



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

JOYCE KELLY DOS SANTOS AIRES

UM INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS E À CIÊNCIAS
DE REDES COMPLEXAS

Arraias, TO
2023

Joyce Kelly Dos Santos Aires

Uma introdução à Teoria dos Grafos e à Ciências de Redes
Complexas

Monografia foi avaliada e apresentada à
UFT - Universidade Federal do Tocantins -
Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor,
Curso de Licenciatura em Matemática
para a obtenção do título de licenciada em
Matemática e aprovada em sua forma final
pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Prof. Me. Adriano Rodrigues.

Arraias, TO
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

D724i Dos Santos Aires, Joyce Kelly.
Uma introdução à Teoria dos Grafos e à Ciências de Redes Complexas. / Joyce Kelly Dos Santos Aires. – Arraias, TO, 2023.
57 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins –
Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2023.

Orientador: Adriano Rodrigues.

1. Grafos.. 2. Redes Complexas.. 3. Topologia de Redes.. 4.
Medidas Estruturais. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Joyce Kelly dos Santos Aires

Uma Introdução à Teoria dos Grafos e à Ciências de Redes Complexas

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins - Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática para a obtenção do título de licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 31 / 03 / 2023

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
 **ADRIANO RODRIGUES**
Data: 03/04/2023 09:10:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Adriano Rodrigues, UFT

Documento assinado digitalmente
 **ALCIONE MARQUES FERNANDES**
Data: 03/04/2023 14:56:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes, UFT

Documento assinado digitalmente
 **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 03/04/2023 16:29:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa, UFT

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, pela minha vida, por me permitir ter saúde mental e determinação, fazendo com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos.

Ao professor Adriano Rodrigues, que conduziu o trabalho com paciência e dedicação, sempre disponível a compartilhar todo o seu conhecimento, e por me acompanhar durante esses meses de orientação, dando todo auxílio para a elaboração dessa pesquisa e principalmente por não desistir em mim.

Eu sou grata a minha mãe Elisangela Rosa dos Santos pelo apoio e motivação, minha avó Isabel Rosa dos Santos onde dedico esta conquista, meu pai e familiares pelo apoio e incentivo que muito contribuíram para a conclusão desta etapa de minha vida.

Gostaria de agradecer à Assistência Estudantil da Universidade pelos auxílios financeiros, que me permitiram dedicar-me somente aos estudos. Assim como ao Programa Institucional de Monitoria em Tecnologia Digital e o Estágio não Obrigatório LABIO/LABEC coordenado pela Prof. Márcia Cristina, por contribuir tanto com a minha formação profissional e complementar, como financeiramente.

Agradeço, de forma especial, aos amigos que fiz durante o curso que levarei em meu coração, Andreza Oliveira Cruz, Lucas de Sousa Matos, Thiago Rodrigues Furtado e Tatiele Souza Jambeiro, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formanda.

Quero agradecer também a meu namorado Alexandre Bruno, que esteve ao meu lado em momentos que se fizeram turbulentos, pela amizade, companheirismo, prestatividade e pelos auxílios com as construções dos grafos no Python, assim como, pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho

Agradeço a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Por fim, a Universidade Federal do Tocantins, a todos os professores, servidores e colaboradores, todos foram de forma essencial importantes no meu processo de formação profissional, pela dedicação dos envolvidos, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

O recomendável é entender profundamente as coisas e as relações entre elas. É nisso que reside a inteligência.”

Laurent Schwartz

RESUMO

Rede Complexa é um modelo matemática aplicado em vários problemas práticos, tais como rotas de aviões entre aeroportos, conexões entre estações de metrô, interações em redes sociais, citações bibliográficas em artigos, projetos científicos, e até mesmo em interações entre proteínas de redes neurais. O estudo de redes complexas consiste em compreender como cada elemento desta rede se relaciona com os demais, bem como o comportamento da rede como um todo. Os Grafos é a ferramenta matemática utilizada para modelagem dessas redes reais, por tanto os estudos dessa teoria se faz necessária. Para isso faremos um estudo bibliográfico introdutório a respeito da teoria dos grafos, apresentando um breve histórico sobre o Problema das Pontes de Königsberg e a solução de Euler que deu início à Teoria de Grafos, as definições básicas sobre os elementos de um grafo e sobre alguns tipos de grafos. Também apresentaremos as definições de alguns elementos e tipos de Redes, as topologias de Redes Regulares, Redes Aleatórias, Modelo de Rede de Mundo Pequeno e Redes Livres de Escalas. E por fim, apresentaremos as seguintes medidas utilizadas na caracterização de redes: as Medidas de Conectividade, Medidas relacionadas a Ciclos, Medidas de Distâncias e Medidas de Centralidades. .

Palavras-chave: Grafos. Redes Complexas. Topologia de Redes. Medidas Estruturais.

ABSTRACT

Complex Network is a mathematical model applied in several practical problems, such as airplane routes between airports, connections between subway stations, interactions in social networks, bibliographic citations in articles, scientific projects, and even in interactions between neural network proteins. The study of complex networks consists of understanding how each element of this network relates to the others, as well as the behavior of the network as a whole. Graphs are the mathematical tool used to model these real networks, therefore studies of this theory are necessary. For this, we will make an introductory bibliographical study about graph theory, presenting a brief history of the Königsberg Bridge Problem and Euler's solution that started Graph Theory, the basic definitions about the elements of a graph and about some graph types. We will also present the definitions of some elements and types of Networks, the topologies of Regular Networks, Random Networks, Small World Network Model and Scale Free Networks. And finally, we will present the following measures used in the characterization of networks: the Measures of Connectivity, Measures related to Cycles, Measures of Distances and Measures of Centralities.

Keywords: Graphs. Complex Networks. Network Characterization Measures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pontes de Königsberg	13
Figura 2 – Vértices do Grafo	14
Figura 3 – Arestas do Grafo	15
Figura 4 – Arestas adjacentes e incidentes	16
Figura 5 – Grafo G e subgrafo G'	16
Figura 6 – Representação do esquema 1	17
Figura 7 – Laços de um vértice	18
Figura 8 – Grafo conexo e desconexo	18
Figura 9 – Vizinhança aberta e fechada	19
Figura 10 – Grau mínimo e máximo	20
Figura 11 – Grafo Completo	20
Figura 12 – Grafo G e Complementar \bar{G}	21
Figura 13 – Grafo Regular	21
Figura 14 – Grafo Ciclo	22
Figura 15 – Caminho em no grafo G	22
Figura 16 – Árvore	23
Figura 17 – Grafo Bipartido G	23
Figura 18 – Grafo Bipartido Completo G	24
Figura 19 – Rede Neura	25
Figura 20 – Visão geral de um Sistema de Geração, Transmissão e Distribuição de Energia Elétrica	26
Figura 21 – Rodovias do Tocantins	27
Figura 22 – COVID-19	28
Figura 23 – Contatos de amizade entre sujeitos de um grupo	30
Figura 24 – Relacionamento assimétrico	30
Figura 25 – Redes com peso	32
Figura 26 – Limiarização do Grafo exemplo 3.1.6	33
Figura 27 – Redes Regulares	35
Figura 28 – Redes aleatórias regular, alterando as arestas m	36
Figura 29 – Rede complexa pequeno-mundo	38
Figura 30 – Rede Complexa Grau de Conectividade	42
Figura 31 – Triângulo A, B, e C. Conectividade tripla de D	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Centralidade de Intermediação do vértice Arraias	50
Tabela 2 – Centralidade de Intermediação do vértice Palmas	50
Tabela 3 – Centralidade de Intermediação do vértice Gurupi	51
Tabela 4 – Centralidade de Intermediação do vértice Arapoema	51
Tabela 5 – Centralidade de Intermediação do vértice Colméia	52
Tabela 6 – Centralidade de Intermediação do vértice Araguaína	52
Tabela 7 – Centralidade de Intermediação do vértice Almas	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	TEORIA DOS GRAFOS	12
2.1	O Problema das Pontes de Königsberg e a Solução de Euler	12
2.2	Definições Básicas	14
2.3	Tipos de Grafos	19
3	CIÊNCIA DAS REDES COMPLEXAS	25
3.1	Definições Básicas	29
3.2	Topologia de Redes Complexas	34
3.2.1	Redes Regulares	35
3.2.2	Modelo de Redes Aleatórias	35
3.2.3	Modelo Small World (mundo pequeno)	36
3.2.4	Redes Livres de Escala	39
4	ALGUMAS MEDIDAS ESTRUTURAIS DE REDES COMPLEXAS	41
4.1	Conectividade	42
4.2	Medidas Relacionadas a Ciclos	43
4.3	Medidas Relacionadas com Distância	46
4.4	Medidas de centralidade	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

As Redes Complexas são uma ferramenta de modelagem matemática aplicada em vários problemas práticos, tais como rotas de aviões entre aeroportos, conexões entre estações de metrô, interações em redes sociais, citações bibliográficas em artigos e projetos científicos, e até mesmo em interações entre proteínas de redes neurais, Rodrigues (2007). Os estudos das redes são basicamente observações de comportamentos que podem conter propriedades particulares, mas não isolados.

Estamos cada vez mais cientes de que o comportamento de muitas das coisas que nos cercam não pode ser estudado e caracterizado isoladamente, pois muitas destas coisas estão conectadas e a interação entre as partes influencia fundamentalmente o comportamento individual e coletivamente o comportamento global. Assim sendo, surge naturalmente a necessidade de estudar como as coisas se conectam e a importância desta conectividade para o problema em questão. (FIGUEIREDO, 2011,

p.2)

É amplamente difundido que o estudo da teoria das redes complexas possui caráter multidisciplinar, isso graças ao fato de abranger âmbitos variados do conhecimento, e permitir aplicações que permeiam desde a biologia, matemática, física até a sociologia.

O avanço da tecnologia da informação e a acessibilidade a computadores cada vez mais sofisticados proporcionaram uma maior agilidade na análise de dados, mesmo que em grandes quantidades e com altas densidades de informações que são geradas continuamente. (Figueiredo (2011, p.3) "Um aspecto central do estudo de redes está em descobrir, caracterizar e modelar a estrutura da rede. Informalmente, a estrutura da rede é dada pelo conjunto de relacionamentos existentes, ou seja, todas as "ligações" entre os objetos".

A Teoria de Redes Complexas está intimamente ligada aos estudos dos Grafos, parte da matemática não abordada na matriz curricular do curso de licenciatura em matemática. Os grafos são utilizados na modelagem de Redes Complexas.

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer uma breve introdução ao estudo da teoria de Redes Complexas. Para isso vamos apresentar um estudo bibliográfico a respeito da Teoria dos Grafos, assim como Redes Complexas e suas medidas estruturais básicas de caracterização.

A motivação para este trabalho se deu a partir da sugestão feita pelo professor orientador, que apresentou-me conceitos básicos de Grafos e suas aplicações.

As indagações que norteiam este trabalho foram feitas por: "As redes complexas [...] visa estudar e compreender este abrangente fenômeno: como as "coisas" se conectam e quais são as implicações disto?" (FIGUEIREDO, 2011, p.3) Impulsionando a curiosidade diante o assunto, contribuindo para sua realização.

Para a construção das figuras autorais deste trabalho foi utilizado aplicativos computacionais de elaboração de grafos. O aplicativo Graph Online cujo objetivo é criar grafos. E a linguagem de programação Python, usada, neste trabalho, para a elaboração dos grafos de situações exemplos.

Este trabalho está dividido em 3 Capítulos. O capítulo 2 apresenta um breve histórico sobre o problema das pontes de Königsberg e a construção da solução de Euler, que deu início ao estudo Teoria dos Grafos. Apresenta também algumas definições básicas tais como as definições de grafos, subgrafos, vértices, arestas, vértices adjacentes, arestas incidentes, grau de um vértice. Demonstra dois resultados que relaciona a soma dos graus dos vértices e o número de arestas. E por fim, apresenta as definições de alguns dos tipos mais comuns de grafos: Grafos Árvores, Bipartidos, Conexos, Desconexos, Regulares, Ciclos e Caminhos.

O Capítulo 3 discute, de forma introdutória, sobre quatro exemplos de Redes Reais: Redes neurais, Redes de distribuição de energia, a rede de rodovias entre os municípios do estado do Tocantins e a rede que simula a infecção de COVID19. Apresenta as definições de redes estáticas e dinâmicas básicas, relacionamentos simétricos e assimétricos e redes direcionadas, redes com peso, representação de uma rede por uma matriz de adjacências. Apresenta também os processos de Limiarização e Simetrização utilizados para transformar redes direcionadas e com pesos em redes não direcionadas e sem pesos para fins de início de análise ou em caso em que as direções e os pesos não são importantes para a análise. São apresentadas, no final do capítulo, as quatro topologias de rede mais importantes na história do estudo de redes, a saber, Redes Regulares, Redes Aleatórias, Modelo de Rede de Mundo Pequeno (Small World) e Redes Livres de Escalas.

Por fim, o Capítulo 4, apresenta algumas medidas estruturais que podem ser utilizadas para caracterizar Redes Complexas. Tais como as medidas de conectividade e conectividade média que são apresentadas a partir dos graus dos vértices da rede e são utilizadas para se estudar o quão conectada é a rede como um todo. As medidas relacionadas a ciclos: a Transitividade, Coeficiente de Agrupamento Local e o Coeficiente de Agrupamento Médio, que estabelece que dado um vértice qualquer, o quanto seus vértices vizinhos se conectam entre si. As medidas de Distância e Distância Média que é utilizado para medir em quantos passos de distância entre dois vértices evidenciando como uma dada “informação” transita na rede. E a última medida aqui apresentada é A medida de Centralidade de Intermediação que diz o quão importante é um vértice para o trânsito de informação na rede. Utilizamos um exemplo de uma rede hipotética de aeroportos para ilustrar cada uma das medidas apresentadas neste capítulo.

Este trabalho se ocupa apenas de apresentar conceitos básicos sobre Grafos e Redes, uma vez que estudos mais avançados exigiria recursos de programação computacional que não dispúnhamos durante a execução do mesmo.

2 TEORIA DOS GRAFOS

O estudo dos Grafos para as Redes Complexas será importante para o desenvolvimento da pesquisa para nos ajudar a compreendermos os fenômenos de redes.

O estudo da teoria de Grafos teve origem em 1735, quando Euler propôs uma solução para o problema das pontes de Königsberg.

Nas seções seguintes, apresentaremos uma breve história sobre o surgimento do estudo de Grafos, algumas definições básicas, alguns tipos de Grafos e alguns exemplos.

2.1 O Problema das Pontes de Königsberg e a Solução de Euler

Em 1735, o matemático prussiano Leonhard Euler (1707-1783) foi instigado pelas especulações do povo de Königsberg, situada na Rússia, atual Kaliningrado, sobre o problema das pontes do rio Pregel. Este problema consistia na possibilidade de atravessar todas as pontes que ligavam uma ilha no rio Pregel, a Königsberg sem que se passassem duas vezes pela mesma ponte.

Foi em seu artigo intitulado de *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* traduzindo para a língua portuguesa “Solucionando problemas de geometria de situação”, que Euler trouxe o primeiro resultado de como solucionar o problema das pontes de Königsberg. O artigo foi escrito em 1735 mas somente exposto para a publicação em 1736, e mais tarde em 1741 foi impresso.

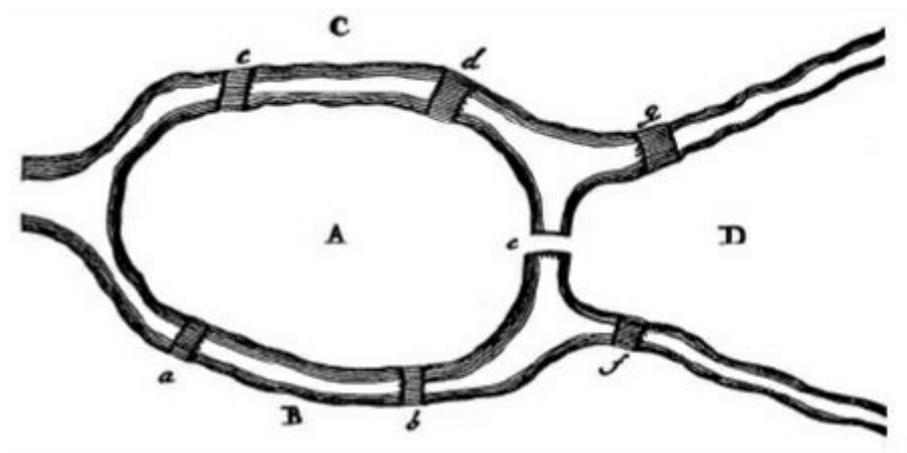
Este referido artigo de Euler, dentro da sociedade acadêmica, é considerado a semente do que vem ser o estudo da teoria dos grafos. Este artigo é composto por 21 (vinte e um) parágrafos no qual Euler além de resolver o problema das pontes, também reflete sobre possibilidades, e faz uma generalização do problema, até chegar em teoremas. Estes que servirão como guia para serem aplicados em situações similares.

[Lopes e Táboas](#) (2015) destacam, ao traduzir essa obra, que a mesma trás uma ideia de como acontece o surgimento de uma nova teoria matemática, e de como um pensamento matemático age no momento de seu desenvolvimento.

O problema consistia no fato de que Königsberg possuía uma ilha no meio da cidade. Essa ilha foi formada devido a separação do rio, dividindo a cidade nas regiões A , B , C e D , como mostra a Figura 1. Para que a população pudesse transitar entre os lados foram construídas sete pontes a , b , c , d , e , f e g . Dessa forma o desafio em que a população de Königsberg se especulava era a possibilidade de encontrar um caminho, no qual passe por todas as pontes apenas uma única vez.

Entretanto, Euler propôs solução para um problema mais geral que contemplou o problema das pontes.

Figura 1 – Pontes de Königsberg



Fonte: LOPES, F ; TÁBOAS, P. (2015)

Ao determinar o método de solução para o problema, Euler se questionou sobre os possíveis meios para chegar em uma resposta. A primeira, e mais óbvia, era a de tentativa e erro, constituindo a ideia de enumerar todos os percursos que existiam. O problema desse método está no fato de que ele se tornaria inviável, caso houvesse milhares de pontes e espaços de terra. Essa primeira possibilidade foi logo descartada, surgindo assim uma ideia para o pensamento seguinte. O segundo raciocínio a respeito do problema se ateve em procurar um método fazendo um estudo analítico do problema.

[Lopes e Táboas \(2015\)](#) cita Euler descrevendo seu método.

Todo o meu método repousa na adequada designação de cada trânsito pelas pontes, para o qual utilizo as letras maiúsculas *A*, *B*, *C*, e *D*, atribuídas a cada região separada pelo rio. Assim, se alguém migra da região *A* para a *B* pela ponte *a* ou *b*, denota esse trânsito pelas letras *AB*, das quais a primeira mostra a região de onde o viajor saiu, e a segunda dá a região onde chega depois de atravessar uma ponte. Se logo a seguir, o viajor sai da região *B* para a região *D* pela ponte *f*, este trânsito será representado pelas letras *BD*. Denoto, porém, dois trânsitos *ABD* somente, porque a letra do meio, *B*, designa tanto a região na qual o primeiro trânsito chega quanto a região da qual o segundo trânsito sai. [\(LOPES E TÁBOAS, 2015, p.4\).](#)

Ao analisar a Figura [1](#), as regiões de terra separadas pelo rio, que o viajor (termo utilizado por Euler) passará, sempre será um número a mais do que a quantidade de pontes. Desta forma percebemos que para designar o trânsito por sete pontes é necessário que se passe por oito regiões da ilha considerando que algumas regiões podem ser acessadas mais de uma vez.

A solução para o problema das pontes de Königsberg, ocorre a partir da análise da quantidade de pontes que dá acesso a cada área de terra *A*, *B*, *C* e *D*. Se o trânsito for possível, destaca Lopes e Táboas (2015) citando Euler.

essas letras devem ser dispostas de tal maneira que passe a concessão imediata das letras *A* e *B* ocorra duas vezes, porque há duas pontes *a* e

b que ligando essas duas regiões A e B ; também a sucessão das letras A e C deve ocorrer duas vezes nesta série de oito letras; e ainda a sucessão das letras A e D deve ocorrer uma vez, e do mesmo modo, é necessário que ocorra uma vez a sucessão das letras A e D , e também a das letras C e D . (LOPES E TÁBOAS, 2015, p.4).

Como já foi dito, se fosse possível passar pelas sete pontes uma única vez, o viajor deveria passar pelas regiões oito vezes contando as repetições de região. Entretanto ele passa nove vezes conforme demonstrado. Ou seja, não é possível passar por todas as pontes uma única vez.

Foi partindo desse pensamento elementar que Euler introduziu a teoria dos grafos, no qual vamos verificar nas definições deste capítulo.

2.2 Definições Básicas

O estudo dos Grafos é uma parte da matemática pouco vista no meio acadêmico tanto no ensino regular básico, quanto em graduações de nível superior.

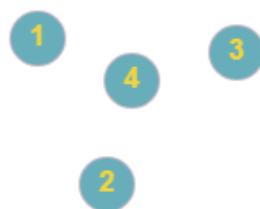
Basicamente os grafos é um conjunto de informações que podem ser representados por pontos, e estes podem representar pessoas, objetos, lugares entre outros. Estes pontos serão interligados por retas ou fios.

Nas próximas subseções adentramos nas definições necessárias para uma melhor interpretação dos grafos.

Definição 2.2.1. Um **Grafo G** é uma estrutura definida por um par de conjuntos $V(G)$ e $A(G)$. $V(G)$ é um conjunto finito de **vértices** do grafo G , que podem também ser chamados de "**Nós**". Cada vértice é representado, no Grafo G , por um pequeno círculo. E $A(G)$ é um conjunto finito das arestas que ligam um vértice a outro do grafo G . As arestas são representadas por segmentos de retas ou linhas ligando os vértices.

Definição 2.2.2. O conjunto de vértices **Vértices** ou **Nós** do grafo, denotado $V(G)$ é o conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$.

Figura 2 – Vértices do Grafo



Fonte: Autoral (2023)

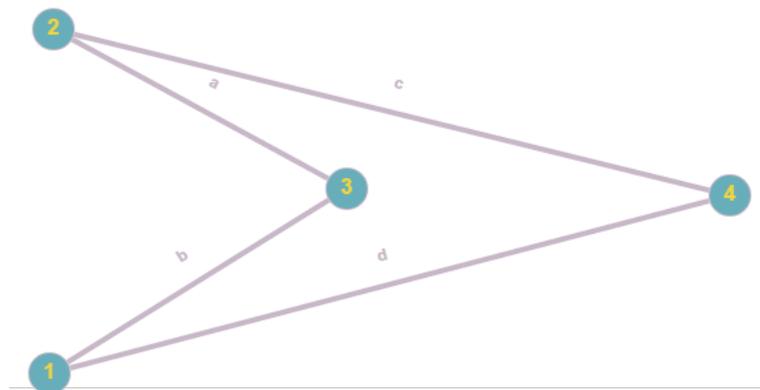
Exemplo 2.2.1. Considerando a Figura 2, $V(G)$ é o conjunto $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Cada vértice é representado por uma bola numerada.

A partir daqui vamos representar os vértices por v_i e v_j , $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ e $j = (1, 2, 3, 4, \dots)$ o número de vértices por n e em alguns casos N .

Definição 2.2.3. Cada **Aresta** do grafo G pode ser representado por $v_i v_j$ ou (v_i, v_j) onde v_i e v_j são vértices conectados pela aresta. Também se identifica a aresta $v_i v_j$ por uma letra minúscula do nosso alfabeto. Assim podemos representar o $A(G)$ por $A(G) = \{a, b, c, \dots\}$, com $a = v_1 v_2, b = v_2 v_3, c = v_3 v_4, \dots$

Exemplo 2.2.2. O conjunto das arestas do grafo representado na Figura 3 será denotado como $A(G) = \{a, b, c, d\}$, estas arestas geralmente serão representadas por uma linha que liga um item a outro.

Figura 3 – Arestas do Grafo.



Fonte: Autoral (2023)

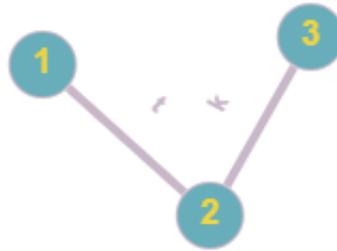
A partir daqui vamos representar as arestas por $a = v_i v_j$ e o número de arestas por m e em alguns casos por M .

Definição 2.2.4. Dizemos que os vértices v_i e v_j são **Adjacentes** quando existe uma aresta t que os conecta, e a mesma aresta é dita **Incidentes** aos vértices v_i e v_j .

Exemplo 2.2.3. Considere o grafo G da Figura 4. Os vértices 1 e 2 são adjacentes pela aresta t , e 2 e 3 são adjacentes pela aresta k . Assim, a aresta t é incidente aos vértices 1 e 2, e k é incidente aos vértices 2 e 3.

Definição 2.2.5. O Grafo G' é um **Subgrafo** de G se o conjunto dos vértices $V(G')$ estiver contido no conjunto de vértices $V(G)$, assim como o conjunto arestas $A(G')$ deve estar contido no conjunto de arestas $A(G)$.

Figura 4 – Arestas adjacentes e incidentes



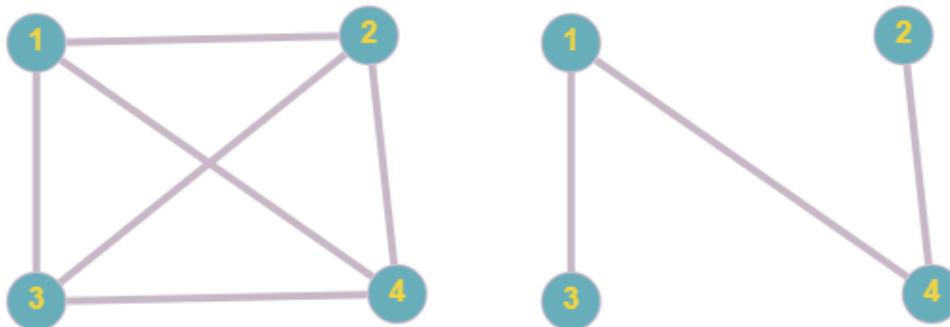
Fonte: Autoral (2023)

Exemplo 2.2.4. Os grafos G e G' das Figura 5a e 5b respectivamente, possuem os mesmos vértices, ou seja $V(G) = V(G') = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, já o conjunto de arestas $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ contém o conjunto de arestas $A(G') = \{v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4\}$. Deste modo G' é subgrafo de G .

Figura 5 – Grafo G e subgrafo G'

(a) Grafo G

(b) Subgrafo G'

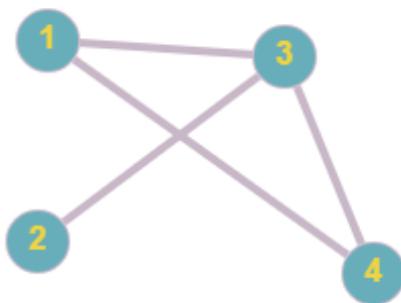


Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.2.6. O **Grau** $d(v)$ do vértice v é o número de arestas que incidem em v .

Exemplo 2.2.5. Considere o grupo de quatro amigos formados por Taty, Joana, Maria e Pedro. Vamos representar as relações entre eles através de um grafo. Assim cada amigo será representado por um vértice do grafo. Ou seja, o vértice v_1 representa Taty, v_2 representa Joana, v_3 Pedro e v_4 Maria. As relações de amizade entre eles será representado por uma aresta. Supondo que Taty é amiga de Pedro e de Maria, Pedro é amiga de Taty, Maria e Joana, já Maria é amiga de Taty e Pedro. Podemos representar estas relações como no grafo da Figura 6, temos que o grau de cada vértice representa quantas relações de amizade cada amigo tem.

Figura 6 – Representação do esquema 1



Fonte: Autoral (2023)

- Taty conhece Pedro e Maria, ou seja ela tem duas relações de amizades, portanto $d(v_1) = 2$.
- Joana conhece apenas Pedro, Joana tem apenas uma relação de amizade então $d(v_2) = 1$.
- Pedro é amigo de Maria, Taty e Joana $d(v_3) = 3$.
- Maria conhece Taty e Pedro, portanto $d(v_4) = 2$

Observe que a soma dos graus do grafo é o dobro da quantidade de aresta, já que cada aresta será contada duas vezes. Neste esquema temos quatro amigos, portanto quatro vértices e quatro arestas de acordo com as relações de amizade entre eles. Por outro lado, a soma dos graus de cada vértice é oito. Este fato não é coincidência.

Teorema 2.2.1. *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$$

Ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Demonstração: Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Corolário 2.2.1. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar*

Demonstração: Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas, portanto, é um número par.

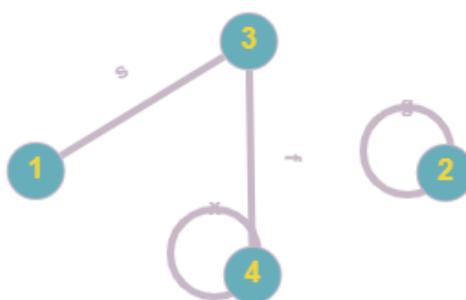
Definição 2.2.7. É denominado como **laço** a aresta que liga um vértice a ele mesmo.

Quando um vértice possui um laço, cada extremidade deste laço é contada uma vez para se obter o grau deste vértice. Deste modo que o corolário 2.2.1 continua verdadeiro.

Exemplo 2.2.6. Na Figura 7 é possível perceber que os vértices v_2 e v_4 possuem laços.

Temos a partir disso que $d(v_2) = 2$, $d(v_4) = 3$.

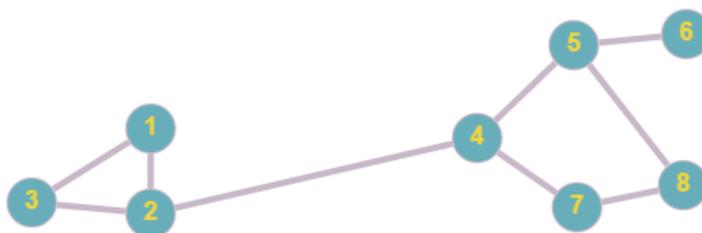
Figura 7 – Laços de um vértice



Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.2.8. Um grafo G é dito **Conexo** se quaisquer dois vértices de G estão conectados por uma sequência de arestas. E G é dito **Desconexo** se existem pelo menos dois vértices que não são conectados por qualquer sequência de aresta.

Figura 8 – Grafo conexo e desconexo



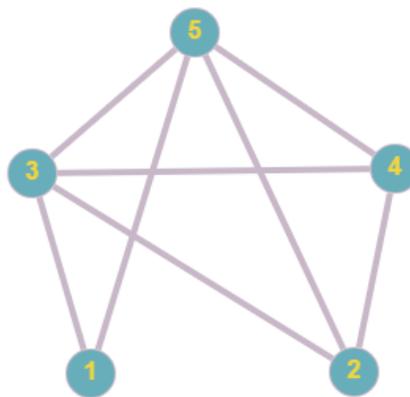
Fonte: Autoral (2023)

Exemplo 2.2.7. Considerando o grafo G na Figura 8 com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5, v_4v_7, v_5v_8, v_5v_6, v_7v_8\}$. Considere os subgrafos G_1 , com $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $A(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_2\}$, e G_2 com $V(G_2) = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $A(G_2) = \{v_4v_5, v_4v_7, v_5v_8, v_5v_6, v_7v_8\}$.

Observe que a aresta v_2v_4 conecta as partes $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V(G_2) = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ de G , tornando G um grafo conexo. Na hipótese da não existência da aresta v_2v_4 G pode ser considerado um único grafo, mas este desconexo.

Definição 2.2.9. A **Vizinhança aberta** do vértice v , denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v . Neste caso v não pertence a $N(v)$. Caso v pertença ao conjunto N o chamamos de **Vizinhança fechada** e denotamos por $N[v]$. Podemos definir que o conjunto de $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Figura 9 – Vizinhança aberta e fechada



Fonte: Autoral (2023)

Exemplo 2.2.8. Observando na Figura 9 temos que $N(v_2) = \{v_3, v_4, v_5\}$ e $N[v_2] = \{v_3, v_4, v_5, v_2\}$.

Definição 2.2.10. Um vértice v é dito **Isolado** quando o seu grau é igual a zero, $d(v) = 0$. Ou seja, v não possui arestas que o conecta aos demais vértices do grafo. Já o vértice **Pendente** é aquele que possui apenas um grau, tendo ele uma única aresta que o conecta aos demais vértices do grafo.

Definição 2.2.11. O **Grau Mínimo** de um grafo G é menor grau entre seus vértices e o **Grau Máximo** é o maior grau entre seus vértices.

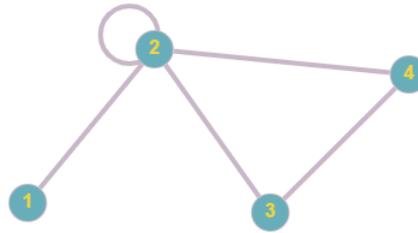
Denotamos o grau mínimo do grafo G , por $\delta(G)$, e o grau máxima por $\Delta(G)$.

Exemplo 2.2.9. Considere o grafo G da Figura 10, temos que v_1 é o vértice de menor grau, assim $\delta(G) = d(v_1) = 1$, e v_2 é o vértice de maior grau $\Delta(G) = d(v_2) = 5$.

2.3 Tipos de Grafos

Definição 2.3.1. Um Grafo G é **Completo** se quaisquer dois vértices de G são conectados por uma única aresta.

Figura 10 – Grau mínimo e máximo

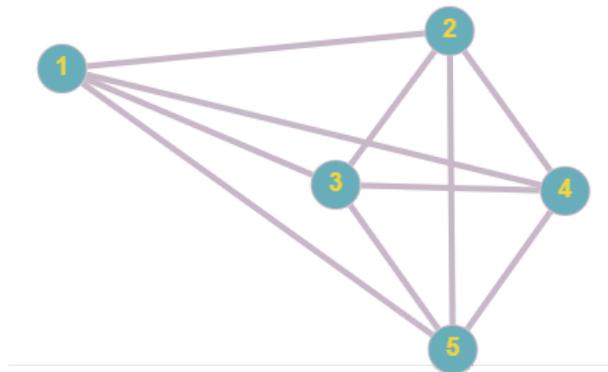


Fonte: Autoral (2023)

A notação usual para casos de grafos completos de n vértices é K_n .

Exemplo 2.3.1. Na Figura [11](#), é possível observar que o grafo apresentado é completo. Pois todo par de vértices contido no conjunto de $V(G)$ possui uma aresta conectando-os. Portanto, podemos representar G por K_5 .

Figura 11 – Grafo Completo



Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.2. Dado o grafo G , o **grafo complementar** de G , denotado por \overline{G} , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices, mas seu conjunto de arestas é tal que $A(\overline{G}) \cup A(G)$ torna G um grafo completo e sua $A(\overline{G}) \cap A(G)$ é vazio.

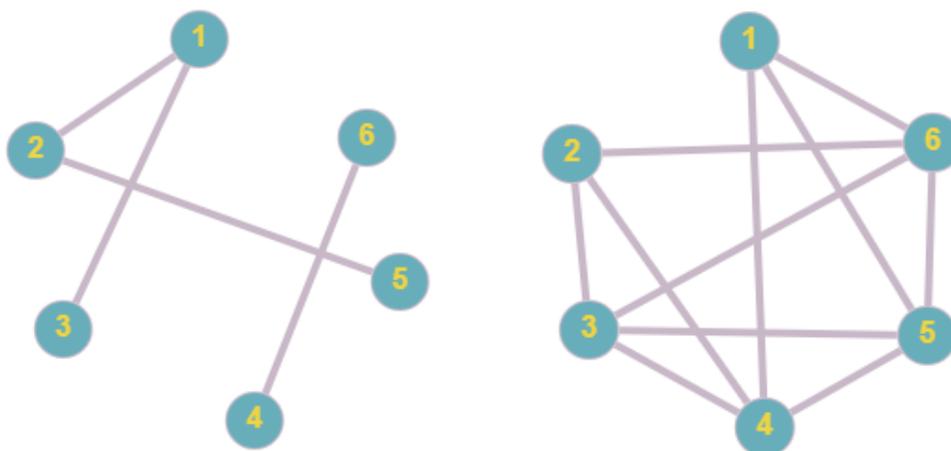
Exemplo 2.3.2. Observamos na Figura [12a](#) que o conjunto de vértices do grafo G é $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_5, v_4v_6\}$. Já na Figura [12b](#) temos que \overline{G} possui o mesmo conjunto de vértices de G , mas o conjunto de suas arestas são as ligações que faltam em G . Logo $V(G) = V(\overline{G})$, $A(\overline{G}) \cap A(G) = \emptyset$ e $A(\overline{G}) \cup A(G)$ torna o grafo resultante completo. Assim \overline{G} é o complementar de G .

Definição 2.3.3. Para que um grafo seja considerado **nulo ou vazio** o conjunto de suas arestas tem que ser vazio, ou seja $A(G) = \{\}$.

Figura 12 – Grafo G e Complementar \bar{G}

(a) Grafo G

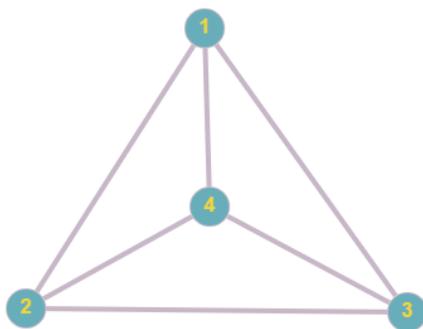
(b) Complementar \bar{G}



Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.4. Quando um grafo possui todos seus vértices com o mesmo grau K , dizemos que este Grafo é **Regular** de grau K , ou K -regular.

Figura 13 – Grafo Regular



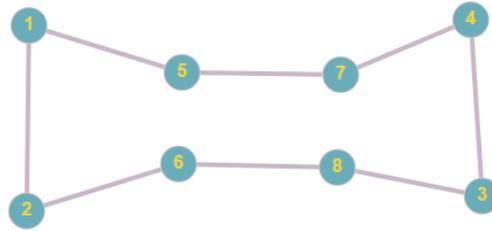
Fonte: Autoral (2023)

Exemplo 2.3.3. No exemplo da Figura 13 temos um grafo G no qual possui quatro vértices. O conjunto dos vértices, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ onde cada vértice possui grau 3, portanto G é um Grafo 3-regular.

Definição 2.3.5. O **Grafo ciclo** é um grafo regular de grau 2, tendo como notação C_n , onde n é o número de vértices.

Exemplo 2.3.4. Na Figura 14 temos que este grafo é um ciclo, pois possui grau 2-regular para todos os vértices, tendo como notação C_8 .

Figura 14 – Grafo Ciclo



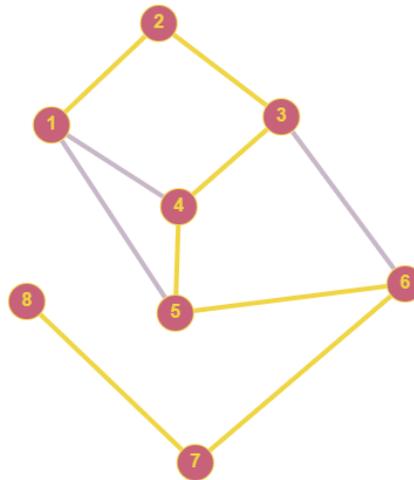
Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.6. Um **Caminho** é uma sucessão de vértices conectados por uma sequência de arestas distintas.

Observe que um caminho pode ser entendido como um ciclo no qual foi retirado uma aresta. Em outras palavras podemos definir um ciclo como um caminho fechado. Como notação, o caminho P_n é também encontrado quando se é retirado uma aresta do ciclo C_n .

Exemplo 2.3.5. Na Figura 15, temos o grafo G tendo como $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Observe que $P_8 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8\}$ é um caminho.

Figura 15 – Caminho em no grafo G

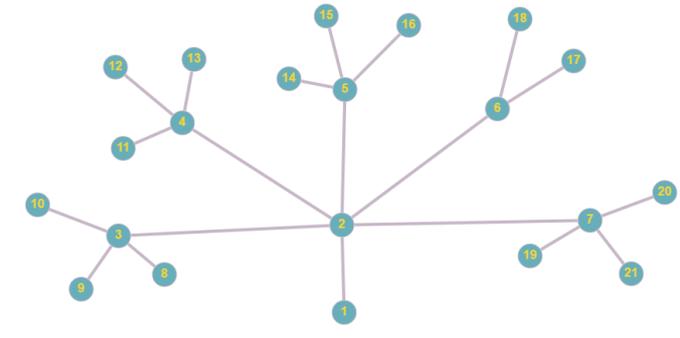


Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.7. Uma **Árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos.

Exemplo 2.3.6. Na Figura 16, o grafo G é uma **Árvore**.

Figura 16 – Árvore

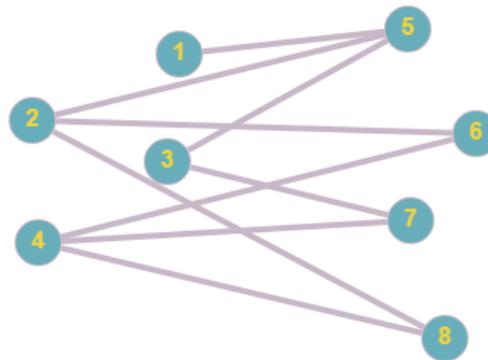


Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.8. O grafo G é denominado **Bipartido** ou **Bigrafo**, quando o conjunto de $V(G)$ possui dois subconjuntos disjuntos $V_1(G)$ com p vértices e $V_2(G)$ com q vértices, de modo que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Os subconjuntos V_1 e V_2 são chamados **subconjuntos independentes de vértices do grafo G** .

Exemplo 2.3.7. Na Figura 17 o grafo G possui dois subconjuntos de vértices $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $V_2(G) = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$. V_1 e V_2 são subconjuntos independentes de vértices, pois, dois vértices quaisquer num mesmo subconjunto não são adjacentes.

Figura 17 – Grafo Bipartido G



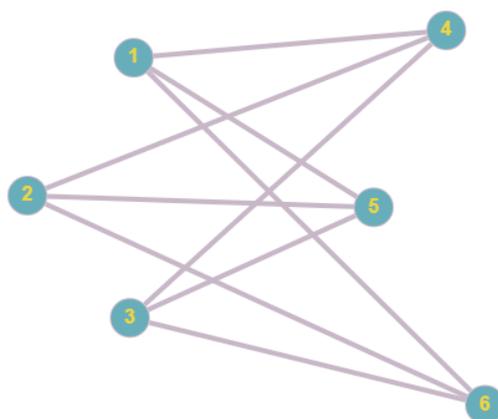
Fonte: Autoral (2023)

Definição 2.3.9. O grafo é **bipartido completo** quando todo o vértice do subconjunto V_1 está ligado a um vértice do subconjunto V_2 , tendo como notação $K_{p,q}$.

Exemplo 2.3.8. Na Figura 18 o grafo é bipartido completo, pois cada elemento de $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ está ligado a cada elemento de $V_2(G) = \{v_4, v_5, v_6\}$. Neste caso G é denotado por $K_{3,3}$.

A partir das definições elementares apresentadas aqui vamos, no próximo capítulo, apresentar alguns conceitos de ciências de redes complexas.

Figura 18 – Grafo Bipartido Completo G



Fonte: Autoral (2023)

3 CIÊNCIA DAS REDES COMPLEXAS

Este capítulo foi construído com base em três trabalhos científicos. O primeiro de Rodrigues (2007), na qual é discorrido sobre a caracterização, classificação e análise de redes complexas. O segundo, Figueiredo (2011), basicamente o capítulo sete, tratado sobre introdução a Redes Complexas. E por último o artigo escrito por Metz, Calvo, Seno e Lian (2007) intitulado "Redes Complexas: conceitos e aplicações".

A complexidade destas redes advém do fato de possuírem muitas partes, ou seja, muitos vértices, contendo elementos que interagem em múltiplos níveis, obtendo com isso relações em diferentes escalas que podem afetar o todo. De tal forma que o todo não pode ser explicado somente pela análise de suas partes, sendo necessário que se leve em consideração às suas interações.

Como foi dito, uma rede complexa pode ser representada por um grafo, onde cada parte da rede é representado por um vértice e cada interação entre as partes são representadas por arestas. Um exemplo é uma rede complexa que modela a sociedade brasileira com mais de 214 milhões de habitantes, com um número enorme de interações entre esses habitantes.

Ao observar o nosso entorno é perceptível que por toda parte as redes complexas estão presentes. Podendo ser citados alguns exemplos de redes:

Exemplo 3.0.1. *A rede da anatomia humana que possuem diversas ligações como o sistema neural do corpo humano.*

Figura 19 – Rede Neural



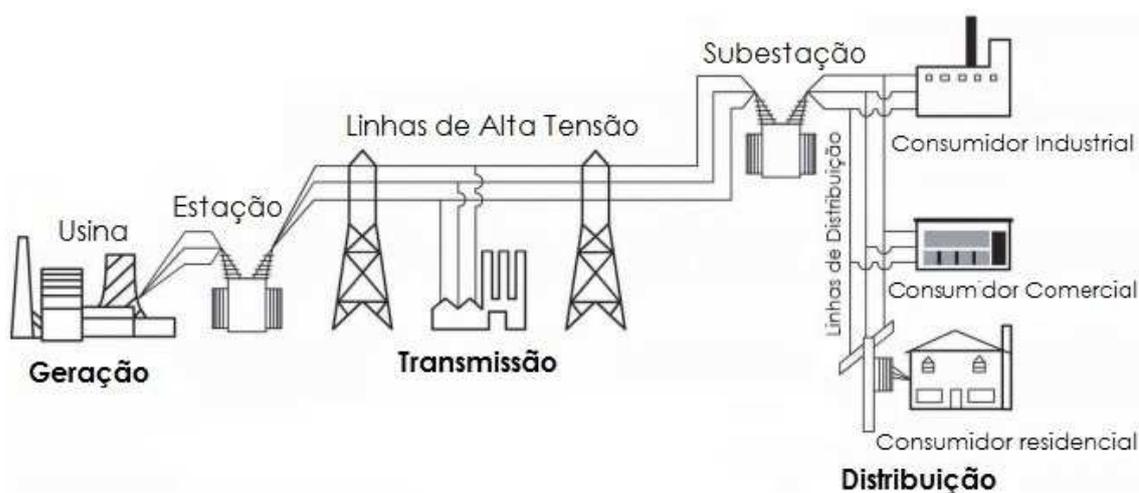
Fonte: istockphoto (2023)

O sistema neural, ou sistema nervoso central, encontrado dentro da concavidade craniana, é definido como um dos sistemas complexos encontrados na área de estudos

sobre anatomia humana. O tecido nervoso que envolve esse sistema é compreendido em dois tipos celulares, os neurônios e as células da glia. Os neurônios são células altamente excitáveis que comunicam-se entre si e sua função mais básica consiste em receber, processar e enviar informações. É através do processo chamado sinapse que os neurônios com suas terminações, entram em contato com outros neurônios, passando, desta forma, as informações. Neste sistema os neurônios são representados pelos vértices e as sinapses por arestas que relacionam o neurônio a outro.

Exemplo 3.0.2. *Podemos também citar o sistema de distribuição de energia elétrica que começa na fonte de energia que pode ser uma usina hidroelétrica ou termoeletrica, entre outras, até as residências ou indústrias.*

Figura 20 – Visão geral de um Sistema de Geração, Transmissão e Distribuição de Energia Elétrica.



Fonte: UFPR: [SILVA, R.](#) TRILHAMENTO ELÉTRICO SOBRE MATERIAIS POLIMÉRICOS PELA ANÁLISE DA ENERGIA, p. 1 a 20 (2007)

Como o esquema aqui exposto pela Figura 20, podemos ver que a distribuição de energia elétrica pode ser considerada como uma rede complexa. A rede de Distribuição de Energia Elétrica é subdividida em três grandes blocos, que começa pela Geração, etapa que converte algum tipo de fonte de energia em energia elétrica como seu produto final. A transmissão é a responsável pelo transporte de energia dos pontos de produção para os de consumo. E por fim, a etapa de Distribuição, que transmite a energia que vem da etapa de transmissão e é repassada aos grandes, médios e pequenos consumidores. Para compreendermos melhor, a função desta rede tem por objetivo o fornecimento de energia elétrica para o consumidor, portanto esta precisa ser esquematizada de tal forma, que a energia durante o trajeto não seja mal dimensionada e conseqüentemente desperdiçada ao meio. Nesta rede, cada unidade de cada bloco é representado por um vértice e os cabos que os conecta são as arestas.

Exemplo 3.0.3. Rede de rodovias do estado do Tocantins.

Abaixo, na Figura 21, o mapa do estado com todos os seus municípios e estradas que os conectam. Os vértices são as cidades e as estradas que conectam as cidades por arestas.

Figura 21 – Rodovias do Tocantins



Fonte: brasil-turismo (2008)

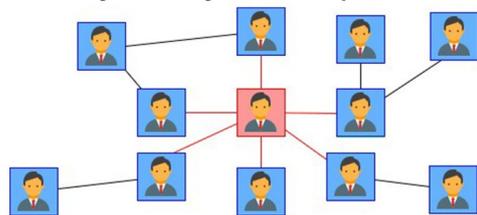
Exemplo 3.0.4. Os laços de amizade, familiares e profissionais tornam a nossa sociedade uma rede complexa.

Podemos citar, como caso particular, o uso de rede social nas pesquisas sobre COVID-19. No período pandêmico vividos em todo o mundo desde 2020, muitos pesqui-

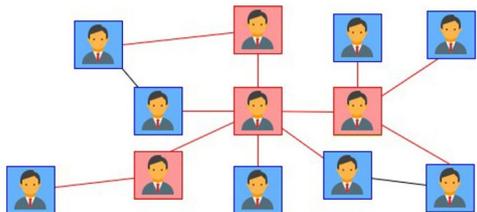
Figura 22 – COVID-19

(a) Sistema de simulação da infecção do COVID-19

A simulação começa com uma pessoa infectada



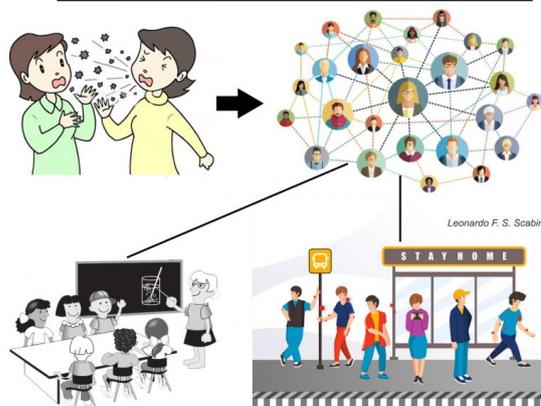
... e então se propaga através das conexões, com diferentes chances de contágio



Leonardo F. S. Scabini

(b) Contato social

A rede representa a sociedade e os vários tipos de contato social que podem levar ao contágio



Leonardo F. S. Scabini

Por exemplo escolas, transporte público, igrejas, e mesmo o dia-a-dia dentro de casa

Fonte: ciis.fmrp.usp (2021)

sadores modelaram através de ferramentas matemáticas as relações entre os indivíduos e seus impactos para o espalhamento desta doença. Por serem bem definidos os vértices (pessoas) desse sistema, foi possível demonstrar como o desenvolvimento da covid tomou essa proporção, atingindo grande parcela da população brasileira. Nas Figuras 22a e 22b que possuem pequenos esquemas que demonstram como foi pensado este sistema de infecções.

Definição 3.0.1. As *Redes Estáticas* são redes que não possuem variações em seu número vértices e nem as arestas, pelo menos em um determinado período de tempo.

Exemplo 3.0.5. Voltando ao exemplo 3.0.3 das rodovias do Tocantins, as cidades são representadas por vértices, e as estradas que ligam um vértice a outro são as arestas. Observando esta rede por uma semana, é fácil perceber que não há mudanças significativas nos vértices e nem nas arestas. Neste tipo de situação é determinado grafo estático. Em casos que se é utilizado redes estáticos as definições das ligações são encontradas com maior facilidade.

Definição 3.0.2. *Redes Dinâmicas* são redes onde ocorrem constantes alterações no número de vértices e ou no modo como esses vértices se conectam, ou seja, nas arestas. É possível analisar, através do tempo, a evolução de uma dada rede por meio de um modelo de redes dinâmica.

As relações da rede nestes casos encontra-se com maiores graus de complexidade.

Exemplo 3.0.6. *Exemplo que podemos citar são as redes sociais, onde existe uma variação das relações entre as pessoas em períodos de tempo muito pequeno, assim como mostra o esquema do exemplo 3.0.4 da COVID-19.*

Rodrigues (2007, p.14) acredita ser importante destacar que “[...]embora existam semelhanças, a teoria das redes complexas difere da teoria dos grafos em três aspectos básicos:”

(i) ela está relacionada com a modelagem de redes reais, por meio de análise de dados empíricos; (ii) as redes estudadas não são estáticas, mas evoluem no tempo, modificando sua estrutura; (iii) as redes, muitas vezes, não são consideradas apenas objetos topológicos, mas constituem estruturas onde processos dinâmicos (como a propagação de doenças e opiniões) podem ser simulados. (RODRIGUES, 2007, p.14)

Dentro da perspectiva do dinamismo, fica evidente que as redes reais são dinâmicas, porém existe a possibilidade de serem analisadas como estáticas dentro de um intervalo de tempo em que as variações ocorridas são quase nulas ou pouco importantes.

3.1 Definições Básicas

Outro fato interessante de ser visto sobre os grafos é que este pode ou não ser direcionado, como explica:

Além disso, o grafo pode ser direcionado ou não. Em um grafo direcionado (dígrafo), cada aresta tem um sentido (direção) que conecta um vértice origem à um vértice destino. Exemplos de dígrafos são aqueles usados para representar chamadas telefônicas e mensagens de e-mails, nos quais as mensagens são direcionadas de uma pessoa para outra. □

(METZ, CALVO, SENO e LIAN, 2007, p.16)

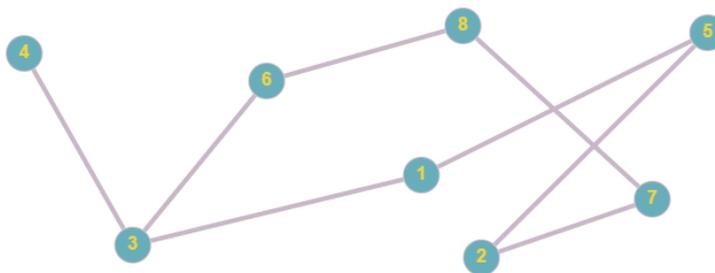
Existem dois tipos de relacionamentos/ligações, os simétricos e os assimétricos.

Definição 3.1.1. *O chamado **Relacionamentos Simétricos**, são arestas não direcionadas na qual a distinção entre o par de vértices v_i e v_j não existe, ou seja, v_i está relacionando com v_j , assim como v_j está com v_i , $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$.*

Exemplo 3.1.1. *Alguns exemplos que podemos citar é o esquema das relações de amizade que existem interesses em comum. Este relacionamento simétrico faz referência a grafos simples e redes não dirigidas. Na Figura 23 do esquema das relações de amizade entre um grupo de pessoas representado pelos $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ e v_8 , e suas relações de amizade pelas arestas que conecta os vértices.*

Definição 3.1.2. *Por outro lado os relacionamentos assimétricos, arestas direcionadas, são aqueles que o objeto v_i está em relacionada com v_j , porém não implica que v_j está se relacionando com v_i .*

Figura 23 – Contatos de amizade entre sujeitos de um grupo

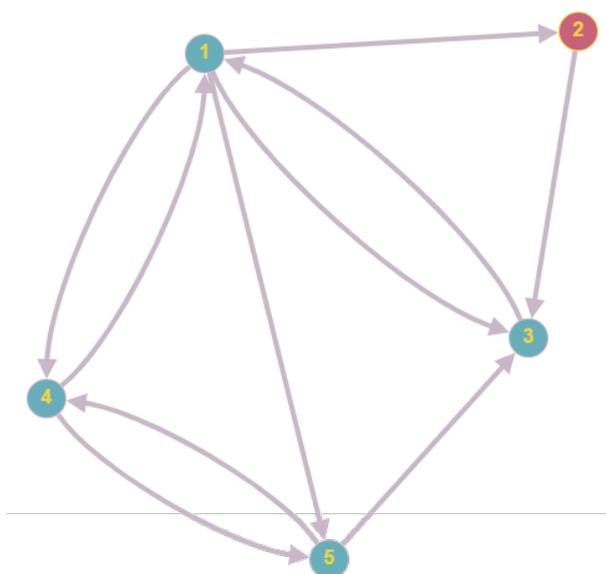


Fonte: Autoral (2023)

Alguns exemplos de relacionamentos assimétricos podem ser citados como perfis de contas do aplicativo Instagram, onde "seguir" e "ser seguido" não são equivalentes, assim como envio de e-mails, entre outros. Este relacionamento assimétrico faz referência a grafos dirigidos, e conseqüentemente a redes dirigidas.

Exemplo 3.1.2. No esquema da Figura 24 temos cinco vértices que representam perfis de uma determinada rede social, pode-se observar que o vértice v_1 segue os perfis dos vértices v_2, v_3, v_4 e v_6 , mas apenas o v_3 e o v_4 o seguem de volta. Este fato é também verdadeiro para os demais vértices.

Figura 24 – Relacionamento assimétrico



Fonte: Autoral (2023)

Uma forma de representar uma rede complexa é através de uma matriz, chamada matriz de adjacências. Ela nos dá a possibilidade de codificar o conjunto de arestas de uma rede conhecida, sendo denotada neste trabalho por B .

Definição 3.1.3. Dada uma rede complexa representada por um não direcionado Grafo G , podemos representar G pela Matriz de Adjacência B , onde cada entrada B_{ij} da matriz B representa a conexão dos vértices v_i e v_j . Ou seja,

$$B(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i v_j) \in A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.1)$$

Exemplo 3.1.3. Para os relacionamentos simétricos a matriz de adjacência [3.2](#) do exemplo [3.1.2](#) é uma matriz simétrica.

$$B(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Exemplo 3.1.4. Já a matriz de adjacência do exemplo [3.1.2](#) representante da esquema das relações assimétricas, é dada por [3.3](#). Essa matriz não é simétrica.

$$B(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

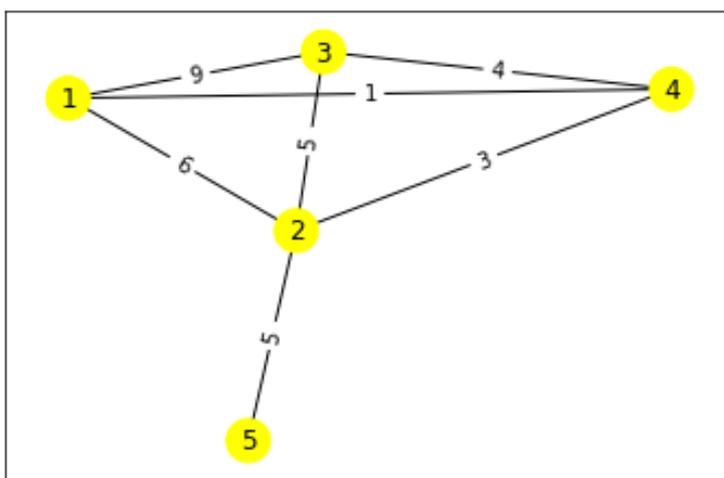
Em redes que os relacionamentos entre os vértices possuem intensidade, ou seja, a intensidade da conexão entre um vértice v_i e v_j é maior ou menor que a intensidade da conexão do vértice v_i com o v_k , devemos inserir um novo conjunto na composição de um grafo, o conjunto W de pesos.

Definição 3.1.4. Uma **Rede com Peso R** é representada adicionando um terceiro conjunto $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ de modo que w_i representa o peso de uma aresta $a \in A(R)$. Assim $R = (V, A, W)$.

Exemplo 3.1.5. Considere uma rede de trocas de e-mails em um pequeno grupo de cinco pessoas. Onde estes e-mails representa uma intensidade de trocas de informação entre os agentes participantes deste grupo. Esta situação pode ser representada por uma rede com peso, (veja a Figura [25](#)) as pessoas estarão representadas pelos respectivo conjunto

de vértices $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Assim como a relação entre os vértices pelo conjunto $A(G) = \{v_1v_3, v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4\}$. Já a intensidade de trocas de e-mail pelo conjunto dos pesos $W(G) = \{w_{13}, w_{12}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, w_{25}, w_{34}\}$. Observamos que os vértices v_1 e v_2 possui peso nove, a maior intensidade da rede, ou seja, existe uma maior troca de e-mails entre estas duas pessoas. Por outro lado a menor troca de e-mails ocorre entre os vértices v_1 e v_4 .

Figura 25 – Redes com peso



Autoral (2023)

A matriz de adjacência do grafo G com peso do exemplo 3.1.5 é representada por 3.4

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 9 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Rodrigues (2007) comenta sobre as redes:

Deste modo, o tipo de rede mais geral é aquela cujas ligações são dirigidas e possuem uma intensidade associada [dFCRTB07]. A partir deste tipo de rede mais geral, é possível obter as demais configurações, através de operações de limiarização, para obtenção de redes sem peso, e simetrização, para a obtenção de redes não-dirigidas. (RODRIGUES, 2007,

p.14)

Dada uma rede geral, no qual a mesma possui peso existe um processo chamado **limiarização**, que consiste em tirar os pesos das arestas da rede, esse processo pode ser feito quando a informação de peso não for relevante para a análise da rede.

Definição 3.1.5. Considere a rede com peso representada pelo grafo $G = (V, A, W)$ e sua matriz de adjacência $B(G)$. O processo de **Limiarização** consiste em transformar a matriz B em B_L que representa um grafo sem peso da seguinte forma, estabelecido um limiar L , tem-se que:

$$B_L(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } w_{ij} \geq L \\ 0 & \text{se } w_{ij} < L \end{cases}$$

$$B = L(W) \tag{3.5}$$

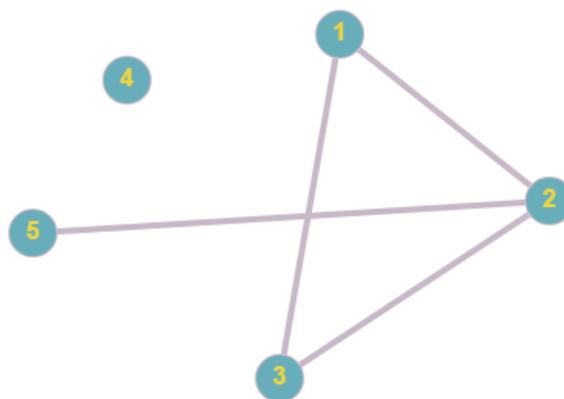
Exemplo 3.1.6. Considerando a matriz de adjacências B do exemplo 3.1.5, e o limiar $L=4$, após o processo de limiarização obtemos a matriz dada por.

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Observe que B_L é a matriz de adjacências do grafo sem peso.

Ao realizar tal processo, estaremos retirando arestas cujo peso seja menor do que um limiar definido atribuindo o valor zero, para aquelas arestas que possuem peso maior que o limiar definido é associado o peso unitário.

Figura 26 – Limiarização do Grafo exemplo 3.1.6



Autoral (2023)

Já no processo de **simetrização**, ele atuará em redes que possuem arestas dirigidas, transformando elas em não-dirigidas.

Definição 3.1.6. Considere a rede representada pelo grafo $G = (V, A)$ e sua matriz de adjacência $B(G)$. A **Simétrização** γ consiste em somar a matriz B com sua transposta

$(B)^T$. Observe que após o processo de simétrização cada entrada (i, j) da matriz $\gamma(B)$ indica a soma dos pesos das arestas $v_i v_j$ e $v_j v_i$.

$$\gamma(B) = (B + B^T) \tag{3.7}$$

Exemplo 3.1.7. Considere o grafo do exemplo [3.1.2](#), aplicando o processo de simétrização em sua matriz de adjacências obtemos

$$\gamma(B) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_1 \tag{3.8}$$

portanto

$$\gamma(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Os processos de simétrização e de limiarização transformam qualquer rede direcionada e com peso em uma rede não direcionada e sem peso.

3.2 Topologia de Redes Complexas

Assim como apresentado por Recuero (2017) dentro da perspectiva dos estudos sobre redes sociais, redes é uma representação metafórica das estruturas sociais que se fazem presentes. O conhecimento das topologias de Redes complexas, se estabelece de modo que seja possível fazer análises e agrupamentos dos agentes a partir de sua estrutura.

Em uma rede social os vértices representam perfis de usuarios desta rede, e as arestas dependem se determinado usuario segue algum perfil ou é seguido por outros usuarios. Deste modo o grafo que representa esta rede, a princípio deve ser um grafo direcionado.

Recuero (2017) cita o memorando escrito por Paul Baran (1964) no qual ele discorre que as Redes Sociais possuem três topologias básicas que são elas: distribuída, centralizada e descentralizada. Baran utiliza essas topologias em aplicações de Redes de comunicação levando em consideração a eficácia da rede de acordo com a sua estrutura. Recuero (2017) também cita outro influente pesquisador das redes topológicas sociais, Franco (2008), o

qual faz uso das estruturas topológicas para as redes sociais fazendo um estudo analítico sobre essas estruturas tornando possível a discussão sobre a capacidade de alteração dos fluxos de comunicação dessas redes.

3.2.1 Redes Regulares

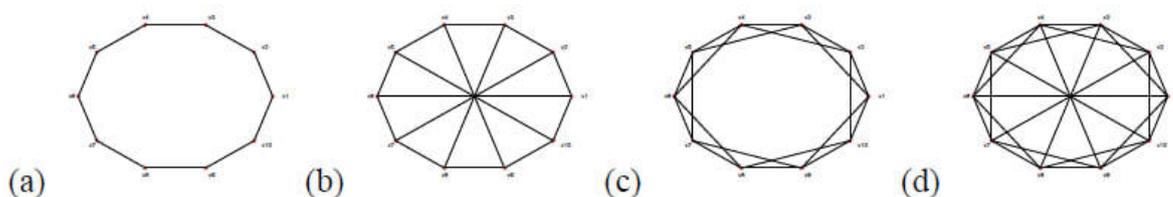
O modelo de rede regular é o mais simples. O mesmo é utilizado como base para a evolução de modelos mais elaborados. Esse tipo de rede é representado por um grafo regular, veja a definição 2.3.4, ou seja, neste modelo todos vértices possuem o mesmo grau.

Um exemplo de rede social regular seria um grupo de whatsapp com cada participante do grupo sendo representado por um vértice, e o fato de uma pessoa participar do grupo estabelece uma ligação direta (aresta) com os demais. Desta forma o grau de todos os vértices são iguais.

Um exemplo de redes e o caso de grupos de whatsapp o grafo é completo, porém isso não é necessário para que uma rede seja regular. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 3.2.1. Considere o modelo de rede regular com dez vértices. O grau k assumem os valores $k=2$, $k=3$, $k=4$ e $k=5$ conforme mostra a Figura 27 (a), (b), (c) e (d).

Figura 27 – Redes Regulares



Fonte: FERREIRA, MACAU - Worcap(2012)

3.2.2 Modelo de Redes Aleatórias

Paul Erdos e Alfred Rényi, dois matemáticos húngaros, em 1959 publicaram em seu artigo sugerindo considerar grafos como objetos que deveriam ser analisados de forma aleatória. Assim propuseram seu modelo de Rede Aleatórias.

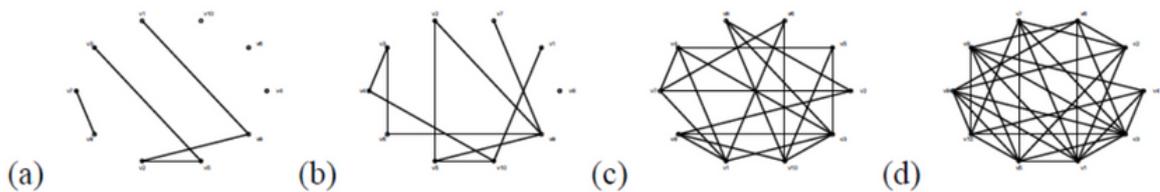
Os trabalhos de Erdős e Rényi são citados em diversas pesquisas de matemáticos da área de estudo das redes como Buchanan (2002), Watts e Strogatz (1998) e Barabási, (2003) de forma que lhes foram atribuídos o título de criadores do modelo de Redes Aleatórias. As arestas neste modelo são adicionadas de modo aleatório entre um número fixo de N vértices, sendo elas não direcionadas.

O referido grafo é construído iniciando-se com um conjunto de N vértices totalmente desconectados e a cada passo dois vértices são escolhidos aleatoriamente e conectados com uma probabilidade fixa ρ , sendo cada par de vértices considerado apenas uma vez. Assim sendo, todas as ligações possuem a mesma probabilidade de ocorrerem, ou seja, a rede gerada tem uma estrutura altamente homogênea. (RODRIGUES, 2007, p.17).

Neste modelo de N vértices M arestas, M assume aleatoriamente valores dentro de um conjunto finito. Pois um maior número de arestas que um grafo com N vértices pode ter é $N(N - 1)$, no caso de grafos direcionados, e $\frac{N(N-1)}{2}$ para grafos não direcionados. Uma vez que o maior grau que o vértice pode ter é $2(N - 1)$ no caso de grafos direcionados e $(N-1)$ no caso de grafos não direcionados. Assim $0 \leq M \leq \frac{N(N-1)}{2}$.

Exemplo 3.2.2. Considere o modelo de rede aleatórias de Erdos e Renyi com dez vértices. Alterando a quantidade de arestas da rede, assumindo $m=5$, $m=10$, $m=20$ e $m=30$ conforme mostra a Figura 28 (a), (b), (c) e (d).

Figura 28 – Redes aleatórias regular, alterando as arestas m



Fonte: FERREIRA, MACAU - Worcap(2012)

Os grafos da Figura 28 acima, inicia-se totalmente desconectados, e em intervalos de tempos dois vértices são escolhidos aleatoriamente.

Erdos e Rényi puderam concluir com esse modelo que todos os vértices de uma determinada rede tem aproximadamente o mesmo número de conexões, e possuem também as mesmas chances de se conectarem com outros vértices da rede.

Como o principal interesse para os dois matemáticos era apenas a riqueza matemática que às redes aleatórias traziam, seu artigo mencionava apenas a evolução dos grafos, considerado como modelo simplificado de redes de comunicação, como estradas e ferrovias. Por este motivo, os trabalhos seguintes publicados na área de pesquisa consideravam apenas às propriedades matemáticas deste modelo, contudo o modelo suscitou questões envolvendo a estrutura de conexões em redes reais.

3.2.3 Modelo Small World (mundo pequeno)

A teoria do mundo pequeno foi o primeiro estudo que permitiu que a ciências de redes desse o primeiro passo para que ocorresse o desenvolvimento das pesquisas de redes reais. Foi em 1998 que Duncan Watts e Steven Strogatz, pesquisadores da Universidade

de Columbia e Cornell respectivamente, notaram que determinadas redes reais, “[...]tais como a rede de neurônios do *Caenorhabditis elegans* e a rede de distribuição de energia dos Estados Unidos; havia presença de loops (caminhos fechados) de ordem três, muito maior do que nas redes aleatórias com mesmo número de vértices e arestas.” (RODRIGUES, 2007, p.18).

Dentro dessa perspectiva:

Baseados nesta descoberta, Watts e Strogatz sugeriram um modelo alternativo aos grafos aleatórios, chamado modelo *small world* de Watts-Strogatz (em analogia ao fenômeno descoberto por Stanley Milgram), que apresenta o efeito *small world* e a presença de um grande número de loops de ordem três. Neste modelo, eles assumem que as redes presentes na natureza não são completamente regulares e nem mesmo aleatórias, todavia se situam entre esses dois extremos. (RODRIGUES, 2007, p.18)

A teoria do mundo pequeno é um estudo no qual é levantada como hipótese a ideia de que cada indivíduo do planeta está a apenas seis graus de separação de qualquer outra pessoa. Esta hipótese, segundo Recuero (2009), foi levantada por Ithiel de Sola Pool e Manfred Kochen (1978) que, apesar de ter sido tardiamente publicado este trabalho, circulou por muito tempo em comunidades científicas, contendo como principal objetivo a busca por extrair padrões e levantar questionamentos sobre redes sociais e também os problemas de “mundos pequenos”.

O problema dos mundos pequenos foi retirado diretamente da percepção popular e anedótica de que vivemos em um mundo onde todos “se conhecem”, ou estão diretamente conectados entre si. Refere-se, assim, de forma direta ao dito popular “Mas que mundo pequeno!”. (RECUERO, 2009 p.60)

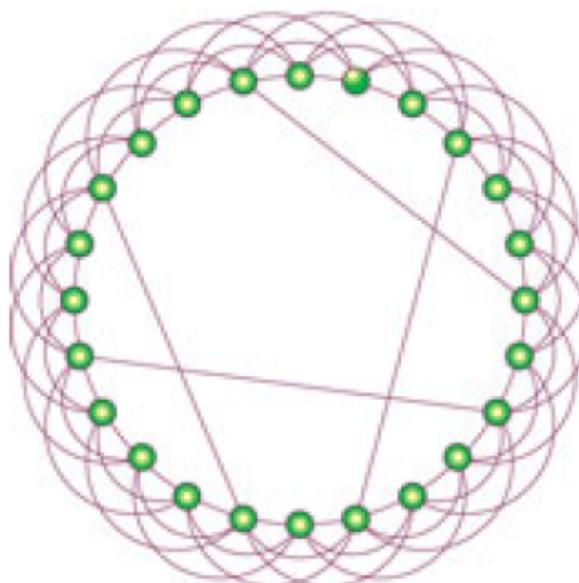
O primeiro a realizar um experimento fazendo observações com as redes sociais foi o sociólogo Stanley Milgram (1956), com a indagação de que todas as pessoas estariam interligadas umas às outras em algum nível.

Milgram utilizou o experimento realizado para observar os graus de separação entre as pessoas. O método explorado por ele para a realização deste experimento, foi o de enviar uma quantidade determinada de cartas para vários indivíduos de forma aleatória. Ou seja, as tais cartas continham somente o nome dos indivíduos destinados, não contendo nelas os endereços dos destinatários. Foi solicitado para aqueles que recebessem as cartas, para que tentassem enviá-las para pessoas que eles achassem que conhecessem os devidos destinatários, ou pessoas que acreditassem que estivessem mais próximas deles. A descoberta de Milgram (1956) com este experimento foi a de que as cartas que chegaram aos seus destinatários passando pelas mãos de um pequeno número de pessoas antes de chegar até o destinatário. O que para ele afirmaria que as pessoas estariam a alguns graus de separação uma das outras, e que ali se formava uma pequena cadeia de conexões entre duas pessoas quaisquer. Milgram então confirmou a hipótese através de diversos experimentos que realmente vivemos em um “mundo pequeno”.

O efeito pequeno-mundo é observado nas redes em que a maioria dos vértices se conecta a outros através de um caminho mínimo. O caminho mínimo, também chamado de caminho geodésico ou distância geodésica, é aquele formado pelo menor número de arestas que conectam um vértice à origem e um vértice destino. (METZ, CALVO, SENO e LION, p.7,2007)

Watts e Strogatz (1998) propuseram um modelo semelhante ao dos matemáticos Erdos e Rényi (1959), onde identificou que a maioria das conexões acontecem entre os vértices mais próximos. Este modelo é construído utilizando um processo chamado de interpolação, que acontece entre uma rede definida como regular e uma aleatória. Podendo esse modelo de rede ser atualmente agrupado, assim como possuir característica de caminho médio pequeno como nas redes aleatórias, na Figura 29 temos a topologia.

Figura 29 – Rede complexa pequeno-mundo



Fonte: (Strogatz, 2001)

O modelo *Small World*, começa como uma rede regular sendo altamente conectada, formado por N vértices. Aos poucos são adicionadas aleatoriamente as arestas, conectando-se a um número k de vizinhos próximos.

Segundo o que Rodrigues (2007, p.19) relata que "O trabalho de Watts e Strogatz formalizou um antigo problema de sociologia proposto por Mark Granovetter em 1973 [Gra73], que estudou as relações entre pessoas na sociedade e mostrou que as ligações mais fracas de amizade são extremamente importantes", dentro do modelo de mundo pequeno.

O sociólogo Mark Granovetter (1973) foi outro importante pesquisador das redes sociais que trouxe grandes contribuições para os estudos de estruturação das redes. Em sua análise o que mais lhe chamou atenção foi o fato de que as interações mais pontuais

e superficiais ocorreram com pessoas conhecidas ou amigos de conhecidos. Ou seja, não necessariamente os atores que estavam em interação eram conhecidos diretamente em seu ciclo social. Estas interações foram chamadas por Granovetter de “Laços fracos” da rede no qual as consideravam mais importantes do que os ditos “Laços fortes”, que por sua vez se constituíam de relações de amizade e intimidade que geralmente participavam de um mesmo círculo social.

Tal conclusão foi obtida quando Granovetter entrevistou dezenas de trabalhadores e perguntou a estes quem os tinha ajudado a encontrar um emprego. Na maioria dos casos (27,8% dos casos), a informação sobre tal emprego vinha de conhecidos, ao invés de amigos íntimos (16,7 % dos casos). Isto ocorre porque os amigos íntimos tendem a compartilhar as mesmas informações [Gra95]. (RODRIGUES, 2007, p.20)

Os laços fracos de uma rede se fazem considerável, pois possibilita conexões entre vários grupos sociais, sem sua existência os vários clusters existiriam como ilhas isoladas e não como rede. Podemos citar como exemplo, a situação com alguns usuários de uma determinada rede social, em que o ator x que mora em Manaus-AM, possui um laço fraco de amizade com um autor y morador de Salvador-BA, que por sua vez tem um laço forte com z que é morador do Rio Grande do Sul. Apesar do fato de x e y não se conhecerem, e possuírem um laço fraco, ele conectará o seu círculo social ao ator x e z e vice e versa. Podemos desta forma chegar a conclusão de que x e z possuem muito mais chances de algum dia virem a se conhecer, do que conhecerem um outro ator e morador de Gurupi-TO que não possuem nenhum laço em comum.

Podemos perceber que no funcionamento das redes sociais está contido ali uma espécie de padrão altamente conectado, que faz com que a experiência com elas exista algum tipo de ordem.

3.2.4 Redes Livres de Escala

Outra topologia bastante conhecida e que contribuiu para o estudo de topologias de redes, é a do tipo livre de escala, sendo ela caracterizada por dois pesquisadores da Universidade do Notre Dame, Estados Unidos. No ano de 1999 Albert-László Barabási e Reka Albert, verificaram que existiam dois aspectos que são vistos em redes reais, mas que não são encontrados em modelos de redes aleatórias e em redes pequeno do mundo.

Segundo (Ferreira e Macau (2012)), a primeira característica verificada em modelos de redes já citados neste trabalho, assumem serem iniciados com um número N fixo de vértices, sendo conectados de forma aleatória em uma probabilidade ρ , dando a ela uma aleatoriedade uniforme. Por outro lado, essa característica não é encontrada na maioria das redes reais, essa conectividade apresenta-se como preferenciais para alguns vértices. Nas redes do mundo real é observado que o conjunto dos vértices possuem a característica

de serem abertos, ocorrendo adições contínuas do mesmo, o que pode se concluir que N aumenta durante todo o período de vida da rede.

A Partir das constatações que Barabasi e Albert tiveram na análise dos modelos, decidiram então verificar se a característica do fenômeno mundo pequeno (small world) estava presente na teia mundial (World Wide Web). Relata Rodrigues (2007, p.21) "Através do uso de um web crawler, eles mapearam a topologia das conexões entre as páginas da Teia Mundial e descobriram que além dela apresentar o fenômeno small world (≈ 11), a distribuição de conexões não é aleatória[...]" A distribuição das conexões foi chamada de Livre de Escala (Scale-Free).

A partir dessas descobertas, verificou-se que diversas redes apresentam distribuição de conexões do tipo livre de escala e, portanto, o universo aleatório de Erdős e Rényi tende a não estar presente na natureza. Assim, o trabalho de Watts e Strogatz sugeriu a primeira limitação do modelo de Erdős e Rényi, que foi a ausência de ciclos de ordem três, embora tenha mantido o caráter aleatório. (RODRIGUES, 20007, p.21.)

Descartada a possibilidade de uma rede real ser totalmente aleatória Barabási e Albert (1999), mostrou que há a existência de leis que regem a estrutura das redes reais. Com isto, "Inspirados por essas descobertas, Barabási e Albert propuseram um modelo de crescimento, que gera redes livres de escala, que é baseado em dois passos." (RODRIGUES, 2007, p.22).

1. *Crescimento: Este primeiro passo, a princípio possui um pequeno conjunto de vértices N_0 , e a cada passo tempo estabelecido, é adicionado um vértice m ($m \leq N_0$) a arestas que já conectados com vértices presentes na rede.*
2. *Ligação preferencial: A ligação tende a ser estabelecida conforme a conectividade dos vértices existentes na rede, a probabilidade de um novo vértice adicionado, conectar-se a um vértice j da rede será maior, se o mesmo já possuir uma alta conectividade.*

É possível identificar que algumas redes apontam para uma ordem na dinâmica de sua estrutura, possuindo características bem específicas assim como citadas acima. A principal delas denominada conexão preferencial, que implica em redes com poucos vértices altamente conectados, paradigma conhecido como "o rico fica mais rico", sendo eles denominados de Hubs, e muitos vértices com poucas conexões de acordo com Metz, Calvo, Seno e Lian (2007)

4 ALGUMAS MEDIDAS ESTRUTURAIS DE REDES COMPLEXAS

Este capítulo apresenta algumas medidas estruturais mais usuais da análise de redes complexas, estas medidas foram aplicadas em uma situação hipotética simples, exemplo [4.1.1](#), onde todos os cálculos foram feitos sem auxílio computacional, portanto os dados encontrados são de fácil visualização. Contudo em situações reais o uso e análise dessas medidas necessitam de recursos de programação computacional.

O artigo de Ferreira e Macau (2012) e a tese de Rodrigues (2007) forma base para a construção deste Capítulo.

Um aspecto considerável no estudo da estrutura das redes é a caracterização, ela pode nos fornecer relevantes informações. Sendo fundamental não somente para a descrição da estrutura das ligações entre os elementos, mas também para a compreensão dos mecanismos evolutivos que governam o crescimento da rede. Figueiredo (p.4, 2011) destaca que “Caracterizar a estrutura de uma rede significa enumerar diversos aspectos que capturem e resumem a estrutura da rede”.

Um exemplo da importância da compreensão da estrutura que pode ser citado, é o da disseminação de doenças, como citado no exemplo [3.0.4](#) “Em epidemiologia, o conhecimento da estrutura das ligações entre as pessoas, como os laços de amizade, é fundamental para se entender como as epidemias se espalharam para determinar meios eficazes de imunização (Rodrigues, p.30, 2007). Outro exemplo é o sistema viral para curar determinadas doenças, sendo de fundamental importância que se tenha a compreensão da estrutura das ligações entre os componentes celulares, e de qual o seu impacto, pois o conhecimento individual dos componentes não é suficiente para entender a dinâmica celular. Pois, as células têm uma complexa rede reguladora que controla desde o metabolismo até a morte celular.

Para a caracterização da estrutura das ligações de uma rede complexa, têm sido desenvolvidas diversas medidas capazes de quantificá-las. Ocorre através do desenvolvimento do cálculo de medidas de análise, na qual as redes podem ser analisadas, caracterizadas, classificadas e modeladas.

Esse processo de caracterização, comparação, classificação e modelagem de redes complexas é de suma importância o conhecimento das medidas e sua utilidade. Apresentaremos algumas das principais medidas utilizadas na caracterização de redes, considerando apenas redes conexas, não direcionadas e sem peso.

4.1 Conectividade

A primeira medida utilizada para caracterizar uma rede é a *conectividade* de cada vértice. A conectividade de cada vértice nada mais é que o grau do vértice, ou seja, a Conectividade k_i , de um vértice v_i , $i \in \{1, 2, \dots, n, \}$ é encontrado através do somatória do número de arestas que incidem no vértice v_i .

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (4.1)$$

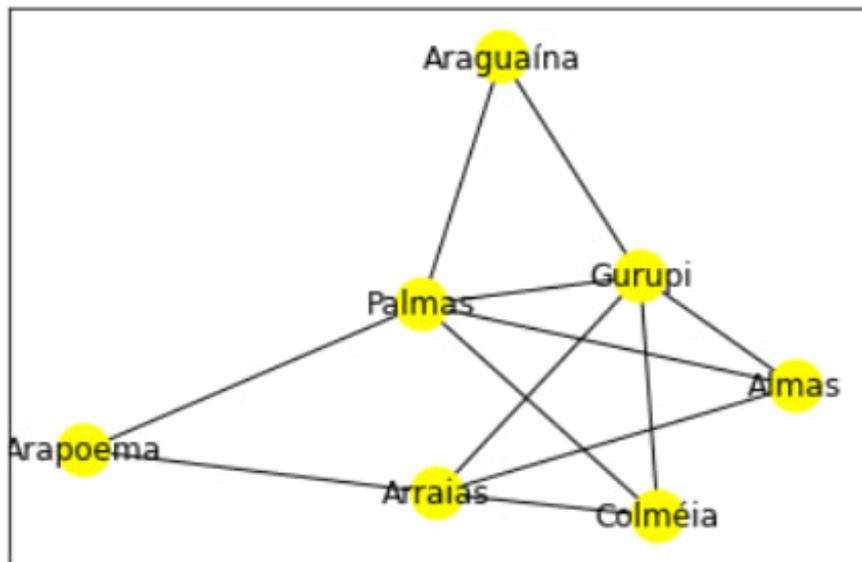
Uma informação importante seria calcular a conectividade média de uma rede.

Definição 4.1.1. A *Conectividade Média* K é dada pela equação.

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \quad (4.2)$$

Exemplo 4.1.1. Alguns fatores devem ser levados em consideração para que uma viagem de avião aconteça, e um deles é a organização da malha aérea. Na Figura 30, apresentamos uma situação simulada da malha aérea entre sete aeroportos, 1-Arraias, 2-Palmas, 3-Gurupi, 4-Arapoema, 5-Colméia 6-Araguaína e 7-Almas. Estes aeroportos na rede são representadas pelos vértices. As conexões entre os aeroportos são as arestas.

Figura 30 – Rede Complexa Grau de Conectividade



Fonte: Autoral (2023)

Para a rede representada acima pela Figura 30, temos a matriz de adjacências 4.3

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Pela definição do grau de conectividade k_i , temos:

$$k_{Araraias} = 4, k_{Palmas} = 5, k_{Gurupi} = 5, k_{Arapoema} = 2, k_{Colmeia} = 3, k_{Araguaina} = 2 \text{ e } k_{Almas} = 3 \quad (4.4)$$

Como já dito neste trabalho, o maior valor possível para a conectividade de um vértice é dada por $\frac{N(N-1)}{2}$. Assim o maior valor possível para a conectividade média desta malha aérea $K_{max} = 6$. Isso aconteceria se houvesse conexão direta entre todos os aeroportos.

$$K = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 k_i = \frac{4 + 5 + 5 + 2 + 3 + 2 + 3}{7} = 3,4285714286 \quad (4.5)$$

Observe que o valor de K é um pouco maior que a metade de K_{max} . Como quanto maior for o valor de K mais conectado é a rede, podemos afirmar que esta rede é relativamente bem conectada.

4.2 Medidas Relacionadas a Ciclos

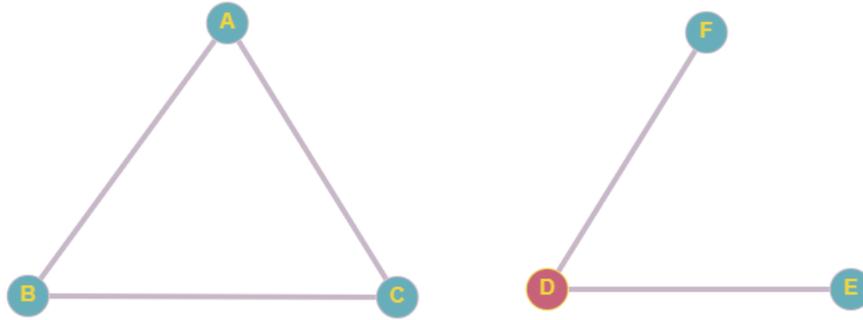
Foi observado por pesquisadores no desenvolvimento de topologias a ocorrência de subgrafos formados por três vértices totalmente conectados, aqui chamados de triângulos.

Para caracterizar a presença desses subgrafos de ordem três, existem duas maneiras diferentes para calcular o coeficiente de agrupamento que são utilizados com mais assiduidade. O primeiro é conhecido como *transitividade ou coeficiente de agrupamento* este vai quantificar a ocorrência de triângulos em uma rede.

Para um melhor entendimento do coeficiente alguns notações são convenientes. A notação N_{Δ} representa o número de triângulos na rede, e N_3 é o número de conectividade tripla de cada vértice.

Exemplo 4.2.1. Na Figura [31](#) temos o triângulo A, B e C , fixado cada vértice como central é obtido as três seguintes triplas: (A, B, C) , (B, A, C) e (A, C, B) . As conectividades triplas também são consideradas em casos que um vértice está conectado a outros dois.

Figura 31 – Triângulo A, B, e C. Conectividade tripla de D



Fonte: Autoral (2023)

No exemplo temos D, E e F, fixo D está conectado com E e F, obtendo uma conectividade tripla.

Observe que $N_3 \geq 3N_\Delta$, pois para cada triângulo existem três conectividades triplas e podem existir conectividades triplas que não são triângulos.

Definição 4.2.1. A *Transitividade* é dada por:

$$T = \frac{3N_\Delta}{N_3} \tag{4.6}$$

A transitividade se dará pela multiplicação de três vezes o número de triângulos, dividido pelo número total de triplas de vértices. Ou seja, $0 \leq T \leq 1$.

Exemplo 4.2.2. Como o esquema exemplo 4.1.1 da rede de malha aérea dada pela Figura 30 possui triângulos, o cálculo da transitividade dessa rede será dada pela equação:

Observe que os triângulos da malha são: (1, 3, 7), (1, 3, 5), (5, 2, 3)(2, 3, 7), (2, 3, 6). E o conjunto das triplas: (4, 2, 5), (4, 2, 7), (4, 2, 3), (4, 2, 6), (5, 2, 7), (5, 2, 3), (5, 2, 6), (7, 2, 3), (7, 2, 6), (3, 2, 6), (4, 2, 1), (4, 1, 5), (4, 1, 7), (4, 1, 3), (3, 1, 5), (3, 1, 7), (7, 1, 5), (1, 5, 3), (1, 5, 2), (2, 5, 3), (1, 7, 2), (1, 7, 3), (2, 7, 3), (7, 3, 5), (7, 3, 1), (7, 3, 2), (7, 3, 6), (5, 3, 1), (5, 3, 2), (5, 3, 6), (1, 3, 2), (1, 3, 6), (2, 3, 6), (2, 6, 3), (1, 4, 2).

Portanto, $N_\Delta = 5$ e $N_3 = 34$.

$$T = \frac{3 \times 5}{34} = 0,1470588235 \tag{4.7}$$

O número $T=0,1470588235$ representa a incidência de triângulos na malha aérea. Isso quer dizer que a possibilidade ter dois ou mais voos para ir de um aeroporto a outro é alto.

Definição 4.2.2. O Coeficiente de Agrupamento Local C_i é dado por

$$C_i = \frac{N_{\Delta}(i)}{N_3(i)} \quad (4.8)$$

$N_{\Delta}(i)$ representa o número de triângulos que um dado vértice v_i participa. E $N_3(i)$ o número de conectividade tripla com v_i como vértice central.

Em casos em que a conectividade $k_i = 0$ ou $k_i = 1$ convencionou-se que $C_i = 0$.

O coeficiente de agrupamento de um vértice v_i indica o quanto os vizinhos de v_i são conectados entre si. Assim se o coeficiente de agrupamento $C_i = 1$ seus vizinhos são todos conectados entre si, e se $C_i = 0$ não há conexões entre os vizinhos de v_i .

Uma interpretação sobre o uso do coeficiente de agrupamento é o seguinte. Se um determinado vértice tiver a conectividade alta, mas o coeficiente de agrupamento baixo, entendemos que seus vizinhos são pouco conectados.

Exemplo 4.2.3. O coeficiente de agrupamento local de cada vértice do exemplo 4.1.1, é:

$$N_{\Delta}(\text{Arraias}) = 2 \text{ e } N_3 = 6.$$

$$C_{\text{Arraias}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Arraias})}{N_3(\text{Arraias})} = \frac{2}{6} = 0,3333... \quad (4.9)$$

$$N_{\Delta}(\text{Palmas}) = 3 \text{ e } N_3 = 11.$$

$$C_{\text{Palmas}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Palmas})}{N_3(\text{Palmas})} = \frac{3}{11} = 0,2727... \quad (4.10)$$

$$N_{\Delta}(\text{Gurupi}) = 4 \text{ e } N_3 = 10.$$

$$C_{\text{Gurupi}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Gurupi})}{N_3(\text{Gurupi})} = \frac{4}{10} = 0,4. \quad (4.11)$$

$$N_{\Delta}(\text{Arapoema}) = 0 \text{ e } N_3 = 1.$$

$$C_{\text{Arapoema}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Arapoema})}{N_3(\text{Arapoema})} = \frac{0}{1} = 0 \quad (4.12)$$

$$N_{\Delta}(\text{Colmeia}) = 2 \text{ e } N_3 = 3.$$

$$C_{\text{Colmeia}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Colmeia})}{N_3(\text{Colmeia})} = \frac{2}{3} = 0,6666... \quad (4.13)$$

$$N_{\Delta}(\text{Araguaina}) = 1 \text{ e } N_3 = 1.$$

$$C_{\text{Araguaina}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Araguaina})}{N_3(\text{Araguaina})} = \frac{1}{1} = 1 \quad (4.14)$$

$$N_{\Delta}(\text{Almas}) = 2 \text{ e } N_3 = 3$$

$$C_{\text{Almas}} = \frac{N_{\Delta}(\text{Almas})}{N_3(\text{Almas})} = \frac{2}{3} = 0,6666... \quad (4.15)$$

Observamos que Arapoema possui o coeficiente de agrupamento $C_{Arapoema} = 0$, pois seus vizinhos Palmas e Arraias não estão conectados. Já Araguaína possui $C_{Araguaína} = 1$, pois seus vizinhos Palmas e Gurupi estão conectados.

Analisando o aeroporto de Palmas, observamos que, apesar de possuir conectividade alta, seu coeficiente de agrupamento C_{Palmas} é baixo, ou seja, seus vizinhos são pouco conectados.

Definição 4.2.3. Como medida de caracterização do coeficiente de agrupamento global da rede, é calculado o **Coeficiente de Agrupamento Médio** entre todos os vértices da rede.

$$C = \frac{1}{N} \sum_i C_i \quad (4.16)$$

Com isso vamos obter $0 \leq C \leq 1$.

Exemplo 4.2.4. Calculando o coeficiente de agrupamento médio global do exemplo 4.1.1, da Figura 30 é dado por:

$$C = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 C_i = \frac{0,3333 + 0,2727 + 0,4 + 0 + 0,6666 + 1 + 0,6666}{7} = \frac{3,3392}{7} = 0,4770285714 \quad (4.17)$$

Observamos que a rede da malha aérea possui coeficiente de agrupamento médio pouco menor do que 0,5. Isto é coerente com o fato de que os vértices Colméia, Almas e Araguaína possuem quase todos os seus vizinhos conectados e os outros quatro vértices, vizinhos são pouco conectados.

4.3 Medidas Relacionadas com Distância

Outra medida a se considerar na rede é a distância entre dois vértices quaisquer. Considere dois vértices v_i e v_j de uma rede.

Definição 4.3.1. A **Distância** d_{ij} entre v_i e v_j é o número de arestas do menor caminho entre esses vértices.

Exemplo 4.3.1. Podemos representar a distância entre os vértices da malha aérea do exemplo 4.1.1 pela matriz D .

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Tal que cada entrada da matriz D é a distância d_{ij} entre os vértice v_i e v_j .

Definição 4.3.2. A *Média das Distâncias* entre os vértices de uma rede, será expressado por l :

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (4.19)$$

Essa medida nos dá a informação da capacidade de tráfego de uma rede.

Exemplo 4.3.2. Somando cada linha da matriz D obtemos a soma das distâncias entre cada vértice v_i e todos os demais vértices da malha. A distância média da malha aérea do exemplo 4.1.1 é dada por:

$$l = \frac{1}{7(7-1)} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 d_{ij} = \frac{8+8+7+10+9+10+9}{42} = \frac{61}{42} = 1,45239 \quad (4.20)$$

Neste caso podemos concluir que dois vértices quaisquer estão no máximo a dois passos de distância um do outro. Supondo que a malha estivesse totalmente conectada obteríamos $l = 1$, e em casos que $l = 2$ existiria pelo menos um par de vértices com três ou mais passos de distância entre eles .

4.4 Medidas de centralidade

Para redes nas quais alguns vértices são mais importantes do que outros, as medidas de centralidades são capazes de inferir tal importância nessas estruturas. A centralidade é uma medida que vai mostrar o quanto os vértices da rede são importantes para a transmissão de informação, sendo fundamental em diferentes processos dinâmicos, definindo como essa rede complexa se comporta.

No exemplo 3.0.4 posto no Capítulo 2 deste trabalho, trouxemos o esquema da propagação do vírus da COVID-19, na qual deixou a sociedade em estado de pandemia, os vértices (pessoas) mais centrais dessa rede são aquelas que possuem um maior contato

social, que se essas pessoas se infectaram, a infecção será transmitida rapidamente para os outros vértices. Já em casos de uma rede social os vértices mais centrais são aqueles que quando recebem e conseqüentemente compartilham uma notícia, esta se propaga para os demais com uma maior rapidez.

Para que seja possível identificar a importância de um vértice ou aresta de uma dada rede complexa, vamos aqui trabalhar com a medida de *Centralidade de Intermediação ou Betweenness Centrality*. Ele identifica que quanto maior o número de caminhos em que um vértice participar, maior será sua importância e sua carga dentro dessa rede, assumindo que essas interações seguem os caminhos mais curtos entre dois vértices

Definição 4.4.1. A *Centralidade de Intermediação* B_u do vértice v_u , é dada por:

$$B_u = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, v_u, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} \quad (4.21)$$

onde $\sigma(v_i, v_u, v_j)$ é o número de menores caminhos entre v_i e v_j que passam por v_u , e $\sigma(v_i, v_j)$ é o número de menores caminhos entre os vértices (v_i, v_j) .

Observe que a centralidade de intermediação B_u evidencia a quantidade de informação que o vértice v_u recebe, não só de seus vértices vizinhos como de toda rede.

Essa medida vai nos permitir que nós definimos a centralidade, não apenas em termos de número de conexões, mas em termos de distâncias levando em consideração o quanto de informações que esse vértice recebe quando informações são transmitidas nessa rede.

Exemplo 4.4.1. A aplicação da *Centralidade de Intermediação* para o exemplo 4.1.1 da malha aérea hipotética da Figura 30 fixando cada vértice da rede, é dada por:

Na tabela 1 obtemos as informações necessárias para encontrar $B_{Arraias}$, na primeira coluna temos todas as combinações de rotas entre as cidades, menos o vértice fixado, Arraias. A segunda coluna obteve todos os menores caminhos entre duas cidades, ou seja, a menor distância, entre v_i e v_j . A terceira temos a o número de menores caminhos entre v_i e v_j que passa por Arraias.

A Partir das informações expostas pela tabela 1, encontramos que o número de menor caminho que passa por Arraias é 3, e o número total de menores caminhos entre os vértices é 22, logo:

$$B_{(Arraias)} = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Arraias, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{3}{22} = 0,136363... \quad (4.22)$$

Agora fixando a cidade de Palmas B_{Palmas} . Pela tabela 2, o número de menor caminho que passa por Palmas é 7, e o número total de menores caminhos entre os vértices é 22, logo:

$$B(Palmas) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Palmas, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{7}{22} = 0,318181... \quad (4.23)$$

Fixando a cidade de Gurupi B_{Gurupi} . Pela tabela [3](#), encontramos que o número de menor caminho que passa por Gurupi é 4, e o número total de menores caminhos entre os vértices é 24, logo:

$$B(Gurupi) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Gurupi, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{4}{24} = 0,16666... \quad (4.24)$$

Fixando o vértice Arapoema pela Tabela [4](#), logo:

$$B(Arapoema) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Arapoema, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{1}{23} = 0,043478... \quad (4.25)$$

Fixando o vértice Colméia pela Tabela [5](#), logo:

$$B(Colmeia) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Colmeia, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{1}{23} = 0,04762... \quad (4.26)$$

Fixando o vértice Araguaína pela Tabela [6](#), logo:

$$B(Araguaina) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Araguaina, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{0}{24} = 0 \quad (4.27)$$

Fixando o vértice Almas pela Tabela [7](#), logo:

$$B(Almas) = \sum_{ij} \frac{\sigma(v_i, Almas, v_j)}{\sigma(v_i, v_j)} = \frac{1}{21} = 0,0476190... \quad (4.28)$$

Com estas informações obtemos que a cidade com a centralidade de intermediação com mais relevância e da malha aérea é Palmas.

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Arraias, v_j)$
(Palmas, Gurupi)	1	0
(Palmas, Arapoema)	1	0
(Palmas, Colméia)	1	0
(Palmas, Araguaína)	1	0
(Palmas, Almas)	1	0
(Gurupi, Arapoema)	2	1
(Gurupi, Colméia)	1	0
(Gurupi, Araguaína)	1	0
(Gurupi, Almas)	1	0
(Arapoema, Colméia)	2	1
(Arapoema, Araguaína)	1	0
(Arapoema, Almas)	2	1
(Colméia, Araguaína)	2	0
(Colméia, Almas)	3	0
(Araguaína, Almas)	2	0
Total	22	3

Tabela 1 – Centralidade de Intermediação do vértice Arraias

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Palmas, v_j)$
(Arraias, Gurupi)	1	0
(Arraias, Arapoema)	1	0
(Arraias, Colméia)	1	0
(Arraias, Araguaína)	1	0
(Arrais, Almas)	1	0
(Gurupi, Arapoema)	2	1
(Gurupi, Colméia)	1	0
(Gurupi, Araguaína)	1	0
(Gurupi, Almas)	1	0
(Arapoema, Colméia)	2	1
(Arapoema, Araguaína)	1	1
(Arapoema, Almas)	2	1
(Colméia, Araguaína)	2	1
(Colméia, Almas)	3	1
(Araguaína, Almas)	2	1
Total	22	7

Tabela 2 – Centralidade de Intermediação do vértice Palmas

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Gurupi, v_j)$
(Arraias, Palmas)	4	1
(Arraias , Arapoema)	1	0
(Arraias, Colméia)	1	0
(Arraias, Araguáiana)	1	0
(Arrais, Almas)	1	0
(Palmas, Arapoema)	1	0
(Palmas, Colméia)	1	0
(Palmas, Araguaína)	1	0
(Palmas, Almas)	1	0
(Arapoema, Colméia)	2	0
(Arapoema, Araguaína)	1	0
(Arapoema, Almas)	2	0
(Colméia, Araguaína)	2	1
(Colméia, Almas)	3	1
(Araguaína, Almas)	2	1
Total	24	4

Tabela 3 – Centralidade de Intermediação do vértice Gurupi

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Arapoema, v_j)$
(Arraias, Palmas)	4	1
(Arraias , Gurupi)	1	0
(Arraias, Colméia)	1	0
(Arraias, Araguáiana)	1	0
(Arrais, Almas)	1	0
(Palmas, Gurupi)	1	0
(Palmas, Colméia)	1	0
(Palmas, Araguaína)	1	0
(Palmas, Almas)	1	0
(Gurupi, Colméia)	2	0
(Gurupi, Araguaína)	1	0
(Gurupi, Almas)	1	0
(Colméia, Araguaína)	2	0
(Colméia, Almas)	3	0
(Araguaína, Almas)	2	0
Total	23	1

Tabela 4 – Centralidade de Intermediação do vértice Arapoema

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Colmeia, v_j)$
(Arraias, Palmas)	4	1
(Arraias , Gurupi)	1	0
(Arraias, Arapoema)	1	0
(Arraias, Araguaína)	1	0
(Arrais, Almas)	1	0
(Palmas, Gurupi)	1	0
(Palmas, Arapoema)	1	0
(Palmas, Araguaína)	1	0
(Palmas, Almas)	1	0
(Gurupi, Arapoema)	2	0
(Gurupi, Araguaína)	1	0
(Gurupi, Almas)	1	0
(Arapoema, Araguaína)	1	0
(Arapoema, Almas)	2	0
(Araguaína, Almas)	2	0
Total	21	1

Tabela 5 – Centralidade de Intermediação do vértice Colméia

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Araguaína, v_j)$
(Arraias, Palmas)	4	0
(Arraias , Gurupi)	1	0
(Arraias, Arapoema)	1	0
(Arraias, Colméia)	1	0
(Arrais, Almas)	1	0
(Palmas, Gurupi)	1	0
(Palmas, Arapoema)	1	0
(Palmas, Colméia)	1	0
(Palmas, Almas)	1	0
(Gurupi, Arapoema)	2	0
(Gurupi, Colméia)	1	0
(Gurupi, Almas)	1	0
(Arapoema, Colméia)	2	0
(Arapoema, Almas)	2	0
(Colméia, Almas)	3	0
Total	24	0

Tabela 6 – Centralidade de Intermediação do vértice Araguaína

Distâncias d_{ij}	$\sigma(v_i, v_j)$	$\sigma(v_i, Almas, v_j)$
(Arraias, Palmas)	4	1
(Arraias , Gurupi)	1	0
(Arraias, Arapoema)	1	0
(Arraias, Colméia)	1	0
(Arraias, Araguaína)	1	0
(Palmas, Gurupi)	1	0
(Palmas, Arapoema)	1	0
(Palmas, Colméia)	1	0
(Palmas, Araguaína)	1	0
(Gurupi, Arapoema)	2	0
(Gurupi, Colméia)	1	0
(Gurupi, Araguaína)	1	0
(Arapoema, Colméia)	2	0
(Arapoema, Araguaína)	1	0
(Colméia, Araguaína)	2	0
Total	21	1

Tabela 7 – Centralidade de Intermediação do vértice Almas

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo como apresentado na introdução desse trabalho a motivação se deu a partir das indagações feitas por Figueiredo (2011), onde questionava sobre como as coisas se conectam e quais os impactos dessas conexões para as redes reais. Muito embora as ciências de redes complexas ainda seja um campo relativamente recente e que dialoga de maneira multidisciplinar, este ainda necessita de mais explorações para um maior aprofundamento, para novas aplicações práticas.

As medidas estruturais de caracterizações apresentadas nesse trabalho, nós fornece um breve entendimento de como podemos extrair e analisar as informações das redes, entretanto a necessidade de utilizar uma medida ou outra depende da natureza do problema a ser modelado, as vezes sendo necessario criar novas medidas.

Um aspecto importante no desenvolvimento deste trabalho diz respeito a algumas habilidades para a sua realização. Por exemplo, o aprofundamento e prática de conhecimentos adquiridos através das disciplinas cursadas ao longo da graduação. Algumas delas mais evidentes foram, metodologia de pesquisa científica a qual me permitiu entender as diferentes metodologias, compreender sua relevância e desenvolvimento, a prática deste conhecimento trouxe-me a compreensão da necessidade da disciplina e organização para os estudos. Podemos também citar o aprofundamento em tópicos como teoria dos números, lógica matemática, matemática discreta e álgebra linear. Além do aprimoramento no uso do editor de texto Latex, ferramenta esta que foi exibida pela primeira vez na disciplina de cálculo diferencial I.

A partir da escrita desta pesquisa, fez necessario um estudo mais aprofundado em em teoria dos grafos e redes complexas, estas não vistas na matriz curricular do curso de licenciatura em matematica, permitindo-me desta forma expandir meu conhecimento em novos campos de estudos que utiliza a matemática como ferramenta. Obtendo desta forma uma nova perspectiva sobre a modelagem matemática, e sua aplicabilidade no cotidiano.

Dada a relevância e ampla divulgação de problemas que envolvem Redes Complexas, haja vista o problema recente do Espalhamento de Convid19, um exemplo, entre outros, de como usar este trabalho no ensino de Matemática seria a aplicação do uso de matrizes, uma vez que toda Rede Complexa pode ser representada por uma Matriz de Adjacências. Ainda utilizando este o problema do espalhamento do covid19, ao introduzir o conceito de medida, mesmo na educação básica, poderia se utilizar o conceito de distância entre vértices de uma rede, uma vez que este conceito é bem simples. Ou seja, dada que uma pessoa v_1 está contaminada, quantas outras pessoas foram contaminadas até que uma pessoa v_2 também seja contaminada.

Espero que esta breve introdução sobre redes complexas traga para o possível leitor uma noção do que trata-se este vasto campo de estudo, e suas aplicabilidades. E que desperte a curiosidade em se aprofundar, e quem sabe aplicar esta vasta teoria em situações reais.

Referências

D'AMBROSIO, U. Euler, Um Matemático Multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo: Vol.9 n°17 p. 13-31, 2008.

BRUNO, ALEXANDRE. **Grafo com Peso**. Disponível:
<https://github.com/alexbrun01?tab=repositories>, Acesso: 20 de fevereiro de 2023,
 Fig 26 (2023).

CAVALCANTE, GUSTAVO. **Ciência das Redes: Aspectos Epistemológico**.
 Brasília Tese apresentada ao Departamento de Ciência da Informação e Documentação
 da Universidade de Brasília p. 1 a 153, (2009).

FERREIRA, M.T.; MACAU, E.E.N. **Construindo Modelos de Redes Complexas**
 Programa de Doutorado em Computação Aplicada: CAP; Instituto Nacional de Pesquisas
 Espaciais INPE; Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada LAC;
 p.1 a 9, (2012)

FIGUEREDO, D.R. **Introdução a Redes Complexas p.1 a 56, (2011).**

LOPES, F.J.A.; TÁBOAS, P.Z. **Euler e as Pontes de Königsberg** . Publicação
 Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Revista Brasileira de História
 da Matemática. Mato Grosso: Vol.15 n°30 p.23-32, (2015).

ILEX. **Atividade Cerebral**. Disponível:
<https://www.istockphoto.com/br/foto/atividade-cerebral-gm497487570-79137191>,
 Acesso: 05 de fevereiro de 2023, Fig 19 (2015).

JURKIEWCZ, S. **Grafos Uma introdução** OBMEP: A Olimpíada Brasileira de
 Matemática das Escolas Públicas p. 1 - 119, (2009).

METZ, J; CALVO, R; SENO, E; LIANG, Z . **Redes Complexas conceitos e
 aplicações** São Carlos: Universidade de São Paulo Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação Departamento de Ciências de Computação e Estatística Laboratório de
 Inteligência Computacional, p. 1 a 45, (2007).

PIERTO, M.D. **Brasil-turismo**. Disponível: <https://www.Brasil-turismo.com/mapas/tocantins.html>, acesso: 8 de fevereiro 2023, Fig 21, (2009).

RECUEIRO, R. **REDES SOCIAIS NA INTERNET** Porto Alegre: Editora
 Meridional p. 1 a 191, (2009).

- RIBEIRO, E. **MODELOS BASEADOS EM INDIVÍDUOS COM REDES COMPLEXAS PARA DOENÇAS INFECCIOSAS** BOTUCATU: Universidade Estadual Paulista p. 1 a 105, (2022).
- RODRIGUES, F. **Caracterização, classificação de análise de redes complexas** São Carlos: Tese apresentada ao Instituto de Física, São-Carlos (USP) p. 1 a 175, (2007).
- USP **.Sistema de simulação de infecção do COVID19 (2021)**. Disponível: <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/interacoes-sociais-para-simulacao-dinamica-da-epidemia-por-meio-de-redes-complexas>. Acessado dia 01 de fevereiro de 2023.
- SILVA, R. **Trilhamento Elétrico sobre materiais poliméricos pela análise da energia absorvida devido as descargas elétricas superficiais**. Curitiba: Programa de Pós Graduação em Engenharia e Ciência dos Materiais Setor de Tecnologia-UFPR/ Fig 20