UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS MENDES TEIXEIRA

O TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Arraias, TO
2023

Lucas Mendes Teixeira

O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor - Arraias, para obtenção do título de licenciado em matemática.

Orientadora: Karla Carolina Vicente de Sousa

Arraias, TO
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T266t Teixeira, Lucas Mendes.
O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações. / Lucas Mendes Teixeira. – Arraias, TO, 2023.
57 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2023.
Orientadora : Karla Carolina Vicente de Sousa

1. Teorema de Hahn-Banach. 2. Análise Funcional. 3. Álgebra Linear. 4. Espaços Separáveis e Espaços de Hilbert. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lucas Mendes Teixeira

O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 07/07/2023

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
KARLA CAROLINA VICENTE DE SOUSA
Data: 15/07/2023 09:04:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, UFT, Arraias

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 14/07/2023 23:00:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT, Araguaína

gov.br Documento assinado digitalmente
ALAN CARLOS BAIA DOS SANTOS
Data: 14/07/2023 20:39:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Alan Carlos Baia dos Santos, UFT, Arraias

Dedico este trabalho à minha querida avó Maria Hilde Mendes (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por me dar força e orientação em todos os momentos da minha vida.

Gostaria também de agradecer à Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, minha orientadora, que não só me guiou e me apoiou durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho, mas também me incentivou a continuar minha jornada acadêmica. Seu comprometimento com a educação e a pesquisa é inspirador, e seu apoio inestimável foi fundamental para o sucesso deste projeto.

Aos estimados membros da banca examinadora, Dr. José Carlos de Oliveira Junior e Me. Alan Carlos Baia dos Santos, pelo tempo, dedicação e valiosas contribuições durante a avaliação e defesa do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Suas ponderações foram essenciais para o aprimoramento deste trabalho, proporcionando perspectivas e conhecimentos que enriqueceram significativamente essa pesquisa.

A minha companheira Luiza Taveira e ao meu filho, Arthur Mendes, que sempre me apoiaram e me encorajaram em todos os momentos, mesmo quando eu estava cansado e desanimado. Seu amor, carinho e compreensão foram essenciais para que eu pudesse me dedicar a este trabalho e alcançar meus objetivos. Obrigado por serem a minha fonte de força e inspiração em todos os momentos.

Aos meus pais, Joaquim Teixeira e Odeth Mendes, minha gratidão por toda a educação exemplar e valores morais que me foram transmitidos ao longo da vida. Sou grato pelo amor incondicional de vocês e pelo apoio em todos os momentos.

Aos meus avôs paternos, Francisco e Teodora(in memoriam), e maternos, Laurenço e Maria Hilde (in memoriam), minha gratidão por todo o amor, carinho e exemplo de vida que sempre me deram. Vocês são um exemplo de sabedoria, amor e perseverança.

Aos meus irmãos, Luan, Mateus e Marta, minha cunhada Amanda e minhas primas Apoliana, Jozelia e Luzia, meu mais sincero agradecimento por compartilhar comigo os momentos felizes e difíceis da vida.

Aos meus colegas de faculdade e professores, obrigado por compartilhar seus conhecimentos e experiências comigo. Aprendi muito com todos vocês e serei eternamente grato. Em especial, agradeço aos professores Ivo e Kaled, que foram fundamentais ao longo da minha jornada. Suas palavras motivadoras vieram em momentos em que eu mais precisava, e suas aulas foram inspiradoras e enriquecedoras.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional. Sem ajuda de vocês, eu não seria a pessoa que sou hoje. Obrigado!

RESUMO

O trabalho apresenta versões da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach e algumas de suas aplicações na análise funcional, abordando conceitos fundamentais da álgebra linear e da análise funcional. Além da forma analítica do teorema tradicionalmente encontrada na literatura, estudamos o Teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis e em espaços de Hilbert, destacando propriedades particulares.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach. Análise Funcional. Álgebra Linear.

ABSTRACT

The work presents versions of the analytical form of the Hahn-Banach Theorem and some of its applications in functional analysis, addressing fundamental concepts of linear algebra and functional analysis. In addition to the analytical form of the theorem traditionally found in the literature, we study the Hahn-Banach Theorem in separable spaces and in Hilbert spaces, highlighting particular properties.

Key-words: Hahn-Banach Theorem. Functional Analysis. Linear Algebra.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\forall$	Para todo
$\neq$	Diferente
$\cup$	União
$\cap$	Intersecção
$\sum$	Somatório
$\int$	Integral
$\rightarrow$	Implica
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$\vert \cdot \vert$	Módulo
$\Vert \cdot \Vert$	Norma
$\sqrt{\cdot}$	Raiz quadrada
α	Alpha
β	Beta
λ	Lambda
ε	Epsilon
φ	Phi
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\overline{A}$	Fecho de conjunto

dim	Dimensão de espaço
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Produto interno
∞	Infinito
lim	Limite
sup	Supremo
inf	Ínfimo
max	Máximo
$\preceq$	Relação de ordem
$\subset$	É subconjunto de; está contido
$\subseteq$	É subconjunto de; está contido
$\subsetneq$	Estritamente contido
$\coloneqq$	Definido
$\exists$	Existe
;	Tal que
$\notin$	Não pertence
$\blacksquare$	Símbolo de conclusão (usado em demonstrações)
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$B(x,\delta)$	Bola aberta de centro x e raio δ
$\mathbb{S}^1$	Esfera unitária
$F : X \to Y$	Significa que a função F é definida de X em Y
E'	Dual algébrico de E
E^*	Dual topológico de E

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma tapeçaria complexa de padrões e estruturas, tecida em um tecido intrincado que permeia incontáveis campos do conhecimento humano. No presente trabalho, convidamos o leitor a embarcar em um mundo que vislumbra dois pilares fundamentais da matemática, a Álgebra Linear e Análise, com o intuito de mergulhar nas fascinantes versões do Teorema de Hahn-Banach.

Conforme Aristóteles menciona em sua obra Metafísica, "todos os indivíduos, por natureza inclinam-se para o conhecimento". Assim, a busca pelo novo faz parte da essência do ser humano.

A história da matemática é fascinante e extensa e ela, por si só, já daria um belo trabalho. Porém, ao falar do tema presente em nosso trabalho

> A álgebra linear moderna baseada em espaços vetoriais, ou mais geralmente, em módulos. A noção abstrata de espaço vetorial foi isolada pela primeira vez por Peano (1888) na geometria. Não foi influente na época, nem quando Weyl o redescobriu em 1918. Por volta de 1920, foi redescoberto novamente por três analistas — Banach, Hahn e Wiener — e um algebrista, Noether. Então a noção se desenvolveu rapidamente, mas em duas áreas distintas: análise funcional, enfatizando espaços vetoriais normados de dimensão infinita, e teoria dos anéis, enfatizando módulos finitamente gerados que muitas vezes não eram espaços vetoriais. (MOORE, 1995, Tradução nossa).

Dois desses analistas, o austríaco Hans Hahn e o polonês Stefan Banach, desempenharam papéis fundamentais na formulação e desenvolvimento do teorema foco desse trabalho. Incrivelmente os dois desenvolveram esse teorema que leva os seus nomes de forma independente.

Hans Hahn (1879-1934) foi um renomado matemático austríaco conhecido por suas contribuições em diversas áreas da matemática. Ele é lembrado principalmente pelo teorema de Hahn-Banach e suas importantes pesquisas no campo do cálculo das variações. Hahn fez avanços significativos na teoria dos conjuntos, análise funcional, análise real e teoria da medida. Seu trabalho abrange desde a introdução de espaços abstratos de Fréchet até a investigação da análise harmônica e integrais singulares. Hahn lecionou em várias universidades e teve alunos notáveis como Karl Menger, Witold Hurewicz e Kurt Gödel.

O outro matemático que carrega o nome do teorema é Stefan Banach (1892-1945) que foi um matemático polonês conhecido por suas contribuições fundamentais na análise funcional. Seu encontro com o matemático Hugo Steinhaus foi decisivo, levando à colaboração entre eles e ao estabelecimento da Sociedade Matemática de Cracóvia. Seu trabalho mais famoso é o desenvolvimento do conceito de espaço de Banach, que são espaços vetoriais normados completos, isto é, em que toda sequência de Cauchy converge. Esse conceito revolucionou a teoria dos espaços funcionais e trouxe avanços significativos na compreensão das propriedades dos espaços métricos. Banach também fez importantes contribuições para a teoria dos espaços vetoriais topológicos, teoria de medida, integração e teoria dos conjuntos.

O Teorema de Hahn-Banach foi desenvolvido a partir de estudos anteriores de extensões de funcionais em espaços de funções realizados por Frigyes Riesz em 1911 e Eduard Helly em 1922. Hans Hahn contribuiu para o teorema em 1927, utilizando ordinais em sua demonstração, enquanto Stefan Banach, em 1929, utilizou a boa-ordenação e a indução transfinita. A versão complexa do teorema foi publicada em 1938 por Bohnenblust e Sobczyk.

A partir dessa breve contextualização histórica, voltamos ao nosso foco principal que é de explorar a versão analítica do Teorema de Hahn-Banach e algumas de suas versões existentes na literatura. Esse importante resultado da análise funcional é uma ferramenta poderosa que permite estender funcionais lineares definidos em subespaços vetoriais para todo o espaço vetorial. Em sua essência, o teorema tem aplicações fundamentais na análise matemática e, por isso, é considerado um assunto de grande relevância nessa área do conhecimento.

Este trabalho visa apresentar e demonstrar algumas versões da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach. A fim de tornar a compreensão do teorema acessível a estudantes de graduação, será adotada uma abordagem construtiva, repleta de exemplos a cada definição e não abrindo mão da apresentação dos pré-requisitos e do direcionamento desse leitor a referências adequadas.

O presente trabalho tem como base uma pesquisa de cunho exploratório, que visa compreender o objeto de estudo e aplicá-lo. Ao definir pesquisa exploratória Menezes et al. (2019, pg . 34) cita Gonsalves[1] que define pesquisa exploratória sendo:

> aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de fornecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominada "pesquisa de base", por oferecer dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema.

Diante disso, a pesquisa será trabalhada qualitativamente, com base em coletas de informações por meio de revisão bibliográfica. O procedimento de coleta bibliográfica "Utiliza fontes bibliográficas ou material elaborado, como livros, publicações periódicas, artigos científicos, impressos diversos ou, ainda, textos extraídos da internet."(MENEZES et al., 2019, pg. 36).

Por fim, este trabalho está dividido em 6 capítulos e um apêndice que estão descritos a seguir:

Capítulo 1 - Introdução - apresentação do tema, um breve contexto histórico, objetivos do trabalho e descrição da metodologia adotada.

Capítulo 2 - Resultados preliminares - apresentação de alguns conceitos e resultados fundamentais da álgebra linear e da análise funcional.

Capítulo 3 - Funcionais lineares - apresentações de conceitos e propriedades acerca de funcionais e operadores lineares.

Capítulo 4 - Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach - apresentação e demonstração da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach e exposição de aplicações clássicas e de suas demonstrações.

[1] GONSALVES, E. P. Iniciação à pesquisa científica. 3 ed. Campinas-SP: Alínea, 2003.

Capítulo 5 - Teorema de Hahn-Banach para espaços separáveis - estudaremos o caso específico do teorema para espaço separável.

Capitulo 6 - O Teorema de Hahn-banach em Espaço de Hilbert - esse espaço caracterizado por sua estrutura em relação ao produto interno apresenta propriedades particulares que influenciam na forma como o Teorema de Hahn-Banach é apresentado e garante unicidade na extensão.

Apêndice - Apresentação de resultados complementares fundamentais para uma leitura didática e voltada ao público alvo deste trabalho.

Para a realização deste trabalho foram utilizados como fontes de pesquisas os livros de Botelho, Pellegrino e Teixeira (2012), Brezis (2011), Lima (2009), Kreyszig (1991), Lima (1983, 2011), Di Prisco (1997) e Lima (2014).

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos e resultados preliminares essenciais para a compreensão dos resultados principais deste trabalho. Os resultados foram baseados nas referências (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012; LIMA, 1983; BREZIS, 2011).

Definição 1. Seja M um conjunto não vazio. Uma *métrica* em M é uma função

$$\begin{aligned} d: M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y), \end{aligned}$$

que associa cada par ordenado de elementos $(x,y) \in M\times M$ um número real $d(x,y)$ satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x,y,z \in M$:

d_1) $d(x,x) = 0$;

d_2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$,

d_3) $d(x,y) = d(y,x)$;

d_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

Observe que as propriedades d_1) e d_2) nos dizem que, para quaisquer $x, y \in M$, $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A propriedade d_3) afirma que d é uma função simétrica nas variáveis x e y. A condição d_4) é chamada desigualdade triangular com origem no fato que, na geometria plana, cada lado de um triângulo tem medida menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Definição 2. Usualmente chamamos $d(x,y)$ de distância entre x e y e o par (M,d), em que d é uma métrica sobre o conjunto M, é o que chamamos de espaço métrico.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Vejamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1. Seja M um conjunto, com $M \neq \emptyset$. A função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica sobre M. Podemos visualizar que as condições d_1) e d_2) são satisfeitas devido à própria definição da função. No caso em que $x = y$, temos a condição d_3) imediatamente satisfeita e, no caso em que $x \neq y$, segue que

$$d(x,y) = 1 = d(y,x),$$

e d_3) fica completamente verificada.

Para provar a desigualdade triangular, vamos considerar alguns casos:

- Se $x = y = z$, então

$$d(x,y) = 0 = 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y).$$

- Se $z \neq x \neq y \neq z$, então

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y).$$

- Se $x \neq y = z$, então

$$d(x,y) = 1 = 1 + 0 = d(x,z) + d(z,y).$$

- Se $x = y \neq z$, então

$$d(x,y) = 0 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y),$$

mostrando que d_4) também é válida. A métrica d é chamada de métrica zero-um.

Quando (M,d) é um espaço métrico, todo subconjunto S de M também é um espaço métrico com a mesma métrica de M.

Exemplo 2. Seja (M,d) um espaço métrico e S um subconjunto não vazio de M. Considere a restrição da métrica d ao conjunto $S \times S$, isto é,

$$\begin{aligned} d|_{S\times S} &: S \times S \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y). \end{aligned}$$

Essa restrição da função d a $S \times S$ é chamada de *métrica induzida* e, com tal métrica, S é um espaço métrico.

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a noção de métrica como distância entre pontos fica mais clara devido aos recursos visuais que esse espaço proporciona.

Exemplo 3. A reta real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico munido com a métrica

$$\begin{aligned} d: \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y|, \end{aligned}$$

em que $|\cdot|$ calcula o valor absoluto (módulo) de um número. Com o intuito de mostrar que d é uma métrica, basta utilizar as propriedades de valor absoluto.

Exemplo 4. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, podemos definir três métricas distintas. Se $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, defina as funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \text{ e}$$

$$d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são todas métricas em $\mathbb{R}^n$. Vamos nos restringir a verificar com detalhes que d é métrica em $\mathbb{R}^n$. As demais provas podem ser realizadas com mais facilidade e utilizando ideias similares.

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, então

- d_1) e d_2)
  Uma vez que $(x_i - y_i)^2 \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, segue que $d(x,y) \geq 0$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

- d_3)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{1/2} \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

- d_4)
  Utilizando a Desigualdade de Minkowski (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, pg. 14), temos que

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \{(x_i - z_i) + (z_i - y_i)\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq d(x, z) + d(y, z)
\end{aligned}
$$

Isso mostra que d possui as propriedades $d_1) - d_4)$ da definição de métrica. Assim, d é métrica em $\mathbb{R}^n$.

Outro conceito importante que usaremos neste trabalho é o conceito de norma, mas antes de exibimo-lo, vamos estudar um pouco sobre espaços vetoriais.

Definição 3. Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto V, não vazio, munido das operações de adição e multiplicação por escalar (número real), e satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ (associatividade);

ii) $u + v = v + u$ (comutatividade);

iii) Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ (existência de elemento neutro na adição);

iv) Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$ (existência de simétrico na adição, que chamamos usualmente de oposto);

v) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ e $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributividade);

vi) $1u = u$ (multiplicação por 1).

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores e é importante lembrar que o símbolo 0 na propriedade $iii)$ pode significar tanto o número real 0 quanto o vetor nulo relativo a cada espaço vetorial. Isso ficará mais claro nos exemplos de espaço vetorial que veremos a seguir.

O espaço vetorial que inspira a definição acima é o $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5. O $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial em que, para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a adição e a multiplicação por escalar por

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

No caso do $\mathbb{R}^n$, o elemento neutro da adição é o vetor nulo $0 = (0, \ldots, 0)$ (n entradas nulas) e para cada $x = (x_1, \ldots, x_n)$ o oposto é $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Vejamos outros exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo 6. O conjunto $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas sequências infinitas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, em que cada entrada é real, também é um espaço vetorial considerando, para $x = (x_1, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a adição e a multiplicação por escalar como a seguir

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

e

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Nesse caso, o elemento neutro da adição é a sequência infinita $0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ em que todas as entradas são nulas e para cada $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ o oposto é $-x = (-x_1, \dots, -x_n, \dots)$.

Exemplo 7. O conjunto $M_{m\times n}$ das matrizes $(a_{ij})_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ (com m linhas e n colunas) é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matriz por escalar dadas por

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

e

$$\alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n},$$

em que $(a_{ij})_{m\times n}, (b_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o elemento neutro da soma é a matriz nula $0_{m\times n}$ de ordem $m \times n$, e para cada matriz $(a_{ij})_{m\times n}$, o elemento simétrico da soma é a sua matriz oposta, definida por $-(a_{ij})_{m\times n} = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Exemplo 8. O espaço vetorial $P_n([a, b])$ de todos os polinômios de grau menor do que ou igual a $n \in \mathbb{N}$, definidos no intervalo $[a, b]$ da reta e com coeficientes reais, também constitui um espaço vetorial considerando, para cada $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \in P_n([a, b])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as operações

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

e

$$\alpha p(x) = (\alpha a_n)x^n + \dots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0).$$

Nesse caso, o elemento neutro da adição é o polinômio constante igual a 0 e, para cada $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in P_n([a, b])$, o simétrico é $-p(x) = -a_n x^n - \dots - a_1 x - a_0 \in P_n([a, b])$.

De forma mais geral, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 9. O conjunto $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ formado pelas funções reais definidas em um conjunto não vazio X é um espaço vetorial considerando-se a soma de funções $f + g$ e multiplicação αf de uma função por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

Quando um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é um espaço vetorial munido da adição e da multiplicação por escalar herdadas do espaço V, dizemos que U é um subespaço vetorial de V.

O próximo resultado garante que, para verificar que um subconjunto U não vazio de V é um subespaço vetorial, basta provar que U contém o elemento neutro 0_V da adição e é fechado para adição e para a multiplicação por escalar.

Proposição 1. *Se U é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V satisfazendo*

1. *$0_V \in U$ (o elemento neutro de V é elemento de U);*

2. *Se $u, v \in U$, então $u + v \in U$ (fechamento para a soma);*

3. *Se $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha u \in U$ (fechamento para a multiplicação por escalar),*

então U é subespaço vetorial de V.

O leitor pode encontrar a demonstração do resultado acima em (PULINO, 2012, p. 147).

A soma de dois subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial como veremos a seguir.

Proposição 2. *Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então a soma $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Primeiro note que $U+W$ é um subconjunto de V, pois a soma está bem definida em V. Além disso, como $0_V = 0_V + 0_V \in U + W$, então o item 1. da Proposição 1 está verificado. Mais ainda, dados $u, w \in U + W$, existem $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$, tais que $u = u_1 + w_1, w = u_2 + w_2$ de modo que

$$u + w = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

e, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(u + w) = \alpha(u_1 + w_1 + u_2 + w_2) = \alpha(u_1 + w_1) + \alpha(u_2 + w_2) = \alpha u + \alpha w \in U + W,$$

em que usamos para verificar as continências acima os fatos de que U e W são subespaços vetoriais de V, e as propriedades de associatividade e comutatividade da adição e a propriedade distributiva do espaço vetorial V. Assim, segue da Proposição 1 que $U+W$ é subespaço vetorial de V. ■

Um exemplo de subespaço vetorial muito importante é o subespaço vetorial gerado por um elemento de um espaço vetorial.

Proposição 3. *Se V é um espaço vetorial e $u \in V$, então o conjunto $\langle u \rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial de V. Esse subespaço é denominado subespaço vetorial gerado pelo elemento $u \in V$ e consiste em todos os vetores de V que são múltiplos de u.*

Demonstração. Uma vez que a multiplicação por escalar está bem definida em V, temos que $\langle u \rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é de fato um subconjunto de V. Também temos que $0u = (0+0)u = 0u + 0u$ o que implica que $0u = 0_v$ e, portanto, $0_V \in \langle u \rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Mais ainda, se $v = \lambda_1 u, w = \lambda_2 u \in \langle u \rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, usando a propriedade distributiva de V e a associatividade na multiplicação por escalar, temos que

$$v + w = \lambda_1 u + \lambda_2 w = (\lambda_1 + \lambda_2)u \in \langle u \rangle$$

e

$$\alpha v = \alpha(\lambda_1 u) = (\alpha\lambda_1)u \in \langle u \rangle.$$

Assim, segue da Proposição 1 que $\langle u \rangle$ é subespaço vetorial de V. ■

Finalmente, estamos aptos a exibir o conceito de norma.

Definição 4. Seja E espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em E é uma aplicação

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz

(N_1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$

(N_2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, para todo escalar a e todo $x \in E$.

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in E$.

Definição 5. Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

Definição 6. Um produto interno no espaço vetorial E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $x, x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(P_1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$,

(P_2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

(P_3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(P_4) Para todo $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle$ é um número real estritamente positivo.

Como consequência das propriedades $(P_1), (P_2)$ e (P_3), temos que, para quaisquer $x, y_1, y_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle y_1 + y_2, x \rangle = \langle y_1, x \rangle + \langle y_2, x \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

e

$$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda y, x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

Definição 7. O par $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é chamado de espaço com produto interno.

Exemplo 10. O $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial com produto interno. Se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

define um produto interno.

Com o produto interno, é possível definir a norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}, \end{aligned}$$

chamada de norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Para verificar que a função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é realmente uma norma, note que as propriedades (N_1) e (N_2) seguem facilmente das propriedades (P_2) e (P_4) de produto interno. Já para mostrar que vale a desigualdade triangular necessitamos do resultado a seguir, conhecido como Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 1. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja E um espaço vetorial normado com a norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dados $u, v \in E$, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{2.1}$$

A igualdade será válida se, e somente se, u e v forem múltiplos um do outro (isto é, se forem vetores linearmente dependentes).

Demonstração. Se $v = 0$ (e/ou $u \neq 0$), então (2.1) vale $\langle u, 0\rangle = 0\langle u, 0\rangle = 0 = \|u\|\|0\|$ e o resultado segue imediatamente. Assim, suponha $v \neq 0$ e $u \neq 0$. Para qualquer escalar α temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\alpha u + v\|^2 &= \langle \alpha u + v, \alpha u + v\rangle \\ &= \langle \alpha u, \alpha u + v\rangle + \langle v, \alpha u + v\rangle \\ &= \langle \alpha u, \alpha u\rangle + \langle \alpha u, v\rangle + \langle v, \alpha u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \alpha^2\langle u, u\rangle + 2\alpha\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Uma vez que $u \neq 0$ temos que (2.2) é uma inequação quadrática na variável α e que o discriminante é menor ou igual a zero (caso contrário, existiria $\alpha \in \mathbb{R}$ contradizendo (2.2)). Isto é,

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\langle u, v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 4(\langle u, v\rangle)^2 \leq 4\|u\|^2\|v\|^2 \\ &\Rightarrow (\langle u, v\rangle)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{(\langle u, v\rangle)^2} = |\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\|u\|^2}\sqrt{\|v\|^2} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\Delta = 0$, isto é, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\|\alpha u + v\|^2 = 0$ o que equivale a u e v serem múltiplos um do outro.

■

Para definir espaços métricos completos, precisamos do conceito de convergência de sequências em espaços normados e da definição de sequência de Cauchy.

Definição 8. A sequência (x_n) em um espaço métrico $M = (M, d)$ é dita convergente se existe um $x \in M$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

na qual x é chamado limite de x_n e escrevemos,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

ou ainda

$$x_n \longrightarrow x$$

Dizemos que (x_n) converge para x ou tem o limite x. Se (x_n) não for convergente, dizemos que é divergente.

Definição 9. Diz-se que uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\,(x_m, x_n) < \varepsilon,\ \forall m, n > n_0.$$

A convergência de sequências e conceitos relacionados em espaços normados seguem facilmente das definições correspondentes 8 e 9 para espaços métricos, uma vez que toda norma define uma métrica da seguinte maneira

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

e, consequentemente, todo espaço normado é métrico com a métrica oriunda da norma.

Definição 10 (Convergência na norma). Uma sequência (x_n) em um espaço normado E, converge para um elemento x em relação à norma se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

.

Definição 11. Uma sequência (x_n) em um espaço normado E é de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n > n_0$$

Definição 12. Um espaço métrico M é dito completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Definição 13. Um espaço normado E é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

É conhecido dos cursos elementares de análise como sendo espaço de Banach o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Outro espaço de grande relevância nos estudos de análise funcional são os espaços de Hilbert, que são espaços com produto interno completos com relação à norma induzida. Mas veremos esses espaços com mais detalhes no Capítulo 6.

3 FUNCIONAIS LINEARES

Sabemos que grande parte da disciplina de cálculo lida com o estudo de funções e suas propriedades. Para vários outros ramos da matemática, tal estudo também é essencial, como no caso da Álgebra Linear e da Análise Funcional. A seguir, conheceremos uma classe de funções, chamadas usualmente de funcionais lineares, que são definidas entre espaços vetoriais. Estudaremos suas propriedades e alguns resultados importantes oriundos deles. Para mais detalhes, recomendamos a leitura de (BREZIS, 2011; BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012; LIMA, 2014).

Sejam E, F espaços vetoriais. Um operador linear $T : E \to F$ é uma aplicação que possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \quad \forall\, x, y \in E \\ T(\lambda x) &= \lambda T x, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\, x \in E \end{aligned}$$

Quando $F = \mathbb{R}$, chamamos o operador linear T de funcional linear e o conjunto dos funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial E é o conjunto

$$E' = \{T : E \longrightarrow \mathbb{R}; T \text{ é linear } \}$$

chamado de dual algébrico de E.

A seguir, vamos apresentar uma série de exemplos de operadores lineares.

Exemplo 11. Sejam $E = P_2([0,1])$ os polinômios de grau menor que ou igual a dois e $F = P_1([0,1])$ os polinômios de grau menor que ou igual a um com coeficientes reais e definidos sobre o intervalo $[0,1]$. Defina

$$\begin{aligned} T :&E \longrightarrow F \\ &p(x) \longmapsto Tp(x) = p'(x), \end{aligned}$$

em que p' representa a derivada da função polinomial p. Afirmamos que T é um operador linear. De fato, tomando $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T(p+q) &= T((a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)) \\ &= T((a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)) \\ &= 2(a_2+b_2)x + (a_1+b_1) \\ &= (2a_2x + a_1) + (2b_2x + b_1) \\ &= Tp(x) + Tq(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x)) &= T(\lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0))) \\ &= T(\lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0))) \\ &= \lambda(2a_2x + a_1) \\ &= \lambda Tp(x), \end{aligned}$$

mostrando o desejado. Note que, na prova da linearidade, usamos propriedades de derivação e de operações com polinômios.

Podemos generalizar o exemplo acima da seguinte forma:

Exemplo 12. Seja $E = P([a,b])$ o espaço vetorial de todos os polinômios definido sobre o intervalo $[a,b]$ da reta. Uma vez que a derivação de uma função polinomial resulta em uma nova função polinomial, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} &T : E \to E \\ &p(x) \mapsto Tp(x) \end{aligned}$$

em que $Tp(x) = p'(x)$. De forma análoga ao exemplo anterior, podemos provar a linearidade da aplicação T.

Exemplo 13. Seja $E = C([a,b],\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ da reta. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} &T : E \to E \\ &x \mapsto Tx, \end{aligned}$$

em que $Tx(t) = \int_a^t x(s)ds$, com $t \in [a,b]$. O operador T é linear devido à linearidade da integral.

Exemplo 14. Seja $E = \mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial das sequências com entradas reais, isto é,

$$\mathbb{R}^\infty = \{(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots);\ s_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} &T : E \to E \\ &x \mapsto Tx \end{aligned}$$

em que $Tx = (s_1, \frac{1}{2}s_2, \frac{1}{3}s_3, \cdots, \frac{1}{n}s_n, \dots)$, para $x = (s_1, s_2, \cdots, s_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Afirmamos que T é um operador linear.

Para mostrar que T é um operador linear, devemos verificar se, para quaisquer $x = (s_1, s_2, \cdots, s_n, \dots)$, $y = (t_1, t_2, \cdots, t_n, \dots) \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $T(x+y) = T(x) + T(y)$ (aditividade) e $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (homogeneidade). Vejamos:

- Aditividade

$$
\begin{aligned}
T(x+y) &= \left(s_1+t_1, \frac{1}{2}(s_2+t_2), \frac{1}{3}(s_3+t_3), \cdots, \frac{1}{n}(s_n+t_n), \ldots\right) \\
&= \left(s_1, \frac{1}{2}s_2, \frac{1}{3}s_3, \cdots, \frac{1}{n}s_n, \ldots\right) + \left(t_1, \frac{1}{2}t_2, \frac{1}{3}t_3, \cdots, \frac{1}{n}t_n, \ldots\right) \\
&= Tx + Ty.
\end{aligned}
$$

Portanto, T é aditivo.

- Homogeneidade

$$
\begin{aligned}
T(\lambda x) &= \left(\lambda s_1, \frac{1}{2}(\lambda s_2), \frac{1}{3}(\lambda s_3), \cdots, \frac{1}{n}(\lambda s_n), \ldots\right) \\
&= \lambda\left(s_1, \frac{1}{2}s_2, \frac{1}{3}s_3, \cdots, \frac{1}{n}s_n, \ldots\right) \\
&= \lambda Tx.
\end{aligned}
$$

Portanto, T é homogêneo.

Consequentemente, T é um operador linear.

A seguir, vamos expor o conceito de operador linear limitado e estudar algumas propriedades sobre tais operadores.

Definição 14. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ operador linear. Diz-se que T é contínuo se $x_n \to x \in E$ implica que $Tx_n \to Tx \in F$ (convergências na norma).

Definição 15. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ operador linear. Diz-se que T é limitado quando existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

O conceito de limitação de operadores lineares é diferente do conceito de limitação de funções. Dizemos que uma função $f : D(f) \mapsto \mathbb{R}$ é limitada quando existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$, para todo $x \in D(f)$. Se esse conceito de limitação fosse ampliado a operadores lineares, nos restringiríamos ao operador nulo. É o que mostra o resultado a seguir.

Proposição 4. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ operador linear. Se existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq C$, para todo $x \in E$, então $T \equiv 0$ (operador nulo).*

Demonstração. Uma vez que E é um espaço vetorial real, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$, temos que $nx \in E$. Assim, usando a linearidade de T e que $\|T(x)\|_F \leq C$, para todo $x \in E$, temos que

$$C \geq \|T(nx)\|_F = \|nTx\|_F = n\|Tx\|_F,$$

implicando que

$$0 \leq \|Tx\|_F \leq \frac{C}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in E.$$

Passando a expressão acima ao limite com $n \to +\infty$ e usando o Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \|Tx\|_F \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{n}$$

e, assim,

$$0 \leq \|Tx\|_F \leq 0.$$

Logo, $\|Tx\|_F = 0$ para todo $x \in E$, implicando que $Tx = 0$ para todo $x \in E$. ■

Ser limitado enquanto operador linear é no sentido de levar conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F.

A seguir apresentamos um importante resultado que relaciona limitação e continuidade de operadores lineares.

Proposição 5. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ operador linear. Então T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se T é limitado, então existe $C > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|. \tag{3.1}$$

Queremos provar que T é contínuo. Para isso, vamos mostrar que se $x_n \to x$ em E, então $Tx_n \to Tx$ em F. Lembrando que $x_n \to x$ em E é equivalente a $x_n - x \to 0$ em E ou, ainda, $\|x_n - x\| \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Assim, de (3.1) temos que

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C\|(x_n - x)\| \to 0 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Então $x_n \to x$ em E implica que $Tx_n \to Tx$ em F. Temos que T é contínuo.

($\Leftarrow$) Seja T contínuo, temos que provar que T é limitado. Suponhamos por contradição que T não é limitado. Então, existe $\{x_n\} \subset E$, com $x_n \neq 0$ e tal que

$$\begin{aligned}
&\|Tx_n\| > n\|x_n\|, \ \forall x_n \in E \\
&\Rightarrow \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > 1 \Rightarrow \left\|\frac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\| > 1, \quad \|x_n\| \neq 0 \\
&\Rightarrow \left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| > 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T(\lambda_n)\| > 1, \text{ sendo } \lambda_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|} \tag{3.2}$$

Note que

$$\|\lambda_n\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$$

e, assim, passando ao limite quando $n \to +\infty$, temos que

$$\|\lambda_n\| \to 0$$

isto é, $\lambda_n \to 0$ em E, quando $n \to +\infty$. Assim, usando a continuidade de T, segue que

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lambda_n \to 0 \\ &\Rightarrow T\lambda_n \to T(0) \\ &\Rightarrow T\lambda_n \to 0 \\ &\Rightarrow \|T\lambda_n\| \to 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como (3.2) e (3.3) se contradizem, T é limitado. ■

Denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F. $\mathcal{L}(E,F)$ constitui um espaço vetorial. Quando $F = \mathbb{R}$, denotamos $\mathcal{L}(E,F)$ por E^* e chamamos esse espaço de dual topológico de E.

Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear limitado. Então, para todo $x \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} &\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \\ \Rightarrow\ &\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C. \end{aligned}$$

E, consequentemente,

$$\sup_{x\in E \text{ e } x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

Assim, para cada $T \in \mathcal{L}(E,F)$ fica bem definido o número real

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E \text{ e } x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

Mais adiante, vamos mostra que $\|\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ define uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.

Afirmamos que

Proposição 6. *Se $T : E \to F$ um operador linear limitado. Então é uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$ e vale*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E = 1} \|Tx\|_F.$$

Demonstração. Seja $x \in E$, $x \neq 0$, então $y = \frac{1}{\alpha}x$, com $\|x\|_E = \alpha$ é tal que

$$\begin{aligned} \|y\|_E &= \left\|\frac{1}{\alpha}x\right\|_E \\ &= \left|\frac{1}{\alpha}\right| \|x\|_E \\ &= \frac{1}{\alpha}\alpha \\ \|y\|_E &= 1 \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{x\in E \ e\ x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \\
&= \sup_{x\in E \ e\ x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\alpha} \\
&= \sup_{x\in E \ e\ x\neq 0} \frac{1}{\alpha}\|Tx\|_F \\
&= \sup_{x\in E \ e\ x\neq 0} \left\|\frac{1}{\alpha}Tx\right\|_F \\
&= \sup_{x\in E \ e\ x\neq 0} \left\|T\left(\frac{1}{\alpha}x\right)\right\|_F \\
\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{y\in E \ e\ \|y\|_E=1} \|Ty\|_F
\end{aligned}$$

■

Mais ainda,

Proposição 7.

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F$$

Demonstração. Uma vez que $\{x \in E : \|x\| = 1\} \subset \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, temos que

$$\sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F \geq \sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E=1} \|Tx\|_F. \tag{3.4}$$

Por outro lado, usando a Proposição 6, temos que

$$\sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \geq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}, \forall x \in E, x \neq 0.$$

Assim, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$, $x \neq 0$, temos que

$$\sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \geq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \geq \|Tx\|_F. \tag{3.5}$$

Uma vez que em um operador linear contínuo não nulo o supremo é não nulo, segue de (3.4) e (3.5) o desejado. ■

Proposição 8. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E \ e\ \|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.

Demonstração. Para a propriedade de norma (N_1) se $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E\leq 1}\|Tx\|_F = 0$ isso implica que $\|Tx\|_F = 0$ para todo $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$. Assim, para todo $x \in E$, $x \neq 0$

$$0 = \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

implicando que $\|Tx\| = 0$, para todo $x \in E$. Logo, $Tx = 0$ para todo $x \in E$, ou seja, $T = 0$.

Para (N_2), temos que para qualquer operador linear T e escalar α, temos que

$$\begin{aligned}\|\alpha T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|\alpha Tx\|_F \\ &= \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} |\alpha|\|Tx\|_F \\ &= |\alpha| \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = |\alpha|\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\end{aligned}$$

Para (N_3), temos para quaisquer dois operadores T_1 e T_2, que

$$\begin{aligned}\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|(T_1 + T_2)x\| \\ &= \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|T_1 x + T_2 x\| \\ &\leq \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|T_1 x\| + \sup_{x\in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1} \|T_2 x\| = \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \\ \|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} &\leq \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}\end{aligned}$$

Portanto, a expressão $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E,\, \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$ possui todas as propriedades necessárias para ser uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$. ■

Note que, usando a Proposição 6 e a definição de supremo, temos que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \geq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}, \forall x \in E,\ x \neq 0$$

e, consequentemente,

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|x\|_E.$$

Proposição 9. *Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ também é espaço de Banach. Em particular, o dual E^* de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Para provar, precisamos mostrar que toda sequência de *Cauchy* de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(E,F)$ converge para um funcional linear limitado em $\mathcal{L}(E,F)$. Seja $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de *Cauchy* em $\mathcal{L}(E,F)$. Isso significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ sempre que $m, n \geq n_0$. Logo,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\| \tag{3.6}$$

para todo $x \in E$ e $m, n \geq n_0$.

Precisamos encontrar um funcional linear limitado T em $\mathcal{L}(E,F)$ que seja o limite da sequência $\{T_n\}$. Para isso, podemos considerar a sequência $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $x \in E$. Note que, essa sequência é de *Cauchy* em F, e como F é completo, logo é convergente. Definimos então

$$\begin{aligned}T : &E \to F \\ &T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).\end{aligned}$$

A linearidade de T segue das propriedades de limites. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (3.6) obtemos

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{3.7}$$

para todo $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (3.7) segue também que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, e assim segue $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$.

■

Vejamos alguns exemplos de operadores lineares contínuos.

Exemplo 15. O espaço $E = C([0,1])$ das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ com a norma do máximo $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ é um espaço vetorial normado. Defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto Tf = f(1) \end{aligned}$$

Afirmamos que T é um funcional linear limitado. Para provar a linearidade, considere $f, g \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} &T(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = T(f) + T(g) \\ &T(\alpha f) = \alpha f(1) = \alpha T(f), \end{aligned}$$

mostrando a linearidade. Para provar a continuidade, note que, se $f \in E$ com $\|f\| \leq 1$, então

$$|Tf| = |f(1)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|,$$

mostrando que T é limitado e, portanto, contínuo.

Antes de enunciar e provar o resultado que garante que todo operador linear definido em espaços vetoriais de dimensão finita é linear, precisamos do conceito de normas equivalentes e de um resultado técnico.

Definição 16. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sobre o mesmo espaço vetorial V são ditas equivalentes se existirem constantes reais positivas $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|_1, \qquad \forall v \in V.$$

Claro que, se existem constantes como na definição acima, então também vale que

$$\frac{1}{C_2} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \frac{1}{C_1} \|v\|_2.$$

Lema 2. *Em um espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.*

Demonstração. Sejam E um espaço vetorial com $\dim(E) = n$, $\|\cdot\|$ uma norma em E e considere $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma base para E. Então para $x \in E$, temos

$$\begin{aligned} x &= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n, \quad \text{com } x_i \in \mathbb{R} \ \ i = 1, \dots, n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i b_i. \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que

$$\|x\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{é uma norma em } E.$$

Sendo assim com intuito de verificar o desejado, basta provarmos que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_S$ são equivalentes.

Considere a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \|x\| \end{aligned}$$

em que $\mathbb{S}^1 = \{x \in E; \|x\|_S = 1\}$ é a esfera unitária de E. Claramente $\mathbb{S}^1$ é um subconjunto fechado da bola unitária fechada (que é compacta na topologia de $\|\cdot\|_S$ pois $\dim(E) < \infty$) e, consequentemente, $\mathbb{S}^1$ é compacto. Mais ainda, se $x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n, y = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_n b_n \in E$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|b_i\| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\| \right) \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\| \right) \|x - y\|_S. \end{aligned}$$

Assim, se $x_n \to x$ em $(E, \|\cdot\|_S)$, também temos que $f(x_n) \to f(x)$, implicando que f é contínua. Uma função contínua em um compacto admite máximo e mínimo (Teorema de Weierstrass), portanto, f possui máximo e mínimo, digamos M e m respectivamente. Note que, se $x \in \mathbb{S}^1$, então $x \neq 0$ e consequentemente $\|x\| > 0$, implicando que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Assim, o mínimo $m > 0$. Dado $x \in E \backslash \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|_S} \in \mathbb{S}^1$ e portanto

$$\begin{aligned} & m \leq f\left(\frac{x}{\|x\|_S} \right) \leq M \\ & \Rightarrow m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_S} \leq M \Rightarrow m\|x\|_S \leq \|x\| \leq M\|x\|_S, \end{aligned} \tag{3.8}$$

mostrando que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_S$ são equivalentes. Isso prova que qualquer norma em E é equivalente a norma $\|\cdot\|_S$.

Seja $\|\cdot\|_1$ uma outra norma em E. Como $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_S$ segue que existem $C_1, C_2 > 0$ satisfazendo

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_S \leq C_2\|x\|_1, \forall x \in E.$$

A desigualdade acima juntamente com (3.8) implicam que

$$mC_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq MC_2\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Isso mostra o desejado.

■

Teorema 3. *Em espaços normados de dimensão finita, todo operador linear é limitado.*

Demonstração. Seja E um espaço vetorial normado com $\dim(E) = n$ e considere $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma base de E. Então para $x \in E$, temos

$$\begin{aligned} x &= x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_nb_n, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}\ e\ i = 1, \dots, n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_ib_i. \end{aligned}$$

Agora considere $T : E \to F$ um operador linear. Usando a linearidade de T, temos que

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{n} x_ib_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_iTb_i \\ \Rightarrow \|Tx\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_iTb_i\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_iTb_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|Tb_i\| \\ \Rightarrow \|Tx\| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|Tb_i\|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Seja $c = \max_i \|Tb_i\|, i = 1, 2, \cdots, n$. Então temos que $\|Tb_i\| \leq c$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Aplicando em (3.9) temos

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|c \\ \|Tx\| &\leq c\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Segue do Lema 2 que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_nb_n\| &\geq \alpha(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)\\
\left\|\sum_{i=1}^{n} x_ib_i\right\| &\geq \alpha\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)\\
\sum_{i=1}^{n}|x_i| &\leq \frac{1}{\alpha}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_ib_i\right\| = \frac{1}{\alpha}\|x\|\\
\sum_{i=1}^{n}|x_i| &\leq \frac{1}{\alpha}\|x\| \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Utilizando (3.11) em (3.10) temos que

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\leq c\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right) \leq \frac{c}{\alpha}\|x\|\\
\|Tx\| &\leq k\|x\|; \quad k = \frac{c}{\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, T é limitado. ■

O resultado anterior garante que todo operador linear definido em um espaço vetorial normado de dimensão finita é contínuo. O mesmo não se aplica se considerarmos operadores lineares em espaços de dimensão infinita. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 16. Seja $E = P([0,1])$ o espaço vetorial dos polinômios definidos em $[0,1]$ com a norma do máximo. Defina o funcional linear

$$\begin{aligned}
T : E &\to E\\
x &\mapsto Tx,
\end{aligned}$$

em que $Tx(t) = x'(t)$. Afirmamos que T não é limitado

Mostraremos que não é possível encontrar $c > 0$ tal que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \forall x \in E, x \neq 0$$

Isto é equivalente a mostrar que para todo $c > 0$ existe $0 \neq x_c \in E$ tal que,

$$\frac{\|Tx_c\|}{\|x_c\|} > c$$

Ou equivalentemente, mostrar a existência de uma sequência $\{x_n\} \subset E$ satisfazendo

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} > n$$

e, consequentemente,

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \to +\infty$$

Para $t \in [0,1]$, considere $x_n(t) = t^n$. Note que,

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| \\ &= \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1 \end{aligned}$$

e

$$|Tx_n(t)| = |x_n'(t)| = \\ n|t^{n-1}|$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|Tx_n\| &= \max_{t\in[0,1]} |Tx_n(t)| \\ &= n \max_{t\in[0,1]} |t^{n-1}| \\ &= n \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = \frac{n}{1} \longrightarrow +\infty$$

Uma vez que os reais são arquimedianos, para todo $c > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c$. Assim, temos que existe $x_n \neq 0$ satisfazendo

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n > c.$$

Isso mostra a ilimitação do operador.

4 FORMA ANALÍTICA DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

O teorema de Hahn-Banach é conhecido como teorema de extensão já que ele garante, sob certas circunstâncias, que funcionais lineares definidos em um subespaço vetorial podem ser estendidos para todo o espaço vetorial.

Antes de enunciar e provar o Teorema de Hahn-Banach, vamos exibir uma série de definições importantes que nos levam à compreensão do Lema de Zorn, a qual é uma ferramenta essencial para a demonstração do resultado protagonista deste trabalho. É importante enfatizar que, apesar de estar sendo usado como resultado auxiliar neste trabalho, o Lema de Zorn tem importância independente dele e poderia se fazer um trabalho somente com foco em tal resultado.

Os resultados e conceitos que serão enunciados podem ser encontrados em (BREZIS, 2011; LIMA, 2009; BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

Definição 17. Seja P um conjunto.

i) Uma ordem parcial no conjunto P é uma relação $\preceq$ em P que possui as seguintes propriedades:

   a) $x \preceq x$, para todo $x \in P$ (reflexiva);
   b) Se $x, y \in P$ com $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$ (antissimétrica);
   c) Se $x, y, z \in P$ com $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$ (transitiva).

   Neste caso, diz-se que $(P, \preceq)$ é um conjunto *parcialmente ordenado*.

   Observação. Note que as propriedades acima não garantem que todos os elementos de P podem ser relacionados, entretanto, aqueles elementos que se relacionam devem possuir as propriedades supracitadas.

   Para as definições a seguir, admitimos que $(P, \preceq)$ é parcialmente ordenado.

ii) Uma *cota superior* (ou *majorante*) de um subconjunto Q de P, se existir, é um elemento $q \in P$ tal que $p \preceq q$, para todo $p \in Q$.

iii) Um elemento maximal de P, se existir é um elemento $m \in P$, tal que se $p \in P$ e $m \preceq p$, então $m = p$.

iv) Um subconjunto Q de P é dito cadeia ou totalmente ordenado se para todos $p, q \in Q$ tem-se que $p \preceq q$ ou $q \preceq p$.

v) Diz-se que P é indutivo se todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior.

Observação. Observe que a cota superior ou majorante não precisa estar no conjunto, ao contrário do elemento maximal que deve ser um elemento do conjunto. Note que a definição $iv)$ equivale a dizer que todos os elementos de um conjunto totalmente ordenado podem ser comparados através da relação $\preceq$.

Teorema 4. *(Lema de Zorn) Todo conjunto parcialmente ordenado indutivo não-vazio admite elemento maximal.*

A demonstração do Lema de Zorn pode ser encontrada em (DI PRISCO, 1997).

É importante ressaltar que o Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha. O Axioma da Escolha permite selecionar um elemento de cada conjunto de uma coleção de conjuntos não vazios. O Axioma da Escolha é útil quando queremos fazer escolhas simultâneas de elementos de vários conjuntos diferentes, de forma consistente e não arbitrária. Ele nos permite construir um novo conjunto selecionando um elemento de cada subconjunto em uma coleção de conjuntos. Essa capacidade de escolher elementos de forma coerente é valiosa em muitas áreas da matemática e em situações práticas. A relação entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn é que o Axioma da Escolha implica o Lema de Zorn. Quando usamos o Axioma da Escolha, podemos obter uma função seletora que escolhe um elemento de cada conjunto em uma coleção. Essa função seletora é então usada para construir um conjunto maximal que garante a escolha de um elemento de cada conjunto em uma coleção parcialmente ordenada. Essa relação é discutida em (DI PRISCO, 1997) durante a demonstração do Lema de Zorn. Dessa forma, o Lema de Zorn e o Axioma da Escolha são ferramentas poderosas e desempenham um papel fundamental em diversas áreas da matemática.

As definições a seguir são necessárias para a compreensão do enunciado do Teorema de Hahn-Banach.

Definição 18. Se A, B e X são conjuntos, $X \subset A$ e $g : X \to B$ é uma função definida em X, dizemos que a função $f : A \to B$ é uma extensão de g ao conjunto A se f coincide com g em X, isto é, se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 19. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $p : E \to \mathbb{R}$ é dito um funcional sublinear se possui as seguintes propriedades:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para quaisquer $x \in E$ e $\lambda > 0$;

2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para quaisquer $x, y \in E$.

Exemplo 17. Seja E um espaço vetorial normado de norma $||\cdot||_E$. Segue da sua definição, que a norma $||\cdot||_E$ é um funcional sublinear.

Agora estamos aptos a enunciar e provar o Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 5 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Se G é um subespaço vetorial de E e $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear satisfazendo $g(x) \leq p(x)$ em G, então existe um funcional linear $f : E \to \mathbb{R}$ que estende g e tal que $f(x) \leq p(x)$ no espaço vetorial E.*

Demonstração. Para essa demonstração faremos o uso do Lema de Zorn. Para isso, considere o seguinte conjunto parcialmente ordenado

$$P := \left\{ \begin{array}{l} h : D(h) \subset E \longrightarrow \mathbb{R};\ D(h) \text{ é subespaço vetorial} \\ \text{ de } E, h \text{ é funcional linear, } G \subset D(h) \\ h \text{ estende } g\ (h(x) = g(x), \forall x \in G) \\ \text{e } h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Observe que, se provarmos que existe um elemento em P cujo domínio é E a prova está finalizada. Com o intuito de provar a existência de tal elemento, vamos definir uma relação apropriada em P e, em seguida, vamos mostrar que P satisfaz as condições do Lema de Zorn. Dividiremos a demonstração em etapas, para melhor compreensão do leitor.

1. $P \neq \emptyset$.

   Por hipótese, $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, com G subespaço vetorial de E e $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Além disso, toda função é uma extensão trivial de si mesma. Logo, $g \in P$ e, consequentemente, P não é vazio.

   Agora, considere em P a relação "$\leq$"definida da seguinte maneira: para $h_1, h_2 \in P$, temos que

   $h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)$ e $h_2 \mid_{D(h_1)} = h_1$(isto é, h_2 é uma extensão de h_1 em $D(h_1)$.).

   Segue de propriedades de conjuntos e de funções que, munido da relação $\leq$, P é um conjunto parcialmente ordenado. Afirmamos que

2. P é indutivo

   Seja $Q \subset P$ subconjunto de P totalmente ordenado. Nesse caso,

$$Q = \{h_i \in P;\ i \in I\},$$

   onde I é um conjunto de índices. Seja $D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$. $D(h)$ é subespaço de E. Claro que $D(h) \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $D(h)$ é fechado para adição e multiplicação por escalar. Dados $x, y \in D(h)\ e\ \ \in \mathbb{R}$ temos que

$$x \in D(h_i)\ e\ y \in D(h_j) \quad \text{para} \quad i, j \in I.$$

   Como $D(h_j)$ é subespaço, temos que $\lambda y \in D(h_j)$. Além disso, como Q é totalmente ordenado vale que

$$D(h_i) \subset D(h_j) \quad (h_i \preceq h_j)$$
$$ou$$
$$D(h_j) \subset D(h_i) \quad (h_j \preceq h_i)$$

Suponhamos sem perda de generalidade, que $D(h_i) \subset D(h_j)$ ocorra. Então $x, \lambda y \in D(h_j)$ de onde obtemos que

$$x + \lambda y \in D(h_j) \subset D(h)$$
$$\Longrightarrow x + \lambda y \in D(h)$$

mostrando que $D(h)$ é fechado para a adição e para multiplicação por escalar. Evidentemente o elemento neutro da soma está em $D(h)$ uma vez que este é uma união de subespaços vetoriais. Assim, $D(h)$ é subespaço vetorial. Considere a aplicação $h : D(h) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = h_i(x)$, se $x \in D(h_i)$. Afirmamos que h está bem definida, ou seja, se $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ então o valor de h em x é o mesmo. Como Q é totalmente ordenado, devemos ter $h_i \preceq h_j$ ou $h_j \preceq h_i$. Digamos, sem perda de generalidade, que $h_i \preceq h_j$, então $D(h_i) \subset D(h_j)$ e $h\mid_{D(h_i)} = h_i$. Portanto, uma vez que $x \in D(h_i)$,

$$h_j(x) = h_i(x).$$

Provando que h está bem definida.

Como $D(h_i) \subset D(h), \forall i \in I$ e h foi definido como extensão dos $h_i{}'s$ segue que h é majorante de Q.

Da arbitrariedade do conjunto totalmente ordenado Q, segue que P é indutivo.

Assim, segue do Lema de Zorn que P admite elemento maximal, o qual vamos chamar de f. Dessa forma, a função

$$f : D(f) \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é elemento maximal de P, isto é, se $f \leq m$, para algum elemento $m \in P$, então $m = f$.

3 Afirmamos que $D(f) = E$.

Suponha por absurdo, que $D(f) \neq E$. Assim, existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Defina

$$D(h) = D(f) \bigoplus \langle x_0 \rangle,$$

uma vez que $x_0 \notin D(f)$. Portanto, dado $y \in D(h)$ ele pode ser escrito como

$$y = x + tx_0$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in D(f)$ univocamente determinados.

$$h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha,$$

com α fixo a ser escolhido de modo que $h \in P$. Como $D(f)$ e $\langle x_0 \rangle$ são subespaços vetoriais de E, então $D(h)$ também o é; e como f estende g, também temos que h estende g. Assim, com o objetivo que h pertença à P basta obter α de modo que $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(h)$.

Note que $h \in P$ $\left(h(y) \leq p(y), \forall y \in D(h)\right)$ equivale a

$$h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f) \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}$$

ou

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Afirmamos que

(i) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - f(x), \forall x \in D(f) \tag{4.2}$$

(ii) (4.2) implica (4.1), ou melhor,

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \forall x \in D(f) \end{cases}$$

implica (4.1).

Com intuito de provar o item (i), note que, para quaisquer $x, y \in D(f)$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) = f(x + y) &\leq p(x + y) \\ &= p(x - x_0 + y + x_0) \\ &\leq p(x - x_0) + p(y + x_0) \\ \Rightarrow f(x) - p(x - x_0) &\leq p(y + x_0) - f(y), \forall x, y \in D(f). \\ \Rightarrow \sup_{\forall x \in D(f)} f(x) - p(x - x_0) &\leq \inf_{y \in D(f)} p(y + x_0) - f(y) \end{aligned}$$

Assim, basta tomar algum α satisfazendo

$$\sup_{x \in D(f)} f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} p(x + x_0) - f(x) \tag{4.3}$$

que segue (4.2).

Agora, para provar que (4.2) implica em (4.1) vamos separar em três casos:

- $t = 0$

  Então,

$$\begin{aligned} h(x + 0 \cdot x_0) = f(x) &\leq p(x) = p(x + 0 \cdot x_0) \\ h(x) &\leq p(x). \end{aligned}$$

- $t > 0$

$$
\begin{aligned}
h(y) = h(x + tx_0) &= h\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) \\
&= th\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \\
&= t\left[f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right]
\end{aligned}
$$

Utilizando (4.2), temos que

$$
f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} + x_0\right),
$$

e, portanto,

$$
h(y) = h(x + tx_0) \leq t\left[p\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right] = p\left(x + tx_0\right) = p(y),
$$

em que usamos a definição de funcional sublinear na última expressão acima.

- $t < 0$

$$
\begin{aligned}
h(y) = h(x + tx_0) &= h\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) \\
&= -th\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \\
&= -t\left[f\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha\right]
\end{aligned}
$$

Utilizando (4.2), temos que

$$
f\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha \leq p\left(\frac{x}{-t} - x_0\right),
$$

e, portanto,

$$
h(y) = h(x + tx_0) \leq -t\left[p\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right] = p\left(x + tx_0\right) = p(y),
$$

em que usamos a definição de funcional sublinear na última expressão acima.

Logo, (4.2) de fato nos leva a (4.1). Assim, fomos capazes de obter $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $h \in P$. Mas h estende f, contradizendo a maximalidade de f em P. Essa contradição foi conduzida pela suposição de que $D(f) \neq E$. Logo $D(f) = E$ e concluímos a demonstração.

■

A versão a seguir do Teorema de Hanh-Banach também é válida para espaços vetoriais definidos sobre o corpo dos números complexos. Para consultar a demonstração do teorema a abaixo veja (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012)[pg. 45]

Teorema 6. *Sejam E um espaço de Banach sobre o corpo dos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$
p(ax) = |a|p(x), \forall a \in \mathbb{K}, x \in E
$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$$

Se G é um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \to \mathbb{K}$ é um funcional linear satisfazendo $|\varphi(x)| \leq p(x)$ em G, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi}(x) : E \to \mathbb{K}$ que estende φ e tal que $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ no espaço vetorial E.

Como este trabalho se restringe ao estudo de funcionais lineares definidos sobre o conjunto dos números reais, a demonstração do resultado acima será omitida.

Note que, no enunciado do Teorema 5 não há garantias de unicidade da extensão. E realmente, sob as circunstâncias dessa versão do Teorema de Hahn-Banach a extensão pode não ser única. Vejamos exemplos.

Exemplo 18. Considere o espaço vetorial $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$, o subespaço vetorial $G = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x_1 \in \mathbb{R}\}$ e o funcional linear $g : G \to \mathbb{R}$ dado por

$$g(x_1, 0) = \frac{1}{2}x_1.$$

Note que a norma

$$p(u) = \|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ u = (x_1, x_2) \in E.$$

é um funcional sublinear que satisfaz

$$g(x_1, 0) = \frac{1}{2}x_1 \leq |x_1| = \sqrt{x_1^2} = p(x_1, 0), \forall (x_1, 0) \in G.$$

Assim, o funcional linear g satisfaz as hipóteses do Teorema 5 e, portanto, admite extensão em E.

O funcional $f_1 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1$$

estende g e também satisfaz $f_1 \leq p$ em E, pois

$$p(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{x_1^2} \geq \frac{1}{2}x_1 = f_1(x_1, x_2).$$

Por outro lado, o funcional linear $f_2 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

também estende g e satisfaz $f_2 \leq p$ em E. De fato,

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$0 \leq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$2x_1x_2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x_1x_2}{4} \leq \underbrace{\frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2)}_{\left(1-\frac{1}{4}\right)(x_1^2+x_2^2)}$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) \leq x_1^2 + x_2^2$$
$$\frac{1}{4}\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)}_{(x_1+x_2)^2} \leq x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 \leq x_1^2 + x_2^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = p(x_1, x_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq p(x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, mesmo satisfazendo as hipóteses do Teorema de Hahn-Banach, o funcional g admite ao menos duas extensões e ambas "abaixo" do mesmo funcional sublinear.

Algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach serão demonstradas a seguir. O próximo resultado é também conhecido como Teorema de Hahn-Banach, porém para espaços vetoriais normados e funcionais lineares contínuos.

Corolário 1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial normado, G um subespaço vetorial de E e $g : G \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo (isto é, $g \in G^*$). Então, existe $f \in E^*$ que estende g e tal que $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$.*

Demonstração. Como $g \in G^*$, então

$$|g(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\|_{E^*}, \text{ para todo } x \in G.$$

Sendo assim, considere o funcional sublinear $p : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|_E.$$

Claramente, $|g(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in G$. Assim, segue do Teorema de Hahn-Banach (Teorema 5) que existe um funcional linear $f \in E'$ que estende g e satisfaz

$$|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G^*}\|x\|_E, \text{ para todo } x \in E. \tag{4.4}$$

A desigualdade acima implica que $f \in E^*$, pois um funcional linear é contínuo se, e somente se, ele é limitado. Além disso, segue de (4.4) que, para $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$, temos que

$$|f(x)| \leq \|g\|_{G^*}, \tag{4.5}$$

implicando que $\|g\|_{G^*}$ é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x)| \,:\, x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$ e, consequentemente,

$$\|f\|_{E^*} \leq \|g\|_{G^*}. \tag{4.6}$$

Por outro lado, como f estende g, temos que

$$|g(x)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E^*},$$

para todo $x \in G$, com $\|x\|_G = \|x\|_E \leq 1$ e, assim,

$$\|g\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*}. \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7), segue que

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*},$$

o que finaliza a demonstração. ■

Corolário 2. *Seja E um espaço vetorial normado. Para todo $x_0 \in E$, existe um funcional linear $f_0 \in E^*$ tal que*

$$\|f_0\|_{E^*} = \|x_0\| \text{ e } f_0(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Demonstração. Primeiro note que se $x_0 = 0$, então basta tomar $f_0 \equiv 0$ que segue o desejado. Assim, vamos supor $x_0 \neq 0$. Considere o subespaço vetorial gerado por x_0, isto é, $G = \langle x_0 \rangle = \{\lambda x_0 \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ e também o funcional linear $g(\lambda x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|^2$. Queremos mostrar que g é contínuo.

Temos que

$$\begin{aligned} |g(\lambda x_0)| &= |\lambda| \cdot \|x_0\| \cdot \|x_0\| \\ &= \|\lambda \cdot x_0\| \cdot \|x_0\|, \end{aligned}$$

implicando que g é limitado e, portanto, contínuo. Mais ainda, da igualdade acima, segue que $\|g\|_{G^*} \leq \|x_0\|$. Por ouro lado, como

$$\|g\|_{G^*} \geq \frac{|g(x_0)|}{\|x_0\|} = \|x_0\|,$$

segue que $\|g\|_{G^*} = \|x_0\|$.

Agora, aplicando o Corolário 1, temos que existe $f \in E^*$ que estende g e tal que $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$. Uma vez que $x_0 \in G$ e $\|g\|_{G^*} = \|x_0\|$ segue que

$$f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$$

e

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*} = \|x_0\|,$$

provando o desejado.

■

Corolário 3. *Para todo $x \in E$, sendo E espaço vetorial normado, temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \tag{4.8}$$

Demonstração. Queremos mostrar que o supremo do conjunto $\{|f(x)| \,:\, f \in E^*, \|f\| \leq 1\}$ é atingido e vale $\|x\|$. O caso em que $x = 0$ é trivial, pois $f(0) = 0$ para qualquer $f \in E^*$ e, consequentemente, qualquer funcional $f \in E^*$ com $\|f\|_{E^*} \leq 1$ seria tal que $|f(0)|$ atingiria o supremo. Sendo assim, vamos supor $x \neq 0$.

Seja $f \in E^*$ qualquer, então usando a definição de norma,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \cdot \|x\|, \forall x \in E.$$

Assim, usando a desigualdade acima temos que, para todo $f \in E^*$ com $\|f\|_{E^*} \leq 1$ vale que

$$|f(x)| \leq \|x\|,$$

e, consequentemente,

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|$$

Pelo Corolário 2, existe $f_0 \in E^*$ tal que $\|f_0\|_{E^*} = \|x\|$ e $f_0(x) = \|x\|^2$. Sendo assim, defina $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|}$ (em que x está fixado) e note que $f_1 \in E^*$ e satisfaz $\|f_1\|_{E^*} \leq 1$, uma vez que $\|x\| = \|f_0\|_{E^*}$. Logo,

$$f_1(x) = \frac{f_0(x)}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

e, com isso,

$$\|x\| \leq \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Portanto,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = |f_1(x)| = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|,$$

provando o desejado. ■

5 O TEOREMA DE HAHN-BANACH EM ESPAÇOS SEPARÁVEIS

No curso de Análise Real, provamos não só a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$ mas também uma relação importante entre esses dois conjuntos. A grosso modo, podemos dizer que os racionais estão "em todo lugar na reta real", ou seja, independentemente do intervalo de números reais, por menor que seja, contém números racionais. Isso é o que chamamos de densidade e definiremos formalmente a seguir.

Definição 20. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que um subconjunto F de E é denso em E quando, para qualquer bola centrada em qualquer ponto de E, existem elementos de F.

Munidos com a noção de densidade, estamos aptos a definir espaços separáveis.

Definição 21. Dizemos que um espaço vetorial normado E é separável se existe um conjunto enumerável $D \subset E$ denso em E, ou, equivalentemente, se existe $D \subset E$ enumerável tal que $\overline{D} = E$ (isto é, todo elemento de E é limite de uma sequência de elementos de D).

Uma vez que todo conjunto enumerável pode ser escrito como uma sequência (Definição 23) a definição acima também é equivalente a existir uma sequência $\{x_n\} \subset E$ com $\overline{\{x_n\}} = E$.

Exemplo 19. A reta real $\mathbb{R}$ é um espaço separável, uma vez que nele está contido o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ que é enumerável e denso em $\mathbb{R}$.

O resultado a seguir nos garante que a separabilidade é uma propriedade não só da reta, mas de qualquer espaço vetorial normado de dimensão finita.

Proposição 10. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então E é separável.*

Demonstração. Suponha que $dim(E) = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para E. Então, para cada $x \in E$ existe um conjunto unicamente determinado $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ de números reais tais que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Defina o conjunto $D := \left\{x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{Q},\ \forall i = 1, 2, \dots, n\right\}$. Mostraremos que D é enumerável. Com efeito, considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T : D &\to \mathbb{Q}^n \\ x &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

em que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Note que T está bem definida, pois a combinação linear na base é única. Além disso, T é injetora, pois se $Tx = Ty$, em que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, então $\alpha_i = \beta_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$ (já que a base é um conjunto linearmente independente) e, portanto $x = y$. Por outro lado, T é sobrejetora, pois se $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$, então $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

satisfaz $Tx = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Assim, T é bijetora e, uma vez que $\mathbb{Q}^n$ é enumerável (Corolário 6 do apêndice), segue do Corolário 4 que D também é enumerável.

O conjunto D é nosso candidato a conjunto enumerável e denso em E. Com intuito de provar que $\overline{D} = E$, considere $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in E$ e $\varepsilon > 0$ qualquer, porém fixo. Uma vez que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, para cada α_i, $i = 1, \ldots, n$, existe $\beta_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|\alpha_i - \beta_i| < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}$ (o elemento β_i está suficientemente próximo de α_i). Defina

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in D.$$

Afirmamos que $\|x - y\|_E < \varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} \|x - y\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i \right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |(\alpha_i - \beta_i)| \|e_i\|_E \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|} \|e_i\|_E = \varepsilon. \end{aligned}$$

A desigualdade acima mostra que para qualquer elemento $x \in E$ e qualquer distância $\varepsilon > 0$ existe um elemento $y \in D$ cuja distância até x é menor que ε. Isso prova a densidade de D sobre E e o resultado está provado.

■

Exemplo 20. Uma consequência do teorema anterior é que o espaço $\mathbb{R}^n$ é separável.

Exemplo 21. Para $1 \leq p < \infty$, considere o espaço vetorial $\ell^p = \{x = (x_i)_1^\infty \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$. O espaço ℓ^p é separável.

Temos que $\ell^p = \{x = (x_i)_1^\infty \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$. Munido da aplicação $\| \cdot \|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, x = (x_i) \in \ell^p,$$

temos que ℓ^p é um espaço vetorial normado.

Para provarmos que ℓ^p é separável devemos estabelecer a existência de um conjunto denso e enumerável em ℓ^p.

Seja F o conjunto de todas as sequências y da forma que $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, 0, \cdots)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e y_i são números racionais. Afirmamos que F é enumerável. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o conjunto

$$F_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots) : x_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Note que a aplicação $t_n : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cdots \times \mathbb{Q} \longrightarrow F_n$ dada por

$$t_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

é bijetora. Uma vez que o cartesiano de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável, segue que F_n é enumerável. Mais ainda, como $F = \bigcup_{i=n}^{\infty} F_n$ e união enumerável de enumeráveis é enumerável, segue que, de fato, F é enumerável.

Resta provar que F é denso em ℓ^p. Com efeito, considere $x = (x_i) \in \ell^p$ arbitrário. Como $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe n (dependendo de ε), tal que

$$\underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p}_{A} < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

(A sendo o resto de uma série convergente). Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, para cada x_i existe um racional y_i suficientemente próximo, de modo que podemos encontrar $y = (y_1, y_2, \cdots y_n, 0, 0, \cdots) \in F$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|x - y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p \\ \|x - y\|_p^p &< \varepsilon^p \Rightarrow \|x - y\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto F é denso em ℓ^p e finalizamos a prova de que ℓ^p é um espaço separável.

Note que no exemplo anterior não incluímos o caso $p = \infty$. A razão disso é que, nesse caso, o espaço não é separável. Vamos analisar os detalhes a seguir.

Exemplo 22. ℓ^∞ não é separável.

Denotamos por ℓ^∞ o conjunto de todas as sequências limitadas com entradas reais. Munida da aplicação

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

temos que ℓ^∞ é um espaço vetorial normado. Tal norma é chamada de norma do supremo. Queremos mostrar que ℓ^∞ não é separável.

Seja S o conjunto das sequências formadas por 0 ou 1, isto é

$$S = \{\{x_n\} : x_n \in \{0, 1\}\}.$$

Claro que $S \subset \ell^{\infty}$, pois cada um de seus elementos é limitado por 1. Afirmamos que S é não enumerável. De fato, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre S e o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ da seguinte maneira: para cada $K \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ associamos a sequência $\{x_n\} \in S$ tal que

$$\begin{cases} x_n = 0, \text{ se } n \notin K \\ x_n = 1, \text{ se } n \in K. \end{cases}$$

E, uma vez que $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável, segue que S também o é. Também afirmamos que os elementos de S distam 1 unidade uns dos outros. De fato, se $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in S$, com x diferente de y, então

$$\|x - y\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = 1,$$

já que, se $x = \{x_n\} \neq y = \{y_n\}$, então existe pelo menos uma upla que vale 1 em uma e na outra vale 0. Por fim, note que, devido ao fato anterior, as bolas $B(x, \frac{1}{3})$ e $B(y, \frac{1}{3})$ não se intersectam para elementos $x, y \in S$, $x \neq y$.

Isso mostra que não poderia haver um conjunto enumerável e denso em ℓ^{∞}, pois é impossível colocar pelo menos um elemento de um conjunto enumerável em cada uma dessas bolas disjuntas de raio $1/3$ sabendo que existe uma quantidade não-enumerável delas.

Agora que conhecemos o conceito de separabilidade e alguns exemplos importantes, estamos aptos a enunciar e provar o Teorema de Hahn-Banach para espaços separáveis.

Teorema 7 (Teorema de Hahn-Banach para espaços separáveis)**.** *Sejam E um espaço separável e G um subespaço de E com* $g \in G^*$*. Então existe* $f \in E^*$ *tal que* f *estende* g *e* $\|g\|_{G^*} = \|f\|_{E^*}$.

Demonstração. Como E é separável, existe $F = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ tal que $\overline{\{x_n\}} = E$.

Defina a seguinte sequência de conjuntos

$$G_n = \begin{cases} G, \ \ se \ \ n = 0 \\ G_{n-1} + \langle x_n \rangle, n \geq 1, \end{cases}$$

em que $\langle x_n \rangle = \{\lambda x_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço vetorial gerado pelo elemento x_n e $G_n = \{x + \lambda x_n : x \in G_{n-1} \ e \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue da Proposição 2 que cada G_n é subespaço vetorial de E.

Considere também a seguinte sequência (f_n) de aplicações

$$\begin{aligned} & f_0 : G_0 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad f_0(x) = g(x), \ \forall x \in G_0 = G \\ & f_n : G_n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad f_n(x + \lambda x_n) = f_{n-1}(x) + \lambda \alpha_n, \ \forall x \in G_{n-1} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

em que os escalares α_n serão escolhidos, de modo que

$$f_n(x + \lambda x_n) \leq \|g\|_{G'} \|x + \lambda x_n\|. \tag{5.1}$$

Note que, da linearidade de g, segue que cada funcional f_n é linear. Como constatamos na demonstração do Teorema 5, basta escolher α_n satisfazendo

$$\sup_{x \in F_{n-1}} (f_{n-1}(x) - \|g\|_{G^*} \|(x - x_n)\|) \leq \alpha_n \leq \inf_{x \in F_{n-1}} (\|g\|_{G^*} \|(x + x_n)\| - f_{n-1}(x)),$$

lembrando que, neste caso, o funcional sublinear é tomado como $p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|$, para $x \in E$, similarmente ao Corolário 1. Podemos, simplesmente, fixar para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \inf_{x \in F_{n-1}} (\|g\|_{G^*} \|(x + x_n)\| - f_{n-1}(x))$$

Assim, vale (5.1), e consequentemente, $f_n \in G_n^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, defina $f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = f_n(x), \quad x \in G_n.$$

Primeiro note que $\mathcal{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ é subespaço vetorial de E, uma vez que cada G_n é subespaço vetorial de E. Além disso, f está bem definida, uma vez que cada funcional f_n estende o funcional f_{n-1}. Dessa forma, f é um funcional linear contínuo que estende g. Gostaríamos de estender f a todo o espaço vetorial E. Para isso, vamos primeiro verificar que

1) $\overline{\mathcal{F}} = E$

De fato, como

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G + \langle x_1 \rangle + \cdots + \langle x_n \rangle \supset \{x_n\},$$

então $\overline{\{x_n\}} \subset \overline{\mathcal{F}}$ e, como e $\overline{\{x_n\}} = E$, por hipótese, segue que $E = \overline{\mathcal{F}}$.

Logo, $\mathcal{F}$ é denso em E. Assim, para todo $x \in E$, existe $(a_n) \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = x$$

isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \|a_n - x\|_E = 0$$

Queremos estender f a todo o espaço E, da seguinte maneira

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n),$$

para alguma sequência $(a_n) \subset \mathcal{F}$ tal que $a_n \to x$ em E.

Para isso devemos mostrar que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n)$ converge para qualquer sequência $(a_n) \subset \mathcal{F}$ com $a_n \to x$ em E e o limite independe da sequência que converge para x.

Com efeito de provar os fatos acima, mostraremos que

2) $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é de *Cauchy* e, portanto, converge.

Sejam $m \geq n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
f(a_n) - f(a_m) &= f(a_n - a_m) \\
&\leq p(a_n - a_m) \\
&= \|g\|_{G'} \|a_n - a_m\|_E \\
-(f(a_n) - f(a_m)) = f(a_m) - f(a_n) &= f(a_m - a_n) \\
&\leq p(a_m - a_n) \\
&= \|g\|_{G'} \|a_m - a_n\|_E \\
f(a_n) - f(a_m) &\geq -\|g\|_{G'} \|a_m - a_n\|_E,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$|f(a_n) - f(a_m)| \leq \|g\|_{G'} \|a_m - a_n\|_E. \tag{5.2}$$

Uma vez que (a_n) converge, então (a_n) é de Cauchy. Assim, usando este fato e passando (5.2) ao lim com $n \to +\infty$, (e consequentemente $m \to +\infty$) temos que

$$|f(a_n) - f(a_m)| \longrightarrow 0$$

Logo $\{f(a_n)\}$ é de Cauchy e converge, uma vez que $\mathbb{R}$ é completo.

Vamos chamar $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$.

3) Se

$$\begin{aligned}
\|a_n - x\| &\longrightarrow 0 \\
a_n &\longrightarrow x \text{ em } E \text{ e} \\
\|b_n - x\| &\longrightarrow 0 \\
b_n &\longrightarrow x \text{ em } E,
\end{aligned}$$

então $f(a_n) \longrightarrow f(x)$ e $f(b_n) \longrightarrow f(x)$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
f(a_n) - f(b_n) &= f(a_n - b_n) \\
&\leq \|g\|_{G'} \|a_n - b_n\| \\
-(f(a_n) - f(b_n)) = f(b_n) - f(a_n) &\leq \|g\|_{G'} \|b_n - a_n\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 \leq |f(a_n) - f(b_n)| &\leq \|g\|_{G'} \|b_n - a_n\| \\
&= \|g\|_{G'} \|b_n - x - a_n + x\| \\
&\leq \|g\|_{G'} \|b_n - x\| + \|a_n - x\|.
\end{aligned}$$

Isso implica que $|f(a_n) - f(b_n)| \to 0$. Assim,

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |f(b_n) - f(x) + f(x) - f(a_n)| \geq |f(b_n) - f(x)| - |f(a_n) - f(x)|$$

ou equivalentemente

$$|f(a_n) - f(b_n)| + |f(a_n) - f(x)| \geq |f(b_n) - f(x)|.$$

Passando a desigualdade acima ao limite com $n \to +\infty$ e usando que $|f(a_n) - f(b_n)| \to 0$ e $|f(a_n) - f(x)| \to 0$, segue que

$$f(b_n) \to f(x)$$

quando $n \to +\infty$. Provando o desejado.

■

Note que existe muita semelhança entre o o teorema 7 e o corolário 1. De primeiro momento parece que a única diferença entre eles é que o teorema que acabamos de demonstrar possui a hipótese adicional de separabilidade, enquanto que o corolário não assume tal hipótese. A verdade é que o teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis possui a propriedade adicional de não utilizar em sua demonstração o Axioma da escolha (isto é, o Lema de Zorn), o que agrada muito matemáticos que não apreciam o uso de tal resultado. Adicionar a hipótese de separabilidade do espaço vetorial E permite uma construção mais direta e evitar o uso do Lema de Zorn, tornando a demonstração mais acessível e intuitiva.

6 O TEOREMA DE HAHN-BANACH EM ESPAÇOS DE HILBERT

Outra versão importante do Teorema de Hahn-Banach é em espaços de Hilbert. Nesse caso, como veremos, o resultado garante unicidade da extensão. Antes de enunciar e provar o resultado, exibiremos conceitos e propriedades importantes acerca de espaços de Hilbert.

Definição 22. Um espaço métrico completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um *espaço de Hilbert* é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

O resultado a seguir é um clássico quando se trata de espaços de Hilbert e será fundamental na demonstração do Teorema de Hahn-Banach em espaços de Hilbert e na garantia da unicidade da extensão.

Teorema 8. *(Representação de Riesz) Sejam H um espaço de Hilbert e f um funcional linear contínuo, ou seja, $f \in H^*$. Então existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H. \tag{6.1}$$

Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Oliveira (2012, pg. 135), Teorema 19.1. ■

O Teorema da Representação de Riesz nos garante que todo funcional linear contínuo definido em um espaço de Hilbert H é da forma $x \mapsto \langle x, y \rangle$, para algum $y \in H$.

Teorema 9. *(Teorema de Hahn-Banach para espaços de Hilbert) Sejam H um espaço de Hilbert, $G \subset H$ subespaço vetorial fechado de H e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo. Então existe um único funcional linear $f \in H^*$, tal que f estende g e $\|f\|_{H*} = \|g\|_{G*}$.*

Demonstração. Uma vez que G é subespaço vetorial fechado de H, temos que G também é um espaço de Hilbert (pois um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo (LIMA, 1983, p 184 - Proposição 6)). Sendo assim, segue do Teorema da Representação de Riesz que existe um único $y \in G$ tal que

$$g(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in G$$

e

$$\|g\|_{G^*} = \|y\|.$$

Note que se $y = 0$, então $g \equiv 0$ e sua extensão única é o funcional nulo em H. Assim, vamos supor que $y \neq 0$. Defina o funcional linear contínuo $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$$

Evidentemente f estende g por ter a mesma lei de formação de g. Mais ainda, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \forall x \in H$$

e, assim

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \leq \|y\| = \|g\|_{G^*}.$$

Por outro lado,

$$\|g\|_{G^*} = \|y\| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leq \|f\|_{H*},$$

e as duas desigualdades imediatamente acima implicam que

$$\|f\|_{H^*} = \|g\|_{G^*}.$$

Para provar a unicidade, suponhamos que exista $h \in H$, $h \neq f$, tal que h estende g e $\|h\|_{H^*} = \|g\|_{G^*}$. Nesse caso, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $z \in H$ tal que

$$h(x) = \langle x, z\rangle, \forall x \in H$$

e

$$\|h\|_{H^*} = \|z\|.$$

Como h e f são extensões de g, temos que

$$h(x) = \langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle = f(x),$$

para todo $x \in G$. Assim,

$$\langle y, z\rangle = \langle y, y\rangle = \|y\|^2.$$

Usando a igualdade acima e o seguinte fato

$$\|y\| = \|g\|_{G*} = \|h\|_{H^*} = \|z\|$$

temos que

$$\|z-y\|^2 = \langle z-y, z-y\rangle = \|z\|^2 - 2\langle z, y\rangle + \|y\|^2 = \|z\|^2 - 2\|y\|^2 + \|y\|^2 = \|z\|^2 - \|y\|^2 = 0,$$

e consequentemente $z = y$. Isso mostra que $h \equiv f$ e implica na unicidade da extensão. ■

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordamos o Teorema de Hahn-Banach e suas aplicações na Análise Funcional. Esse teorema é de suma importância nessa área, e nosso objetivo foi fornecer uma compreensão clara e detalhada sobre o assunto, mesmo considerando a falta de ênfase nos estudos de Análise Funcional durante a graduação.

Apresentamos um breve contexto histórico, definições, exemplos, demonstrações e corolários relacionados ao teorema. Além disso, utilizamos conceitos de Álgebra Linear, como espaços métricos, espaços vetoriais e funcionais lineares, para servir como intermediadores na compreensão do Teorema de Hahn-Banach.

É importante ressaltar que o Teorema de Hahn-Banach desempenha um papel fundamental na análise funcional, ao estender funcionais lineares definidos em subespaços para todo o espaço vetorial, preservando certas propriedades importantes. Isso permite a formulação de resultados mais gerais e facilita o estudo de problemas complexos.

Acreditamos que o nosso objetivo foi alcançado, pois conseguimos apresentar de maneira clara e bastante detalhada toda a teoria necessária para a compreensão das ramificações da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach.

Esperamos que esse trabalho sirva de motivação para a realização de outros trabalhos na área. Como sugestão, poderia se trabalhar o Teorema de Hahn-Banach em sua forma geométrica, que também é uma excelente ferramenta da Análise Funcional. Esse tema é mais avançado e precisa de mais pré-requisitos já que, em geral, a teoria da Análise Funcional é apresentada aos discentes somente em cursos de pós-graduação na área de matemática.

Desejamos que este trabalho sirva como um recurso útil para futuros estudos matemáticos que buscam conhecer de maneira mais detalhada o Teorema de Hahn-Banach.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, Geraldo Márcio Azevedo; PELLEGRINO, Daniel Marinho; TEIXEIRA, Eduardo Vasconcelos. **Fundamentos da Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado nas pp. 12, 13, 15, 23, 35, 40.

BREZIS, Haim. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer, 2011. v. 2. Citado nas pp. 12, 13, 23, 35.

DI PRISCO, C.A. **Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas**. UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciência, 1997. (Col. CLE). Citado nas pp. 12, 36.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley & Sons, 1991. v. 17. Citado na p. 12.

LIMA, Elon Lages. **Algebra Linear**. IMPA, 2014. Citado nas pp. 12, 23.

________. **Análise real. 11a edição**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Citado na p. 12.

________. **Curso de Análise Vol. 1**. 14º: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2009. Citado nas pp. 12, 35, 56, 57.

________. **Espaços métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4. Citado nas pp. 12, 13, 52.

MENEZES, Afonso Henrique Novaes et al. **Metodologia científica: teoria e aplicação na educação a distância**. Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina-PE, 2019. Citado na p. 11.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. **Historia Mathematica vol. 22 iss. 3**, v. 22, 3 1995. DOI: `10.1006/hmat.1995.1025`. Citado na p. 10.

OLIVEIRA, Cesar Rogério de. **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Projeto Euclides). Citado na p. 52.

PULINO, Petronio. **Algebra Linear e suas Aplicações Notas de Aula**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2012. Citado na p. 18.

APÊNDICE A – RESULTADOS COMPLEMENTARES

Este capítulo tem por finalidade exibir alguns conceitos e resultados complementares que, apesar de coadjuvante mediante o tema apresentado, são essenciais para a boa compreensão do texto.

A seguir, realizaremos uma breve revisão sobre enumerabilidade. Os resultados podem ser encontrados com mais detalhes em (LIMA, 2009).

Definição 23. Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, isto é, existe uma bijeção entre X e o conjunto dos números naturais. No último caso, dizemos que o conjunto é infinito enumerável e podemos escrever os elementos de X como uma sequência $\{x_n = f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

A menos que haja confusão, escreveremos apenas enumerável para indicar tanto conjuntos finitos quanto conjuntos infinitos enumeráveis.

Alguns resultados importantes sobre enumerabilidade serão enunciados a seguir. Algumas demonstrações serão omitidas, entretanto, podem ser encontradas em Lima (2009, pg. 48-54)

Corolário 4. *Se X é enumerável e existe uma função $g : X \rightarrow Y$ bijetora, então Y também é enumerável.*

Demonstração. O caso em que X é finito é imediato, então provaremos o caso em que X é infinito. De fato, se X é enumerável, então existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Uma vez que composta de bijeções é bijeção, segue que a aplicação $h = g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ é bijetora. Logo, usando a definição acima concluímos que Y é enumerável. ■

Exemplo 23. O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é enumerável, bastando considerar a bijeção $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & se\ \ z \geq 0 \\ 2(-z) - 1, & se\ \ z < 0 \end{cases}$$

Teorema 10. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável. Mais ainda, um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Vide Lima (2009, pg. 49-50) ■

Teorema 11. *Se X é um conjunto enumerável e existe $f : X \rightarrow Y$ sobrejetora, então Y também é enumerável.*

Demonstração. Vide Lima (2009, pg. 50) ■

Teorema 12. *Sejam X, Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Vide Lima (2009, pg. 50) ■

Corolário 5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Como $\mathbb{Z}$ é enumerável, então, pelo Teorema 10, os inteiros não nulos $\mathbb{Z}^*$ também o são. Assim, segundo o Teorema 12, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é um conjunto enumerável. Assim, considerando a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(p,q) = \frac{p}{q}$, temos que tal aplicação é claramente sobrejetora uma vez que $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$. Assim, segue do Teorema 11 que $\mathbb{Q}$ é enumerável. ■

O corolário a seguir nos fornece uma informação muito importante: que união enumerável de conjuntos enumeráveis também é enumerável.

Corolário 6. *Se os conjuntos $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ são enumeráveis, então a reunião $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ também é enumerável. Mais ainda, o produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis também é enumerável.*

É preciso ficar atento quanto ao corolário acima, pois não é verossímil que o produto cartesiano de uma quantidade enumerável de conjuntos infinitos enumeráveis continua sendo enumerável. Pelo contrário, esse conjunto é não-enumerável (veja) o corolário do Teorema 11 em Lima (2009, pg. 52-53)