UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATEUS TORRES RIBEIRO

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS

Arraias, TO
2024

Mateus Torres Ribeiro

Aplicações de equações diferencias ordinárias

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor - Arraias, para obtenção do título de licenciado em matemática.

Orientadora: Karla Carolina Vicente de Sousa

Arraias, TO
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T693a Torres Ribeiro, Mateus.
Aplicações de equações diferenciais ordinárias. / Mateus Torres Ribeiro. – Arraias, TO, 2024.
59 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2024.
Orientadora : Karla Carolina Vicente de Sousa

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Decaimento Radioativo. 3. Tempo de Morte. 4. Equação Logística. I. Título

CDD 510

Mateus Torres Ribeiro

Aplicações de equações diferenciais ordinárias

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliada para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 26/04/2024

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
KARLA CAROLINA VICENTE DE SOUSA
Data: 03/09/2024 16:22:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Karla Carolina Vicente de Sousa, UFT, Arraias

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT, Araguaína

Prof. Me. Alan Carlos Baia dos Santos, UFT, Arraias

Dedico este trabalho à minha avó Zifirina Maria de Souza (in memorian).

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

Sir Issac Newton

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pela minha vida, por guiar e iluminar meu caminho, e consequentemente, me permitir chegar neste momento.

Gostaria também de agradecer à minha orientadora Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, pela sua dedicação, compreensão, amizade e por ter me auxiliado durante esse período. Seu comprometimento e dedicação são inspiradores e merecem ser exaltados. Sou muito grato e peço desculpas pelas minhas falhas.

Aos meus pais, Zildeci e Reinaldina, que sempre estiveram ao meu lado nas horas mais difíceis e felizes da minha vida. Sou grato pelo amor incondicional de vocês, pela educação exemplar e valores morais que me foram transmitidos ao longo da vida.

Aos meus irmãos, Vitor, Lorraine, Natalia e Tatiele, por sempre estarem ao meu lado me apoiando e incentivando em cada momento.

Aos meus colegas e amigos, Alana, Aldison, Bárbara, Brena, Cleidiane, Crislorraine, Dalva, Denise, Dinália, Edna, Elias, Elismar, Emizael, Jaqueline, Jéssica, Luana, Marta, Michele, Rafael e Ricardo, agradeço por tornarem meus dias mais felizes.

Em especial, queria fazer um agradecimento a Ana Beatriz, por seu companheirismo, carinho e cuidado.

Aos professores, servidores e colaboradores da Universidade Federal do Tocantins, expresso minha sincera gratidão por compartilharem seus conhecimentos e experiências. Ao longo desses anos, o aprendizado que adquiri foi fundamental para minha formação.

Por fim, agradeço a todas as pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e participaram, direta ou indiretamente, no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho trata de um estudo sobre equações diferenciais ordinárias por intermédio da apresentação de alguns dos principais métodos analíticos de resolução de equações diferenciais ordinárias em paralelo com a exibição de aplicações dessas equações em problemas do nosso cotidiano. Com a pergunta de pesquisa "Quais aplicações e fenômenos químicos, físicos, biológicos, do campo das Ciências Sociais ou Econômicas motivaram o estudo de determinadas equações diferenciais ordinárias cujos métodos analíticos de resolução são estudados no componente curricular de Equações Diferenciais Ordinárias no ensino superior?", chegamos, por intermédio de uma pesquisa de cunho exploratório, a algumas respostas como: a determinação do instante da morte de uma pessoa, determinação da meia-vida de substâncias radioativas, problemas envolvendo corpos em queda e dinâmica de populações. No trabalho, apresentamos detalhadamente algumas dessas aplicações encontradas da literatura e também adaptadas pelo autor.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Decaimento Radioativo. Tempo de Morte. Equação Logística. Sistemas Massa-Mola.

ABSTRACT

This work deals with a study on ordinary differential equations through the presentation of some of the main analytical methods for solving ordinary differential equations alongside the exhibition of applications of these equations in everyday problems. With the research question "What applications and chemical, physical, biological, social sciences, or economic phenomena motivated the study of certain ordinary differential equations whose analytical methods of resolution are studied in the curricular component of Ordinary Differential Equations in higher education?" we arrived, through an exploratory research, at some answers such as: determining the time of death of a person, determining the half-life of radioactive substances, problems involving falling bodies, and population dynamics. In the paper, we present in detail some of these applications found in the literature and also adapted by the author.

Key-words: Ordinary Differential Equations. Radioactive Decay. Death Time. Logistic Equation. Mass-Spring Systems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo Figueiredo e Neves (2012, p.1), "o estudo de equações diferenciais ordinárias começa com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII, motivados por problemas físicos." Boyce e Di Prima (2003, p.viii) afirmam que "a principal razão para resolver a maioria das equações diferenciais é tentar aprender algo sobre um processo físico subjacente que se acredita que a equação modele". Assim, as equações diferenciais são de interesse de matemáticos e não matemáticos devido às possibilidade de usá-las para investigar uma ampla variedade de problemas nas áreas de Física, Química, Ciências Biológicas e Ciências Sociais. Apesar da principal razão de se resolver uma equação diferencial ser tentar aprender algo sobre um fenômeno, também há um campo, agora dentro da matemática, que não olha a princípio para onde o modelo se encaixa, mas se preocupa em desenvolver técnicas de resolução para que, quando houver algum modelo dentro daquelas hipóteses estudadas, já haja um método para o estudo de existência de solução e de suas propriedades.

Com o passar do tempo, diante da verificação da enorme aplicabilidade das equações diferenciais, as técnicas desenvolvidas por alguns estudiosos foram sintetizadas e agrupadas por autores em materiais didáticos que ampliaram a literatura sobre o assunto e as equações diferenciais ganharam espaço como componente curricular em cursos superiores como Matemática, Física e Engenharias. Por abranger diversos conteúdos e possuir uma área de estudo muito vasta, os educadores tendem a limitar os conteúdos a teoria relativa às técnicas analíticas de resolução de equações diferenciais ordinárias. Nesse viés, surgem indagações sobre de onde vieram aquelas equações e para o que elas servem. Diante disso, nossa questão de pesquisa é "Quais aplicações e fenômenos químicos, físicos, biológicos, do campo das Ciências Sociais ou Econômicas motivaram o estudo de determinadas equações diferenciais ordinárias cujos métodos analíticos de resolução são estudados no componente curricular de Equações Diferenciais Ordinárias no ensino superior?" Algumas respostas para essas questões são: determinação do instante da morte de uma pessoa, determinação da meia-vida de substâncias radioativas, capitalização de juros, problemas envolvendo corpos em queda e dinâmica de populações.

Além de apresentar esses problemas que se traduzem em linguagem matemática por meio de uma equação diferencial, as técnicas de resolução dessas equações exploram diversos assuntos estudados no curso de Licenciatura em Matemática, e assim, este estudo pretende contribuir para a formação de futuros professores de Matemática. As equações diferenciais ordinárias são uma aplicação do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra Linear, que são componentes curriculares obrigatórios no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Ao explorar os diversos métodos de resolução de equações diferenciais, são exigidos inúmeros conhecimentos de Matemática Básica, tais como: trigonometria, produtos notáveis, fatoração de expressões algébricas, resolução de equações polinomiais e etc. Dessa maneira, durante a execução da pesquisa e do trabalho, tópicos da educação básica também foram aperfeiçoados.

De acordo com Zill e Cullen (2001), se uma equação contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única váriavel independente, então a expressão matemática se configura como uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Dizemos que uma Equação Diferencial Ordinária é de ordem n quando a ordem da maior derivada que aparece na expressão da equação é n e, nesse caso, podemos escrevê-la na forma

$$F(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), \ldots, y^{n-1}(x), y^{n}(x)) = 0, \; n \geq 1$$

Ao explorar os métodos de resolução dessas equações, muitos estudantes enfrentam dificuldades em relacionar os conceitos teóricos com as aplicações práticas, que muitas vezes deram origem àquela equação. Segundo Boyce e Di Prima (1994, p.33), "é importante ter em mente que as equações matemáticas são quase sempre descrições aproximadas dos processos reais, pois estão baseadas em observações que são, em si mesmas, aproximações." Nesse contexto, a modelagem matemática por meio dessas expressões matemáticas representa uma ferramenta essencial na compreensão de fenômenos em diversas áreas de conhecimento.

Um dos matemáticos que percebeu a influência das equações diferenciais em problemas cotidianos foi Thomas R. Malthus. No século XVIII, com o processo da Revolução Industrial as populações cresciam em ritmo acelerado. Nesse cenário começaram a surgir preocupações com a produção de alimentos, se a capacidade de produção seria suficiente para acompanhar esse crescimento. Diante dessa preocupação, o matemático Thomas R. Malthus (1766 - 1834) defendia que a produção de alimentos crescia de forma limitada e decrescente, enquanto os nascimentos ocorriam de forma ilimitada e crescente, o que resultaria em problemas sociais como a fome e a miséria.

Na obra *Ensaio sobre o Princípio da População*, Malthus apresentou o que conhecemos atualmente como teoria malthusiana. Essa teoria diz que a razão entre a variação da população (P) com relação ao tempo (T) é proporcional a população atual, o que colocado em termos matemáticos ganha a forma da seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dP}{dT} = kP, \tag{1.1}$$

em que P denota a população, T o tempo e k é a constante de proporcionalidade.

Apesar da enorme divulgação que a teoria malthusiana teve durante a Revolução Industrial, atualmente, ela não faz mais sentido, uma vez que, a produção de alimentos foi capaz de acompanhar a reprodução das populações; sendo assim, problemas como fome e miséria se devem a péssima distribuição dos recursos. Não obstante, a teoria malthusiana ainda é aplicável em diversos problemas de dinâmica populacional e em outros problemas que tem como característica a proporcionalidade entre a função e sua variação.

Após a divulgação da teoria malthusiana surgiram diversas críticas a esse modelo. Um dos críticos foi o matemático belga Pierre-François Verhust (1804 - 1845). Em 1838, Pierre-François Verhulst publicou um artigo no qual introduziu a equação logística hoje conhecida pelo crescimento de uma população. Apesar das divergências de opiniões, a equação logística é bastante similar ao modelo malthusiano. Ao contrário de Malthus, Verhulst leva em consideração que o crescimento populacional acontece até atingir a capacidade máxima de habitantes que o ambiente pode suportar. Em termos matemáticos, temos a seguinte equação não linear

$$\frac{dP}{dT} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \tag{1.2}$$

em que P representa a população, T o tempo, k é a constante de proporcionalidade e M a capacidade de suporte do ambiente. Assim, a capacidade máxima que um ambiente pode suportar está diretamente ligada aos recursos que ali são produzidos. Enquanto a população não atinge essa capacidade (M), ela tende a crescer. Se a população ultrapassa a capacidade, os recursos passam a não ser suficientes para mantê-la, e ela começa a decrescer. Diante desse embate o crescimento populacional se estabiliza.

Apesar de descrevermos problemas de dinâmica de população envolvendo as equações (1.1) e (1.2), esses modelos também aparecem em outros contextos como em aplicações relacionadas ao decaimento de substâncias radioativas e na determinação do instante da morte de uma pessoa. Boyce e Di Prima (1994) ainda acrescentam

> “ (...) observou-se que os materiais radioativos decaem com uma taxa proporcional à quantidade de material presente na amostra; que o calor passa de um corpo quente para um outro mais frio a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre os dois corpos; que os corpos se deslocam de acordo com às Leis de Newton do movimento; e que as populações de inseto, isoladas, crescem a uma taxa proporcional à população presente.” (BOYCE, 1994, p. 32)

Em alguns casos, apenas uma equação diferencial não é suficiente para descrever determinados fenômenos, pois eles podem envolver vários elementos separados, acoplados entre si. Aplicações com essas características possuem como correspondente matemático um sistema de equações diferenciais.

Devido à Primeira Guerra Mundial (1914 - 1918), vários pescadores da Itália foram levados para combate e, com isso, as pescas no mar Adriático praticamente paralisaram. Nesse cenário, a tendência seria o aumento constante dos peixes, entretanto, apesar da inatividade da pesca, as populações de peixes (presas e predadores) apresentavam oscilações em seus crescimentos. Esses acontecimentos levaram a diversas teorias que objetivavam explicar esse fenômeno. Segundo Zill e Cullen (2001), o matemático italiano Vito Volterra (1860 - 1940) na tentativa de explicar as variações na população de peixes, propôs um modelo que explicava os níveis oscilatórios no mar Adriático, sendo um resultado de interações predador-presa. Por outro lado, em outro estudo, Alfred J. Lotka (1880 - 1949), trabalhando independentemente, chegou ao mesmo sistema de equações que Volterra. Diante disso, as equações foram denominadas como equações de Lotka-Volterra, também conhecidas como modelo presa-predador.

As equações de Lotka-Volterra são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y(\alpha - \beta x)\\ \frac{dx}{dt} &= x(-\gamma + \delta y)\end{aligned}$$

em que $y(t)$ representa a quantidade de presas no tempo (t), $x(t)$ denota a quantidade de predadores no tempo (t) e α, β, γ e δ são as constantes de crescimento da população de presas, decrescimento da população de presas, mortalidade da população de predadores e de crescimento da população de predadores, respectivamente.

Neste trabalho, vamos nos aprofundamos tanto no estudo de aplicações de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares e não lineares, como as propostas por Thomas Malthus e Verhust, quanto em aplicações de equações diferenciais de segunda ordem, enfatizando as aplicações em oscilações mecânicas. Também vamos apresentar a resolução do sistema de equações do tipo Lotka-Volterra descrito acima, transformando-o em uma equação diferencial não linear.

O trabalho foi realizado mediante pesquisa de cunho exploratório, tendo em vista aprimorar conhecimentos teóricos. Em consonância com Gonsalves (2003, p.65) a pesquisa exploratória

> [...] é aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de fornecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominada "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema. (apud MENEZES et al., 2019, p.34)

Durante a investigação, as informações foram coletadas por meio de revisão bibliográfica. Menezes et al. (2019, p.36) aponta que esse método "utiliza fontes bibliográficas ou material elaborado, como livros, publicações periódicas, artigos científicos, impressos diversos ou, ainda, textos extraídos da internet."

Por fim, este trabalho está dividido em 4 capítulos que estão descritos a seguir:

Capítulo 1 - Introdução - apresentação do tema, um breve contexto histórico, objetivos do trabalho e descrição da metodologia adotada.

Capítulo 2 - Resultados preliminares - apresentação de alguns conceitos e resultados fundamentais de equações diferenciais ordinárias e cálculo diferencial e integral.

Capítulo 3 - Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e aplicações - apresentação de algumas técnicas de resolução de equações de primeira ordem e de aplicações modeladas por problemas que podem ser resolvidos utilizando essas técnicas.

Capítulo 4 - Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e aplicações - apresentação de técnicas de resolução de equações de segunda ordem e aplicações modeladas por problemas que podem ser resolvidos utilizando essas técnicas.

Para a realização deste trabalho foram utilizados como principais fontes de pesquisa as referências (Boyce, 1994), (Boyce, 2010), (Zill, 2001) e (Figueiredo, 2012).

2 RESULTADOS PRELIMINARES

No Ensino Básico, aprendemos a resolver as chamadas equações algébricas, que são equações na forma $f(x) = 0$, em que $f(x)$ é um polinômio e as incógnitas são números. Por exemplo, as equações

$$x - 5 = 30$$

e

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

são equações algébricas na incógnita x e cujas soluções são $x = 35$ e o par $x = -2$, $x = 6$, respectivamente.

Já uma equação diferencial é uma equação cujas incógnitas são funções e a equação envolve as derivadas destas funções. Em uma equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(x)$, x é a variável independente e y é a variável dependente. Isso significa que a variável dependente representa uma quantidade cujo valor depende da forma como a variável independente é manipulada.

Dada a função $y = f(x)$, a derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também uma função de x e é calculada utilizando técnicas adequadas de derivação que foram aprendidas no curso de Cálculo Diferencial.

Por exemplo, se $y(x) = e^{2x}$, então, aplicando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = 2e^{2x} = 2y$$

isto é,

$$y'(x) = 2y. \tag{2.1}$$

Assim, $y(x) = e^{2x}$ é solução da equação diferencial (2.1).

Vejamos outro exemplo. Considere a função $y(x) = cos(x)$. Nesse caso, $y'(x) = -sen(x)$ e $y''(x) = -cos(x) = -y(x)$. Isso significa que a função $y(x) = cos(x)$ é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$.

Enquanto no curso de Cálculo Diferencial aprendemos técnicas de derivação que nos permitem derivar funções como $y(x) = e^{2x}$ e $y(x) = cos(x)$, no curso de Equações Diferenciais buscamos por funções que satisfazem expressões envolvendo suas derivadas, como $y' = 2y$ e $y'' + y = 0$.

Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1. Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

2.1 Classificação de Equações Diferenciais

As equações diferenciais são classificadas quanto ao tipo (ordinária ou parcial), a ordem (1ª, 2ª, ...) e a linearidade (linear ou não linear).

A classificação quanto ao tipo se baseia em a função desconhecida depender apenas de uma variável independente ou de diversas variáveis independentes. Formalmente, se uma equação contém derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária. Por outro lado, uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial.

Dois exemplos de equações diferenciais ordinárias são a equação que governa o decaimento de uma substância radioativa com o tempo dada por

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t),$$

em que $R(t)$ é a função decaimento e k é uma constante conhecida. E, também, a equação que expressa a segunda lei de Newton, que diz que força total atuando sobre o objeto é igual a massa do objeto vezes sua aceleração, isto é,

$$F(t) = m\frac{dv}{dt},$$

com $a(t) = \frac{dv}{dt}$ a aceleração e $v(t)$ a velocidade do objeto.

Alguns exemplos de equações diferenciais parciais são:

- A equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
em que $u(t,x)$ representa a temperatura de uma barra em um instante t e a á uma constante.

- A equação da onda
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$
com v a constante da velocidade de propagação, que modela, de modo geral, o deslocamento $u(t,x,y)$ de uma onda.

- A equação de Laplace
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
que aparece com frequência nas ciências aplicadas, particularmente no estudo de fenômenos estacionários (independentes do tempo).

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação. Por exemplo,

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ou ordem dois. Já as equação

$$\frac{d^3y}{dx^3} + t\frac{dy}{dx} + (cos^2x)y = x^3$$

e

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$$

são equações de terceira e primeira ordens, respectivamente.

Podemos sempre escrever uma equação diferencial de ordem n (ou n-ésima ordem) da seguinte forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}\right) = 0.$$

Por exemplo, as equações

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = e^x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (cos^2x)y = x^3$$

e

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0,$$

apresentadas anteriormente, podem ser escritas como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = (1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y - e^x,$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (cos^2x)y - x^3,$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} + xy^2,$$

respectivamente.

Uma equação diferencial de ordem n é chamada de linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2.2}$$

com $a_n \neq 0$. As funções $a_i(x)$ são os coeficientes da equação linear. É importante notar que nas equações lineares:

- A potência da variável dependente y e de todas as suas derivadas é 1;
- Cada coeficiente que acompanha y e suas derivadas depende apenas da variável independente x.

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas na forma (2.2) são chamadas de não lineares.

Exemplo 1. As equações

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

são equações diferenciais ordinárias de 2ª e 3ª ordens, respectivamente, e todas elas são lineares.

Exemplo 2. A equação diferencial

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = e^x$$

é ordinária de ordem 2. O termo $y^2\frac{d^2y}{dx^2}$ não permite que ela seja escrita na forma $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ e, portanto, a equação diferencial é não linear. Além disso, a perda de linearidade também se dá pois uma das derivadas de y está elevada a potência 3. Bastava uma dessas condições para haver perda da linearidade da equação.

2.2 Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária

Nesta seção, vamos definir o que vem a ser uma solução particular e uma solução geral de uma equação diferencial ordinária. Além disso, vamos enunciar resultados que definem sob quais condições uma equação diferencial ordinária de primeira ordem admite solução e unicidade de solução.

Definição 2. Uma solução particular ou, simplesmente, solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma função $y(x)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.

Exemplo 3. Por substituição direta, podemos verificar que a equação de primeira ordem

$$\frac{dR}{dt} = -5R$$

tem a solução $R(t) = Ce^{-5t}$, $-\infty < t < +\infty$, em que C é uma constante arbitrária. De fato, se $R(t) = Ce^{-5t}$, então usando a Regra da Cadeia para derivação, temos que $R'(t) = -5Ce^{-5t} = -5R(t)$.

Exemplo 4. A função $y(t) = e^x + e^{-x}$ é solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$y'' - y = 0,$$

enquanto $\tilde{y}(x) = e^{2x}$ não é solução da equação. De fato, $y'(x) = e^x - e^{-x}$, $y''(x) = e^x + e^{-x} = y(x)$ e, portanto, $y(x)$ é solução. Por outro lado, $\tilde{y}'(x) = 2e^{2x}$, $\tilde{y}''(x) = 2e^{2x}$ e, assim

$$\tilde{y}'' - \tilde{y} = 4e^{2x} - e^{2x} = 3e^{2x} \neq 0,$$

mostrando que $\tilde{y}(x)$ não é solução.

Antes de apresentar o próximo exemplo, vamos relembrar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f definida e contínua no intervalo I e seja $a \in I$. Nestas condições, a função F dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \ x \in I$$

é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo x em I.

A demonstração do resultado pode ser encontrada em (GUIDORIZZI, 2001, p.19).

Vamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo no próximo exemplo.

Exemplo 5. Afirmamos que a função $y(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$ é solução da equação diferencial

$$y' - 2xy = 1.$$

De fato, usando a Regra do Produto para a derivação, temos que

$$y'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + 2xe^{x^2},$$

e, assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$y'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}e^{-x^2} + 2xe^{x^2} = 2x\left(e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}\right) + 1 = 2xy + 1.$$

Logo,

$$y' - 2xy = (2xy + 1) - 2xy = 1,$$

o que prova o desejado.

Um tipo de problema importante e muito estudado no curso de equações diferenciais são problemas de valor inicial. O problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

é chamado problema de valor inicial (PVI).

Uma solução do problema de valor inicial (2.3) em um intervalo I é uma função $y(x)$ que está definida neste intervalo, tal que sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (2.3).

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária. Dizemos que a família de soluções obtida é uma solução geral da equação quando toda solução particular puder ser obtida da família de soluções por intermédio da escolha de uma constante apropriada.

Não há método geral para resolver essa equação diferencial. O que aprendemos no curso de Equações Diferenciais Ordinárias é que existem técnicas ou métodos de resolução aplicáveis para algumas classes de equações que possuem propriedades específicas.

A seguir, vamos exibir resultados de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Teorema 2. *(Existência e Unidade) Considere o problema de valor inicial*

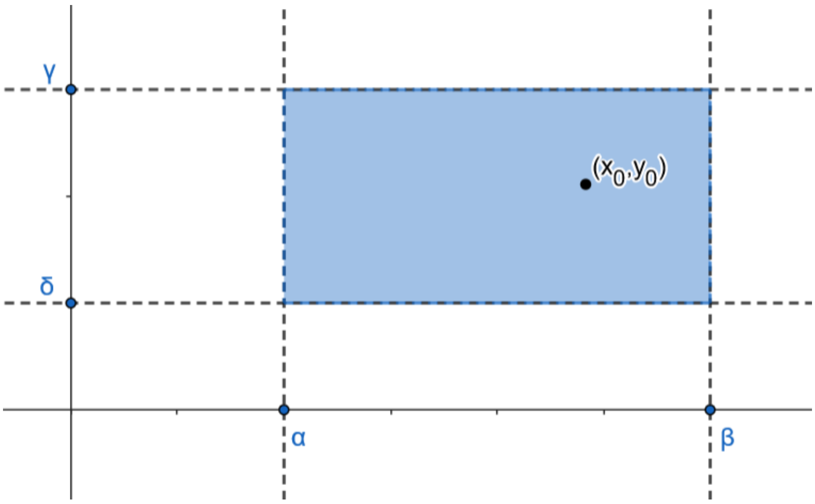
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Se $f(x,y)$ *e* $\partial f/\partial y$ *são contínuas no retângulo*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < x < \beta,\ \delta < y < \gamma\},$$

contendo (x_0, y_0)*, então o problema* (2.4) *tem uma única solução em um intervalo contendo* x_0.

Figura 1 – Retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < x < \beta,\ \delta < y < \gamma\}$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software* GeoGebra, 2024.

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrado em (BOYCE, 2010, p.86-91).

Exemplo 6 (SANTOS, 2010, p.60)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases} .$$

Afirmamos que as funções y_1 e y_2 a seguir são soluções do PVI.

$$y_1(x) = \frac{x^2}{4},\ x \geq 0 \ \ e \ \ y_2(x) = 0.$$

Evidentemente y_2 é uma solução devido à condição inicial. Para mostrar que y_1 é solução, note que $y_1'(x) = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \sqrt{y_1}$ e que $y_1(0) = \frac{0^2}{4} = 0$.

O problema anterior não possui unicidade de solução. Mas isso não significa que o Teorema 2 não tenha validade, só significa que o problema não satisfaz todas as hipóteses dele. De fato, a função $f(x,y) = \sqrt{y}$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ que não está definida (e, em particular, não é contínua) em $y = 0$. Note que se $y(x_0) = y_0 > 0$, a solução $y_2(x) = 0$ seria descartada, as hipóteses do Teorema 2 estariam satisfeitas e, consequentemente, haveria unicidade de solução.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, o problema de valor inicial acima tem uma única solução para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Mas, por exemplo, para $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, o problema tem solução $y(x) = \frac{-1}{x-1}$ e é válida somente no intervalo $x < 1$.

Se o problema de valor inicial for linear, o teorema de existência e unicidade ganha a forma a seguir e a verificação das hipóteses se torna mais simples.

Teorema 3 (Teorema de Existência e Unicidade para Equações Lineares)**.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I contendo x_0, então o problema de valor inicial tem uma única solução neste intervalo.

Exemplo 7. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x \\ y(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

$p(x) = \frac{2}{x}$ e $q(x) = x$. A função $p(x)$ é contínua para $x \neq 0$. Para $x_0 = 2$, por exemplo, o problema de valor inicial tem uma única solução para $x > 0$, e para $x_0 = -3$, o problema de valor inicial tem uma única solução para $x < 0$.

Resultados de existência e unicidades de soluções também existem no caso de problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais de ordem superior. Esses casos serão considerados no Capítulo 4. No próximo capítulo, estudaremos aplicações de equações diferenciais de primeira ordem.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES

Neste capítulo consideraremos aplicações de equações diferenciais de primeira ordem, isto é, equações na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{3.1}$$

Considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = cos(x).$$

Nesse caso, integrando ambos os lados da equação com relação à variável x obtemos

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx \quad = \quad \int cos(x)\,dx.$$

Agora, usando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$y(x) = sen(x) + C,$$

em que C é uma constante real.

De modo geral, equações que possuem a forma

$$y' = g(x)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{3.2}$$

podem facilmente ser resolvidas integrando-se os dois lados com relação à variável independente x e a solução geral é dada por

$$y(x) = \int g(x)\,dx + C,$$

em que C é uma constante real.

Nem todas as equações diferenciais possuem a estrutura da equação acima e, consequentemente, não podem ser resolvida apenas com uma integração direta. Dada uma função f, não há método geral para resolver essa equação diferencial. O que existem são métodos de resolução de equações diferenciais que possuem características particulares.

Dentro da categoria das equações diferenciais de primeira ordem, devemos dar atenção especial às lineares, afinal, o chamado método do fator integrante pode ser utilizado para resolvê-las.

3.1 Método do Fator Integrante

Equações diferenciais de primeira ordem lineares tem a forma geral

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \tag{3.3}$$

em que $p : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto (a,b).

O método do fator integrante consiste em encontrar uma função auxiliar $\mu(x)$ de forma que, ao multiplicarmos a equação (3.3) por esta função, a equação obtida seja uma equação linear com o coeficiente que acompanha y ($p(x)$ no caso da equação (3.3)) nulo, ou seja, do tipo (3.2), a qual pode ser resolvida por integração direta. Uma função auxiliar com tal propriedade é chamada de fator integrante da equação linear. A seguir, vamos mostrar como é o processo de obtenção da expressão do fator integrante.

Primeiramente, vamos supor que $\mu(x)$ seja uma função com a propriedade desejada. Multiplicando a equação (3.3) por $\mu(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y &= g(x) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right)\mu(x) &= g(x)\cdot\mu(x) \Leftrightarrow \\ \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y &= \mu(x)g(x). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\mu'(x)y$ do lado esquerdo da equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y - \mu'(x)y + \mu(x)p(x)y &= \mu(x)g(x) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx}(\mu(x)y) - y(\mu'(x) - p(x)) &= \mu(x)g(x), \end{aligned} \tag{3.4}$$

com a aplicação da Regra do produto do lado esquerdo da última expressão cima. Agora, como estamos supondo que $\mu(x)$ é um fator integrante, devemos ter o coeficiente que acompanha y nulo em (3.4), isto é

$$\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0 \Leftrightarrow \mu'(x) = \mu(x)p(x) \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x).$$

Note que $\frac{d}{dx}(ln|\mu(x)|) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ $(\mu \neq 0)$. Assim, $ln|\mu(x)|$ é uma primitiva de $\mu'(x)/\mu(x)$. Dessa forma, a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(ln|\mu(x)|) = p(x).$$

Integrando a expressão acima com relação à variável x, obtemos

$$ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx + C_1,$$

com C_1 uma constante real. Aplicando a exponencial em ambos os lados da identidade anterior, temos que

$$|\mu(x)| = e^{ln|\mu(x)|} = e^{\int p(x)\,dx + C_1} = e^{\int p(x)\,dx}C_2,$$

com $C_2 = e^{C_1}$. Assim

$$\mu(x) = \pm C_2 e^{\int p(x)\,dx} = C_3 e^{\int p(x)\,dx},$$

com C_3 uma contante real.

Assim, obtemos infinitos fatores integrantes para a equação diferencial. Podemos escolher, por simplicidade, $C_3 = 1$ obtendo $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$. Substituindo em (3.4) temos que

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)g(x)$$

e, consequentemente,

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)\,dx + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)\,dx + C}{\mu(x)},$$

com C uma constante.

Note que $\mu(x) \neq 0$, já que estamos com o caso em que $p(x) \neq 0$. O caso $p(x) = 0$ não necessita do cálculo de um fator integrante. Dessa forma, supondo que p e g são funções contínuas, temos que a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear é dada por

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)\,dx + C}{\mu(x)}, \tag{3.5}$$

com C uma constante e

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}. \tag{3.6}$$

3.2 Equações de Variáveis Separáveis

O método do fator integrante finaliza o estudo da classe das equações diferenciais de primeira ordem lineares. O caso das equações não lineares é mais complicado, mas existe uma categoria de equações não lineares cuja resolução é equivalente a integração direta do caso linear, que são as equações de variáveis separáveis. Por mais que esta seja a categoria que admite a mais simples resolução dentre as equações não lineares, grande parte das aplicações são modeladas por esse tipo de equação.

Uma equação de primeira ordem é dita separável se ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.7}$$

em que os termos que envolvem cada variável podem ser separados pelo sinal de igualdade, se necessário.

Suponha que existem $G(x)$ e $P(y)$ funções tais que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}G(x) = M(x) \qquad P'(y) = \frac{d}{dy}P(y) = N(y).$$

Nesse caso, substituindo em (3.7), temos que

$$G'(x) + P'(y)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Utilizando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}\,G(x) + \frac{d}{dx}\,P(y) = 0,$$

e, assim,

$$\frac{d}{dx}\,(G(x) + P(y)) = 0.$$

em que usamos a propriedade de que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas dessas funções e que $y = y(x)$. Como a derivada acima é igual a zero, temos que

$$G(x) + P(y) = C.$$

e, assim, a solução do problema não linear (3.7) é dada implicitamente pela equação acima.

Exemplo 8. Vamos utilizar o método de resolução das equações de variáveis separáveis explicitado anteriormente para resolver a equação diferencial de primeira ordem não linear

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3.8}$$

Podemos escrever a equação (3.8) na forma

$$x + y\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, a equação é do tipo separável, com $M(x) = x$ e $N(y) = y$. Uma vez que $G(x) = \frac{x^2}{2}$ e $P(y) = \frac{y^2}{2}$ são primitivas de M e N, respectivamente, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{2}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

e, integrando a última expressão, obtemos

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1,$$

isto é,

$$x^2 + y^2 = C,$$

com C uma constante real.

3.3 Aplicações

Nesta seção vamos apresentar uma série de aplicações de equações diferenciais de primeira ordem cujas resoluções podem ser realizadas utilizando os métodos expostos nas seções anteriores.

A aplicação a seguir é uma adaptação de (BOYCE, 2010, p.47, Exercício 12) Uma técnica importante na pesquisa arqueológica é a datação por radiocarbono. Desenvolvida pelo químico americano Willard Libby (1908-1980), a datação por carbono-14 é um método empregado para estimar a idade de materiais orgânicos que contenham carbono, como ossos e madeira. Essa técnica se baseia na presença de átomos de carbono-14 nos organismos vivos, cujo decaimento ao longo do tempo permite determinar com relativa precisão em que período esses organismos existiram.

Um exemplo prático dessa técnica pode ser encontrado no caso da árvore Sycamore Gap. Em 27 de setembro de 2023, um adolescente cortou essa árvore, localizada no Parque Nacional de Northumberland, na Inglaterra. Com o corte, a quantidade de carbono-14 presente na árvore começou a se desintegrar.

A meia-vida do carbono-14, que é o tempo que o carbono leva para que metade do núcleo radioativo seja desintegrado, é aproximadamente 5568 anos. Se $Q(t)$ for a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 a quantidade original, a grandeza $Q(t)/Q_0$ pode ser medida.

Admitindo que Q obedeça à equação diferencial, $Q' = -rQ$:

- Qual o valor a constante de desintegração r do carbono 14?
- Qual é a expressão de $Q(t)$ para qualquer instante, com $Q(0) = Q_0$?
- Suponha que daqui alguns anos, se analisa uma amostra dessa árvore na qual a quantidade residual de carbono-14 seja 20% da quantidade original. Quantos anos terão se passado?

A equação

$$Q' = -rQ$$

é uma equação diferencial ordinária linear e também separável. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
Q' &= -rQ \\
\frac{dQ}{dt} &= -rQ \Leftrightarrow \\
\frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt} &= -r \Leftrightarrow \\
r + \frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{d}{dt}(rt) = r$ e $\frac{d}{dQ}(ln|Q|) = \frac{1}{Q}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(rt) + \frac{d}{dt}(ln|Q|) &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}(rt + ln|Q|) &= 0.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados com relação à variável x e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} rt + ln|Q| &= C_1 \Leftrightarrow \\ ln|Q| &= -rt + C_1 \Leftrightarrow \text{(Aplicando a exponencial)} \\ e^{ln|Q|} &= e^{-rt+c_1}. \end{aligned}$$

Usando que $e^{ln(a)} = a$, segue que

$$|Q(t)| = e^{-rt} \cdot e^{C_1},$$

isto é,

$$Q(t) = Ce^{-rt}, \tag{3.9}$$

em que C é uma constante real.

Utilizando que $Q(0) = Q_0$, temos que

$$Q_0 = Q(0) = Ce^{-r \cdot 0} = Ce^0 = C,$$

sendo assim, $C = Q_0$ e (3.9) se torna

$$Q(t) = Q_0 e^{-rt}.$$

Agora, utilizando que o carbono leva aproximadamente 5568 anos para que metade do núcleo radioativo seja desintegrado, isto é,

$$Q(5568) = \frac{Q_0}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} Q(5568) &= Q_0 e^{-r \cdot 5568} \Leftrightarrow \\ \frac{Q_0}{2} &= Q_0 e^{-r \cdot 5568} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &= e^{-r \cdot 5568} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln) \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln^{e^{-r \cdot 5568}} \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -r \cdot 5568, \end{aligned}$$

em que usamos na penúltima identidade acima a propriedade de que $ln(e^a) = a$. Logo

$$r = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5568}. \tag{3.10}$$

Utilizando que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,69315$, segue da expressão acima que $r = \frac{0,69315}{5568}$, e, consequentemente, a constante de desintegração do carbono 14 é aproximadamente $r \approx 0,0001245$.

Dessa forma, a expressão para $Q(t)$ para qualquer instante, com $Q(0) = Q_0$ é dada pela expressão (3.9), com r dado pela expressão (3.10).

Se a amostra em análise tem a quantidade residual de 20% da quantidade original, isto é,

$$Q(t) = 20\% Q_0 = \frac{20}{100} Q_0 = \frac{1}{5} Q_0,$$

então

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 e^{-0,0001245t} \\ \frac{1}{5} Q_0 &= Q_0 e^{-0,0001245t} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{5} &= e^{-0,0001245t} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln) \\ \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln(e^{-0,0001245t}) \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= -0,0001245t. \end{aligned}$$

Assim,

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{0,0001245},$$

logo, $t \approx 12.927$, isto é, terão se passado aproximadamente 12.927 anos até que uma amostra dessa árvore possua 20% da quantidade original de carbono-14.

As próximas aplicações tratam de situações envolvendo a lei de resfriamento de Newton. A lei de resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente.

Seguno Boyce e Di Prima,

> A partir de observações experimentais, sabe-se que, com uma exatidão satisfatória em muitas circunstâncias, a temperatura superficial de um corpo se altera com uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre a temperatura do corpo e das vizinhanças (temperatura ambiente). É o que se conhece como a lei de Newton do resfriamento.(BOYCE, 1994, p.36)

Seja $\theta(t)$ a temperatura do corpo no instante t e T a temperatura constante do ambiente. Então, segundo a lei de Newton do resfriamento, θ deve obedecer à seguinte equação diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T), \tag{3.11}$$

em que $k > 0$ é a constante de proporcionalidade.

Na Colombiana Café, uma famosa cafeteria no município de Arraias-TO, suponha que um café foi servido à uma temperatura de $93,3C$ logo depois de coado. Após um minuto, a temperatura do café diminui para $87,8$. Por se tratar de um ambiente bastante ventilado, a temperatura estava $21,1C$. Admitindo que a temperatura da xícara de café quente obedeça à lei do resfriamento de Newton, qual é o instante em que a temperatura do café atinge $65,6C$?

Se a xícara de café segue à lei do resfriamento de Newton, a taxa de resfriamento do café é proporcional à diferença entre a temperatura do café e a temperatura do meio ambiente (T). Em termos matemáticos, se $\theta(t)$ mede a temperatura da xícara de café no instante t, calculado em minutos, temos a seguinte equação diferencial ordinária linear e também separável

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T)$$

Utilizando a separação de variáveis obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\theta-T)}\cdot\frac{d\theta}{dt} &= -k \Leftrightarrow \\
k + \frac{1}{(\theta-T)}\cdot\frac{d\theta}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}(kt) + \frac{d}{dt}(ln|\theta-T|) &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}(kt + ln|\theta-T|) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, integrando e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\begin{aligned}
kt + ln|\theta-T| &= C_1 \Leftrightarrow \\
ln|\theta-T| &= C_1 - kt \Leftrightarrow \\
e^{ln|\theta-T|} &= e^{C_1-kt} \Leftrightarrow \text{(Aplicando a exponencial)} \\
|\theta-T| &= e^{C_1}\cdot e^{-kt} \Leftrightarrow \\
\theta - T &= \pm\, e^{C_1}\cdot e^{-kt} \Leftrightarrow \\
\theta - T &= Ce^{-kt},\ C = \pm e^{C_1},
\end{aligned}$$

logo,

$$\theta(t) = Ce^{-kt} + T,$$

com C uma constante real. O enunciado fornece que $T = 21,1C$ é a temperatura ambiente, logo

$$\theta(t) = Ce^{-kt} + 21,1.$$

Utilizando que $\theta(0) = 93,3C$, temos:

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= Ce^{-k\cdot 0} + 21,1 \Leftrightarrow \\
93,3 &= C + 21,1 \Leftrightarrow \\
93,3 - 21,1 &= C \Leftrightarrow \\
72,2 &= C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\theta(t) \;=\; 72,2e^{-kt}+21,1.$$

Com o objetivo de encontrar a constante k, vamos utilizar a informação de que $\theta(1)=87,8C$. Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(1) &= 72,2e^{-k\cdot 1}+21,1 \Leftrightarrow\\
87,8 &= 72,2e^{-k}+21,1 \Leftrightarrow\\
87,8-21,1 &= 72,2e^{-k} \Leftrightarrow\\
66,7 &= 72,2e^{-k} \Leftrightarrow\\
\frac{66,7}{72,2} &= e^{-k} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln)\\
ln\left(\frac{66,7}{72,2}\right) &= ln(e^{-k}) \Leftrightarrow \text{(Usando que } ln(e^{a})=a)\\
ln\left(\frac{66,7}{72,2}\right) &= -k,
\end{aligned}$$

e

$$k=-ln\left(\frac{66,7}{72,2}\right)\approx 0,079235.$$

Assim,

$$\theta(t) \;=\; 72,2e^{-0,079235\cdot t}+21,1.$$

Podemos agora, determinar em qual instante a temperatura do café atinge $65,6C$. Para isso, basta igualar a expressão obtida para $\theta(t)$ a $65,6C$ e obter o valor de t que atinge tal temperatura:

$$\begin{aligned}
65,6 &= 72,2e^{-0,079235\cdot t}+21,1 \Leftrightarrow\\
65,6-21,1 &= 72,2e^{-0,079235\cdot t} \Leftrightarrow\\
44,5 &= 72,2e^{-0,079235\cdot t} \Leftrightarrow\\
\frac{44,5}{72,2} &= e^{-0,079235\cdot t} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln)\\
ln\left(\frac{44,5}{72,2}\right) &= ln(e^{-0,079235\cdot t}) \Leftrightarrow\\
ln\left(\frac{44,5}{72,2}\right) &= -0,07923\cdot t \Leftrightarrow\\
-\frac{ln\left(\frac{44,5}{72,2}\right)}{0,07923} &= t.
\end{aligned}$$

Assim, $t\approx 6,1$. Portanto, a temperatura do café atinge $65,6C$ em aproximadamente 6 minutos.

Em uma pequena cidade, um acontecimento abalou os moradores da região. Um idoso foi encontrado morto em sua própria casa. Um perito da polícia chegou à meia-noite no local e, imediatamente, mediu a temperatura corpo, que era de 30C. Duas horas mais tarde, ele mediu novamente e registrou no relatório que a temperatura corporal havia diminuído para 23C. A temperatura ambiente era constante e igual a 20 C.

Vizinhos relataram que a esposa do idoso saiu de casa após uma intensa discussão com ele, por volta das 22 horas. Desde o ocorrido a esposa era a principal suspeita.

Levando em consideração a Lei de Resfriamento de Newton e admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva e saudável é de 37 C, analise se a esposa do idoso continua sendo suspeita.

Como mostrado na aplicação anterior, a equação da lei de Newton do resfriamento tem a seguinte solução geral

$$\theta(t) = Ce^{-kt} + T,$$

em que $k > 0$ é a constante de proporcionalidade, T a temperatura em ambiente e t o tempo dado em horas. Dado que a temperatura ambiente é constante e igual a $20C$, podemos substituir o valor $T = 20$ na equação, obtendo,

$$\theta(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

O momento em que o corpo é encontrado e é realizada a primeira medição de temperatura é considerado o tempo $t = 0$. Temos que o corpo foi encontrado à meia noite com uma temperatura corporal de $30C$, representando o instante inicial. Sendo assim, $\theta(0) = 30\,C$, e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \theta(0) &= Ce^{-k\cdot 0} + 20 \\ 30 &= C + 20 \\ C &= 10 \end{aligned}$$

logo,

$$\theta(t) = 10e^{-kt} + 20.$$

Duas horas mais tarde, após o corpo ter sido encontrado, a temperatura corporal do cadáver era de $23C$, desta forma, $\theta(2) = 23\ C$. Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(2) &= 10e^{-k\cdot 2} + 20 \Leftrightarrow \\
23 &= 10e^{-2k} + 20 \Leftrightarrow \\
23 - 20 &= 10e^{-2k} \Leftrightarrow \\
3 &= 10e^{-2k} \Leftrightarrow \\
\frac{3}{10} &= e^{-2k} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln) \\
ln\left(\frac{3}{10}\right) &= ln(e^{-2k}) \Leftrightarrow \\
ln\left(\frac{3}{10}\right) &= -2k \Leftrightarrow \\
\frac{-1}{2} ln\left(\frac{3}{10}\right) &= k.
\end{aligned}$$

Utilizando que $ln\left(\frac{3}{10}\right) \approx -1,20397$, segue da expressão acima que $k \approx 0,6020\ h^{-1}$. Então, a expressão para a temperatura se torna

$$\theta(t) = 10e^{-0,6020\ t} + 20.$$

O valor de k (constante de proporcionalidade) representa a taxa que o cadáver se resfria em relação à diferença da temperatura corporal e a temperatura ambiente.

Admitindo que no momento da morte t_m, a temperatura do corpo era de 37 C, podemos determinar o horário aproximado da morte. Como

$$\theta(t_m) = 37C$$

temos que

$$\begin{aligned}
\theta(t_m) &= 10e^{-0,6020\ t} + 20 \Leftrightarrow \\
37 &= 10e^{-0,6020\ t} + 20 \Leftrightarrow \\
37 - 20 &= 10e^{-0,6020\ t} \\
17 &= 10e^{-0,6020\ t} \Leftrightarrow \\
\frac{17}{10} &= e^{-0,6020\ t} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln) \\
ln(1,7) &= ln(e^{-0,6020\ t}) \Leftrightarrow \\
ln(1,7) &= -0,6020\ t
\end{aligned}$$

Utilizando que $ln\left(\frac{17}{10}\right) \approx 0,5306$, segue da expressão acima que

$$\begin{aligned} 0,5306 &\approx -0,6020\,t \\ \frac{0,5306}{0,6020} &= -\,t \\ 0,8815 &= -\,t \\ -\,0,8815 &= t. \end{aligned}$$

Como o tempo está em horas, podemos transformar para minutos para fornecer a instante da morte mais precisamente. Multiplicando por 60 para obter o tempo em minutos, tempos que

$$-\,0,8815\cdot 60 \;=\; -52,89.$$

Logo, o corpo foi descoberto aproximadamente 53 minutos após a morte, ou seja, o idoso morreu por volta das $23h07$. Lembre-se que a esposa saiu da casa por volta das 22 h, portanto, o idoso ainda estava vivo. Isso faz com que a suspeita sobre à esposa seja descartada.

A aplicação a seguir é modelada por uma equação não linear.

Assuma que o crescimento de um cardume de peixes em um tanque é do tipo logístico, $P(t)$ representa a população no instante t e 2000 peixes é a capacidade suporte estimada para esse tanque. Também admita que a taxa de crescimento (k) é de $0,16$ por mês e que a quantidade inicial de peixes presentes no tanque era de 200 peixes,. Quando esse cardume terá 1.800 peixes?

A equação logística tem o seguinte formato

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

em que P representa a população, t o tempo, k é a constante de proporcionalidade e M a capacidade de suporte do ambiente. Perceba que a variável dependente P aparecem em termos não lineares, ou seja, é uma equação não linear. Apesar de ser não linear, ela pode ser resolvida por intermédio da separação de variáveis.

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= k\,P\left(1-\frac{P}{M}\right) \Leftrightarrow \\
\frac{1}{P\left(1-\frac{P}{M}\right)} \cdot \frac{dP}{dt} &= k \Leftrightarrow \\
-k + \frac{1}{P\left(1-\frac{P}{M}\right)} \cdot \frac{dP}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \\
-k + \frac{M}{P(M-P)} \cdot \frac{dP}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \\
-k + \frac{M}{P(M-P)} \cdot \frac{dP}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \\
-k + \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{(M-P)}\right) \cdot \frac{dP}{dt} &= 0
\end{aligned}
$$

Como $\frac{d}{dt}(-kt) = -k$ e $\frac{d}{dP}(ln\ |P| - ln\ |M-P|) = \frac{1}{P} + \frac{1}{(M-P)}$, podemos reescrever a expressão acima como segue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(-kt) + \frac{d}{dP}(ln\ |P| - ln\ |M-P|)\frac{dP}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}(-kt) + \frac{d}{dt}(ln\ |P| - ln\ |M-P|) &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}(-kt + ln\ |P| - ln\ |M-P|) &= 0,
\end{aligned}
$$

em que usamos a Regra da Cadeia e a propriedade de que a derivada da soma é a soma das derivadas, nas expressões acima. Agora, integrando ambos os lados com relação à variável x e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$
-kt + ln\ |P| - ln|M-P| = C_1,
$$

em que C_1 é uma constante real.

Lembre-se de que o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números, isto é,

$$
ln(a) - ln(b) = ln\frac{a}{b},\ \ a,b > 0,
$$

assim, temos que,

$$
ln\ \left|\frac{P}{M-P}\right| = ln\ |P| - ln\ |M-P|.
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-kt + ln|\frac{P}{M-P}| &= C_1 \Leftrightarrow \\
ln\left|\frac{P}{M-P}\right| &= C_1 + kt \Leftrightarrow (\text{ Aplicando a exponencial}) \\
e^{ln\left|\frac{P}{M-P}\right|} &= e^{C_1+kt} \Leftrightarrow \\
\left|\frac{P}{M-P}\right| &= e^{C_1} \cdot e^{kt} \Leftrightarrow \\
\frac{P}{M-P} &= \pm\, e^{C_1} \cdot e^{kt} \Leftrightarrow \\
\frac{P}{M-P} &= C_2 \cdot e^{kt}.
\end{aligned}$$

Para encontramos a solução geral da equação logística de forma explícita em função de P, é necessário realizarmos algumas manipulações matemáticas. Vejamos,

$$\begin{aligned}
\frac{M-P}{P} &= \frac{1}{C_2 \cdot e^{kt}} \Leftrightarrow \\
\frac{M-P}{P} &= \frac{1}{C_2} \cdot e^{-\,kt} \Leftrightarrow \\
\frac{M-P}{P} &= C \cdot e^{-\,kt} \Leftrightarrow \\
M-P &= P(Ce^{-\,kt}) \Leftrightarrow \\
M &= P + P\,(Ce^{-\,kt}) \Leftrightarrow \\
M &= P\,(1 + Ce^{-\,kt}) \Leftrightarrow \\
P &= \frac{M}{1+Ce^{-kt}}.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação tem a seguinte solução geral

$$P(t) = \frac{M}{1+Ce^{-kt}},$$

e podemos agora resolver o que foi solicitado na questão.

Temos que a capacidade suporte (M) estimada para o tanque é de 2000 peixes e a taxa de crescimento (k) é de 0, 16 por mês, além de uma quantidade inicial de 200 peixes presentes no tanque. Logo substituindo os dados apresentados, temos que

$$P(t) = \frac{2000}{1+Ce^{-0,16 \cdot t}}.$$

Para determinarmos a constante C, devemos utilizar a quantidade inicial de peixes, no instante $t = 0$, isto é, $P(0) = 200$. Assim,

$$\begin{aligned}
P(0) &= \frac{2000}{1+Ce^{-0,16\cdot 0}} \Leftrightarrow \\
200 &= \frac{2000}{1+C} \Leftrightarrow \\
200(1+C) &= 2000 \Leftrightarrow \\
1+C &= \frac{2000}{200} \Leftrightarrow \\
1+C &= 10 \Leftrightarrow \\
C &= 10-1 \Leftrightarrow \\
C &= 9.
\end{aligned}$$

Logo, a equação

$$P(t) = \frac{2000}{1+9e^{-\ 0,16\cdot t}}.$$

determina a quantidade de peixes em qualquer instante t. Diante disso, podemos agora determinar quando o cardume de peixes no tanque será de 1.800 peixes. Para isso, basta descobrir o tempo t para o qual $P(t) = 1800$, isto é,

$$\begin{aligned}
P(t_?) &= \frac{2000}{1+9e^{-\ 0,16\cdot t}} \Leftrightarrow \\
1800 &= \frac{2000}{1+9e^{-\ 0,16\cdot t}} \Leftrightarrow \\
1800 &= \frac{2000}{1+9e^{-\ 0,16\cdot t}} \Leftrightarrow \\
1800\ (1+9e^{-\ 0,16\cdot t}) &= 2000 \Leftrightarrow \\
1+9e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{2000}{1800} \Leftrightarrow \\
1+9e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{20}{18} \Leftrightarrow \\
9e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{20}{18} - 1 \Leftrightarrow \\
9e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{2}{18} \Leftrightarrow \\
e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{2}{18}\cdot\frac{1}{9} \Leftrightarrow \\
e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{2}{162} \Leftrightarrow \\
e^{-\ 0,16\cdot t} &= \frac{1}{81} \Leftrightarrow \\
ln(e^{-\ 0,16\cdot t}) &= ln\left(\frac{1}{81}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $ln\left(\frac{1}{81}\right) \approx -4,3944$, substituindo na equação acima, temos que

$$\begin{aligned} -\,0,16\cdot t &\approx -\,4,3944 \Leftrightarrow \\ t &= \frac{-\,0,16}{-\,4,3944} \Leftrightarrow \\ t &\approx 27,4. \end{aligned}$$

Portanto, o cardume de peixes será de 1.800 após aproximadamente 27,4 meses.

A aplicação a seguir é uma adaptação de (ZILL, 2001. p.121, Exemplo 1) e fornece mais um exemplo de aplicação do modelo logístico.

Suponha que um estudante tenha sido diagnosticado com um vírus mortal e muito contagioso em um internato isolado, onde 1000 pessoas, entre estudantes e funcionários, residem. Devido ao risco de contágio, as autoridades decidiram impor uma quarentena no internato, impedindo qualquer pessoa de entrar ou sair até que a doença fosse controlada. Após quatro dias desde a detecção do primeiro caso, 50 pessoas já haviam sido contaminadas.

Considerando que o vírus se espalha não apenas com base na quantidade atual de pessoas infectados, mas também na quantidade de pessoas não infectados e admitindo que a situação possa ser modelada pela equação logística

- mostre que equação logística é um caso especial da equação de Bernoulli;
- encontre a função $P(t)$ que descreve o número de pessoas infectadas em qualquer instante t;
- determine em quantos dias estarão infectados 50% dos moradores do internato.

A equação

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \tag{3.12}$$

é uma equação não linear. Apesar de ser não linear, ela pode ser resolvida por intermédio da separação de variáveis, como mostrado na aplicação anterior. Entretanto, algumas vezes e possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança de variável adequada, que a transforma em uma equação linear. Um exemplo é a equação

$$\frac{dP}{dt} + f(t)P = q(t)P^n, \tag{3.13}$$

com n é um número real qualquer, conhecida como equação de Bernoulli. Note que a equação (3.12) pode ser reescrita no formato (3.13), isto é, (3.12) é uma equação de Bernoulli. De fato, temos que (3.12) pode ser facilmente reescrita como

$$\frac{dP}{dt} - kP = -\frac{k}{M}P^2$$

que se trata de (3.13) com $f(t) = -k$, $q(t) = -\frac{k}{M}$, e $n = 2$.

É importante salientar que, se P for nula, a solução da equação de Bernoulli é imediata, mas, caso contrário, podemos reescrever a equação (3.13) na forma

$$P^{-n}\frac{dP}{dt} + f(t)P^{1-n} = q(t),$$

que, no caso específico de (3.12) se torna

$$P^{-2}\frac{dP}{dt} - kP^{-1} = -\frac{k}{M}. \tag{3.14}$$

Fazendo $v(t) = P(t)^{1-n}$, temos que $\frac{dv}{dt} = (1-n)P^{-n}\frac{dP}{dt}$, pela regra da cadeia. Logo, na equação logística, teremos $v(t) = P^{-1}$ e, consequentemente, $\frac{dv}{dt} = -P^{-2}\frac{dP}{dt}$.

Substituindo em (3.14) obtemos

$$-\frac{dv}{dt} - kv = -\frac{k}{M}$$

que é uma equação linear. Multiplicando toda equação acima por (-1), temos

$$\frac{dv}{dt} + kv = \frac{k}{M}, \tag{3.15}$$

que se trata de uma equação do tipo

$$y' + p(t)y = g(t), \;\; y = v, \; p(t) = k, \; g(t) = k/M,$$

que pode ser solucionada pela técnica dos fator integrante, apresentada no início do capítulo.

Determinando o fator de integração $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} \Leftrightarrow \\ \mu(t) &= e^{\int k dt} \\ \mu(t) &= e^{kt}, \end{aligned}$$

em que fixamos a constante de integração como sendo $C = 0$, pois basta um fator integrante.

Multiplicando a equação (3.15) pelo fator integrante $\mu(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{kt}\frac{dv}{dt} + e^{kt}kv &= e^{kt}\frac{k}{M} \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}[e^{kt}v] &= e^{kt}\frac{k}{M}. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados com relação a variável t e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d}{dt}[e^{kt}v]dt &= \int e^{kt}\frac{k}{M}dt \Rightarrow \\
e^{kt}v &= \frac{1}{M}e^{kt} + C \Leftrightarrow \\
v &= \frac{\frac{1}{M}e^{kt} + C}{e^{kt}} \Leftrightarrow \\
v &= \frac{1}{M} + \frac{C}{e^{kt}} \Leftrightarrow \\
v &= \frac{1}{M} + Ce^{-kt}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $v = P^{-1}$, isto é, $\frac{1}{P} = v$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{P} &= \frac{1}{M} + C_1e^{-kt} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{P} &= \frac{1 + MC_1e^{-kt}}{M} \Leftrightarrow \\
P &= \frac{M}{1 + MC_1e^{-kt}} \Leftrightarrow \\
P(t) &= \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}.
\end{aligned}
$$

Note que, apesar de usar métodos de resolução diferentes, a solução geral obtida para a equação logística foi igual. Isso se deve ao fato de que as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade estão satisfeitas, garantindo a unicidade da solução independentemente da técnica utilizada.

Tendo que

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}},$$

podemos determinar os demais itens que foram pedidos. A capacidade suporte (M) é o número total de moradores do internato, ou seja, 1000. Assim

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ce^{-kt}}.$$

Inicialmente apenas um estudante foi diagnosticado com o vírus da gripe, isto é, $P(0) = 1$. Desse modo,

$$
\begin{aligned}
P(0) &= \frac{1000}{1 + Ce^{-k\cdot 0}} \Leftrightarrow \\
1 &= \frac{1000}{1 + C} \Leftrightarrow \\
1 + C &= 1000 \Leftrightarrow \\
C &= 999.
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor de $C = 999$ encontrado obtemos

$$P(t) = \frac{1000}{1+999e^{-kt}}.$$

Após quatro dias, 50 pessoas já estavam infectados com o vírus. Em termos matemáticos, $P(4) = 50$, assim

$$\begin{aligned}
P(4) &= \frac{1000}{1+999e^{-k\cdot 4}} \Leftrightarrow \\
50 &= \frac{1000}{1+999e^{-4k}} \Leftrightarrow \\
50(1+999e^{-4k}) &= 1000 \Leftrightarrow \\
1+999e^{-4k} &= \frac{1000}{50} \Leftrightarrow \\
1+999e^{-4k} &= 20 \Leftrightarrow \\
999e^{-4k} &= 20-1 \Leftrightarrow \\
999e^{-4k} &= 19 \Leftrightarrow \\
e^{-4k} &= \frac{19}{999} \Leftrightarrow \text{(Aplicando o } ln) \\
ln(e^{-4k}) &= ln\left(\frac{19}{999}\right) \Leftrightarrow \\
-4k &= ln\left(\frac{19}{999}\right).
\end{aligned}$$

Com $ln\left(\frac{19}{999}\right) \approx -3,9623$, temos que

$$\begin{aligned}
-4k &\approx -3,9623 \Leftrightarrow \\
k &= \frac{-3,9623}{-4} \Leftrightarrow \\
k &= 0,9906.
\end{aligned}$$

Logo, com o valor de k na equação, obtemos

$$P(t) = \frac{1000}{1+999e^{-0,9906t}},$$

que expressa a quantidade de pessoas contaminada $P(t)$ em qualquer instante t.

Ao todo 1000 pessoas residem no internato, ou seja, 500 é 50% dos moradores. Para determinamos em quantos dias estarão infectados 500 pessoas, devemos encontrar t tal que $P(t) = 500$. Temos que

$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{1000}{1+999e^{-0,9906t}} \Leftrightarrow \\
500 &= \frac{1000}{1+999e^{-0,9906t}} \Leftrightarrow \\
500(1+999e^{-0,9906t}) &= 1000 \Leftrightarrow \\
1+999e^{-0,9906t} &= \frac{1000}{500} \Leftrightarrow \\
999e^{-0,9906t} &= 2-1 \Leftrightarrow \\
e^{-0,9906t} &= \frac{1}{999} \Leftrightarrow \\
ln(e^{-0,9906t}) &= ln\left(\frac{1}{999}\right) \Leftrightarrow \\
-0,9906t &= ln\left(\frac{1}{999}\right).
\end{aligned}$$

Como $ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx -6,9067$ vem que

$$\begin{aligned}
-0,9906t &= -6,9067 \Leftrightarrow \\
t &= \frac{-6,9067}{-0,9906} \Leftrightarrow \\
t &= 6,972.
\end{aligned}$$

Portanto, em aproximadamente 7 dias estarão infectados 50% das pessoas que residem no internato.

Na última aplicação do capítulo, vamos apresentar as equações de Lokta-Volterra já mencionadas na introdução do trabalho. Apesar de não apresentarmos, neste trabalho, técnicas de resolução de sistemas de equação, vamos apresentar a resolução da aplicação a seguir apenas utilizando oa técnicas desenvolvidas neste capítulo para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

A aplicação a seguir é baseada na referência (FIGUEIREDO, 2012, p.257-258).

Suponha que $y(t)$ represente uma população de presas e $x(t)$ uma população de predadores. Também suponha que não há nenhum fator limitante para a subsistência da presa, a não ser a presença dos predadores. Dessa forma, se não existissem os predadores, a presa cresceria proporcionalmente a população, isto é, de acordo com a lei do crescimento exponencial. Assim, se não fosse pelos predadores, teríamos que

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y,$$

com $\alpha > 0$ uma constante (taxa de crescimento de presas sem predadores). Porém, com a presença de predadores, temos que a população y diminui linearmente quando a população x

aumenta, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta xy = y(\alpha - \beta x),$$

em que $\beta > 0$ é uma constante (taxa de decréscimo da população de presas devido a predação).

Com relação aos predadores, vamos supor que eles apenas se alimentam dessas presas. Assim, no contexto de não existência da presa, os predadores desapareceriam a uma taxa proporcional a população de predadores, isto é, de acordo com a lei do crescimento exponencial. Assim, não fosse as presas, teríamos

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x,$$

com $\gamma > 0$ uma constante (taxa de mortalidade da população de predadores sem presas). Assim, com a presença das presas, temos que a taxa de crescimento da população de predadores aumenta a medida que a população de presas aumenta, acompanhando a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x + \delta xy = x(-\gamma + \delta y),$$

com $\delta > 0$ uma constante (taxa de crescimento de predadores devido a predação).

O sistema de equações

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= y(\alpha - \beta x) \\ \tfrac{dx}{dt} &= x(-\gamma + \delta y) \end{aligned} \tag{3.16}$$

em que α, β, γ e δ são constantes positivas são conhecidas como as equações de Lokta-Volterra ou equações predador-presa. Mesmo não havendo solução explícita para o sistema acima, soluções podem ser encontradas relacionando as duas populações em qualquer tempo. Para isso, note que, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Assim, dividindo a primeira equação pela segunda equação de (3.16) e usando a regra da cadeira, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(-\gamma + \delta y)}, \tag{3.17}$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear.

Para resolver a equação acima, note que

$$\frac{y(\alpha - \beta x)}{x(-\gamma + \delta y)} = \frac{yx(\frac{\alpha}{x} - \beta)}{xy(-\frac{\gamma}{y} + \delta)} = \frac{(\frac{\alpha}{x} - \beta)}{(-\frac{\gamma}{y} + \delta)},$$

e consequentemente (3.17) pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{\alpha}{x} - \beta)}{(-\frac{\gamma}{y} + \delta)}, \tag{3.18}$$

que se trata de uma equação de variáveis separáveis. Podemos reescrevê-la na forma

$$\left(\frac{-\alpha}{x}+\beta\right)+\left(-\frac{\gamma}{y}+\delta\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{3.19}$$

Como $G(x)=-\alpha ln|x|+\beta x$ e $P(y)=-\gamma ln|y|+\delta y$ são primitivas de $M(x)=\left(\frac{-\alpha}{x}+\beta\right)$ e $N(y)=\left(-\frac{\gamma}{y}+\delta\right)$, temos que (3.19) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(-\alpha ln|x|+\beta x)+\frac{d}{dy}(-\gamma ln|y|+\delta y)\frac{dy}{dx}=0$$

e usando a Regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(-\alpha ln|x|+\beta x-\gamma ln|y|+\delta y)=0,$$

consequentemente

$$-\alpha ln|x|+\beta x-\gamma ln|y|+\delta y=C,$$

com C uma constante. Como só faz sentido $x,y>0$, segue que

$$\alpha ln(x)-\beta x+\gamma ln(y)-\delta y=C.$$

Finalizamos com o modelo presa-predador as aplicações de equações diferenciais de primeira ordem. No próximo capítulo, apresentaremos diversas aplicações modeladas por equações diferenciais de segunda ordem.

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM E APLICAÇÕES

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{4.1}$$

em que f é uma função conhecida. A equação acima é linear quando pode ser escrita na forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x); \tag{4.2}$$

com $P \neq 0,\ Q, R$ e G funções da variável independente x.

Dividindo-se a equação (4.2) por $P(x) \neq 0$ obtemos a seguinte expressão equivalente a (4.2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{4.3}$$

com

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x),}\ \ q(x) = \frac{R(x)}{P(x)},\ \ g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}. \tag{4.4}$$

Em nossa abordagem, vamos nos limitar a intervalos em que as funções p, q e g são funções contínuas.

Se a equação (4.1) não tiver a forma (4.2), ou a forma (4.3), é denominada não linear. Equações de segunda ordem não lineares são complexas de serem resolvidas e, por isso, nossa abordagem será restrita a equações de segunda ordem lineares. Veremos que, apesar disso, existem inúmeros problemas físicos modelados por tais equações.

Dizemos que uma equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea se o termo $G(x)$ na Equação (4.2), ou o termo $g(x)$ na Equação (4.3), for nulo para todo x. Caso contrário, a equação é dita não homogênea. O termo $G(x)$ (ou $g(x)$) é chamado de termo não homogêneo.

Naturalmente, as equação de segunda ordem não homogênea são mais complexas de serem resolvidas por métodos analíticos e seu estudo depende, em geral, do conhecimento da solução para a equação homogênea associada. Sendo assim, o estudo das equações homogêneas é fundamental e será tratado de forma mais detalhada na próxima seção.

4.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem Homogêneas e com Coeficientes Constantes

Vamos considerar apenas o caso em que as funções P, Q e R são constantes, isto é, a situação em que a equação (4.2) tem a forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.5}$$

com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$.

Antes de exibirmos soluções particulares e a solução geral para (4.5), vamos apresentar resultados de existência e unicidade de solução para equações de segunda ordem lineares.

Primeiramente, note que, como $a \neq 0$, então a equação (4.5) pode ser escrita na forma

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

e, consequentemente, a equação abaixo generaliza (4.5).

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.6}$$

O resultado a seguir é conhecido como Princípio da Superposição e garante que qualquer combinação linear de soluções de (4.6) continua sendo solução da equação. A demonstração do resultado pode ser encontrada em (BOYCE, 2010, p.113-114)

Teorema 4. *Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial* (4.6)*, então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é uma solução para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2.*

O próximo resultado fornece condições para existência de solução para (4.6) mediante condições iniciais.

Teorema 5. *Suponhamos que y_1 e y_2 sejam duas soluções da equação* (4.6) *e que o determinante wronskiano (ou simplesmente wronskiano) das soluções y_1 e y_2, definido por*

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

não seja nulo no ponto x_0 em que se fixam as condições iniciais

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0'. \tag{4.7}$$

Então, há uma escolha das constantes c_1 e c_2 para a qual $y = c_1y_1 + c_2y_2$ satisfaz à equação diferencial (4.6) *e as condições iniciais* (4.7)*.*

Duas soluções para o problema (4.6) com a propriedade que $W(y_1,y_2) \neq 0$ formam o conjunto $\{y_1,y_2\}$, chamado de conjunto fundamental de soluções.

O resultado a seguir nos ensina como encontrar soluções gerais da equação (4.6), bastando, para isso, encontrar soluções particulares y_1 e y_2 cujo wronskiano do par de soluções y_1 e y_2 não se anula em algum ponto x_0.

Teorema 6. *Se y_1 e y_2 forem duas soluções da equação diferencial* (4.6)*, então a família de soluções*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

inclui todas as soluções da equação (4.6) *se, e só se, existe um ponto x_0 no qual o wronskiano de y_1 e y_2 é não nulo.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em (BOYCE, 2010, p.115).

Ainda temos o seguinte resultado que garante existência e unicidade de solução em um contexto mais geral, que inclui problemas não homogêneos.

Teorema 7. *Consideremos o problema de valor inicial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0 \tag{4.8}$$

em que p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contenha x_0. Então há somente uma solução $y = \phi(x)$ deste problema e a solução existe sobre todo o intervalo aberto I.

A prova do resultado acima pode ser encontrada no Capítulo 6, Seção 8, de (CODDINGTON, 1989).

Uma vez conhecidos os resultados de existência e unicidade de solução para equações diferenciais de segunda ordem, vamos voltar para o problema de encontrar soluções para a equação homogênea com coeficientes constantes (4.5). Com intuito de encontrar as soluções dessa equação, vamos supor que $y(x) = e^{rx}$, com r um valor a ser descoberto, seja solução de (4.5). Nesse caso, $y'(x) = re^{rx}$ e $y''(x) = r^2e^{rx}$. Levando as expressões y, y' e y'' na Equação (4.5) obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0,$$

e, como $e^{rx} \neq 0$, segue que

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.9}$$

A equação (4.9) é chamada de equação característica da equação diferencial (4.5) e seu sua relação com a equação diferencial é o seguinte: se r é uma raiz da equação algébrica $ar^2 + br + c = 0$, então $y = e^{rx}$ é uma solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Devido aos resultados explicitados anteriormente, basta encontrarmos um conjunto de soluções fundamentais para a equação que a solução geral fica definida. Como nosso principal objetivo é apresentar aplicações de equações diferenciais, vamos exibir apenas um resumo de como obter soluções de (4.5), dependendo das raízes de sua equação característica. Sabemos que uma equação polinomial de segunda ordem com coeficientes reais admite exatamente duas soluções que podem ser reais e distintas, reais e iguais e, finalmente, complexas e conjugadas. Sendo assim, temos as seguintes possíveis situações:

1. Se $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ são as raízes de (4.9), então e^{r_1x} e e^{r_2x} são raízes de (4.5) e a solução geral é dada por
$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x};$$

2. Se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ são as raízes de (4.9), então e^{r_1x} e xe^{r_1x} são soluções de (4.5) e a solução geral é dada por
$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_2x};$$

3. Se $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi \in \mathbb{C}$ são as raízes de (4.9), então, utilizando a equação de Euler, temos que $e^{ax}cos(bx)$ e $e^{ax}sen(bx)$ são soluções de (4.5) e a solução geral é dada por
$$y(x) = e^{ax}(c_1\; cos(bx) + c_2\; sen(bx)).$$

4.2 O Método dos Coeficientes Indeterminados

Nesta seção vamos apresentar um método de resolução de equações de segunda ordem não homogêneas e com coeficientes constantes, chamado de método dos coeficientes indeterminados.

Considere a equação diferencial de segunda ordem não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{4.10}$$

em que p, q e g são funções contínuas em um intervalo aberto I. A equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.11}$$

na qual $g(x) = 0$ e p e q são as mesmas funções que na Equação (4.10), é a equação homogênea correspondente à Equação (4.10).

A seguir, vamos apresentar um importante resultado sobre equações de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes que garante que para encontrar a solução geral para essas equações é suficiente resolver o problema homogêneo correspondente e encontrar uma solução particular da equação não homogênea.

Teorema 8. *A solução geral da equação não homogênea* (4.10) *pode ser escrita na forma*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(x), \tag{4.12}$$

com y_1 e y_2 um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea correspondente (4.11)*, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é uma solução particular da equação não homogênea* (4.10).

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em (BOYCE, 1994, p.116).

Na seção anterior já aprendemos como resolver equações homogêneas com coeficientes constante e, consequentemente, encontrar um conjunto fundamental de soluções. Assim, segundo o Teorema 8, para encontrar a solução geral de (4.10), basta encontrar uma solução particular para essa equação. Nesse sentido surgem alguns métodos como o que apresentaremos resumidamente a seguir.

Segundo Boyce (1994), "o método dos coeficientes indeterminados exige que façamos uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(x)$, porém com os coeficientes envolvidos indeterminados." O método funciona bem quando o termo não homogêneo $g(x)$ é uma função exponencial, seno ou cosseno, polinomial ou até mesmo combinações lineares ou produtos dessas funções. Boyce (1994) resume a técnica da seguinte forma

> (...) se o termo não-homogêneo $g(x)$ na equação (4.10), for uma exponencial $e^{\alpha x}$, admitir que $Y(x)$ seja proporcional à mesma função exponencial; se $g(x)$ for $sen(\beta x)$ ou $cos(\beta x)$, então admitir que $Y(x)$ seja uma combinação linear de $sen(\beta x)$ e $cos(\beta x)$; se $g(x)$ for um polinômio em x, admitir que $Y(x)$ seja um polinômio do mesmo grau em x. (BOYCE, 1994, p.118)

Vamos ilustrar a técnica por intermédio de um exemplo.

Exemplo 9. Considere a equação diferencial de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes

$$y'' + 2y' - 3y = 4sen(2x). \tag{4.13}$$

A equação homogênea associada é

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \tag{4.14}$$

cuja equação característica é dada por $r^2 + 2r - 3 = 0$ e cujas soluções são $r_1 = 1$ e $r_2 = -3$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada (4.14) é dada por

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}. \tag{4.15}$$

Uma vez encontrada a solução da homogênea correspondente devemos procurar uma solução particular de (4.13). Para isso, vamos utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Com esse objetivo, vamos supor que

$$y_p(x) = A\ cos(2x) + B\ sen(2x), \tag{4.16}$$

com A e B coeficientes a determinar, é uma solução de (4.13). Temos que

$$y_p'(x) = -2A\ sen(2x) + 2B\ cos(2x)$$

e

$$y_p''(x) = -4A\ cos(2x) - 4B\ sen(2x),$$

e, portanto (4.16) é solução de (4.13) se, e só se,

$$\begin{aligned}[-4A\ cos(2x) - 4B\ sen(2x)] + 2[-2A\ sen(2x) + 2B\ cos(2x)] - \\ -3[A\ cos(2x) + B\ sen(2x)] = 4sen(2x) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[-4A\ cos(2x) - 4B\ sen(2x)] + [-4A\ sen(2x) + 4B\ cos(2x)] + \\ +[-3A\ cos(2x) - 3B\ sen(2x)] = 4sen(2x),\end{aligned}$$

isto é,

$$[-7A + 4B]\ cos(2x) + [-4A - 7B]\ sen(2x) = 4\ sen(2x),$$

que ocorre apenas quando os coeficientes A e B são soluções do sistema linear

$$\begin{cases} -7A + 4B & = 0 \\ -4A - 7B & = 4, \end{cases}$$

ou seja, quando $A = -\frac{16}{65}$ e $B = -\frac{28}{65}$. Logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\frac{16}{65}\ cos(2x) - \frac{28}{65}\ sen(2x).$$

Assim, a solução geral da equação (4.13) é dada por

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{16}{65}\ cos(2x) - \frac{28}{65}\ sen(2x).$$

É importante esclarecer que, além do método dos coeficientes indeterminados, também existem outros métodos para resolver equações de segunda ordem não homogêneas, como o método da variação de parâmetros. Entretanto, para o objetivo do trabalho de apresentar aplicações dessas equações, o método exibido nesta seção será suficiente. Para estudar com profundidade tais técnicas indicamos o Capítulo 3, seções 3.6 e 3.7, de (BOYCE, 1994) ou capítulos correspondentes em edições mais atualizadas da mesma referência.

4.3 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Equações de segunda ordem possuem inúmeras aplicações na física. Uma dessas aplicações é nos campos de vibrações mecânicas e elétricas. Segundo Boyce e Di Prima (2010), o movimento de uma massa presa em uma mola, as torções de uma haste com um volume, o fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série e muitos outros problemas físicos são bem descritos pela solução do problema de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y'_0. \tag{4.17}$$

Uma aplicação interessante de equações diferenciais de segunda ordem são as vibrações forçadas, isto é, situações em que uma força externa periódica atua sobre um sistema mola-massa.

A equação de movimento de um sistema mola-massa geral sujeito a uma força externa $F(t)$ é

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{4.18}$$

em que m, γ e k são a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante da mola do sistema mola-massa, respectivamente. A formulação completa do problema de vibração exige que duas condições iniciais sejam especificadas, que são a posição inicial $s(0)$ e a velocidade inicial $v(0) = s'(0)$ da massa, isto é,

$$s(0) = s_0, \;\; s'(0) = v_0 \tag{4.19}$$

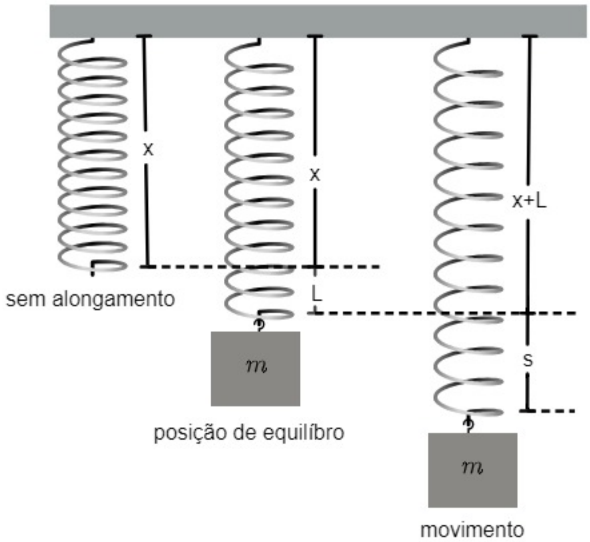
Conforme Zill e Cullen (2001), o sistema massa-mola pode ser modelado através de equações diferenciais ordinárias, pois seu comportamento é governado pelas leis do movimento, que podem ser descritas matematicamente por meio de equações diferenciais.

Imagine uma mola presa a uma base por uma de suas extremidades e ligada a uma massa (m) na outra, conforme ilustrado na Figura 2.

A massa provoca um alongamento (L) na mola. Duas forças atuam no ponto onde a massa está ligada a mola: a força peso para baixo (no sentido positivo), determinada pela equação $F_p = mg$, em que m representa a massa, g é a aceleração da gravidade; e a força da mola para cima (no sentido negativo) representada por $F_m = -kL$, em que k é a constante da mola, sendo que o sinal negativo indica a direção oposta à força peso. Essa força é conhecida como lei de Hooke. Se a massa estiver em equilíbrio, essas duas forças se equilibram. Ou seja

$$mg - kL = 0 \tag{4.20}$$

Figura 2 – Sistema massa-mola



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o simulador *PhET*, 2024.

Entretanto, se a massa estiver deslocada por uma quantidade s em relação a posição de equilíbrio no instante t, e for solta, a força resultante nesse caso é dada pela segunda lei de Newton $F = ma$, em que o somatório das forças é igual ao produto da massa pela sua aceleração. Uma vez que a aceleração corresponde a variação da velocidade em relação ao tempo, ou seja, a segunda derivada da posição em relação ao tempo, em termos matemáticos $s''(t)$, então $F = ms''(t)$.

Com o intuito de apresentar uma equação para o deslocamento $s(t)$, é necessário considerar que quatro forças distintas podem influenciar o sistema. As forças peso e da mola, que foram apresentadas anteriormente, e as forças de amortecimento e externa. É importante ressaltar que a força de amortecimento atua na direção oposta à direção da massa e que pode existir devido às propriedades viscosas do meio onde a massa se move, por exemplo, a resistência do ar. Enquanto a força externa pode ser provocada pelo deslocamento do suporte aonde estiver ligada a mola, sendo positiva ou negativa, atuando para baixo ou para cima. Consequentemente, a ausência ou presença de uma determinada força pode resultar em equações diferentes. A fim de resumir a parte teórica, serão apresentadas as equações que descrevem o movimento da massa em cada um dos movimentos, suas respectivas deduções podem ser encontradas no Capítulo 5, seções 5.1, 5.2 e 5.3, de (ZILL, 2001).

Para cada tipo de sistema massa-mola, os diferentes cenários de oscilação podem ser descritos por equações diferenciais específicas. As oscilações livres não amortecidas, que se configuram pela ausência das força externa e de amortecimento são descritas pela equação

$$ms'' + ks = 0.$$

Se existir o efeito de amortecimento, a equação que governa o movimento da massa é

$$ms'' + \gamma u' + ks = 0.$$

Se houver força externa, as oscilações forçadas podem ser com e sem amortecimento. Logo as equações que descrevem o movimento da massa são dadas por

$$ms'' + \gamma u' + ks = F(t)$$

e

$$ms'' + ks = F(t),$$

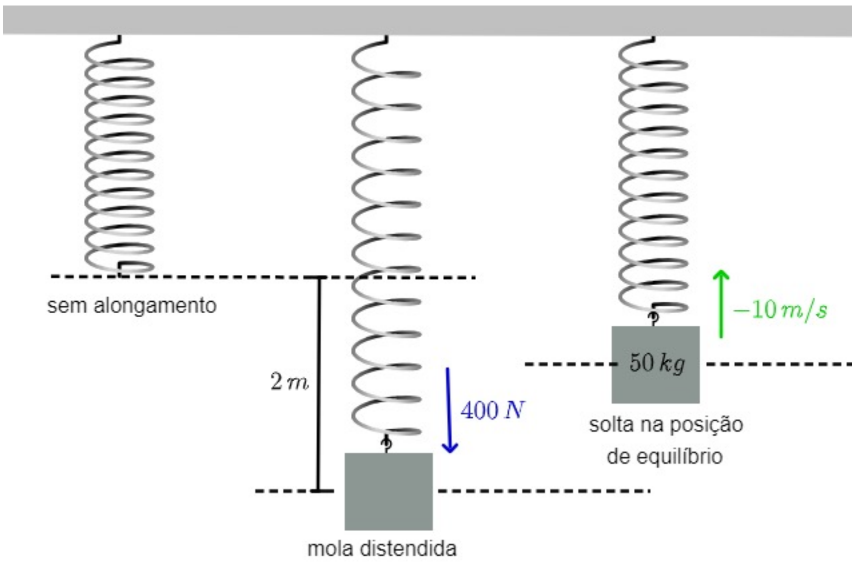
respectivamente.

Em todas as equações apresentadas acima, as constantes m, γ e k são positivas e representam a massa, o amortecimento e a proporcionalidade, já $F(t)$ representa a força externa.

A seguir, vamos mostrar aplicações práticas da teoria desenvolvida acima com intuito de completar a compreensão do leitor.

[(ZILL, 2001, p.234, Exercício 16) - Movimento livre sem amortecimento] Uma força de 400 newtons distende uma mola em 2 m. Uma massa de 50 kg é atada à mola e solta na posição de equilíbrio com uma velocidade de 10 m/s para cima. Encontre a equação do movimento.

Figura 3 – Movimento livre sem amortecimento



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o simulador *PhET*, 2024.

Na ausência de força externa e da constante de amortecimento, temos $F(t)$ e γ nulos. Logo, a equação do movimento se reduz a

$$ms'' + ks = 0.$$

Temos que a massa é $m = 50\ kg$. Para determinar a constante da massa k, observamos que, se a massa está em equilíbrio e $kg = 400\ N$, então

$$mg - ks = 0 \text{ ou } mg = ks,$$

isto é, $400 = k \cdot 2$, logo,$k = 200\ N/m$. Substituindo os valores de m e k na equação (4.3), temos

$$50s'' + 200s = 0. \tag{4.21}$$

Observe que, a equação (4.21) é de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, então podemos resolve-lá aplicando as técnicas abordadas na primeira seção. O polinômio característico da equação é dado por $50\, r^2 + 200 = 0$, cujas raízes são $r = \pm 2i$. Uma vez que o polinômio característico possui raízes complexas a solução geral é dada por

$$s(t) = c_1 cos(2t) + c_2 sen(2t),$$

com c_1, c_2 constantes reais.

A fim de determinar as constantes c_1 e c_2, vamos utilizar as condições inicias

$$s(0) = 0\ m, \qquad s'(0) = -10\ m/s.$$

A segunda condição inicial está explicita em “e solta na posição de equilíbrio com uma velocidade de 10 m/s para cima”. Note que, a velocidade está no sentido contrário da força peso, ou seja, está na (direção negativo). Aplicando a primeira condição inicial, temos que

$$0 = s(0) = c_1 cos(0) + c_2 sen(0) = c_1,$$

e, portanto, $c_1 = 0$. Assim, a solução pode ser reescrita como

$$s(t) = c_2 sen(2t).$$

Para usar a segunda condição inicial, vamos derivar a expressão acima, de modo que

$$s'(t) = 2c_2 cos(2t).$$

Como $s'(0) = -10$, segue que

$$-10 = s'(0) = 2c_2 cos(0) = 2c_2,$$

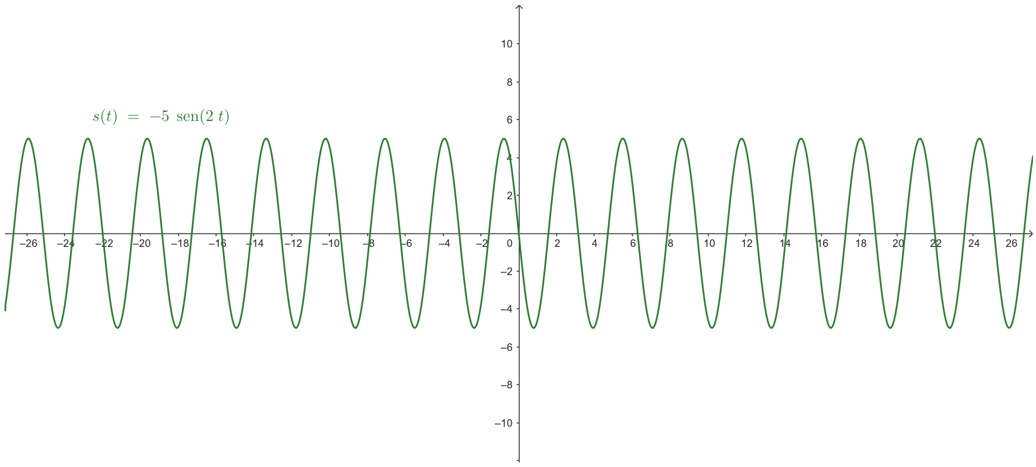
e, consequentemente, $c_2 = -5$. Com os valores de c_1 e c_2 temos que a equação do movimento é dada por

$$s(t) = -5sen(2t) \tag{4.22}$$

O gráfico de (4.22) está descrito na Figura 4.

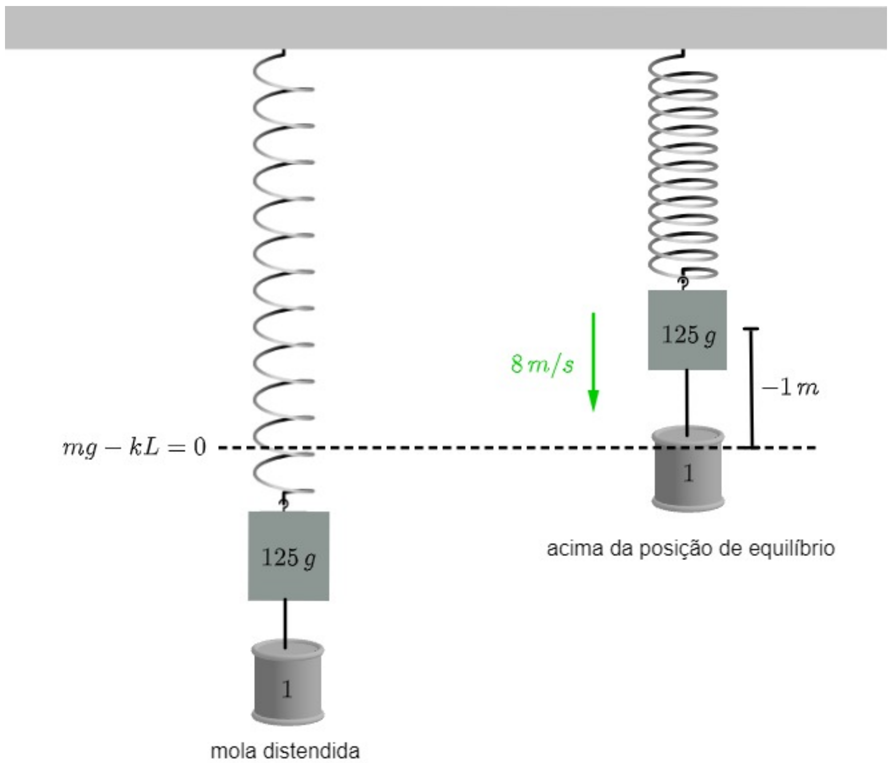
[(ZILL, 2001, p.246, Exercício 7) - Movimento amortecido] Um peso de 125 g é atado a uma mola de constante elástica igual a 2 N/m. O meio oferece uma resistência ao movimento do peso numericamente igual à velocidade instantânea. Se o peso parte de um ponto 1 m acima da posição de equilíbrio com uma velocidade de 8 m/s para baixo, determine o instante em que o

Figura 4 – Gráfico de $s(t) = -5sen(2t)$



Fonte: Elaboração própria utilizando o *software* GeoGebra, 2024.

Figura 5 – Movimento amortecido



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o simulador *PhET*, 2024.

peso passa pela posição de equilíbrio. Calcule o instante no qual o peso atinge seu deslocamento extremo em relação à posição de equilíbrio. Qual é a posição do peso nesse instante?

Uma vez que a questão apresenta um modelo de um sistema massa mola amortecido, a equação que descreve esse movimento tem o formato

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0.$$

Diante dos dados apresentados, temos $m = 125\ g = 1/8\ kg$ e $k = 2\ N/m$. Posto que, “O meio oferece uma resistência ao movimento do peso numericamente igual à velocidade instantânea", e sabendo que a velocidade instantânea é 1, temos também que $\gamma = 1$. Assim, a equação se torna

$$\frac{1}{8}s'' + s' + 2s = 0. \tag{4.23}$$

Observe que, temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, então podemos resolvê-la aplicando as técnicas abordadas na seção anterior. O polinômio característico da equação é dado por $1/8r^2 + r + 2 = 0$, equivalentemente a $r^2 + 8r + 16 = 0$ e as suas raízes são $r_1 = r_2 = -4$. Uma vez que o polinômio característico possui raízes repetidas,então a solução geral é dada por

$$s(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}. \tag{4.24}$$

A fim de determinar as constantes c_1 e c_2, devemos utilizar condições iniciais $s(0) = -1$ e $s'(0) = 8$, que foram obtidas do trecho "o peso parte de um ponto 1 m acima da posição de equilíbrio com uma velocidade de 8 m/s para baixo".

Utilizando a primeira condição inicial, obtemos

$$-1 = s(0) = c_1 e^0 + 0 \cdot e^0 = c_1,$$

isto é $c_1 = -1$ e podemos reescrever (4.24) como

$$s(t) = -e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}. \tag{4.25}$$

Para utilizar a segunda condição inicial, vamos encontrar a derivada $s'(t)$.

$$s'(t) = 4e^{-4t} + c_2 e^{-4t} - 4c_2 t e^{-4t}.$$

Como $s'(0) = 8$, segue que

$$8 = s'(0) = 4e^0 + c_2 e^0 = 4 + c_2,$$

implicando que $c_2 = 4$. Logo, (4.25) se torna

$$s(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}. \tag{4.26}$$

Para determinar o instante (t) no qual o peso atinge seu deslocamento extremo em relação à posição de equilíbrio, é preciso, encontrar o valor do tempo em que a derivada primeira (velocidade) é zero. Derivando (4.26), obtemos

$$s'(t) = 8e^{-4t} - 16te^{-4t}$$

assim, $s'(t) = 0$ se, e somente se,

$$e^{-4t}(8 - 16t) = 0.$$

Uma vez que $e^{-4t} \neq 0$, para todo t, a expressão acima só se anula no caso em que $8-16t=0$, isto é, quando $t=0,5$. Quando $t=0,5$, temos que $s(0,5)=e^{-2}$. Assim, a massa atinge um deslocamento extremo de e^{-2}.

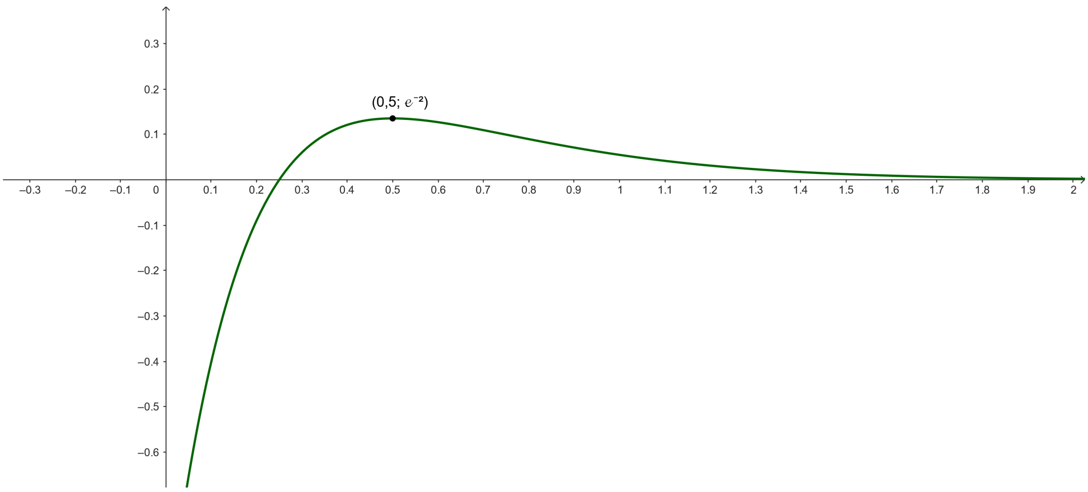
Por fim, vamos encontramos o momento t em que o peso passa pela posição de equilíbrio. Para isso, basta encontrar t de modo que $s(t)=0$, isto é,

$$s(t)=e^{-4t}(-1+4t).$$

Como $e^{-4t} \neq 0$, para todo t, segue que a expressão acima só se anula no caso em que $t=1/4$. Sendo assim, o peso passa na posição de equilíbrio depois de $0,25$ segundos.

A Figura 6 mostra o gráfico de $s(t)=e^{-4t}(-1+4t)$.

Figura 6 – Gráfico de $s(t)=e^{-4t}(-1+4t)$



Fonte: Elaboração própria utilizando o *software* GeoGebra, 2024.

Na próxima aplicação, vamos considerar o caso do Movimento forçado com amortecimento. Diferentemente dos demais casos, a equação que modela esse problema é não homogênea. Existem algumas técnicas de resolução de equações não homogêneas como

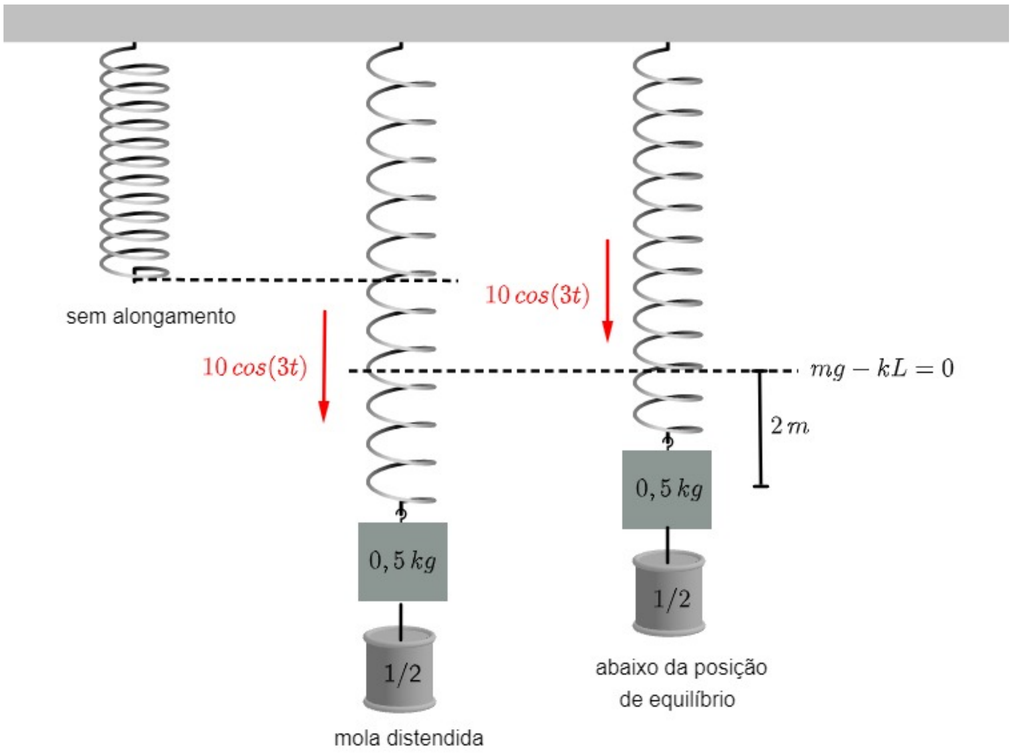
[(ZILL, 2001, p.257, Exercício 1)- Movimento forçado com amortecimento] Uma massa de 0,5 kg é atada a uma mola que tem constante de elasticidade igual a 6 N/m. A massa parte do repouso 2 m abaixo da posição de equilíbrio e o movimento subsequente está sujeito a uma força de amortecimento igual à metade da velocidade instantânea. Encontre a equação de movimento se o peso sofre a ação de uma força externa igual a $f(t)=10\ cos(3t)$.

Uma vez que a questão apresenta um modelo de um sistema massa mola forçado com amortecido, a equação que descreve esse movimento tem o formato

$$ms''+\gamma s'+ks=f(t).$$

Diante dos dados apresentados, temos $m=0,5\ kg=1/2\ kg$, $k=6\ N/m$ e $f(t)=10\ cos(3t)$. Além disso, $\gamma=1/2$, posto que, “o movimento subsequente está sujeito a uma força de

Figura 7 – Movimento forçado com amortecimento



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o simulador *PhET*, 2024.

amortecimento igual à metade da velocidade instantânea". Assim

$$\frac{1}{2}s'' + \frac{1}{2}s' + 6s = 10\ cos(3t). \tag{4.27}$$

Observe que, temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes. Para resolvê-lo podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados que foi abordado na seção anterior.

Inicialmente, precisamos resolver a equação homogênea

$$\frac{1}{2}s'' + \frac{1}{2}s' + 6s = 0. \tag{4.28}$$

A equação característica associada à equação é dada por $1/2r^2 + 1/2r + 6 = 0$ ou, equivalentemente, $r^2 + r + 12 = 0$, cujas raízes são $r = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{47}}{2}i$.

Uma vez que a equação característica possui raízes complexas, a solução geral da equação homogênea correspondente é dada por

$$s_h(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right). \tag{4.29}$$

O método dos coeficientes indeterminados exige que façamos uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular, dependendo do tipo de função que caracteriza a não homogeneidade que, nesse caso, é dada por $f(t) = 10\ cos(3t)$. Assim, a hipótese que devemos levantar é de que a solução particular é da forma

$$s_p(t) = A\ cos(3t) + B\ sen(3t), \tag{4.30}$$

com A e B a determinar. Para encontrar os coeficientes A e B devemos supor que (4.30) é uma solução de (4.27). Para isso, vamos calcular s' e s''. Temos que

$$s'_p(t) = -3A\ sen(3t) + 3B\ cos(3t)$$

e

$$s''_p(t) = -9A\ cos(3t) - 9B\ sen(3t).$$

Substituindo as expressões acima, juntamente com (4.30) em (4.27), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-9A\ cos(3t) - 9B\ sen(3t)) + \frac{1}{2}(-3A\ sen(3t) + 3B\ cos(3t)) + \\ +6(A\ cos(3t) + B\ sen(3t)) = 10\ cos(3t) \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (-9A\ cos(3t) - 9B\ sen(3t)) + (-3A\ sen(3t) + 3B\ cos(3t)) + \\ +12(A\ cos(3t) + B\ sen(3t)) = 20\ cos(3t) \Leftrightarrow \\ cos(3t)[-9A + 3B + 12A] + sen(3t)[-9B - 3A + 12B] = 20\ cos(3t) \Leftrightarrow \\ cos(3t)[3A + 3B] + sen(3t)[3B - 3A] = 20\ cos(3t) \end{aligned}$$

que ocorre se, e só se,

$$\begin{cases} 3A + 3B &= 20 \\ -3A + 3B &= 0 \end{cases}$$

O sistema linear acima possui como soluções $A = 10/3$ e $B = 10/3$, de onde segue que uma solução particular de (4.27) é

$$s_p(t) = \frac{10}{3}\ cos(3t) + \frac{10}{3}\ sen(3t)$$

Do Teorema 8 temos que a solução geral $s(t)$ de (4.27) é

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t)_h + s(t)_p \\ s(t) &= c_1 e^{-\frac{1}{2}t} cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\ cos(3t) + \frac{10}{3}\ sen(3t). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Resta-nos descobrir o valor das constantes c_1 e c_2 mediante as condições iniciais $s(0) = 2$ e $s'(0) = 0$, já que "a massa parte do repouso 2 m abaixo da posição de equilíbrio ". Da condição inicial $s(0) = 2$, temos

$$\begin{aligned} 2 = s(0) = c_1 + \frac{10}{3} \Leftrightarrow \\ c_1 = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim, (4.31) se torna

$$s(t) = -\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{2}t}cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2e^{-\frac{1}{2}t}sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{10}{3}\,cos(3t) + \frac{10}{3}\,sen(3t). \qquad (4.32)$$

Derivando a expressão obtemos

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \frac{2\sqrt{47}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \\ &- c_2\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2\frac{\sqrt{47}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \\ &- 10\,sen(3t) + 10\,cos(3t). \end{aligned}$$

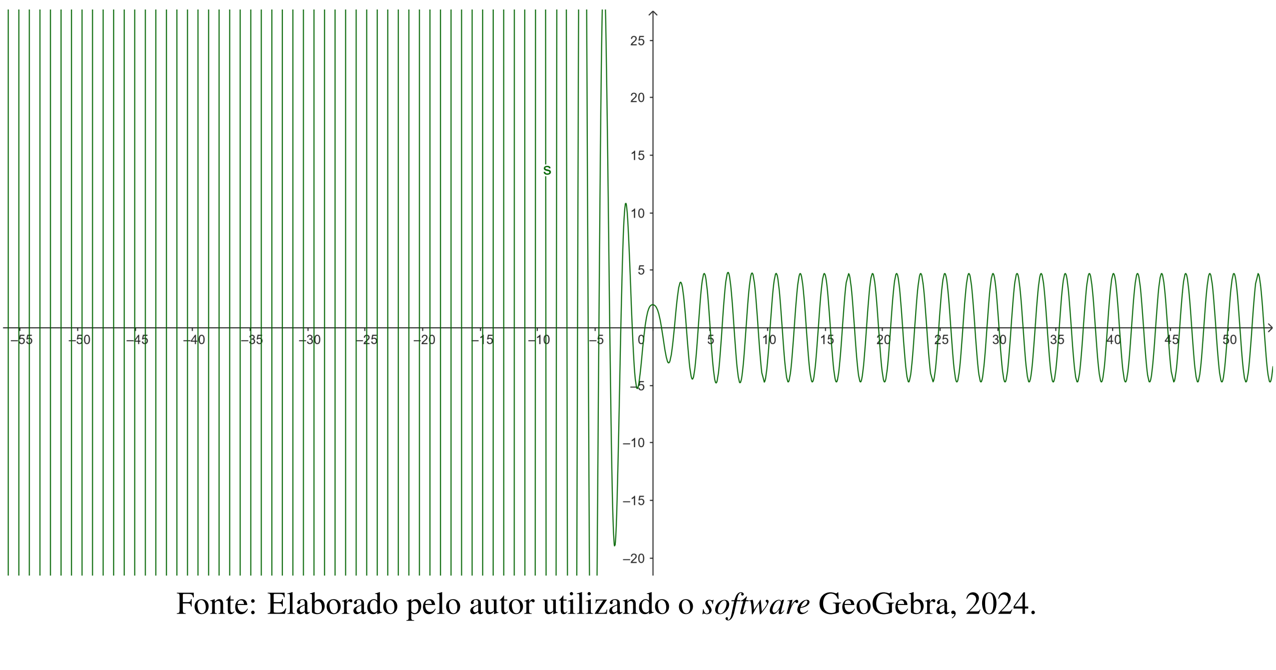
Usando que $s'(0) = 0$, segue que

$$0 = s'(0) = \frac{2}{3} + c_2\frac{\sqrt{47}}{2} + 10 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{64}{3\sqrt{47}} = -\frac{64\sqrt{47}}{141}.$$

Substituindo em (4.32) temos que a equação do movimento é

$$s(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{4}{3}cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{64\sqrt{47}}{141}sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right] + \frac{10}{3}[cos(3t) + sen(3t)].$$

Figura 8 – Gráfico da função $s(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{4}{3}cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{64\sqrt{47}}{141}sen\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right] + \frac{10}{3}[cos(3t) + sen(3t)]$



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o *software* GeoGebra, 2024.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre equações diferenciais ordinárias, com a apresentação de alguns métodos de resolução analíticos e de aplicações de equações diferenciais ordinárias em problemas do nosso cotidiano. O nosso objetivo foi fornecer uma compreensão clara e detalhada sobre o assunto, considerando a falta de ênfase nos estudos das aplicações de equações diferenciais ordinárias no componente curricular de Equações Diferenciais Ordinárias no ensino superior.

Durante o trabalho foi apresentado um breve contexto histórico mostrando alguns estudiosos que utilizaram as equações diferenciais ordinárias para modelar problemas práticos; além de definições, teoremas, exemplos, deduções, aplicações, gráficos e figuras ilustrativas.

Esperamos que este estudo sirva de motivação para a realização de outros trabalhos na área. Sugerimos, por exemplo, a realização de pesquisas envolvendo aplicações de sistemas de equações diferenciais, explorando principalmente a modelagem de problemas de dinâmica de populações.

REFERÊNCIAS

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 5.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1994.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7.ed. New York: John Wiley & Sons, 2003.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

CODDINGTON, E. A. **An Introduction to Ordinary Differential Equations**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1961; New York: Dover, 1989.

FIGUEIREDO, Djairo G. de; NEVES, Aloisio F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GUIDORIZZI, Hamilton, L. **Um Curso de Cálculo - Volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

MALTHUS, Thomas. **Ensaio Sobre o Princípio da População**. Europa-América, 2019.

MENEZES, Afonso H. Novaes et al. **Metologia científica:** teoria e aplicação na educação a distância. Petrolina-PE: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2019. 83 p.

PATA, Rafael B.; CARA, Elisa Regina. Modelo de Lotka-Volterra: a dinâmica predador-presa. **Anais do 9 Salão Internacional de Ensino Pesquisa e Extensão - SIEPE**, Universidade Federal do Pampa - Campus Santana do Livramento, Rio Grande do Sul, 6 p., novembro, 2017.

SANTOS, Reginaldo, J. **Equações Diferenciais para a Licenciatura em Matemática**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2010.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Universitário de Arraias.** Arraias, 2023.

VERHULST, P.F. **Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement**. Correspondance Mathématique et Physique. vol. X, 113 – 121 . 1838

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Difenciais**. 3.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil. 2001. 473 p.