isso era de suma importância numa região onde a matemática era fortemente ligada nas atividades comerciais.(DOMINGUES, 1991, p. 4).

Dessa maneira era usado o sistema aditivo para escrever os números até 59, a partir do 59 usavam o sistema posicional. Tivemos ainda mais dois sistemas de numeração: o sistema de numeração jônico e o sistema de numeração romano, conforme (DOMINGUES, 1991, p. 5).

Eves (2011) enfatiza que sistema o sexagesimal (base 60) foi usado pelos babilônios, sendo ainda empregado na medida do tempo e de ângulos em minutos e segundos. Eves (2011) aponta ainda que o sistema vigesimal (base 20) também foi muito usado, e remonta aos dias em que o homem andava descalço. Esse sistema foi usado por índios americanos, sendo mais conhecido pelo desenvolvido sistema de numeração Maia. O autor aponta ainda que este sistema de numeração é de origem antiga, remota e desconhecida, tal sistema foi descoberto pelas expedições espanholas a Yucatán no início do século XVI.

Ainda em Eves (2011) podemos inferir que sistema de numeração Maia é conhecido como sistema de numeração vigesimal, porém seu segundo grupo equivale a $(18)(20) = 360$ diferente de $20^2 = 400$. Os grupos de ordem superior são da forma $(18)(20n)$. Isso acontece provavelmente pelo fato do ano Maia possuir 360 dias. O símbolo adotado pelo zero ou alguma variante desse símbolo, era usado consistentemente. Escreviam-se os vinte números do grupo de primeira ordem de forma simples, utilizavam apenas pontos e traços (seixos e gravetos), neste grupo de primeira ordem o ponto representa o 1 e o traço o 5.

Segundo Domingues (1991), o sistema de numeração jônico (sistema de numeração cifrado) é o mais recente dos sistemas de numeração dos gregos antigos, que por sua vez também era um sistema de base posicional e aditivo, porém tinha algumas diferenças interessantes. O sistema jônico usava 27 símbolos, sendo eles: as 24 letras do alfabeto grego e os 3 símbolos restantes, constituídos por 3 letras em desuso (*koppa, sampi e vaú*). E por fim o sistema de numeração romano que conhecemos e ainda utilizamos, sendo ele decimal aditivo. Os símbolos usados para representar os números 1, 10, 10^2, 10^3 são exatamente as letras latinas I, X, C e M. Há ainda símbolos específicos para $V = 5$, $L = 50$, $D = 500$, dessa forma tornando ágil a escrita de certos números que se estenderiam, devido a repetição dos números caso não tivesse esses símbolos específicos, como aponta (DOMINGUES, 1991, p. 5). Por exemplo, o 50, que ao invés de escrever o X cinco vezes, escrevemos apenas uma vez o $L = 50$. E ainda por questão de agilidade o sistema romano adotou também um princípio subtrativo. Como exemplo podemos citar o valor 9, que ao invés de escrevermos o I nove vezes ou $VIIII$, escrevemos uma só vez o X e o I apenas uma vez na frente, isto é, IX.

Eves (2011) ressalta que o ábaco pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem, ou seja, ele pode ser considerado como primeiro computador (ferramenta) usado pelo ser humano e ainda afirma que surgiu vários tipos de ábaco em várias partes do mundo antigo e medieval.

Domingues (1991) destaca que hoje em dia o uso da base 2 é comum em computação eletrônica, mas a base binária além de ser uma opção técnica no cotidiano, foi a muito tempo atrás uma prática espontânea de muitos povos. Cita como exemplo as tribos de povos originários norte-americanos que adotavam a base 2. Rodrigues (2013) também ressalta que o primeiro a estudar a base binária de forma mais profunda foi o matemático e filosofo Gottfried Wilhelm Leibniz ($1646 - 1716$). Garbi (2014, p. 1) afirma que:

> O surgimento da base 2 escrita no sistema de numeração posicional se deu através da mente inquietadora de Leibniz que um certo dia, notando que nosso sistema de numeração posicional utiliza a base 10, com 10 algarismos, mas que outros povos haviam criado sistemas com outras bases (por exemplo, 60 dos sumérios e 20 dos maias), ele perguntou-se qual seria a menor das bases com a qual um sistema posicional pudesse ser construído. Assim se tratando da base 2, que era representada apenas por 0 e 1. Então partindo da curiosidade de pesquisar sobre as principais características desse sistema e descobrir como realizar nele as operações básicas da Aritmética, ele produziu um manuscrito de poucas páginas em 1679. (GARBI, 2014, p. 1)

E que:

> Algum tempo depois esse trabalho foi publicado em Paris, em francês, porém despertou pouco interesse na comunidade matemática, que o considerou mera curiosidade teórica, sem qualquer aplicação prática. Nos dois séculos seguintes o assunto recebeu atenção bastante limitada, até que, nos anos 1940, os dispositivos eletro-eletrônicos existentes permitiram aos físicos, matemáticos e engenheiros sonhar com o desenvolvimento dos primeiros computadores alimentados por energia elétrica. Ao fazê-lo, constataram eles que a forma mais simples de "ensinar" aquelas máquinas a realizar cálculos era a utilização do sistema binário criado por Leibniz, o 1 sendo representado pela passagem da corrente elétrica e o zero por sua interrupção. Na mesma época, os engenheiros de telecomunicações viram também que o sistema binário é o mais adequado à codificação, transmissão e decodificação de informações. (GARBI, 2014, p. 1).

Dessa maneira é que se teve o surgimento desse nosso mundo digital que nos proporciona verdadeiros milagres tecnológicos. Rodrigues (2013) enfatiza que a computação e a eletrônica digital só existem por causa do sistema binário e a álgebra booleana, na qual permitem a realização das operações lógicas e aritméticas empregadas em apenas dois estados o zero e um.

3.2 A base b

De acordo com Garbi (2014) podemos dizer que uma das vantagens de usar os números na base 2 é a facilidade para resolver suas operações, porém a maneira de escrever números grandes é desvantajosa, pois a representação dos números se tornam extensos. Já no sistema posicional decimal temos essa vantagem, devido a base ser maior escrevemos números maiores de forma mais breve.

Domingues (1991), afirma que em nosso sistema de numeração todo número n é representado na forma polinomial.

$$n = a_r \times b^r + a_{(r-1)} \times b^{(r-1)} + \ldots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0 \tag{3.1}$$

Assim, fixado b=10, temos $a_r \neq 0$. Sendo $r_i \geq 0$ e os $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ para $i = 1,2,\ldots,r$, estando univocamente determinados. Temos que o numeral que representa n é escrito da seguinte maneira, a partir da expressão polinomial (3.1) temos alguns exemplos:

$$120 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0$$

$$320 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0$$

Domingues (1991) destaca que "o papel desempenhado pelo 10 em nosso sistema de numeração é apenas uma opção ou uma circunstância". Santos (2015, p. 1) exemplifica uma maneira de escrever todos os números inteiros sem precisar do sinal de menos, mesmo sendo eles negativos. Para isso, é necessário apenas escrevê-los numa base negativa, por exemplo em uma base $(-b)$, ainda usando a equação 3.1, como podemos ver nos exemplos a seguir:

$$43 = 100 - 60 + 3 = 1 \times (-10)^2 + 6 \times (-10)^1 + 3 \times (-10)^0 = 163_{(-10)}$$

$$-81 = -90 + 9 = 9 \times (-10)^1 + 9 \times (-10)^0 = 99_{(-10)}$$

Assim um número inteiro n expresso na equação (3.1) pode ser representado por $n = [a_r \times a_{r-1} \ldots a_1 \times a_0]$, sendo ainda $0 < a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r < |b|$. Dessa maneira a correspondência que associa a sequência $a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$ é bijetora, assim permitindo representar qualquer número inteiro (negativo ou positivo) por meio de uma sequência $(a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0)_b$. Essa notação e os elementos teóricos em que caracterizam o que denomina *Sistema de Numeração Posicional*.

3.3 Mudança de bases

Para a mudança de qualquer base para a base 10 é um processo simples, pois é necessário apenas calcularmos as potências indicadas. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 3.3.1. Façamos a mudança do número $(430)_5$ para a base 10. Como

$$\begin{aligned}(430)_5 &= 4 \times (5)^2 + 3 \times (5)^1 + 0\\ &= 4 \times 25 + 3 \times 5 + 0\\ &= 115\end{aligned}$$

Logo temos que $(430)_5 = (115)_{10}$.

Exemplo 3.3.2. Façamos a mudança do número $(1101)_2$ para a b= 10. Veja que

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= 1 \times (2)^3 + 1 \times (2)^2 + 0 \times (2)^1 + 1\\ &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1\\ &= 13\end{aligned}$$

E analogamente ao caso anterior temos $(1101)_2 = (13)_{10}$.

Dessa maneira, a mudança de uma base b para a base 10, pode ser feita apenas calculando as potências multiplicadas pelos seus coeficientes.

Observação 3.3.1. *De forma geral podemos converter qualquer número inteiro de uma base b para a base 10 por meio do seguinte algoritmo;*

$$(a_r a^{r-1} \ldots a_1 a_0)_b = a_r \times b^r + a_{r-1} \times b^{r-1} + \ldots + a_1 \times b + a_0. \tag{3.2}$$

Para fazer a mudança da base 10 para as bases 5 e 2, digamos que o processo oposto aos Exemplos 3.3.1 e 3.3.2, pode-se escrever os respectivos números como potências de 5 e 2. Assim podemos utilizar divisões sucessivas e escrevermos os números utilizados no exemplos acima. Como,

$$\begin{aligned} 115 &= 23\times 5+0 \\ &= (4\times 5+3)\times 5+0 \\ &= 4\times (5)^2+3\times 5+0 \\ &= (430)_5. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} 13 &= 6\times 2+1 \\ &= (3\times 2+0)\times 2+1 \\ &= ((1\times 2+1)\times 2+0)\times 2+1 \\ &= 1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1 \\ &= (1101)_2. \end{aligned}$$

Podemos ainda fazer tais subdivisões de modo prático, primeiramente façamos as subdivisões de 115 pela base 5, vejamos:

$$\begin{array}{cccccl} & 1 & 1 & 5 & \multicolumn{1}{|l}{5} & \\ \cline{5-5} - & 1 & 1 & 5 & 23 & \multicolumn{1}{|l}{5} \\ \cline{2-4}\cline{6-6} & & 0 & & 20 & 4 \\ \cline{5-5} & & & & 3 & \quad . \end{array}$$

E para finalizar as subdivisões de modo prático façamos as subdivisões do 13 pela base 2,

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{4-4} - & 1 & 2 & 6 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{1-3}\cline{5-5} & & 1 & 6 & 3 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{4-4}\cline{6-6} & & & 0 & 2 & 1 \\ \cline{5-5} & & & & 1 & \quad . \end{array}$$

3.4 Adição numa base

Domingues (1991) destaca que o "procedimento usado em nosso sistema de numeração para efetuar adições e subtrações, isto é, somando em coluna as unidades e depois dezenas, acrescidas de algum eventual transporte "(o famoso vai um)", da coluna anterior e assim por diante, é muito fácil de justificar". Verificaremos, por exemplo, adição $82+18$:

$$\begin{array}{ccc} & {}^{9}\cancel{8} & 2 \\ + & 1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0\,. \end{array}$$

Percebemos que a adição das 2 unidades do primeiro número com as 8 unidades do segundo resulta em $10 = 1 \times (10)^1 + 0$ unidades ou 1 dezena, sendo então resultado dessa adição uma dezena e zero unidades. Esta nova dezena sendo então acrescentada as 8 dezenas do primeiro número e a 1 dezena do segundo número, resultando então a 10 dezenas, ou melhor dizendo uma centena, $10^2 = 1 \times 10^2 + 0 \times 10$. O autor enfatiza ainda que nesse processo está embutidas as propriedades da adição nos números inteiros e também propriedade distributiva, exploraremos então sua representação no sistema decimal. Veja que:

$$\begin{aligned} 82+18 &= (8 \times 10 + 2) + (1 \times 10 + 8) \\ &= (8 \times 10 + 1 \times 10) + (2 + 8) \\ &= (8 \times 10 + 1 \times 10 + 1 \times 10) \\ &= (10 \times 10) \\ &= 100. \end{aligned}$$

Percebe-se que a cada 10 grupos de unidades temos uma nova dezena e a cada grupo de 10 dezenas temos uma centena, esse processo é caracterizado como "o vai um", ou o deslocamento de um agrupamento ou coleção de 10 objetos.

Domingues (1991) ressalta que no sistema posicional é possível efetuar adições e subtrações em qualquer base b. Costa e Santos (2021) destaca que "os famosos, *"vai um"*, *"empresta um"*, *"sobe quatro"* e *"coloca zero vírgula"* mecanizam e as vezes escondem a natureza de nosso sistema de numeração". Desta maneira ao realizar adições, subtrações e multiplicações em outras bases torna fácil o entendimento do significado dos termos acima. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 3.4.1. Na a adição de $(542)_7 + (116)_7$. Temos:

$$\begin{array}{cccc} & (5 & {}^{5}\cancel{4} & 2)_7 \\ + & (1 & 1 & 6)_7 \\ \hline & (6 & 6 & 1)_7 \end{array} .$$

Analogamente como no sistema decimal, explorando a representação na base 7 teremos:

$$\begin{aligned}
(542)_7+(118)_7 &= (5\times 7^2+4\times 7+2)+(1\times 7^2+1\times 7+8)\\
&= (5+1)\times 7^2+(4+1)\times 7+(2+8)\\
&= (5+1)\times 7^2+(4+1)\times 7+(3+7)\\
&= (5+1)\times 7^2+(4+1+1)\times 7+(3)\\
&= (6)\times 7^2+(6)\times 7^1+3\\
&= (663)_7.
\end{aligned}$$

Neste caso, a cada grupo de 7 temos que acrescentar uma unidade na posição a esquerda.

3.5 Multiplicação em uma base

Seguindo as ideias das situações anteriores, podem ser adaptados os algoritmo de multiplicação na base 7. Por exemplo $(215)_7\times(3)_7$:

$$\begin{array}{rcccc}
 & (2 & 1^2 & & 5)_7\\
\times & & & & (3)_7\\
\hline
 & (6 & 5 & 1)_7 & .
\end{array}$$

Explorando a multiplicação acima:

$$\begin{aligned}
(215)_7\times(3)_7 &= 3\times(2\times 7^2+1\times 7+5)\\
&= (3\times 2)\times 7^2+(3\times 1)\times 7+(3\times 5)\\
&= (3\times 2)\times 7^2+(3\times 1)\times 7+(1+2\times 7)\\
&= (3\times 2)\times 7^2+(3+2)\times 7+1\\
&= 6\times 7^2+5\times 7^1+1\\
&= (651)_7.
\end{aligned}$$

Nicolai (1986) aponta que existem outras técnicas operatórias usadas em outros tempos e outros lugares, essas de aparências talvez exóticas. Apresentaremos algumas delas a seguir; na adição de $445+82$ temos:

$$\begin{array}{rcccc}
 & {}^14 & 4 & & 5\\
+ & & 8 & & 2\\
\hline
 & 5 & 2 & 7 & .
\end{array}$$

De outra forma

$$\begin{aligned} 445+82 &= (400+40+5)+(80+2) \\ &= 400+(40+80)+(5+2) \\ &= 400+(120)+7 \\ &= 400+(100+20)+7 \\ &= (400+100)+20+7 \\ &= 500+20+7 \\ &= 527. \end{aligned}$$

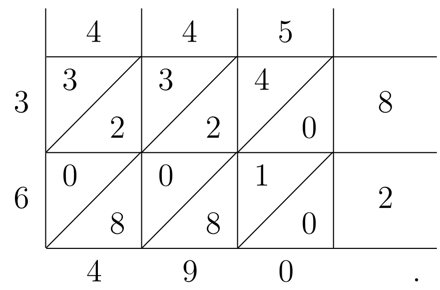
Podemos observar que o algoritmo da adição realiza de forma simultânea, ou seja, simplifica, grande parte das operações detalhadas acima. Na multiplicação de 445 por 82, podemos inicialmente fazer a decomposição como no exemplo anterior, logo em seguida aplicando a propriedade distributiva. E assim teremos:

$$\begin{aligned} 445\times 82 &= (400+40+5)\times(80+2) \\ &= 32000+3200+400+800+80+10 \\ &= 36490. \end{aligned}$$

Já pelo modo prático

$$\begin{array}{ccccc} & & {}^{3}4 & {}^{4}\cancel{{}^{1}}4 & 5 \\ \times & & & 8 & 2 \\ \hline & {}^{1} & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & \\ \hline 3 & 6 & 4 & 9 & 0 \end{array}.$$

Outra forma de multiplicação existente é multiplicação em gelosia, segundo Nicolai (1986) não é possível afirmar quando ou onde a multiplicação em gelosia (grade) apareceu, mas a Índia parece ser a fonte mais provável. Lá foi usada pelo menos desde o século XII e depois parece ter sido levada à China e à Arábia.



Boyer (1974) destaca que o princípio fundamental da multiplicação em gelosia é praticamente o mesmo do algoritmo de multiplicação em que usamos hoje, o arranjo em células sendo apenas estratégias conveniente para facilitar a concentração mental necessária ao *transportar* (processo de vai um), de uma ordem para outra que aparecem nos produtos parciais. O único *"transporte"* (processo de vai um), necessário na multiplicação em gelosia aparece nas adições finais ao longo das diagonais.

Temos ainda a técnica camponesa ou russa que Nicolai (1986) ressalta que foi comum na Europa medieval e ficou conhecida como multiplicação russa por ser supostamente usada pelos camponeses russos até a 1ª Guerra Mundial. Essa técnica consiste em dividir por 2 um dos fatores (com aproximação para menos, se for ímpar) e, simultaneamente, multiplicar por 2 o outro fator. Para finalizar a multiplicação adicionam os resultados das linhas multiplicadas por 2 e o correspondente da coluna das metades que for ímpar. Vejamos a multiplicação de 445 por 82:

82	445	
41	890	890
20	1780	
10	3560	
5	7120	7120
2	14240	
1	28480	28480
		36490 .

Eves(2011) ressalta que esse processo é realizado por computadores eletrônicos de alta velocidade.

3.6 Divisão Euclidiana

De acordo com Domingues (1991) a divisão euclidiana é dada pelo seguinte procedimento de Euclides: sejam a e b números naturais, com b diferente de zero, então a é múltiplo de b ou está entre os múltiplos consecutivos de b, isto é; $bq \leq a < b(q+1)$. Isto significa que $q+1$ é o mínimo de $\{n \in \mathbb{N}$ tal que $bn > a\}$ subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, pois contém o elemento $a+1$. De fato; se $b \geq 1$ e $ab \geq a$ então $ab+b \geq a+b$, isso implica que $b(a+1) \geq a+b > a$. Partindo de $bq \leq a$ resulta que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a = bq+r$. Mostraremos que $r < b$. Se $r = a-bq \geq b$, então $(a-bq)+bq \geq b+bq$ e daí $a \geq b(q+1)$, o que não é possível. Logo: $a = bq+r$, com $r < b$.

Portanto dizemos que dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, existem q, $r \in \mathbb{N}$ de maneira que $a = bq+r \mid (r < b)$, por outro lado se $r = 0$, então a é múltiplo de b. Supondo que $a = bq+r = bq_1+r_1$, com $r < b$ e $r_1 < b$. Admitindo que se houvesse $r \neq r_1$, digamos que $0 < r-r_1 < b$. Porém da igualdade $bq+r = bq_1+r_1$ decorre que $bq+(r-r_1) = bq_1$, portanto $b \mid (r-r_1)$. Logo $b < r-r_1$, sendo um absurdo. Pois $r = r_1$ e assim $q = q_1$.

O que fizemos mostra que:

Teorema 3.6.1. *(Algoritmo da divisão de Euclides). Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{N}$*,* $b \neq 0$ *, exite então um único par de números* q *e* r*, de maneira que* $a = bq + r$ *e* $0 \leq r < b$*.*

Diante do teorema 3.6.1, pode-se notar que os elementos a, b, q e r são respectivamente, o divisor, dividendo, quociente e o resto da divisão de a por b. Para exemplificar melhor vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 3.6.1. Aplicando o algoritmo aos números $a = 43$ e $b = 6$, como o 43 está entre os múltiplos de 42 e 48 de 6. Isto é, $6 \times 7 \leq 43 \leq 6 \times (7+1)$. Portanto $q = 7$ e $r = 43 - 6 \times 7 = 1$. Para entender melhor veja de forma prática o algoritmo:

$$\begin{array}{rrr|l} & 4 & 3 & 6 \\ \cline{4-4} - & 4 & 2 & 7 \\ \cline{1-3} & & 1 & \end{array}$$

disto obtem que $43 = 6 \times 7 + 1$.

Exemplo 3.6.2. Vamos aplicar o algoritmo usual da divisão, calculando o quociente e o resto da divisão de a por b, sendo $a = 435$ e $b = 6$. Observe que o 7 localizado sob chave nada mais é do que o algarismo das dezenas do quociente procurado, como pode ser verificado logo abaixo: Pelo Algoritmo da divisão usada para 43 e 6 temos $43 = 6 \times 7 + 1$. Assim

$$\begin{aligned} 430 &= 6 \times 70 + 10 \\ 435 &= 6 \times 70 + 15. \end{aligned}$$

Utilizando agora o algoritmo para os números 15 e 6 temos: $15 = 6 \times 2 + 3$, daí

$$435 = 6 \times 70 + 6 \times 2 + 3 = 6 \times 72 + 3.$$

Para finalizar voltamos ao algoritmo usual da divisão:

$$\begin{array}{rrrr|l} & 4 & 3 & 5 & 6 \\ \cline{5-5} - & 4 & 3 & 2 & 72 \\ \cline{1-4} & & & 3 & . \end{array}$$

Sabemos que, dados dois números inteiros positivos a e b, existe um único par de números inteiros q e r, chamados de quociente e resto, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$. Dessa maneira o algoritmo da divisão nos fornece o q e o r.

Exemplo 3.6.3. Aplicando o algoritmo da divisão euclidiana aos números a = 2022 e b = 8, podemos notar que o 2022 está entre os múltiplos de 2016 e 2024, ou seja $8 \times 252 \leq 2022 \leq 8 \times (252+1)$. Logo $q = 252$ e $r = 2022 - 8 \times 252 = 6$, ou seja, $2022 = 8 \times 252 + 6$

De modo pratico:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 0 & 2 & 2 & 8 \\ \cline{5-5}
-2 & 0 & 0 & & 252 \\ \cline{1-4}
 & & {}^{1}\cancel{2} & {}^{12}\cancel{2} & \\
 & & 1 & 6 & \\ \cline{1-4}
 & & 6 & & .
\end{array}
$$

Porém Nicolai (1986) afirma que em alguns países, como Inglaterra e Estados Unidos, o algoritmo inicial para achar q e r é diferente do nosso. Também a maneira de escrever a, b, q e r difere um pouco da nossa. Por exemplo, dado $a = 2022$, vejamos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & {}^{1}\cancel{2} & {}^{10}\cancel{0} & 2 & 2 & 8 \\ \cline{6-6}
- & 1 & 5 & 2 & 0 & 190 \\ \cline{1-5}
 & & {}^{4}\cancel{5} & {}^{9}\cancel{10}\cancel{0} & {}^{12}\cancel{2} & 62 \\
 & - & 4 & 9 & 6 & \\ \cline{1-5}
 & & & 6 & & \\ \cline{6-6}
 & & & & & 252 \quad .
\end{array}
$$

Poderíamos começar ainda com o quociente igual 250, vejamos

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2 & 0 & 2 & 2 & 8 \\ \cline{6-6}
- & 2 & 0 & 0 & 0 & 250 \\ \cline{1-5}
 & & & {}^{1}\cancel{2} & {}^{12}\cancel{2} & 2 \\
- & & & 1 & 6 & \\ \cline{1-5}
 & & & 6 & & \\ \cline{6-6}
 & & & & & 252 \quad .
\end{array}
$$

Qualquer número poderia ser colocando onde localiza-se o quociente desde que o produto deste número pelo divisor seja menor ou igual ao respectivo dividendo. Podemos perceber que na prática o que fazemos é tomar o maior número possível com as mesmas condições, com o intuito de simplificar o processo. Logo podemos dizer que o quociente da divisão é a adição dos quocientes parciais.

Para melhor entendimento, resolveremos a divisão de 620 por 30

$$
\begin{array}{rrrr|l}
{}^{5}\cancel{6} & {}^{12}\cancel{2} & 0 & & 30 \\ \cline{5-5}
- & 4 & 5 & 0 & 15 \\ \cline{1-4}
1 & 7 & 0 & & 5 \\ \cline{5-5}
- & 1 & 5 & 0 & 20 \\ \cline{1-4}
2 & 0 & & & .
\end{array}
$$

Ou ainda da forma que os americanos e ingleses escrevem:

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 15 & + & 5 & = & 20 \\ \hline
30) & {}^{5}\cancel{6} & {}^{12}\cancel{2} & 0 & & \\
 & 4 & 5 & 0 & & \\ \hline
 & 1 & 7 & 0 & & \\
 & 1 & 5 & 0 & & \\ \hline
 & 2 & 0 & & & .
\end{array}
$$

Com o passar do tempo, o processo vai se encurtando e assim chegando eventualmente ao algoritmo usual:

$$
\begin{array}{ccccl}
 & 3 & 2 & 8 & |8 \\ \cline{5-5}
- & 3 & 2 & & 41 \\ \cline{1-4}
 & & 8 & & \\
- & & 8 & & \\ \cline{1-4}
 & & 0 & . &
\end{array}
$$

Percebe-se que esse último algoritmo, usual em nossas escolas, é o que exige maior cálculo mental pelo fato de ter que encontrar o maior número que multiplicado pelo divisor resulte em um número menor ou igual que o dividendo.

3.7 Números Palíndromos ou Capicuas

Como aponta Ochoviet (1995) é possível encontrar um divisor comum e diferente de 1 dos números capicuas de 4 algarismo. Podemos chamar de números palíndromos ou capicuas aqueles que podem ser lidos de trás pra frente, ou da frente para trás da mesma maneira. Ou melhor dizendo da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, da mesma forma. Por exemplo, $143341, 808, \cdots$. Neste caso, os capicuas de quatro algarismos são números escritos na forma *abba*.

Ochoviet (1995) enfatiza que para encontrar um divisor comum e diferente de 1 dos números capicuas de 4 algarismos basta decompor *abba* do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
abba &= 10^3a + 10^2b + 10b + a \\
&= (10^3+1)a + (10^2+10)b \\
&= 1001a + 110b \\
&= 11(91a + 10b).
\end{aligned}
$$

Isso mostra que todo número capicua de quatro algarismos é um múltiplo de 11, no qual, em alguns países, é denotado por $\dot{\overline{11}}$. Portanto o número 11 é o divisor procurado.

Pode se observar que a propriedade de ser capicua de quatro algarismos depende da representação do número, logo depende da base na qual está escrito. Por exemplo, 1551 é capicua de quatro algarismos no sistema decimal, porém não é capicua nem tem quatro algarismos quando escrito, por exemplo, na base dois:

$$1551 = (11000001111)_2.$$

4 Representação do número inteiro em base negativa

Neste capítulo mostraremos como representar qualquer número inteiro em base negativa, ver quando o processo finaliza e comprovar que a maneira de escrever qualquer número sem o sinal de menos é única; Por fim realizar mudanças entre bases negativas, reconhecer números inteiros em uma base negativa e ordenar números inteiros em uma base negativa.

Para representação de um inteiro na base negativa utiliza-se o procedimento utilizado na mudança de base, quando a mesma é positiva. Assim, inicia-se dividindo o número pela base, em seguida divide-se o quociente da divisão pela base, e depois divide-se o novo quociente pela base, e assim segue até que o quociente seja zero.

Ainda em Santos (2015), podemos afirmar que o quociente deve ser encontrado de forma que, na multiplicação do quociente pelo divisor resulte no maior número menor ou igual o dividendo, seja ele negativo ou positivo. Como o resto não será negativo e além disso é menor que o módulo do divisor. Portanto o procedimento termina quando o quociente for zero. Como os restos são positivos ou nulos, a representação numa base negativa pode ser escrita sem o sinal de menos.

Definição 4.0.1. *De forma geral, dado o inteiro n em qualquer base (b), tal que $|b| > 2$ é escrito da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} n &= (b) \times q_1 + r_1 & \longrightarrow 0 &\leq r_1 < |b|, \\ q_1 &= (b) \times q_2 + r_2 & \longrightarrow 0 &\leq r_2 < |b|, \\ q_2 &= (b) \times q_3 + r_3 & \longrightarrow 0 &\leq r_3 < |b|, \\ &\vdots \\ q_{k-1} &= (b) \times 0 + r_k & \longrightarrow 0 &\leq r_k < |b|. \end{aligned}$$

Exemplo 4.0.1. Escrevemos agora o número inteiro 208 na base (-8). Como na Definição 4.0.1, iniciamos o procedimento dividindo o próprio número 208 pela base (-8), e depois continuemos dividindo os quocientes das divisões até que o quociente seja zero. Temos:

$$208 = (-8) \times (-26) + 0, \qquad (1)$$

Note que a multiplicação do divisor pelo quociente resulta em 208 que é igual ao dividendo,

$$-26 = (-8) \times 4 + 6, \qquad (2)$$

visto que -32 é o número mais próximo de -26 e agora que,

$$4 = (-8) \times 0 + 4, \qquad (3)$$

pois 0 é o mais próximo de 4. Veja que

$$208 = (-8) \times (-26) + 0.$$

Substituindo (2) em (1),

$$208 = (-8) \times [(-8) \times 4 + 6] + 0 \qquad (1').$$

Em seguida fazendo (3) em $(1')$

$$208 = (-8) \times (-8) \times [(-8) \times 0 + 4] + 6 \times (-8) + 0.$$

Assim na base (-8), 208 será representado pela sequência dos restos do fim para o inicio (de trás para a frente), teremos então:

$$208 = 4 \times (-8)^2 + 6 \times (-8)^1 + 0 \times (-8)^0 = (460)_{(-8)}.$$

Para melhor entendimento façamos mais exemplos.

Exemplo 4.0.2. Especificamente na base (-8), o número $n = 2022$ é escrito como:

$$\begin{array}{rcll} 2022 &=& (-8) \times (-252) + 6 & \longrightarrow\ 0 \leq 6 < 8 \\ -252 &=& (-8) \times (32) + 4 & \longrightarrow\ 0 \leq 4 < 8 \\ 32 &=& (-8) \times (-4) + 0 & \longrightarrow\ 0 \leq 0 < 8 \\ -4 &=& (-8) \times 1 + 4 & \longrightarrow\ 0 \leq 4 < 8 \\ 1 &=& (-8) \times 0 + 1 & \longrightarrow\ 0 \leq 1 < 8. \end{array}$$

Logo:

$$2022 = 1 \times (-8)^4 + 4 \times (-8)^3 + 0 \times (-8)^2 + 4 \times (-8)^1 + 6 = (14046)_{(-8)}.$$

Exemplo 4.0.3. Vamos representar agora o número -4500 na base -8. Vejamos

$$\begin{array}{rcll} -4500 &=& (-8) \times 563 + 4 & \longrightarrow\ 0 \leq 4 < 8 \\ 563 &=& (-8) \times (-70) + 3 & \longrightarrow\ 0 \leq 3 < 8 \\ -70 &=& (-8) \times 9 + 2 & \longrightarrow\ 0 \leq 2 < 8 \\ 9 &=& (-8) \times (-1) + 1 & \longrightarrow\ 0 \leq 1 < 8 \\ 1 &=& (-8) \times 0 + 1 & \longrightarrow\ 0 \leq 1 < 8. \end{array}$$

Teremos sua representação na base (-8) da maneira a seguir:

$$-4500 = 1 \times (-8)^4 + 1 \times (-8)^3 + 2 \times (-8)^2 + 3 \times (-8)^1 + 4 = (11234)_{(-8)}.$$

4.1 Como saber que o processo finaliza?

Analogamente como foi apresentado por Santos (2015), note que por ser uma divisão por $(-b)$ e o resto ser positivo ou nulo, em cada divisão o valor absoluto do quociente é menor ou igual ao valor absoluto do dividendo, sendo igual apenas quando o quociente é igual a (-1), nesse caso, o próximo quociente será 1 e o seguinte já será 0. Assim, esse fato nos garante que o valor absoluto do quociente jamais seja zero, cujo fato acontece por motivo do "Principio de boa Ordem".

Podemos afirmar que a maneira de escrever um número inteiro em uma base negativa é única? Para provar essa unicidade iremos usar a ideia de demonstração em caso particular como (Santos, 2015). Suponha que um número N possa ser escrito em uma base negativa b de duas formas, ou seja,

$$N = (a_1a_2a_3)_b = (c_1c_2c_3c_4)_b.$$

Escrevendo N como expressão polinomial, temos;

$$N = a_1b^2 + a_2b + a_3 = c_1b^3 + c_2b^2 + c_3b + c_4. \tag{4.1}$$

Sendo os a_i e c_j os restos não negativos das divisões por $|b|$, isto é, $a_i, c_j \in \{0, 1, 2, \cdots, |b-1|\}$.

A igualdade 4.1 mostra que $|a_3 - c_4|$ é um número natural múltiplo de $|b|$ assim, $a_3 = c_4$, pois a_3 e c_4 são números não negativos menores do que $|b|$. Portanto, podemos na igualdade acima, cancelar a_3 e c_4. Dividindo ambos os lados da igualdade por b, percebemos que $a_2 = a_3$. Poderemos então cancelar a_2 e c_3. Ao repetir o mesmo procedimento concluiremos que $a_1 = c_2$ e novamente poderemos cancelar a_1 e c_2. Notemos que neste caso particular, $c_1 = 0$. E, então prova-se que a expansão na base b é única.

4.2 Mudanças entre bases negativas

Para realizar a mudança de uma base negativa para outra base negativa pode ser usado o mesmo procedimento ou roteiro descrito no capitulo 3.

Exemplo 4.2.1. Iremos converter o número $(561)_{(-7)}$ para a base (-5). Temos 561 na base (-7), assim iremos efetuar as multiplicações das potências pelos coeficientes, ou seja, escrever o número $(561)_{(-7)}$ na base decimal e em seguida fazer as divisões. Vejamos:

$$(561)_{(-7)} = (5) \times (-7)^2 + 6 \times (-7)^1 + 1 = 245 - 42 + 1 = (204)_{10}.$$

Realizaremos agora as divisões de 204 e sucessivos quocientes por (-5):

$$\begin{aligned} 204 &= (-40)\times(-5)+4 \\ -40 &= 8\times(-5)+0 \\ 8 &= (-1)\times(-5)+3 \\ -1 &= 0\times(-5)+1. \end{aligned}$$

Assim temos:

$$204 = 1\times(-5)^3+3\times(-5)^2+0\times(-5)^1+4\times(-5)^0 = 1304_{(-5)}.$$

Exemplo 4.2.2. Façamos a mudança do número $(1011)_{(-2)}$ para a base (-10), como no caso anterior, iniciaremos com a mudança do número $(1011)_{(-2)}$ para o sistema posicional decimal. Segue que:

$$\begin{aligned} 1011_{(-2)} &= 1\times(-2)^3+0\times(-2)^2+1\times(-2)^1+1 \\ &= -8+0-2+1 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Agora faremos a divisão de -9 por -10 e sucessivos restos:

$$\begin{aligned} -9 &= 1\times(-10)+1 \\ 1 &= 0\times(-10)+1. \end{aligned}$$

Portanto:

$$-9 = 1\times(-10)^1+1\times(-10)^0 = (11)_{(-10)}.$$

Portanto, vimos que podemos fazer a mudança de uma determinada base negativa para outra base também negativa.

4.3 Reconhecendo números inteiros numa base negativa

Ainda em Santos (2015) afirma que se um determinado número em uma base negativa possui uma quantidade par de algarismos, esse número é negativo, por outro lado possuindo uma quantidade ímpar de algarismos, esse número é positivo.

Como exemplo, mostraremos que o número $45556_{(-8)}$ é número positivo, visto que na sua representação na base (-8), possui 5 algarismos, e sendo 5 um número ímpar. Veja que

$$\begin{aligned} 45556_{(-8)} &= 4\times(-8)^4+5\times(-8)^3+5\times(-8)^2\times(-8)^1\times(-8)^0 \\ &= 16834-2560-320+6 \\ &= 14110. \end{aligned}$$

É fácil notar que, os algarismos $(45556)_{(-8)}$ têm uma quantidade ímpar de algarismos na base (-8), de fato observa-se que o último algarismo (da direita para a esquerda), neste caso o 4, é multiplicado por uma potência par do número -8, ou seja, a potência $(-8)^4$, isso nos da um número positivo. Pelo fato de ser a maior potência, o seu sinal prevalece sobre os outros.

Como segundo exemplo, verificaremos que o número $(2022)_{(-8)}$, é número negativo, pois na sua representação na base (-8), tem 4 algarismos, então esse número é constituído por uma quantidade par de algarismos. Veja que:

$$\begin{aligned} 2022_{(-8)} &= 2\times(-8)^3+0\times(-8)^2+2\times(-8)^1+2\times(-8)^0 \\ &= -1024+0-16+2 \\ &= -1038. \end{aligned}$$

Isso é devido a maior potência ser ímpar, dessa maneira o sinal é negativo e prevalece sobre os outros algarismos

Proposição 4.3.1. *Seja $n=(a_r\dots a_1a_0)_{(-b)}$ um número inteiro. Se $k>0$ é par então n é negativo, caso contrário n é positivo.*

Demonstração. Pela Equação (3.1) qualquer número n pode ser representado na forma da expressão polinomial. Assim teremos $n=a_r\times(-b)^r+a_{(r-1)}\times(-b)^{(r-1)}+\cdots+a_2\times(-b)^2+a_1\times(-b)+a_0$. Pelo fato do número ser escrito em expressão polinomial o grau das potências sempre será uma unidade a menos que a quantidade dos coeficientes. Assim vale dizer que dado um número $n=(a_r\dots a_1a_0)_{(-b)}$, se $r>0$ é par então n terá a sua maior potência ímpar, assim o sinal de menos sobrepondo sobre os demais, isto é, implicando em n negativo, caso $r>0$ seja ímpar sua maior potência será par, assim o sinal de menos sobrepõe sobe os demais, resultando em n positivo. Portanto se $r>0$ é par então n é negativo, caso contrario n é positivo como queríamos mostrar. □

4.4 Ordenando números em base negativa

Por Monteiro (1969) podemos definir ordem como:

Definição 4.4.1. *Dizemos que uma relação R sobre um conjunto E não vazio é uma relação de ordem se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:*

I) para todo $x\in E$, tem-se xRx (propriedade reflexiva);

II) sejam x e $y\in E$, se xRy e se yRx então $x=y$ (propriedade anti-simétrica);

III) sejam x, y e $z\in E$, se xRy e se yRz então xRz (propriedade transitiva).

Sendo R uma relação de ordem sobre E pode-se dizer, que R é uma ordem sobre E. Neste caso, dizemos que E é um conjunto ordenado pela ordem R ou que E é um conjunto parcialmente ordenado pela ordem R, ou que a ordem R define uma estrutura de conjunto ordenado sobre E. Portanto, uma estrutura ordenada é um par ordenado (E,R), tal que E é um conjunto e R é uma ordem sobre E. Caso seja fixada uma determinada ordem R sobre E iremos dizer que E é um conjunto parcialmente ordenado, expressando, portanto, a referência sobre a ordem R fixada sobre E.

Domingues (2003) ressalta ainda que quando R é uma relação de ordem parcial sobre E, para exprimir que $(a,c) \in R$ usamos a notação $a \leq c \ \ (R)$, cujo significado é "a precede c na relação R" ou "c segue a na relação R". Podendo ainda exprimir que $(a,c) \in R$ e $a \neq c$, usamos a notação $a < c$, isto é, "a precede estritamente c na relação R" ou "c segue estritamente a na relação R".

Seja uma ordem R, sobre um conjunto E, satisfazendo a seguinte condição:

IV) Sejam x e $y \in E$, tem-se xRy ou yRx.

Neste caso, dizemos que R é uma ordem total sobre E ou que E é um conjunto totalmente ordenado pela ordem R. Sendo E um conjunto ordenado pela ordem R e supondo, por definição, a R' c se, e somente se, cRa. É imediato ver que R' também é uma ordem sobre E, tal ordem é conhecida como ordem oposta de R. De maneira que se a ordem R é total, sua ordem oposta R' também será total.

Exemplo 4.4.1. Sendo $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e a relação “menor que ou igual” $(\leq)$, então $(\mathbb{N},\leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, visto que, para quaisquer m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$, temos que $m_1 \leq m_2$ ou $m_2 \leq m_1$, ou seja, nos naturais a ordem $(\leq)$ é total. A relação “menor que ou igual”$(\leq)$ é a ordem total “usual” em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.4.2. Considerando a relação de divisibilidade sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais: $a \mid c$ se, e somente se, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $c = ad$ (o símbolo $a \mid c$ deve ser lido a divide c). Verifica-se que obtém uma ordem parcial sobre $\mathbb{N}$, veja que esta ordem não é total, pois há casos em que $a \nmid c$ tal que a e $c \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.4.3. Considere E um conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, tais que sejam divisores de 24, ou seja, $E = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, ordenando-se o conjunto E pela relação de divisibilidade: $a \leq c$ se, e somente se, $a \mid c$. Teremos neste caso, uma ordem parcial sobre E.

Monteiro (1969) define Ordem Lexicográfica pela esquerda como:

Definição 4.4.2. *Seja o conjunto $A^n = A \times A \times \ldots \times A$, dados $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e $c = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ em A^n. Dizemos que $a > c$ se, e somente se, $a_k > c_k$ e $a_j = c_j \in \{1,\ldots,k\}$ e $a \neq c$.*

Exemplo 4.4.4. Seja X o alfabeto da língua Portuguesa. A ordem lexicográfica é a usada em dicionários: seja as seguintes palavras, *mamãe* e *mamão* ambas as palavras estão contidas em X. Podemos notar que (m, a, m, ã, e) $\leq$ (m, a, m, ã, o), pois $m = m$, $a = a$, $m = m$, ã = ã, já $e < o$ visto que e vem antes do o.

Exemplo 4.4.5. Seja A^n um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}^n$, e $\leq$ uma relação de ordem em A^n. Sejam $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in A$. Dizemos que $a \leq c$ se $a_1 < c_1$ ou $a_1 = c_1$ e $(a_2, \dots, a_n) < (c_2, \dots, c_n)$.

Exemplo 4.4.6. Seja X um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, e $\leq$ sendo uma relação de ordem Lexicográfica, considerando a base $b = 4$ sendo $a = (2330)_4 = (2,3,3,0)_4$ e $c = (2332)_4 = (2,3,3,2)_4$. Assim:

$$(2,3,3,0)_4 < (2,3,3,2)_4 \ ,$$

Analisando os números a e c temos que $a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = c_3$ porém $a_4 < c_4$, pois 0 é menor que 2, então $a < c$.

Aplicaremos a ordem lexicográfica a esquerda em polinômios, no caso em que $b < 0$, ou seja, utilizaremos a notação polinomial para os números inteiros tem se então:

Definição 4.4.3. *Sejam* $a = \sum_{i=n-1}^{0} a_i b^i$, $c = \sum_{i=n-1}^{0} c_i b^i$ *polinômios, e* $\leq$ *relação de ordem em* $\mathbb{N}[b]$. *Dizemos que*

$$a \geq c \ ou \ \sum_{i=n-1}^{0} a_i b^i \geq \sum_{i=n-1}^{0} c_i b^i$$

se, e somente se, $a_k \times b^k > c_k \times b^k$ *e* $a_j b^j = c_j b^j$ *para todo* $j < k$, *tal que exista* $k \in \{n-1, n-2, \dots, 1, 0\}$ *e* $a \neq c$.

Vejamos os exemplos a seguir :

Exemplo 4.4.7. Seja $a = (28333)_{(-10)}$ e $c = (28343)_{(-10)}$, veja que:

$$a = (28333)_{(-10)} = 2 \times (-10)^4 + 8 \times (-10)^3 + 3 \times (-10)^2 + 3 \times (-10)^1 + 3 \times (-10)^0$$

e

$$c = (28343)_{(-10)} = 2 \times (-10)^4 + 8 \times (-10)^3 + 3 \times (-10)^2 + 4 \times (-10)^1 + 3 \times (-10)^0$$

Temos então: $a_4 b^4 = c_4 b^4, a_3 b^3 = c_3 b^3, a_2 b^2 = c_2 b^2$ porém $a_1 b^1 > c_1 b^1$, pois temos que:

$$3 \times (-10)^1 > 4 \times (-10)^1 \text{ ou } -30 > -40.$$

Visto que tanto em a quanto em c ambas as potências são ímpar, diante disso o menor algarismo implica no maior número. Como $3\times(-10)^1$ é menor que $4\times(-10)^1$, então $a > c$, veja a Proposição 4.3.1.

Exemplo 4.4.8. Consideraremos $a = (28333)_{(-11)}$ e $c = (28433)_{(-11)}$, logo:

$$a = (28333)_{(-11)} = 2\times(-11)^4 + 8\times(-11)^3 + 3\times(-11)^2 + 3\times(-11)^1 + 3\times(-11)^0$$

e

$$c = (28433)_{(-11)} = 2\times(-11)^4 + 8\times(-11)^3 + 4\times(-11)^2 + 3\times(-11)^1 + 3\times(-11)^0$$

Temos que $a_4b^4 = c_4b^4, a_3b^3 = c_3b^3$ já $a_2b^2 < c_2b^2$, pois o algarismo que multiplica o termo da potência $(-10)^2$ em a é diferente do algarismo que multiplica o termo da mesma potência em c, e temos:

$$3\times(-11)^2 < 4\times(-11)^2 \text{ ou } 363 < 484.$$

Por tanto a explicação decorre da mesma maneira do exemplo anterior (Proposição 4.3.1), pois uma base negativa, quando elevada a uma potência par, produz um número positivo, e assim quanto maior for o algarismo, maior será o número. Visto que tanto em a quanto em c ambas as potências são par, diante disso o menor algarismo implica no menor número. Como $3\times(-11)^2$ é menor que $4\times(-11)^2$, então $a < c$.

Exemplo 4.4.9. Sendo $a = (14151)_{(-8)}$ e $c = (14150)_{(-8)}$, logo:

$$a = (14151)_{(-8)} = 1\times(-8)^4 + 4\times(-8)^3 + 1\times(-8)^2 + 5\times(-8)^1 + 1\times(-8)^0$$

e

$$c = (14150)_{(-8)} = 1\times(-8)^4 + 4\times(-8)^3 + 1\times(-8)^2 + 5\times(-8)^1 + 0\times(-8)^0$$

Observe que $a_4b^4 = c_4b^4, a_3b^3 = c_3b^3$, $a_2b^2 = c_2b^2, a_1b^1 = c_1b^1$, porém $a_0b^0 > c_0b^0$. Veja que o algarismo que multiplica o termo da potência $(-8)^0$ em a é diferente do algarismo que multiplica o termo da mesma potência em c. Logo:

$$1\times(-8)^0 > 0\times(-8)^0 \text{ ou } 1 > 0.$$

Portanto como o termo está elevado a potência par e $a_0\times(-8)^0 > c_0\times(-8)^0$ então $a > c$

Exemplo 4.4.10. Sejam $a = (3432)_{(-6)}$ e $c = (1433)_{(-6)}$, logo:

$$a = (3432)_{(-6)} = 3\times(-6)^3 + 4\times(-6)^2 + 3\times(-6)^1 + 2\times(-6)^0$$

e

$$c = (1433)_{(-6)} = 1\times(-6)^3 + 4\times(-6)^2 + 3\times(-6)^1 + 3\times(-6)^0$$

Como o $a_3b^3 > c_3b^3$ e ambos estão elevados a potência ímpar, logo $a < c$.

Observação 4.4.1. *Dados* $\sum_{i=n}^{0} a_i b^i$ *e* $\sum_{i=n}^{0} c_i b^i$ *em* $\mathbb{N}[b]$. *Segue da Proposição 4.3.1 que caso a potência do termo* x *seja ímpar, o menor algarismo acusa o maior número. Por outro lado sendo par, o menor algarismo acusa o menor número.*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivava a escrita ou representação de qualquer número inteiro negativo sem o sinal de menos, mostrar que essa escrita ou representação é única e conhecer melhor a respeito da notação de *Sistema de Numeração Posicional*. Ao realizar essa pesquisa pudemos alcançar todos os objetivos propostos, tais objetivos encontram-se de maneira detalhada no capítulo 4. Além disso foi possível realizar mudanças entre bases negativas, utilizar a proposição 4.3.1 para o reconhecimento de números inteiros numa base negativa e ainda foi possível diante da ordem lexicográfica a esquerda aplicada a polinômios, (Definição 4.4.3) e a Observação 4.4.1, ordenar números em base negativa. Por outro lado podemos concluir que existe uma bijeção entre os números inteiros diferente de zero e os números naturais diferentes de zero, provando, que há uma igualdade ente o número de elementos entre o conjunto de números inteiros não nulos e o conjunto dos números naturais.

Portanto esta pesquisa ressalta a importância de tal assunto para a Matemática, outras áreas de conhecimento e para a sociedade. E ainda o interesse de conhecer melhor sobre notação de *Sistema de Numeração Posicional*. Esta pesquisa considerada como pesquisa básica, me proporcionou a oportunidade de conhecer melhor sobre notação de numeração posicional, além de um amadurecimento como pesquisador e profissionalmente. Esperamos ainda que essa pesquisa possa contribuir para novas abordagens na representação ou ensino deste assunto no Ensino Fundamental. Diante dos resultados encontrados, mostra-se que o intuito e os objetivos do trabalho foram alcançados.

A partir desta pesquisa caracterizada como pesquisa básica buscaremos realizar estudos mais aprofundados sobre o assunto. Podendo ser pensado em tentar estabelecer as operações aritméticas básicas (Adição e Multiplicação) em $b < 0$, como proposta para uma nova pesquisa.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974. 252 p. Título original: A History of Mathematics. Disponível em: https://idoc.pub/documents/idocpub-d4pqjz6gvrnp. Acesso em: 12 jun. 2022.

CARVALHO, Luis Osete Ribeiro et al. **Metodologia Científica:** teoria e aplicação na educação a distância. Petrolina: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2019. 83 p. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/noticias/univasf-publica-livro-digital- livro-de-metodologia-cientifica.pdf. Acesso em: 12 jun. 2022.

COSTA, Eudes Antonio da; SANTOS, Ronaldo Antonio dos. **Números Mágicos de Ball**. In: Semana do IME e Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação do IME/UFG, $XXIX$, 2021, UFG. **Anais** ($XXIX$ Semana do IME e VI Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação do IME/UFG). IME/UFG, 2021. p. 68 - 98.

DINIZ, Hugo Alex; RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias. **Sistemas de numeração:** Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino. Ciências Naturais e Exatas, UFSM, Santa Maria, 2015.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética.** 1ª. Ed. São Paulo: LTDA, 1991. 151 p.

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, GELSON. Relações, Aplicações, Operações. In: OMINGUES, Hygino H; IEZZI, GELSON. **Álgebra Moderna**. 4ª. ed. São Paulo: Atual, 2003. Cap III.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª. Ed. São Paulo: Unicamp. 2011. 848 p.

FOMÍN, Serguei Vasil'evich; VEGA, Carlos. Sistemas de Numeración. **Lecciones populares de matemáticas**, Moscú, p. $1-52$, 1975.

GARBI, Gilberto. Leibniz e Nosso Mundo Digital. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 84, p. $1-4$, 2014.

MONTEIRO, Jacy. L. H. Teoria Elementar dos Conjuntos. In: MONTEIRO, Jacy. L. H. **Elementos de álgebra:** Livro Técnico e Científico. Rio de Janeiro: Universidade de São Paulo. 1969. Cap 1.

NICOLAI, Ronaldo. Algumas Técnicas Operatórias: (de outros tempos e de outros lugares). **Revista do Professor de Matemática**, n. 08, 1986. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/8/10.htm. Acessado em: 12 jun. 2022.

OCHOVIET, Teresa Cristina. Números Capicuas e Sistema de Numeração. **Revista do Professor de Matemática**, n. 29, 1995. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/29/7.htm. Acessado em: 12 jun. 2022.

RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias. **Sistemas de Numeração:** evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. 2013. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Ciência e Natureza, Universidade Federal do Oeste do Pará, Pará, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/bitstream/123456789/200/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_SistemaDeNumera%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 12 jun. 2022.

SANTOS, Rogério Cesar dos. Os números inteiros sem o sinal de menos. **Revista do Professor de Matemática**, V. 87, p. $9-11$, 2015.