



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARRAIAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**THIAGO APARECIDO DA SILVA**

**O SURGIMENTO DA TRIGONOMETRIA: OS MÉTODOS DE HIPARCO E  
PTOLOMEU NA CONSTRUÇÃO DAS PRIMEIRAS TABELAS  
TRIGONOMÉTRICAS**

**Arraias (TO)  
2022**

**Thiago Aparecido da Silva**

**O surgimento da Trigonometria: os métodos de Hiparco e Ptolomeu na construção das primeiras tabelas trigonométricas**

Monografia avaliada e apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins, Câmpus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática, para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Prof. Me. Adriano Rodrigues

Arraias (TO)  
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

S586s Silva, Thiago Aparecido da.  
O surgimento da Trigonometria: os métodos de Hiparco e Ptolomeu na construção das primeiras tabelas trigonométricas. / Thiago Aparecido da Silva. – Arraias, TO, 2022.  
79 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus  
Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.  
Orientador: Adriano Rodrigues

1. Trigonometria. 2. Astronomia. 3. Hiparco. 4. Ptolomeu. I. Título

CDD 510

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

**Thiago Aparecido da Silva**

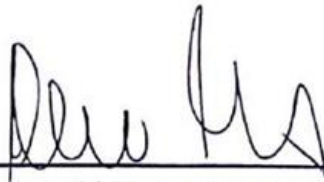
**O surgimento da Trigonometria: os métodos de Hiparco e Ptolomeu na construção das primeiras tabelas trigonométricas**

Monografia avaliada e apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins, Câmpus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática, para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

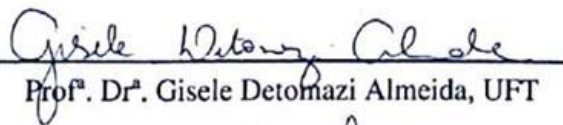
Orientador: Prof. Me. Adriano Rodrigues

Data de Aprovação: 30/06/2022.

Banca Examinadora:



Prof. Me. Adriano Rodrigues, UFT  
Orientador



Prof.ª Dr.ª Gisele Detomazi Almeida, UFT



Prof. Dr. Kaled Sulaiman Khidir, UFT

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida, por seu amor incondicional, por me dar a cada dia a perseverança, a saúde, a coragem e a força para continuar buscando novos aprendizados e ultrapassar os obstáculos encontrados.

Aos meus pais, Valdir e Maria, por todo amor, paciência, cuidado e preocupação que têm comigo. Por se esforçarem para permitir que eu alcance meus objetivos. Também agradeço a minha namorada Vitória, que acima de tudo é uma grande amiga, e esteve presente em todos os momentos, me incentivando. Sou quem sou pois vocês sempre estiveram e estão ao meu lado.

Agradeço ao meu professor orientador Adriano Rodrigues por toda paciência, pelo compromisso com este trabalho, pelos ensinamentos, confiança, conversas, direcionamentos, questionamentos e incentivos, que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional e na construção deste trabalho.

Deixo também um agradecimento aos professores e professoras do curso de Licenciatura em Matemática. Vocês me inspiram a me tornar um profissional melhor a cada dia. Também aos funcionários da Universidade Federal do Tocantins, que contribuíram direta e indiretamente para a minha formação. A instituição eu agradeço pelo ambiente propício ao crescimento profissional e pessoal.

Agradeço aos colegas do curso, que estiveram comigo em todos esses anos e pelas grandes amizades conquistadas. De forma especial, aos meus amigos Arielle, Guilherme, Jordana e Renato, pela amizade, pelo apoio demonstrado ao longo de toda essa jornada, pois sempre estiveram ao meu lado.

E agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a minha formação e para concretizar este trabalho.

*“Sem a matemática, não poderia haver astronomia;  
sem os recursos maravilhosos da astronomia, seria  
completamente impossível a navegação. E a navegação  
foi o fator máximo do progresso da humanidade.”*

*(Amoroso Costa)*

## RESUMO

A Trigonometria é uma importante área da Matemática, que foi usada desde os primórdios da sua criação como auxiliar à Astronomia. Este trabalho apresenta um estudo das obras de dois matemáticos da antiguidade, Hiparco e Ptolomeu. Tendo como objetivo analisar os métodos utilizados por eles na construção de suas Tábuas de Cordas e fazer um levantamento histórico destes dois pesquisadores. Para este fim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e descritiva para aquisição de conhecimento necessário para o objeto de estudo e responder a questão de pesquisa: “quais foram os passos e métodos adotados nos primórdios desses estudos, por Hiparco e Ptolomeu, para a construção das suas Tábuas de Cordas?”. Verificou-se que os métodos de Hiparco dão origem a uma Tábua de Cordas, que é referente à atual tabela trigonométrica. Enquanto os métodos de Ptolomeu, dão origem a uma Tábua de Cordas mais completa que a de Hiparco. Buscou-se compreender os métodos empregados nas construções, analisando o contexto histórico e as aplicações, além da produção matemática em si. Estas Tábuas foram importantes para diversas áreas da ciência, apresentando aplicações cotidianas, que contribuíram para o desenvolvimento das sociedades como um todo. A partir desses resultados podemos entender como ocorreu uma das etapas que foram base para a Trigonometria, e com isso entender que esta teve seu desenvolvimento de modo gradativo.

**Palavras-chaves:** Trigonometria. Astronomia. Hiparco. Ptolomeu.

## **ABSTRACT**

Trigonometry is an important branch of Mathematics, which has been used since the beginning of its creation as an aid to Astronomy. This work presents a study of the works of two mathematicians of antiquity, Hipparchus and Ptolemy. Aiming to analyze the methods used by them in the construction of their Tables of Chords and to make a historical survey of these two researchers. To this end, a bibliographic and descriptive research was carried out to acquire the necessary knowledge for the object of study and answer the research question: “what were the steps and methods adopted in the early days of these studies, by Hipparchus and Ptolemy, for the construction of your Tables of Chords?”. It was found that Hipparchus methods give rise to a Table of Chords, which is related to the current trigonometric table. While Ptolemy’s methods, give rise to a more complete Table of Chords than that of Hipparchus. We sought to understand the methods used in the constructions, analyzing the historical context and applications, in addition to the mathematical production itself. These Tables were important for several areas of science, presenting everyday applications, which contributed to the development of societies. From these results we can understand how one of the steps that were the basis for Trigonometry occurred, and with that to understand that it had its development in a gradual way.

**Keywords:** Trigonometry. Astronomy. Hipparchus. Ptolemy.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Plimpton 322 .....	16
Figura 2 – Papiro de Rhind .....	17
Figura 3 – Hiparco de Nicéia .....	20
Figura 4 – Astrolábio .....	21
Figura 5 – Duas representações de Hiparco em seu observatório .....	22
Figura 6 – Cálculo da Distância Terra-Lua .....	24
Figura 7 – Cálculo da Distância Terra-Lua .....	24
Figura 8 – Definição de Corda .....	26
Figura 9 – Definição de Arco .....	26
Figura 10 – Seno, Cosseno e Tangente .....	27
Figura 11 – Comprimento da Corda e o Seno .....	27
Figura 12 – Comprimento da Corda e o Seno .....	28
Figura 13 – Corda de $60^\circ$ .....	30
Figura 14 – Corda de $90^\circ$ .....	31
Figura 15 – Fórmula da corda do Ângulo Suplementar .....	32
Figura 16 – Fórmula da corda do Ângulo Suplementar .....	32
Figura 17 – Corda de $\alpha$ e de seu suplementar .....	33
Figura 18 – Corda de $\alpha$ e de seu suplementar .....	34
Figura 19 – Corda de $\alpha$ e de seu suplementar .....	34
Figura 20 – Corda de $\alpha$ e de seu suplementar .....	35
Figura 21 – Cláudio Ptolomeu .....	43
Figura 22 – O Almagesto, de Ptolomeu .....	44
Figura 23 – Decágono regular inscrito na circunferência .....	46
Figura 24 – Corda de $36^\circ$ .....	47
Figura 25 – Cálculo da corda de $60^\circ$ .....	48
Figura 26 – Cálculo da corda de $72^\circ$ .....	49
Figura 27 – Cálculo da corda de $90^\circ$ .....	51
Figura 28 – Fórmula da corda do Arco suplementar .....	51
Figura 29 – Teorema de Ptolomeu .....	52
Figura 30 – Fórmula da diferença de dois arcos .....	53
Figura 31 – Fórmula da Corda do arco Metade .....	54
Figura 32 – Fórmula da Soma de Dois Arcos .....	56
Figura 33 – Teorema para corda de $1^\circ$ .....	57
Figura 34 – Esquema para esboço de um polígono de 720 lados .....	64
Figura 35 – Esquema para esboço de um polígono de 720 lados .....	64
Figura 36 – Hans Lippershey e sua Luneta .....	66

Figura 37 – A Luneta de Galileu .....	67
Figura 38 – Órbitas dos Planetas e dos objetos celestes iluminados, segundo os gregos .	67
Figura 39 – Solstícios e Equinócios.....	68
Figura 40 – Modelo de Solstícios e Equinócios por Hiparco .....	69
Figura 41 – Medida do Raio da Terra .....	70
Figura 42 – Cálculo da medida do Raio da Terra .....	71
Figura 43 – Paralaxe Trigonométrica .....	76
Figura 44 – Paralaxe Trigonométrica .....	77
Figura 45 – Paralaxe Trigonométrica .....	78
Figura 46 – Medida do Raio Linear do Sol.....	79

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tábua de Cordas de Hiparco .....	42
Tabela 2 – Tábua de Cordas de Ptolomeu- Parte 1 .....	61
Tabela 3 – Tábua de Cordas de Ptolomeu - Parte 2 .....	62
Tabela 4 – Datas dos Solstícios e Equinócios no Hemisfério Sul em 2022 .....	68

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Letra grega alfa
$\beta$	Letra grega beta
$\varepsilon$	Letra grega épsilon
$\theta$	Letra grega teta
$\pi$	Número pi

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>UM POUCO DA HISTÓRIA</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>HIPARCO</b>	<b>20</b>
<b>3.1</b>	<b>Métodos de Hiparco</b>	<b>25</b>
3.1.1	Determinação do raio	29
3.1.2	Corda de $60^\circ$	30
3.1.3	Corda de $90^\circ$	31
3.1.4	Fórmula da corda do Ângulo Suplementar	31
3.1.5	Fórmula da corda do Ângulo Metade	33
<b>3.2</b>	<b>Reconstrução da Tábua de Cordas de Hiparco</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>PTOLOMEU</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Métodos de Ptolomeu</b>	<b>45</b>
4.1.1	Construção e cálculo da corda de $36^\circ$	46
4.1.2	Construção e cálculo da corda de $60^\circ$	48
4.1.3	Construção e cálculo da corda de $72^\circ$	49
4.1.4	Construção e cálculo da corda de $90^\circ$	50
4.1.5	Fórmula da Corda do Arco Suplementar	51
4.1.6	Demonstração do Teorema de Ptolomeu	52
4.1.7	Fórmula da diferença de dois arcos	53
4.1.8	Fórmula da corda do arco metade	54
4.1.9	Fórmula da soma de dois arcos	55
4.1.10	Cálculo da corda de $1^\circ$	57
<b>4.2</b>	<b>Reconstrução da Tábua de Cordas de Ptolomeu</b>	<b>58</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DAS TÁBUAS DE CORDAS</b>	<b>63</b>
<b>5.1</b>	<b>Astronomia</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>73</b>
	<b>APENDICE A - PARALAXE TRIGONOMÉTRICA E RAIOS LINEAR DO SOL</b>	<b>76</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A presente monografia, apresenta uma etapa da criação da Trigonometria e conseqüentemente da Matemática. Esta se desenvolveu de modo gradativo e contínuo ao longo da história, e com a Trigonometria, que é uma de suas áreas, não foi diferente. Um dos acontecimentos que mais contribuiu para o desenvolvimento desse ramo, foi a construção das primeiras Tábuas de Cordas, que são referentes às Tabelas Trigonométricas atuais. Uma Tabela Trigonométrica tem por objetivo fornecer a relação dos valores de seno, cosseno e tangente pelo seu respectivo ângulo. Porém, a utilização e aplicações da Trigonometria não se restringem apenas à Matemática, é muito utilizada na Engenharia, Física e Astronomia, por exemplo.

A construção das Tábuas de Cordas está ligada à Matemática Grega, entre os séculos III a.C. e IV d.C., com os pesquisadores Hiparco de Nicéia e Cláudio Ptolomeu. A Trigonometria não surgiu no modelo tal qual conhecemos, porém, hoje, está bem desenvolvida, com métodos concretos e conceitos bem definidos. Todavia, há diferenças notáveis entre o que conhecemos hoje e a sua forma na época em questão, pelo próprio desenvolvimento que aconteceu. Houve todo um estudo através de Hiparco, Ptolomeu e seus sucessores para que a mesma expandisse seus conceitos e resultados. Dessa forma, esse trabalho tem por intuito responder a questão: Quais foram os passos e métodos adotados nos primórdios desses estudos, por Hiparco e Ptolomeu, para a construção das suas Tábuas de Cordas?

Essa monografia, tem por objetivo geral, estudar dos métodos utilizados por Hiparco e Ptolomeu para a construção de suas respectivas Tábuas de Cordas. Ademais, como objetivos específicos, apresentar algumas aplicações das mesmas, e fazer um levantamento bibliográfico sobre os dois pesquisadores. Entender esses métodos será importante para que, além de conhecer o processo histórico em que esse ramo da Matemática se desenvolveu, esse estudo possa proporcionar um interesse para a ampliação de estudos na área, bem como pode contribuir para que surjam novos resultados aplicáveis para a Matemática.

Para alcançar tais objetivos, foi adotada a pesquisa bibliográfica; pela sua finalidade se trata de uma pesquisa básica, desenvolvida para o aprofundamento do conhecimento científico que já foi estudado sobre o tema; sobre os objetivos é considerada pesquisa descritiva; com uma abordagem qualitativa como procedimento metodológico, para a investigação sobre os conhecimentos necessários.

No capítulo 2, será abordado o contexto histórico da época, obras que serviram de base para os dois pesquisadores e alguns objetos que serão importantes para o estudo dos métodos que serão descritos.

No terceiro capítulo, será apresentado um levantamento bibliográfico sobre Hiparco de Nicéia e alguns de seus estudos. Em seguida, o estudo dos métodos que acredita-se que o

mesmo tenha utilizado na construção da sua Tábua de Cordas. Por fim, a reconstrução completa da mesma, utilizando os métodos.

No quarto capítulo, também será apresentado um levantamento bibliográfico sobre Ptolomeu e sua principal obra, o *Almagesto*. Em seguida, o estudo dos métodos que o mesmo utilizou na construção da sua Tábua de Cordas. Por fim, a reconstrução parcial da mesma, exemplificando o uso dos métodos.

No quinto e último capítulo, serão apresentadas algumas aplicações das Tábuas de Cordas, na Matemática e na Astronomia.

## 2 UM POUCO DA HISTÓRIA

Neste capítulo, iremos apresentar uma síntese do contexto histórico em que esse ramo da Matemática se desenvolveu. A criação da Trigonometria foi um marco muito importante que impulsionou o desenvolvimento desta e de outras áreas do conhecimento, porém suas origens são incertas. O que podemos dizer é que não foi obra de um só homem ou de um único período histórico, pois foi construída a partir das contribuições de diversos pesquisadores, ao longo de vários séculos.

Segundo Mendes e Rocha (2010, p. 13), a palavra Trigonometria significa medida de triângulos, e se trata do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. O principal fator que impulsionou o desenvolvimento dos estudos nesta área foi a necessidade de se ter um recurso que fosse explorado para contribuir na resolução de problemas cotidianos das sociedades da época. Tais problemas relacionados às navegações, agricultura e Astronomia. Para planejar e executar as construções, era preciso calcular, por exemplo, o tamanho de um bloco de pedra, de uma árvore, a altura das pirâmides. Para realização dessas tarefas, os matemáticos da época utilizavam procedimentos que se baseavam em dois conceitos: semelhança de triângulos e razão entre dois números.

As origens da Trigonometria se remetem às civilizações Egípcia e Babilônica, por volta de 3000 a.C. a 260 d.C., como destacado, utilizada para ajudar a solucionar problemas cotidianos destes povos. Com isso, mesmo que não sejam considerados como fundadores da Trigonometria, estes dois povos apresentaram contribuições que foram base para sua “criação”, cerca de 15 séculos depois, na Grécia. Uma dessas contribuições está na posterior utilização do sistema sexagesimal, usado pelos babilônios, pois o número 60 tem mais divisores que 10, por exemplo, usado na base decimal.

- **Divisores de 10:** 1, 2, 5 e 10.
- **Divisores de 60:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

O sistema de numeração sexagesimal ainda é utilizado atualmente, principalmente nas medidas de tempo, como, por exemplo, a definição de hora, minuto e segundo; em coordenadas geográficas, Latitude e Longitude; e na medida de ângulos. Este sistema representa os números usando valor posicional, para isso se firmaram na base 60, ou seja, era necessário 60 algarismos diferentes, de 0 a 59. Será empregado a notação de decimais e sexagesimais mistos, pois a maioria dos resultados apresentados neste trabalho serão mencionados com esta notação. A diferença dessa variação para o sistema sexagesimal é que, para a parte inteira não são usados apenas algarismos entre 0 e 59.

Um número em sistema decimal, possui a parte inteira e a parte decimal. O número  $\sqrt{2}$ , por exemplo, que equivale a 1,4142135..., possui parte inteira igual a 1 e decimal igual a 0,4142135....



A equação 1 apresenta um número escrito em notação sexagesimal (a direita da igualdade):

$$a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3} + \frac{e}{60^4} + \dots = a; b, c, d, e, \dots \quad (1)$$

Onde  $a$  é a parte inteira, que é separada da parte decimal por ponto e vírgula “;”. A parte decimal,  $b, c, d, e, \dots$  são números entre 0 e 59 e são separados apenas por vírgula.

Exemplos:

- O número 3, 14, pode ser escrito como 3; 8, 24, pois

$$3; 8, 24 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{24}{60^2} = 3, 14.$$

- $365; 15 = 365 + \frac{15}{60} = 365 + \frac{1}{4} = 365, 25.$

Com isso, para converter números do sistema decimal para o sistema sexagesimal (misto), basta conservar a parte inteira, que será o “ $a$ ” e multiplicar a parte decimal por 60 sucessivamente até encontrar um número inteiro. Veja o exemplo.

Converter o número 67,4525 para notação sexagesimal (mista):

1. A parte inteira, ou seja, o número antes do ponto decimal, será o  $a$ .

Logo  $a = 67$ .

2. Multiplique a parte decimal por 60, a parte inteira do resultado será o  $b$ , ou seja, o número antes da vírgula do resultado.

$$0,4525 \cdot 60 = \mathbf{27, 15}.$$

Logo o  $b = 27$ .

3. Repita o processo, multiplicando por 60, a parte inteira do resultado será o  $c$ .

$$0,15 \cdot 60 = \mathbf{9}$$

Logo  $c = 9$ . Como obtemos um número inteiro, basta substituir os valores encontrados para  $a, b$  e  $c$  do lado direito da equação 1

$$\text{Portanto } 67,4525 = 67 + \frac{27}{60} + \frac{9}{60^2} = 67; 27, 9.$$

Para converter um número em notação sexagesimal (misto) para decimal, basta analisar quem é  $a, b, c, \dots$ , colocar na forma do lado esquerdo de 1 e realizar os cálculos. Veja o exemplo convertendo o número 1024; 14, 06 para notação decimal:

1. Analisando o número, temos que  $a = 1024, b = 14$  e  $c = 06$ .

2. Colocando na forma, como em 1

$$a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} \Leftrightarrow 1024 + \frac{14}{60} + \frac{06}{60^2} \Leftrightarrow$$

$$1024 + \frac{7}{30} + \frac{1}{600} = 1024,235.$$

As contribuições destes povos foram de grande importância, contudo, a maioria dos registros e das obras se perderam, em razão do tempo ou dos meios nos quais foram escritas ou cunhadas. A maioria do que sobrou está em tábuas de barro ou em papiros, e boa parte destes, contém símbolos ou fragmentos relacionados a Matemática. Sendo consideradas os dois dos mais importantes e mais conhecidos artefatos da época a Tabela Plimpton 322 e o Papiro de Rhind.

A Tabela Plimpton 322, acredita-se ter sido escrita no século XVIII a.C., na Babilônia. Como já citado, surgindo a necessidade de cálculos para resolver problemas cotidianos da sociedade, principiou a utilização de comprimentos de corda, raízes e cálculos de área, por exemplo. Silva (2017) afirma que os egípcios já conheciam o Teorema de Pitágoras e as relações métricas em um triângulo retângulo. Sobre a Plimpton 322, ele afirma que “Ela consiste de três colunas praticamente completas de caracteres que contém ternas pitagóricas; isto é números que representam a medida da hipotenusa e de um cateto de triângulos retângulos cujos três lados têm medida inteira”.

Sobre a história desse artefato, Cristo (2018) afirma que

O editor nova-iorquino George A. Plimpton comprou o tablete a partir de um vendedor de arqueologia, Edgar J. Banks, provavelmente em 1922, e o doou com o resto de sua coleção para Columbia University, no meio da década de 1930. De acordo com os Banks, os tabletes vieram de Senkereh, um local ao sul do Iraque correspondente à antiga cidade de Larsa (CRISTO, 2018).

Figura 1: Plimpton 322



Fonte: (CRISTO, 2018)

Ele completa apresentando sua descrição,

Plimpton 322 é um tablete de argila parcialmente quebrado medindo cerca de 13 centímetros de largura, 9 centímetros de altura, e 2 centímetros de espessura.[...]possui uma tabela de 4 colunas e 15 linhas de números em escrita cuneiforme do período. Pesquisadores de Sydney, em 2017, concluíram que as quatro colunas e as 15 fileiras de cuneiformes representam a tabela de trabalho trigonométrico mais antiga e mais precisa do mundo, uma ferramenta de trabalho que poderia ter sido usada na topografia e no cálculo de templos, palácios e pirâmides (CRISTO, 2018).

O Papiro de Rhind foi escrito por volta do ano de 1650 a.C., pelo escriba Ahmes e encontrado no século XVIII d.C. em escavações no Egito. O papiro com 0,32 m de largura e 5,5 m de comprimento, foi comprado em 1858, pelo escocês Henry Rhind, por isso o nome Papiro de Rhind.

Silva (2017) afirma que

...foi escrito em hierático (uma simplificação dos hieróglifos, lia-se da direita para a esquerda), e contém uma série de tabelas nas quais constam os quocientes de vários tipos de divisão de números naturais, e ainda 84 problemas envolvendo fatos da vida cotidiana acompanhados de suas soluções (SILVA, 2017).

Figura 2: Papiro de Rhind



Fonte: Matemática.br <sup>1</sup>

Considerados como dois dos primeiros a fazerem uso de conhecimentos matemáticos, os povos egípcios e babilônicos, a utilizavam para a resolução de problemas práticos cotidianos. Silva (2017), a classifica como Matemática Empírica,

A matemática empírica se caracteriza como uma coleção de problemas (exemplos) concretos e práticos associados a atividades práticas como transações comerciais, administração, agricultura, etc. Para os quais se apresentam soluções, aproximações e ou cálculos elaborados em termos de valores numéricos específicos (SILVA, 2017).

<sup>1</sup>Disponível em: <https://www.matematica.br/historia/prhind.html>. Acesso em: 21 mar. 2022.

A partir de tal classificação, podemos verificar que até então, a Matemática era escassa de teorias, métodos que generalizavam essas aplicações ou teoremas. Considerados como os herdeiros dos conhecimentos matemáticos dos povos citados, os gregos mudaram este cenário, fazendo da matemática uma ciência que apresentava teoria e prática.

Mas, o que satisfazia egípcios e babilônios não bastou para contentar a exigência grega. Com os matemáticos da Grécia, a razão suplanta a *empeiria* como critério de verdade e a matemática ganha características de uma ciência dedutiva (EUCLIDES, 2009, p. 77)<sup>2</sup>.

Essa época, conhecida como o Período Helenístico, iniciado por volta do ano 323 a.C., teve como marco as conquistas de Alexandre, o Grande, que dentre outros feitos, com a expansão do seu território, promoveu, de modo indireto, o compartilhamento de diversos saberes entre povos, promovendo assim um intenso progresso da ciência. Este foi um período histórico onde a Matemática tomou estrutura inicial do que compreendemos hoje, baseada em teoremas, demonstrações e axiomas. Com isso, nesta época surgiram obras que revolucionaram a ciência. No ramo da geometria, por exemplo, podemos citar a famosa obra *Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a.C.). Esta obra é o segundo livro mais traduzido da história, o primeiro é a Bíblia. Segundo Kilhian (2010) *Os Elementos* é uma obra composta por 13 livros, ele destaca que

Os treze livros cobrem a geometria euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementar. Parece que Euclides pretendia reunir três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão (KILHIAN, 2010).

Joyce (c1996, apud KILHIAN, 2010), apresenta a disposição dos assuntos de cada livro:

- Livro I: Os fundamentos da geometria: teorias de triângulos, paralelos e área.
- Livro II: Álgebra geométrica.
- Livro III: Teoria dos círculos.
- Livro IV: Construções para figuras inscritas e circunscritas.
- Livro V: Teoria das proporções abstratas.
- Livro VI: Figuras e proporções semelhantes em geometria.
- Livro VII: Fundamentos da teoria dos números.
- Livro VIII: Proporções contínuas na teoria dos números.
- Livro IX: Teoria dos Números.

---

<sup>2</sup>Trecho da Introdução de Irineu Bicudo.

- Livro X: Classificação dos incomensuráveis.
- Livro XI: Geometria sólida.
- Livro XII: Medição de figuras.
- Livro XIII: Sólidos regulares.

Euclides (2009, p. 83)<sup>3</sup>, destaca que “Tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase por completamente, os rastros dos que o precederam”.

Na época em questão, filosofia e religião davam justificava aos fenômenos naturais que aconteciam, onde por muito tempo, a humanidade acreditou na visão Geocêntrica do Universo. “Geo” significa “Terra”, ou seja, a palavra Geocentrismo consiste na ideia de que a Terra seria o centro do Universo e os demais astros a estariam orbitando.

Não há como discorrer sobre a Trigonometria, sem abordar outra área do conhecimento, a Astronomia. Onde a primeira foi utilizada desde os primórdios como auxiliar da segunda. O principal material de estudo sobre o conhecimento antigo está sintetizado na obra mais importante sobre Astronomia da antiguidade, produzida por um dos pesquisadores que será foco desse trabalho, Claudio Ptolomeu, essa obra se chama *Almagesto*, que foi base dos estudos na área por mais de mil anos e até hoje mostra sua importância.

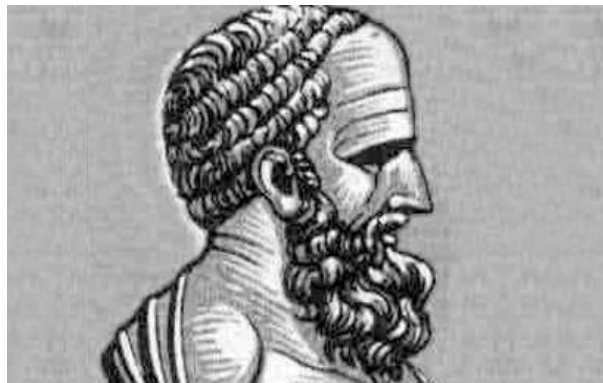
---

<sup>3</sup>Trecho da Introdução de Irineu Bicudo.

### 3 HIPARCO

Hiparco de Nicéia foi um astrônomo e matemático da antiguidade, nascido por volta de 190 a.C., na cidade grega de Nicéia, hoje Iznik, na atual Turquia, e falecido por volta de 120 a.C., em Rodes. Há relatos que teria vivido a maioria da sua vida nesta última, por isso, é também conhecido por Hiparco de Rodes. Hiparco é considerado o primeiro cientista que aplicou a Matemática às observações astronômicas, mais especificamente, a Geometria à Astronomia.

Figura 3: Hiparco de Nicéia



Fonte: (GUIMARÃES, 2021)

Segundo O'Connor e Robertson (1999),

É comum não encontrar muitos dados sobre a vida de um matemático grego, mas com Hiparco a posição é um pouco incomum, pois, apesar de Hiparco ser um matemático e astrônomo de grande importância, temos decepcionantemente poucos detalhes definitivos de seu trabalho. Apenas uma obra de Hiparco sobreviveu, conhecida como *Comentário sobre Arato e Eudoxo* e esta certamente não é uma de suas principais obras. No entanto, é importante porque fornece a única fonte dos próprios escritos de Hiparco (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, Tradução nossa)<sup>4</sup>.

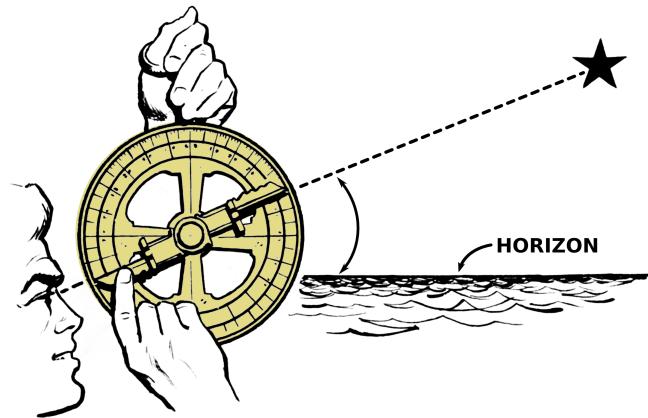
Ele é considerado, hoje, como o “pai da Trigonometria” e também como o fundador da Astronomia científica. Tal atribuição se deve ao fato de ter sido ele o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica, uma tábua de cordas, que possui os valores de uma série de ângulos, associados à corda correspondente. Esta tábua seria uma precursora das tabelas trigonométricas. Apresentaremos a definição de corda na seção 3.1 sobre os métodos de Hiparco.

<sup>4</sup>No original: It is not too unusual to have few details of the life of a Greek mathematician, but with Hipparchus the position is a little unusual for, despite Hipparchus being a mathematician and astronomer of major importance, we have disappointingly few definite details of his work. Only one work by Hipparchus has survived, namely *Commentary on Aratus and Eudoxus* and this is certainly not one of his major works. It is however important in that it gives us the only source of Hipparchus's own writings.

Mark destaca que,

Quer Hiparco tenha inventado ou desenvolvido a trigonometria, ele é reconhecido como o primeiro a fazer amplo uso de seus princípios na criação de modelos astronômicos. É possível que, usando trigonometria, ele tenha inventado o astrolábio, um modelo do universo usado para calcular movimentos planetários e eclipses. Embora tenha rejeitado o modelo heliocêntrico de Aristarco, ele reconheceu o valor de suas estimativas do tamanho e da distância da Terra do Sol e da Lua e melhorou-as através de cálculos matemáticos mais precisos (MARK, 2022, Tradução nossa)<sup>5</sup>.

Figura 4: Astrolábio



Fonte: Wikipedia<sup>6</sup>

Além desses resultados, é atribuído a Hiparco a elaboração de um catálogo estelar com cerca de 850 estrelas, sendo considerado um dos mais completos e precisos da época. Este catálogo é tão importante, pois, o mesmo teria atribuído a cada estrela, um brilho, ou seja, ele fundou uma escala de brilhos, que conhecemos hoje como escala de magnitude, que é utilizada atualmente. As determinações das medidas foram muito precisas para os padrões da época. Segundo Steiner (2019, Informação verbal), este catálogo de estrelas foi o único catálogo que perdurou por quase 2 mil anos, sendo superado apenas no Renascimento por astrônomos como Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642).

É atribuído a ele a construção de alguns objetos relacionados a Astronomia que contribuíram para alguns de seus estudos. Por exemplo, ele construiu um globo onde representava as constelações que o mesmo observava. Acredita-se que a partir dessas

<sup>5</sup>No original: Whether Hipparchus invented or developed trigonometry, he is recognized as the first to make ample use of its principles in creating astronomical models. It is possible that, using trigonometry, he invented the astrolabe, a model of the universe used for calculating planetary movements and eclipses. Although he rejected Aristarchus' heliocentric model, he recognized the value of his estimates of the size and distance from the Earth of the Sun and Moon and improved upon them through more precise mathematical calculations.

<sup>6</sup>Disponível em: [https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Astrolabe\\_\(PSF\).png](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Astrolabe_(PSF).png). Acesso em: 22 maio 2022.

observações, ele determinou os movimentos planetários e calculou a precessão dos equinócios, e a duração de um ano, obtendo o resultado com alta precisão. Sobre o *mecanismo de Antikythera*, um dispositivo mecânico acionado por uma manivela que movia uma série de engrenagens, acredita-se que sua utilização está ligada a fazer previsões, como, por exemplo de eclipses e a posição dos planetas, Mark (2022) sugere que provavelmente Hiparco foi o criador do mecanismo, pois ele era contemporâneo da data de fabricação do mesmo, por volta de 150 a 100 a.C.

Figura 5: Duas representações de Hiparco em seu observatório



Fonte: Onda Regional <sup>7</sup>

Hiparco é mais famoso pela descoberta da **precessão dos equinócios**, que se deve à lenta mudança na direção do eixo de rotação da Terra. Segundo Steiner (2019, Informação verbal) “é um pequeno gíngado que o eixo da Terra faz no período de 26000 anos[...] que é algo que parece quase impossível [realizar estes cálculos] de alguém fazer com instrumentos tão rudimentares” .

Segundo Souza,

Equinócio representa o momento em que nenhum dos polos está inclinado em relação ao Sol, o qual incide diretamente sobre a linha do Equador. Isso significa que os raios solares incidem com a mesma intensidade no dois hemisférios, conseqüentemente, os dias e as noites têm a mesma duração (SOUZA, s.d.).

Sobre as tentativas de Hiparco calcular a duração do ano,

Existem duas definições diferentes de um “ano” para um pode levar o tempo que o sol leva para retornar ao mesmo lugar entre as estrelas fixas ou pode-se levar o tempo antes que as estações se repitam, o que é um período de tempo definido considerando os equinócios. O primeiro deles é chamado de

<sup>7</sup>Disponível em: <https://www.orm.es/programas/el-rompeolas/el-rompeolas-mirando-al-cielo-hiparco-de-nicea/>. Acesso em: 24 maio 2022.



ano sideral, enquanto o segundo é chamado de ano tropical (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, Tradução nossa)<sup>8</sup>.

Swerdlow (1979, apud O'CONNOR; ROBERTSON, 1999), sugere que Hiparco usou dados babilônicos para calcular a duração do ano tropical, que resultou em  $365\frac{1}{4}$  dias, menos  $\frac{1}{300}$  de um dia. Ou seja, ele obteve, para a duração do ano tropical, o resultado de:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300} \cong 365,246667 \text{ dias.}$$

Isso equivale a 365 dias, 5 horas, 55 minutos e 12 segundos. O valor considerado atual é de 365,2425 dias ou  $365 + \frac{97}{400}$  dias, que equivale a 365 dias, 5 horas, 49 minutos e 12 segundos. Logo, a diferença das duas estimativas da duração do ano tropical é de 6 minutos por ano, ou seja, 10 horas por século.

Para o ano sideral, Hiparco (s.d.) afirma que mesmo não sendo comprovado tal valor para sua duração, astrólogo Vettius Valens no século I, apresenta que o valor encontrado por Hiparco é de

$$365 + \frac{1}{4} + \frac{1}{288} \cong 365,2534722 \text{ dias.}$$

Isso equivale a 365 dias, 6 horas e 5 minutos. A estimativa moderna é cerca de 365 dias, 6 horas, 9 minutos e 22 segundos, ou 365,2565 dias.

Com todo o debate sobre os sistemas Geocêntrico e Heliocêntrico, consideram que Hiparco foi um dos primeiros a calcular um sistema Heliocêntrico. Porém, o mesmo teria chegado a conclusão que seus cálculos mostraram que as órbitas não eram perfeitamente circulares. Mas esta era uma ideia obrigatória pela ciência da época, por isso o mesmo não continuou seus estudos e os abandonou.

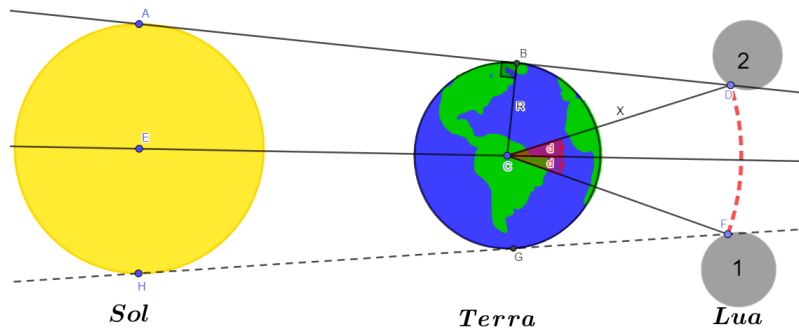
Outro cálculo de grande importância que atribuem a Hiparco, foi o cálculo da distância da Terra à Lua. Hoje tal tarefa é vista como algo simples, devido os equipamentos e a tecnologia atual. Segundo Araújo (2018), “Um poderoso feixe de luz é apontado para nosso satélite e se reflete num espelho colocado lá em uma das missões Apollo. Um sensor, então, capta a luz que volta e mede o tempo que ela levou para percorrer todo o caminho”. Para medir a distância com outros planetas tal método não é eficaz, pois a luz irá se espalhar. Com isso, os astrônomos devem recorrer a Matemática e através da observação da movimentação do corpo, aplicar fórmulas trigonométricas relacionadas aos triângulos formados entre a Terra, o Sol e o planeta em questão. Foi de tal forma que Hiparco calculou a distância entre a Terra e a Lua, usando métodos trigonométricos, para isso usou como base o tempo de duração de um eclipse lunar, de aproximadamente 100 minutos. As informações que seguem se baseiam em Procopio (2015).

A partir do esquema, fora de escala, apresentado na figura 6, observe o movimento da

<sup>8</sup>No original: There are two different definitions of a “year” for one might take the time that the sun takes to return to the same place amongst the fixed stars or one could take the length of time before the seasons repeated which is a length of time defined by considering the equinoxes. The first of these is called the sidereal year while the second is called the tropical year.

Lua durante o eclipse, mostrando suas posições. Sendo 1 a posição inicial, e 2 a final;  $R$  é a medida do raio da Terra, pois a distância entre a Terra e a Lua foi calculada em função deste  $R$ ;  $X = \overline{CD}$  é a medida a ser encontrada. Sabendo também que a duração da órbita da Lua ao redor da Terra era de aproximadamente 27,3 dias. Com o esquema é possível verificar que a duração do eclipse equivale a duas vezes o ângulo  $d$  (em vermelho), pois é o período em que a Lua estará na “sombra da Terra”. Esse período é determinado como o espaço em que a Lua estará entre, ou em contato, com as retas que passam por  $AB$  e  $GH$ , que tangenciam a Terra nos pontos  $B$  e  $G$ , respectivamente. Condição necessária para que ocorra um eclipse lunar, segundo Boczko (1984, p. 278). Dessa forma  $BC \perp AD$ .

Figura 6: Cálculo da Distância Terra-Lua



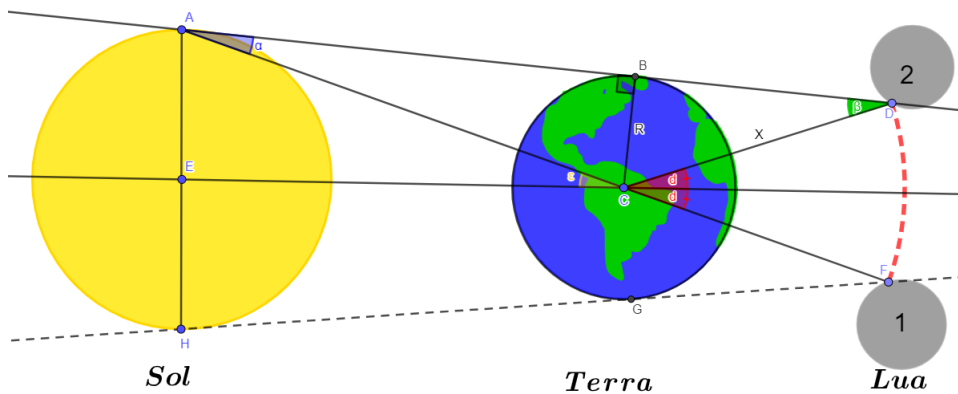
Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Logo podemos usar a seguinte razão:

$$\frac{2d}{100 \text{ min}} = \frac{360^\circ}{27,3 \text{ dias}} \Rightarrow d \approx 0,5^\circ.$$

Na figura 7,  $\alpha$  é o ângulo formado pelos segmentos  $AC$  e  $AD$  (em azul);  $\epsilon$  formado por  $AC$  e  $CE$  (em amarelo); e  $\beta$  o ângulo formado por  $AD$  e  $CD$  (em verde). Segundo Boczko (1984, p. 276),  $\beta$  é chamado *paralaxe da Lua*.

Figura 7: Cálculo da Distância Terra-Lua



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Encontrando uma equação que relacione  $d$  à  $\beta$ , temos que, tomando  $\theta = \widehat{ACD}$  como o suplementar de  $2d$ , a relação será dada por,

$$\alpha + \theta + \beta = \varepsilon + \theta + d \Rightarrow \alpha + \beta = \varepsilon + d.$$

Porém, como  $\alpha$  é um valor muito pequeno, ele foi desconsiderado, logo  $\beta = \varepsilon + d$ . Contudo, o ângulo  $\varepsilon$  é o semidiâmetro angular do Sol, valendo aproximadamente  $0,25^\circ$ . Então  $\beta = 0,25^\circ + 0,5^\circ \Rightarrow \beta = 0,75^\circ$ .

Em notação moderna, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(0,75^\circ) &= \frac{R}{X} \Rightarrow X = \frac{R}{\text{sen}(0,75^\circ)} \Rightarrow \\ X &\approx 76R. \end{aligned}$$

Hiparco sabendo que os cálculos não foram estritamente precisos, e que desconsiderou  $\alpha$ , ele assumiu que,

$$62R < X < 74R.$$

Hoje sabemos que  $54R < X < 64R$  é a aproximação atual, porém ao comparar os resultados e sabendo que o mesmo não teve acesso a nenhum método tecnológico avançado, praticamente observação e cálculo, é possível concluir que se trata de um resultado com alto grau de precisão para a época.

Acredita-se que Ptolomeu tenha estudado minuciosamente os trabalhos de Hiparco. Através disso, usou estes resultados para ampliar tais estudos, e eventualmente os aperfeiçoou. Vale destacar que nem todos os trabalhos que Ptolomeu desenvolveu, ou que estão presentes no *Almagesto*, derivam de estudos de Hiparco.

Toomer (1973?, apud O'CONNOR; ROBERTSON, 1999), afirma que:

...é muito provável que Hiparco tenha sido o primeiro a construir uma tabela de cordas e, assim, fornecer uma solução geral para problemas trigonométricos. Uma evidência disso é que, antes de Hiparco, não existiam tabelas astronômicas baseadas em métodos geométricos gregos. Se for assim, Hiparco não foi apenas o fundador da trigonometria, mas também o homem que transformou a astronomia grega de uma ciência puramente teórica em uma ciência prática e preditiva (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, Tradução nossa)<sup>9</sup>.

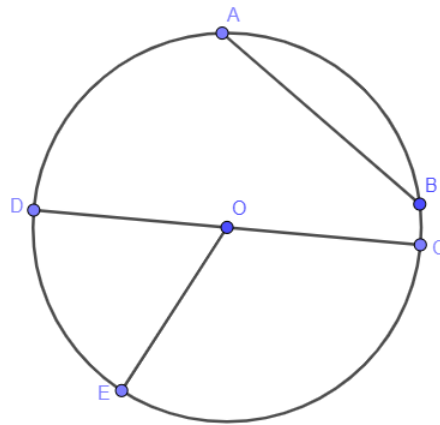
### 3.1 Métodos de Hiparco

Hiparco foi um matemático que dentre outros trabalhos, escreveu sobre o cálculo do comprimento de cordas. Segundo Silva (s.d.), em uma circunferência, as cordas podem ser

<sup>9</sup>No original: ...it seems highly probable that Hipparchus was the first to construct a table of chords and thus provide a general solution for trigonometrical problems. A corollary of this is that, before Hipparchus, astronomical tables based on Greek geometrical methods did not exist. If this is so, Hipparchus was not only the founder of trigonometry but also the man who transformed Greek astronomy from a purely theoretical into a practical predictive science.

compreendidas como segmentos de reta que ligam dois pontos distintos de sua borda, também escreve que o diâmetro é uma corda que contém o centro, com isso a maior corda possível, é o diâmetro. Vale destacar que o centro não é ponto da circunferência. Com isso podemos visualizar na figura 8 que na circunferência de centro  $O$ ,  $AB$  é uma corda;  $CD$  é o diâmetro, ou seja, é a maior corda e a que contém o centro; e  $OE$  não é corda, mas sim o raio da circunferência.

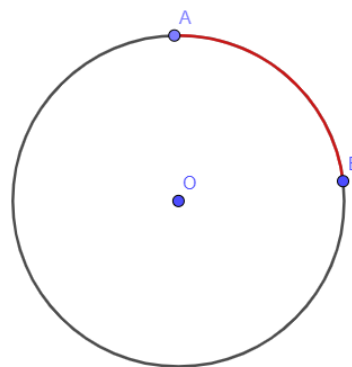
Figura 8: Definição de Corda



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Em uma circunferência, a parte limitada por dois pontos, se denomina arco. Na figura 9 a parte limitada pelos pontos A e B (em vermelho), é o arco  $AB$ .

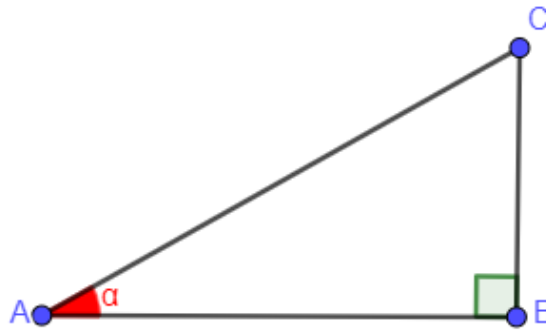
Figura 9: Definição de Arco



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Conforme destaca Alves (2019, p. 11), sendo dado um triângulo retângulo  $ABC$  com um ângulo agudo  $\alpha$  (em vermelho), conforme a figura 10, onde  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $\overline{AC}$  é a hipotenusa,  $\overline{AB}$  o cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  e  $\overline{BC}$  o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ .

Figura 10: Seno, Cosseno e Tangente



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

As relações trigonométricas serão definidas como:

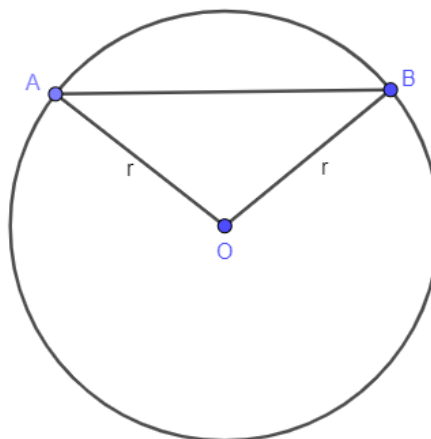
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$$

É importante destacar que o seno de um arco não é a sua corda. O seno da metade do arco é a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo. Eves (2004, p. 203) destaca que uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos atual. Considerando para isso um círculo de raio  $r$  e centro  $O$ , e um arco  $AB$ , conforme a figura 11.

Figura 11: Comprimento da Corda e o Seno

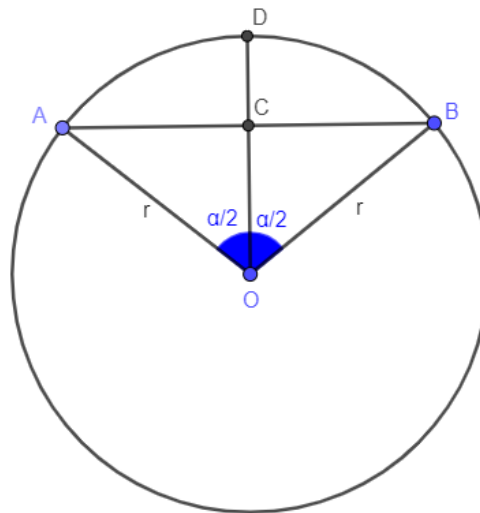


Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Na figura 12,  $\widehat{AOB}$  determina o ângulo  $\alpha$ . Tomando o ponto  $D$  na circunferência, de modo que  $OD$  esteja sobre a bissetriz de  $\widehat{AOB}$ , temos que o arco  $AD$  é igual ao arco  $DB$ , dessa forma  $\widehat{AOD} = \widehat{DOB} = \frac{\alpha}{2}$ .

Sendo  $C$  a interseção entre  $OD$  e  $AB$ . Como  $\overline{AO} = \overline{BO}$ ,  $AOB$  é um triângulo isósceles. Dessa forma, pelas propriedades,  $OC \perp AB$ , com isso  $ACO$  determina um triângulo retângulo, pois  $\widehat{ACO} = 90^\circ$ .

Figura 12: Comprimento da Corda e o Seno



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Dessa forma, como o seno de um ângulo se dá pela relação entre o cateto oposto pela hipotenusa, neste caso, o seno do ângulo  $\frac{\alpha}{2}$  será dado pela divisão de  $\frac{\overline{AB}}{2}$  pelo raio da circunferência  $r$ . Logo, equivale a atual relação:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r} = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \frac{1}{r} \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\overline{AB}}{2r} \Leftrightarrow \\ 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \overline{AB}. \end{aligned} \quad (2)$$

Como já abordado, os trabalhos deste pesquisador se perderam e não há registros sobre todos, porém, Hiparco (s.d.) cita um comentário de Theon de Alexandria, na seção I.10 do Almagesto, no século 4, sugerindo que Hiparco teria desenvolvido a sua tabela de cordas em um trabalho chamado de *Tōn en kuklōi eutheiōn* ( *Das linhas dentro de um círculo* ).

A seguir, os métodos que Hiparco utilizou para construir sua Tábua de Cordas. As informações que se seguem, inclusive as notações, se baseam nos textos de Nogueira (2013) e Oliveira (2010).

### 3.1.1 Determinação do raio

Para a construção da sua tabela trigonométrica, Hiparco seguiu alguns passos que foram primordiais. O primeiro foi a determinação do raio da circunferência. Para determinar seus métodos, acredita-se que o mesmo utilizou resultados dos trabalhos de outros estudiosos, como Arquimedes (287-212 a.C.), Hipsícles de Alexandria (190-120 a.C) e Pitágoras (570-495 a.C.). Também é plausível adotar a ideia de que Hiparco tenha conhecido a obra de Euclides, já que o segundo era antecessor do primeiro e mesmo não sendo evidenciado, na recriação de seus métodos, alguns passos parecem derivar dos trabalhos de Euclides. Ele considerou que:

- $2\pi r$  é o perímetro de uma circunferência de raio  $r$ ;
- o círculo é dividido em 360 partes iguais, influenciado pelas ideias de Hipsícles, que dividiu o dia em 360 partes;
- o diâmetro está dividido em 120 partes;
- Por se tratar da análise em círculos, Hiparco usou a seguinte aproximação sexagesimal para  $\pi$ :  $3;8,30 = \frac{3}{60^0} + \frac{8}{60^1} + \frac{30}{60^2} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3.141666667$

Consideram que Hiparco, utilizou a notação sexagesimal oriunda do povo babilônico para notar as medidas dos comprimentos das cordas da sua tabela. Cada uma dessas 360 partes recebeu o nome de arco de um grau ( $1^\circ$ ). Com isso, ele dividiu um grau em 60 partes iguais, a sexagésima parte de um grau foi nomeado arco de um minuto ( $1'$ ). Cada arco de um minuto também foi dividido em outras 60 partes iguais, recebendo o nome de arco de um segundo ( $1''$ ), ou seja, o arco de um segundo é a sexagésima parte de um minuto. Com tais informações, Hiparco calculou o raio da circunferência da seguinte forma:

Como  $2\pi r$  é o perímetro  $P$  de uma circunferência de raio  $r$ , logo

$$P = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{P}{2\pi}.$$

Como  $P$  é igual a  $360^\circ$ , transformando graus em minutos e usando sua aproximação para  $\pi$

$$r = \frac{360^\circ \times 60'}{2 \times 3;8,30}$$

Note que

$$360 \times 60' = 6 \times 60^2 + 0 \times 60^1 + 0 \times 60^0 = \mathbf{21600'}$$

e

$$2 \times 3;8,30 = 6;16,60 = 6;17 = 6 \cdot 60 + 17 = \mathbf{377'}$$

logo, temos que:

$$r = \frac{21600'}{377'}$$

$$r = 57;18$$

$$r = 57 \times 60 + 18$$

$$\mathbf{r=3438}$$

Dessa forma, a circunferência utilizada por Hiparco não tinha raio unitário, e sim raio 3438.

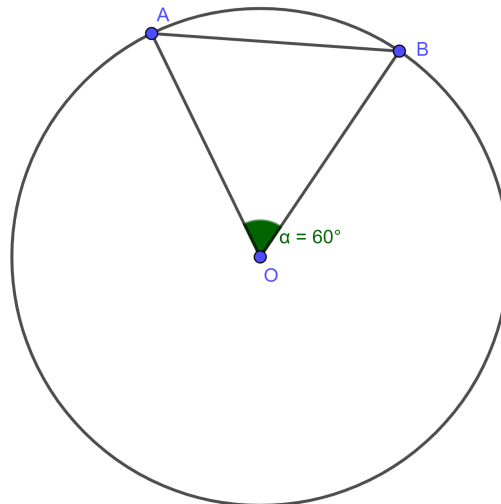
### 3.1.2 Corda de $60^\circ$

A partir de tal descoberta de um arco que tem comprimento igual ao raio é possível encontrar o valor do arco de  $60^\circ$ , da seguinte forma:

Seja uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , tomando  $A$  como um ponto qualquer desta, diferente de  $O$ , logo  $\overline{AO} = r$ . Tome, também na circunferência, um ponto  $B$  de modo que  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ . Como  $r = \overline{AO} = \overline{BO}$  garante que o triângulo formado por  $ABO$  é isósceles. Como  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ , os ângulos da base  $AB$  são iguais e valem

$$\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Figura 13: Corda de  $60^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Dessa forma os três ângulos internos do triângulo  $ABO$  são iguais a  $60^\circ$ , logo, esse triângulo é equilátero, e possui os três lados iguais, ou seja,  $\overline{AB}$  também é igual a  $r$ .

$$r = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{AB}.$$

Portanto,

$$\text{crd}(60^\circ) = \overline{AB} = r$$

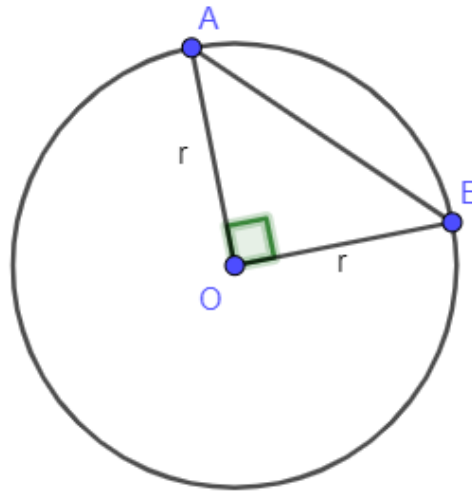
$$\text{crd}(60^\circ) = 3438.$$



### 3.1.3 Corda de $90^\circ$

De modo análogo ao cálculo da corda de  $60^\circ$ , tome  $A$  e  $B$ , numa circunferência de centro  $O$ , porém, de modo que  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ .

Figura 14: Corda de  $90^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sendo um triângulo retângulo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Como

$$\overline{AO} = \overline{BO} = r,$$

logo,

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{BO})^2 \Rightarrow$$

$$(\overline{AB})^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

Dessa forma,  $crd(90^\circ) = r\sqrt{2} = 3438 \times 1,414 = 4862 = 81;2$

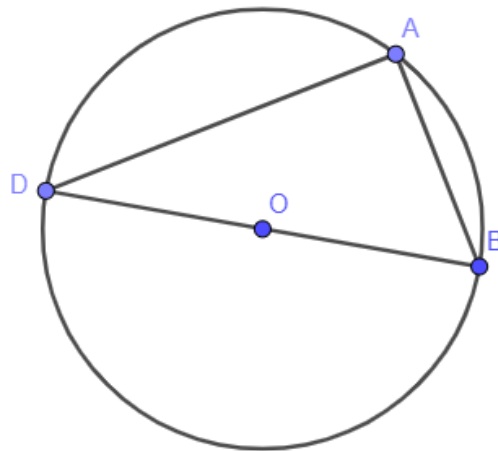
### 3.1.4 Fórmula da corda do Ângulo Suplementar

Após esses resultados, para expandir sua tabela, o próximo passo foi encontrar a fórmula do ângulo suplementar, da seguinte forma:

Considere uma circunferência de centro  $O$ , diâmetro  $BD$ , e  $A$  um ponto na mesma, diferente de  $O$ ,  $B$  e  $D$ . Estes três pontos determinam um triângulo, como na figura 15.

Como o triângulo determinado por  $ABD$  está inscrito na circunferência e a seu lado  $BD$  coincide com o diâmetro, ele satisfaz a propriedade que o caracteriza como triângulo retângulo, logo  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ .

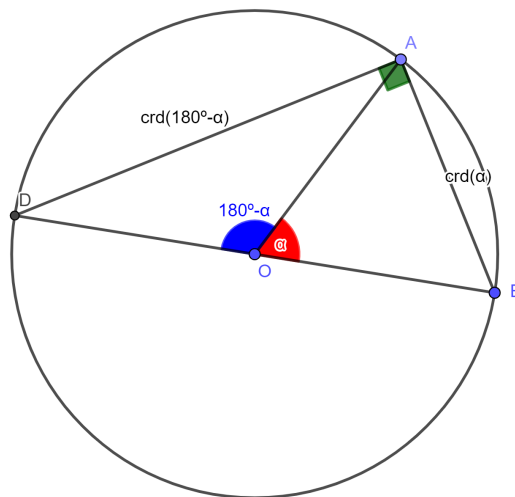
Figura 15: Fórmula da corda do Ângulo Suplementar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Traçando o segmento  $AO$ , temos que  $AB$  é a corda do ângulo  $\alpha = \widehat{AOB}$  (em vermelho), enquanto  $AD$  é a corda do suplementar de  $\alpha$ ,  $180^\circ - \alpha$  (em azul).

Figura 16: Fórmula da corda do Ângulo Suplementar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Por ser um triângulo retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras temos que:

$$crd^2(180^\circ - \alpha) + crd^2\alpha = (2r)^2,$$

isolando  $crd^2(180^\circ - \alpha)$ ,

$$crd^2(180^\circ - \alpha) = 4r^2 - crd^2\alpha.$$

Portanto,

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - crd^2\alpha}.$$

Dessa forma, com esta fórmula é possível calcular o valor da corda do ângulo suplementar, porém irá permitir calcular apenas os valores dos ângulos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Contudo, a mesma fórmula apresenta outra aplicação. Como  $crd(\alpha) = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , substituindo tal valor na fórmula acima, iremos obter:

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - \left(2r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - 4r^2 \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Logo,

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 \left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

$$crd(180^\circ - \alpha) = 2r \sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Mas como  $1 - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{cos}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ,

$$crd(180^\circ - \alpha) = 2r \sqrt{\text{cos}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Portanto,

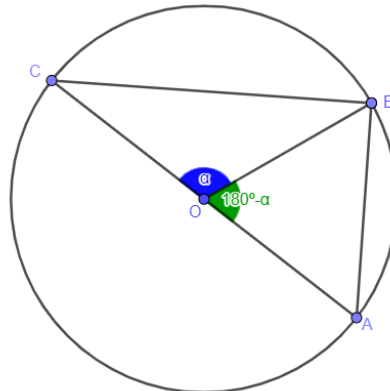
$$crd(180^\circ - \alpha) = 2r \text{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Com isso é possível observar a relação existente entre a corda do ângulo suplementar e a função cosseno.

### 3.1.5 Fórmula da corda do Ângulo Metade

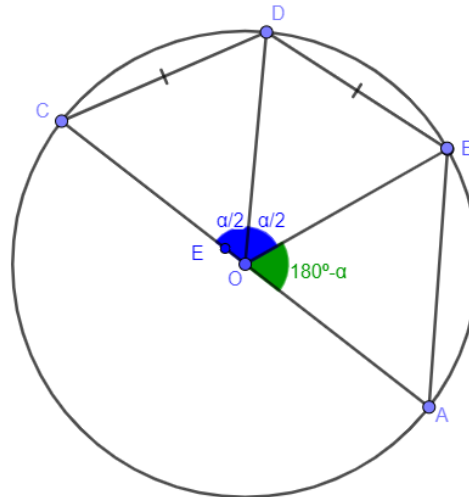
Para determinar a fórmula do ângulo metade, considere a circunferência  $C$  de centro  $O$ , diâmetro  $AC$  e uma corda  $AB$ . Chame  $\widehat{B\hat{O}C}$  de  $\alpha$ , conseqüentemente  $\widehat{B\hat{O}A}$  é o complementar de  $\alpha$  (Figura 17).

Figura 17: Corda de  $\alpha$  e de seu suplementar



Seja  $E$  um ponto sobre o diâmetro  $AC$ , de modo que  $\overline{AB} = \overline{AE}$  e o ponto  $D$  sobre a circunferência de modo que  $\widehat{C\hat{O}D}$  e  $\widehat{D\hat{O}B}$  sejam iguais a  $\frac{\alpha}{2}$ . Considere agora  $CD$  e  $BD$  as cordas de  $\frac{\alpha}{2}$ , ou seja,  $crd(\frac{\alpha}{2}) = BD = CD$ .

Figura 18: Corda de  $\alpha$  e de seu suplementar

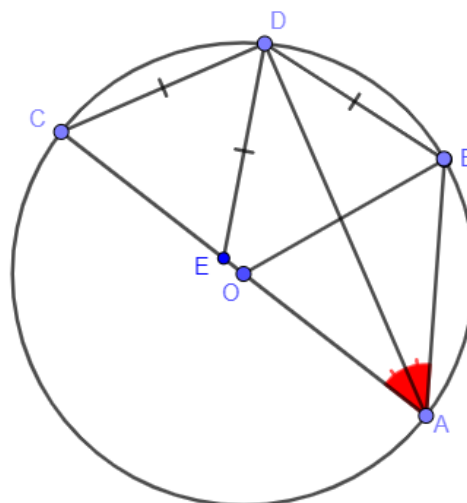


Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Como  $BD$  é corda do ângulo  $\widehat{B\hat{A}D}$  e  $CD$  é corda do ângulo  $\widehat{C\hat{A}D}$ , temos que  $\widehat{B\hat{A}D}$  e  $\widehat{C\hat{A}D}$  são iguais (Figura 19). Analisando, pelo critério de semelhança *Lado-Ângulo-Lado*, os triângulos  $AED$  e  $ABD$ , são semelhantes, pois por construção  $\overline{AB} = \overline{AE}$ ,  $\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{C\hat{A}D}$  e  $AD$  é comum aos dois triângulos.

Com isso,  $\overline{BD} = \overline{DE}$ , mas como  $\overline{BD} = \overline{DC}$ , logo, por transitividade  $\overline{DE} = \overline{DC}$ . Dessa forma,  $CDE$  determina um triângulo isósceles.

Figura 19: Corda de  $\alpha$  e de seu suplementar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Tomando  $DF$ , o segmento perpendicular à  $AC$ , a partir do ponto  $D$ . Assim:

$$\overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{CE},$$

mas  $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE}$ , logo,

$$\overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AE}) = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}). \quad (3)$$

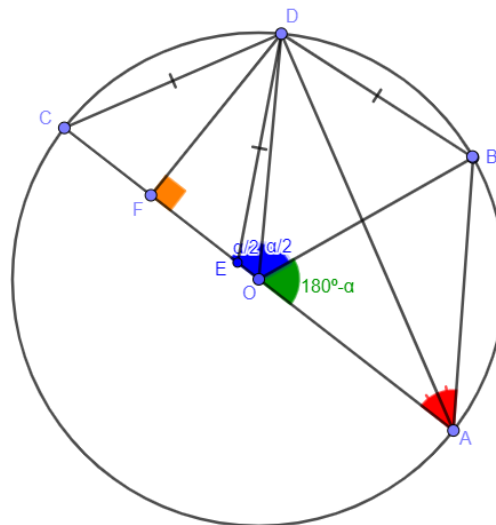
Como  $AC$  é o diâmetro da circunferência, e  $AB$  é a corda do ângulo suplementar a  $\alpha$ , então  $\overline{AC} = 2r$  e  $\overline{AB} = \text{crd}(180^\circ - \alpha)$ . Substituindo em 3.

$$\overline{CF} = \frac{1}{2}(2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha)) \quad (4)$$

Pelo critério *Ângulo-Ângulo* de semelhança de triângulos, os triângulos  $ACD$  e  $DCF$  são semelhantes, pois  $\widehat{CFD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$  e o ângulo  $C$  é comum aos dois triângulos. Daí:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CF}$$

Figura 20: Corda de  $\alpha$  e de seu suplementar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Pela figura 20, podemos verificar que  $\overline{CD} = \text{crd}(\frac{\alpha}{2})$ ,  $\overline{AC} = 2r$  e por 4, é possível reescrever a expressão acima como:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CF} \Rightarrow \text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cdot \frac{1}{2}(2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha)) = r(2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha))$$

Logo,

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - \alpha)$$

$$\text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - \alpha)}$$

Com isso foi possível obter a fórmula do arco do ângulo metade, que foi um passo muito importante para a construção das primeiras tabelas trigonométricas. A partir dos passos descritos: cálculo do valor do raio, determinação da corda do ângulo de  $60^\circ$ , determinação da corda do ângulo de  $90^\circ$ , determinação da corda do ângulo suplementar e determinação da corda do ângulo metade, foi possível construir a tabela de cordas de ângulos entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , com intervalos de  $7\frac{1}{2}^\circ$ .

A principal desvantagem de seu uso, ao contrário do de Ptolomeu, é a constante intrusão do fator 3438 nos cálculos. Tem a vantagem compensadora, no entanto, que para ângulos pequenos (até  $7\text{-}1/2^\circ$ ), a corda pode ser substituída pelo ângulo expresso em minutos (neste aspecto é análogo à medida moderna em radianos), o que simplifica muito cálculos (HIPPARCHUS, 2018, Tradução nossa)<sup>10</sup>.

Oliveira (2010) destaca que

Não há dados que comprovem como Hiparco fez sua tabela, pois muitos registros se perderam. Porém ao comentar as tabelas de Ptolomeu, no século IV, Téon de Alexandria fez referência a um tratado de doze livros que Hiparco havia escrito sobre cordas em um círculo, e que provavelmente seus métodos fossem parecidos com os utilizados posteriormente por Ptolomeu (OLIVEIRA, 2010, p. 22).

Dessa forma, é plausível adotar a ideia de que os métodos de Hiparco foram utilizados ou aprimorados por Ptolomeu. Através dos comentários deixados por estudiosos da época, é possível hoje ter uma noção de como ele os usou na construção da sua Tábua de Cordas, o que destaca a importância do *Almagesto*.

### 3.2 Reconstrução da Tábua de Cordas de Hiparco

De acordo com os métodos acima, vamos determinar a medida de cada corda. Partindo dos resultados encontrados das cordas de  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , e com isso, fazer a reconstrução completa da Tábua de Cordas de Hiparco.

- $crd(60^\circ) = 3438$
- $crd(90^\circ) = 4862$
- $crd(0^\circ) = 0$
- A corda de  $180^\circ$  é igual à duas vezes o raio:

$$crd(180^\circ) = 2r = 2 \cdot 3438 = 6875$$

<sup>10</sup>No original: The main disadvantage of its use, in contrast with Ptolemy's, is the constant intrusion of the factor 3438 in the calculations. It has the compensating advantage, however, that for small angles (up to  $7\text{-}1/2^\circ$ ), the chord can be replaced by the angle expressed in minutes (in this respect it is analogous to modern radian measure), which greatly simplifies computations.

- A corda de  $45^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $90^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}(45^\circ) &= \text{crd}\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 90^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(45^\circ) &= \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 4862} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(45^\circ) &= 2631 \end{aligned}$$

- A corda de  $135^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $45^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}(135^\circ) &= \text{crd}(180^\circ - 45^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(45^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(135^\circ) &= \sqrt{4(3438)^2 - (2631)^2} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(135^\circ) &= 6352 \end{aligned}$$

- A corda de  $67\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $135^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}\left(67\frac{1}{2}^\circ\right) &= \text{crd}\left(\frac{135^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 135^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(67\frac{1}{2}^\circ\right) &= \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(45^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(67\frac{1}{2}^\circ\right) &= \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 2631} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(67\frac{1}{2}^\circ\right) &= 3820 \end{aligned}$$

- A corda de  $112\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $67\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}\left(112\frac{1}{2}^\circ\right) &= \text{crd}(180^\circ - 67\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(67\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(112\frac{1}{2}^\circ\right) &= \sqrt{4(3438)^2 - (3820)^2} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(112\frac{1}{2}^\circ\right) &= 5717 \end{aligned}$$

- A corda de  $22\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $45^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}\left(22\frac{1}{2}^\circ\right) &= \text{crd}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 45^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(22\frac{1}{2}^\circ\right) &= \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(135^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(22\frac{1}{2}^\circ\right) &= \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 6352} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{crd}\left(22\frac{1}{2}^\circ\right) = 1341$$

- A corda de  $157\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $22\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\text{crd}\left(157\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}(180^\circ - 22\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(22\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(157\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{4(3438)^2 - (1341)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(157\frac{1}{2}^\circ\right) = 6743$$

- A corda de  $120^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $60^\circ$ :

$$\text{crd}(120^\circ) = \text{crd}(180^\circ - 60^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(60^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(120^\circ) = \sqrt{4(3438)^2 - (3438)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(120^\circ) = 5954$$

- A corda de  $30^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $60^\circ$ :

$$\text{crd}(30^\circ) = \text{crd}\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 60^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(30^\circ) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(120^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(30^\circ) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 5954} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(30^\circ) = 1780$$

- A corda de  $150^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $30^\circ$ :

$$\text{crd}(150^\circ) = \text{crd}(180^\circ - 30^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(30^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(150^\circ) = \sqrt{4(3438)^2 - (1780)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(150^\circ) = 6641$$

- A corda de  $15^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $30^\circ$ :

$$\text{crd}(15^\circ) = \text{crd}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 30^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(15^\circ) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(150^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(15^\circ) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 6641} \Leftrightarrow$$



$$\text{crd}(15^\circ) = 898$$

- A corda de  $165^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $15^\circ$ :

$$\text{crd}(165^\circ) = \text{crd}(180^\circ - 15^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(15^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(165^\circ) = \sqrt{4(3438)^2 - (898)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(165^\circ) = 6817$$

- A corda de  $7\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $15^\circ$ :

$$\text{crd}\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 15^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(165^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 6817} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = 450$$

- A corda de  $172\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $7\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\text{crd}\left(172\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}(180^\circ - 7\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(7\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(172\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{4(3438)^2 - (450)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(172\frac{1}{2}^\circ\right) = 6861$$

- A corda de  $75^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $150^\circ$ :

$$\text{crd}(75^\circ) = \text{crd}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 150^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(75^\circ) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(30^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(75^\circ) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 1780} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(75^\circ) = 4186$$

- A corda de  $105^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $75^\circ$ :

$$\text{crd}(105^\circ) = \text{crd}(180^\circ - 75^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(75^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(105^\circ) = \sqrt{4(3438)^2 - (4186)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(105^\circ) = 5455$$

- A corda de  $37\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $75^\circ$ :

$$\text{crd}\left(37\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}\left(\frac{75^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 75^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(37\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(105^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(37\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 5455} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(37\frac{1}{2}^\circ\right) = 2210$$

- A corda de  $142\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $37\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\text{crd}\left(142\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}(180^\circ - 37\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(37\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(142\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{4(3438)^2 - (2210)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(142\frac{1}{2}^\circ\right) = 6511$$

- A corda de  $52\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $105^\circ$ :

$$\text{crd}\left(52\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}\left(\frac{105^\circ}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 105^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(52\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(75^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(52\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 4186} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(52\frac{1}{2}^\circ\right) = 3041$$

- A corda de  $127\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $52\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\text{crd}\left(127\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}(180^\circ - 52\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(52\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}\left(127\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{4(3438)^2 - (3041)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 127\frac{1}{2} \right) = 6166$$

- A corda de  $82\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo metade no ângulo de  $165^\circ$ :

$$\text{crd} \left( 82\frac{1}{2} \right) = \text{crd} \left( \frac{165^\circ}{2} \right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(180^\circ - 165^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 82\frac{1}{2} \right) = \sqrt{2r^2 - r\text{crd}(15^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 82\frac{1}{2} \right) = \sqrt{2(3438)^2 - 3438 \cdot 898} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 82\frac{1}{2} \right) = 4533$$

- A corda de  $97\frac{1}{2}^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do ângulo suplementar no ângulo de  $82\frac{1}{2}^\circ$ :

$$\text{crd} \left( 97\frac{1}{2} \right) = \text{crd}(180^\circ - 82\frac{1}{2}^\circ) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}^2(82\frac{1}{2}^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 97\frac{1}{2} \right) = \sqrt{4(3438)^2 - (4533)^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd} \left( 97\frac{1}{2} \right) = 5169$$

A terceira coluna são resultados de (OLIVEIRA, 2010, p. 42), com algumas correções do autor.

Tabela 1: Tábua de Cordas de Hiparco

$\theta$	$crd(\theta)$	Corda em Função do Raio
$0^\circ$	0	$0r$
$7\frac{1}{2}^\circ$	450	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
$15^\circ$	897	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
$22\frac{1}{2}^\circ$	1341	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
$30^\circ$	1780	$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$37\frac{1}{2}^\circ$	2210	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$
$45^\circ$	2631	$r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
$52\frac{1}{2}^\circ$	3041	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$
$60^\circ$	3438	$r$
$67\frac{1}{2}^\circ$	3820	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$
$75^\circ$	4186	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$
$82\frac{1}{2}^\circ$	4533	$r\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
$90^\circ$	4862	$r\sqrt{2}$
$97\frac{1}{2}^\circ$	5169	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
$105^\circ$	5455	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$
$112\frac{1}{2}^\circ$	5717	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$
$120^\circ$	5954	$r\sqrt{3}$
$127\frac{1}{2}^\circ$	6166	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$
$135^\circ$	6352	$r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
$142\frac{1}{2}^\circ$	6511	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$
$150^\circ$	6641	$r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
$157\frac{1}{2}^\circ$	6743	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
$165^\circ$	6817	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
$172\frac{1}{2}^\circ$	6861	$r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
$180^\circ$	6875	$2r$

#### 4 PTOLOMEU

Cláudio Ptolomeu (em latim, *Claudius Ptolemaeus*) foi um cientista grego, nascido por volta do ano 100, em Ptolemaida Hérnia, no Egito, porém a região nesta época estava sob domínio romano. Acredita-se que ele faleceu por volta de 168 em Canopo, Egito.

Figura 21: Cláudio Ptolomeu



Fonte: Wikipedia <sup>11</sup>

Frazão (2019) sugere que o mesmo tenha vivido e trabalhado em Alexandria, no Egito, por volta dos anos 127 a 151.

Personalidade das mais célebres da época do imperador Marco Aurélio, Ptolomeu foi o último dos grandes sábios gregos da Antiguidade. Estudioso e inteligente legou importantes contribuições para o estudo da astronomia, da geografia, física e matemática (FRAZÃO, 2019).

Segundo Lourenço (1996, p. 07, apud LUCIZANI, 2016, p. 22), Ptolomeu “desenvolveu modelos astronômicos e ferramentas matemáticas que vão além da geometria elementar, caracterizando a trigonometria”. A importância dos trabalhos de Ptolomeu é grande para o avanço da ciência.

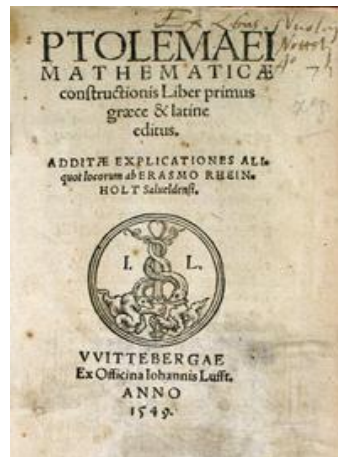
Assim, ele utilizou os conhecimentos de Hiparco para realizar seus estudos. Ptolomeu em seus estudos utilizava o sistema sexagesimal e não utiliza os valores das funções seno e cossenos, mais os valores da função da corda do arco, assim, chegou na fórmula de seno da soma e a diferença de dois arcos. Deste modo, a trigonometria surgiu para resolver problemas da astronomia (LUCIZANI, 2016).

Pouco se sabe da vida de Ptolomeu, assim como de outros estudiosos antigos. A maior quantidade de informações que temos é sobre a sua obra mais importante, *O Almagesto*. Nessa

<sup>11</sup>Disponível em: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/PSM\\_V78\\_D326\\_Ptolemy.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/PSM_V78_D326_Ptolemy.png). Acesso em: 22 maio 2022.

obra, composta de 13 livros, Ptolomeu compilou, aperfeiçoou e expandiu os trabalhos de seus antecessores, por isso, se tornou uma obra que reunia todo conhecimento astronômico até seu tempo. Com isso, era o trabalho astronômico de maior influência, desde sua criação até o século XVI, como destaca Nogueira (2013).

Figura 22: O Almagesto, de Ptolomeu



Fonte: (COSTA, 2000)

Apesar de que os escritos originais não tenham sobrevivido, suas cópias e traduções chegaram aos dias atuais. Muitos pesquisadores o chamam de “Bíblia da Astronomia”. O seu título original, em grego, era *Matematike Syntaxis*, somente após a tradução árabe que ficaria conhecido como *Al magiste*, mais tarde *Almagesto*, como conhecemos hoje. Acredita-se que a sua tradução para o latim ocorreu por volta do ano 1175, em Toledo, na Espanha, feita por Gerard de Cremona (1114-1187), segundo Gázquez (2022). Com essa versão em latim, a obra de Ptolomeu ganha espaço na Europa,

Foi um feito incomparável na Antiguidade como um exemplo de como uma grande e importante classe de fenômenos naturais poderia ser descrita em termos matemáticos de tal forma que seu curso futuro pudesse ser previsto com razoável precisão. Ensinou cientistas de muitas eras como os modelos geométricos e cinemáticos poderiam ser construídos e, por meio de dados empíricos derivados de observações cuidadosas, poderiam ser feitas simulações da natureza de uma forma que viria a influenciar o método científico até dos dias atuais (GÁZQUEZ, 2022).

Eves (2004, p. 204) apresenta a descrição completa dos livros da obra:

- **Livro I:** Explicação sobre a maneira e os métodos que foram empregados na construção da Tábua de Cordas;
- **Livro II:** Movimento de alguns corpos celestes. Neste livro ele considera os fenômenos que dependem da esfericidade da Terra;

- **Livro III:** Sistema Astronômico Geocêntrico desenvolvido por meio dos epiciclos. Determinação da duração do ano e das estações. Variação da duração do dia, chamada de “Equação dos Tempos”;
- **Livros IV e V:** Sistema Astronômico Geocêntrico desenvolvido por meio dos epiciclos. Determinação do movimento da Lua;
- **Livro VI:** Teoria dos Eclipses. Aproximação do valor de  $\pi$ , com quatro casas decimais;
- **Livros VII e VIII:** Apresentação de um catálogo de 1028 estrelas fixas;
- **Livros IX a XIII:** Planetas. Modelo Planetário. Movimento dos cinco planetas visíveis a olho nú, sendo eles: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

O *Almagesto* foi a obra mais importante de Ptolomeu. Porém, o mesmo apresentou estudos em diversas áreas.

Escreveu ainda outra importante obra, intitulada “Guia Geográfico”, escrita no século I, somente impressa no ano 1472. Era composta de 8 volumes e uma coleção de 12 mapas, sendo que um dos mapas representava o mundo da sua época e os outros 26 detalhavam diferentes regiões. Por causa disso, Ptolomeu foi o autor do primeiro Atlas universal de que se tem notícia (RIBEIRO, 2013).

Assim como Hiparco, Ptolomeu também elaborou um catálogo estelar, mais completo que o de Hiparco.

Pertence a Claudio Ptolomeu um dos mais importantes catálogos estelares, o *Almagesto*, uma fabulosa obra composta por 13 volumes e onde estão relacionadas 1022 estrelas de 48 constelações, sendo 12 zodiacais, 21 ao Norte e 15 ao Sul, inclusive as quatro estrelas principais do Cruzeiro do Sul, na época pertencentes à constelação do Centauro (COSTA, 2000).

Com isso, Ptolomeu criou uma representação geométrica do sistema solar, que foi base durante muitos séculos, sendo substituído por volta do século XVI. Neste modelo ele apresentou com grande precisão o movimento dos planetas. Para isso, o mesmo utilizou vários dados da sua Tábua de Cordas, por isso apresentaremos os métodos que Ptolomeu utilizou para construí-la.

#### 4.1 Métodos de Ptolomeu

Acredita-se que Ptolomeu utilizou, aprimorou e até mesmo foi influenciado pelas idéias e os métodos de Hiparco para construir sua Tábua de Cordas. Ademais, também utilizou resultados da obra *Elementos* de Euclides, conhecido como o “Pai da Geometria”.

Através da influência babilônica e do seu antecessor, Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Porém, utilizou a seguinte aproximação para o número  $\pi$ :

$$\pi = \frac{377}{120} \approx 3,1416.$$

Com essas primeiras informações e os métodos que serão apresentados a seguir, ele calculou o comprimento das cordas correspondentes aos ângulos centrais de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  em intervalos de  $\frac{1^\circ}{2}$  em  $\frac{1^\circ}{2}$ . Ou seja, a Tabela de Cordas de Ptolomeu é considerada mais completa em relação à de Hiparco, por possuir mais valores. Ele precisou fazer maior uso da Geometria em seus métodos do que Hiparco. Por isso, o mesmo utilizou alguns resultados da obra *Elementos*, como as proposições que serão apresentadas nos métodos.

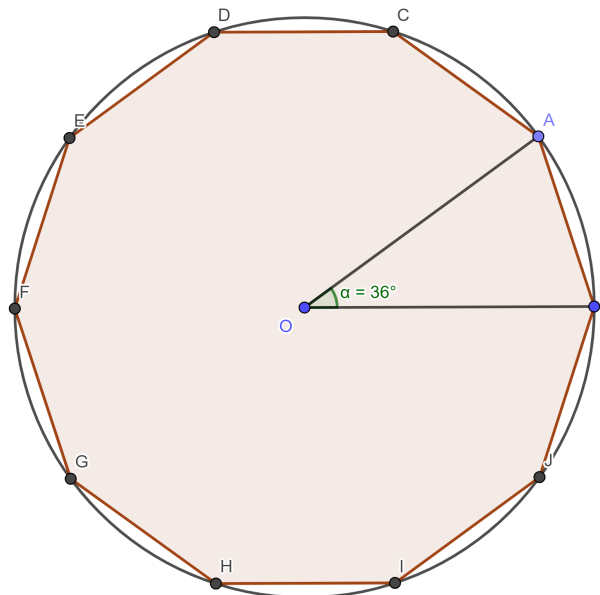
Outra diferença entre os métodos dos dois, está na medida do raio da circunferência. Como visto, Hiparco utilizou um raio de medida  $r = 3438$  que sempre era inserido nos cálculos. Ptolomeu em vez de usar  $r = 3438$ , utilizou  $r = 60$ .

As informações que se seguem, inclusive as notações, se baseiam nos textos de Nogueira (2013) e Oliveira (2010).

#### 4.1.1 Construção e cálculo da corda de $36^\circ$

Ptolomeu recorreu aos *Elementos* de Euclides, para poder inscrever um decágono regular e um pentágono regular em um círculo, ou seja, ele buscou à essas construções, pois seriam a base para calcular os comprimentos das cordas dos ângulos de  $36^\circ$  e  $72^\circ$ . Isso porque ao utilizar a construção que inscreve um decágono regular num círculo de raio  $r$  centro  $O$ , é possível obter o valor da  $crd(36^\circ)$ . Observe a figura 23.

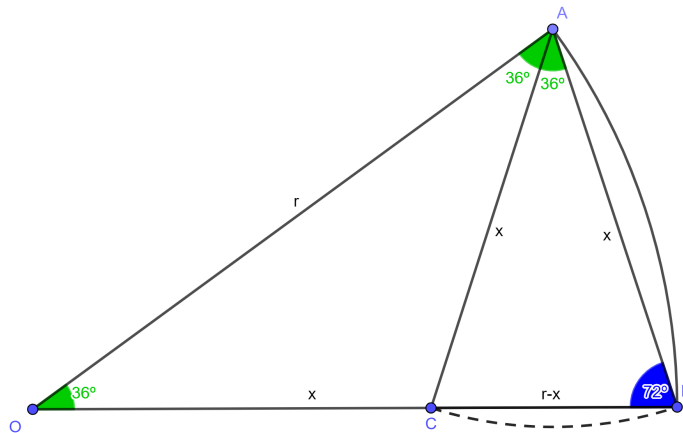
Figura 23: Decágono regular inscrito na circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A partir da inscrição do decágono, com o auxílio dos trabalhos de Euclides, obteremos a figura acima, que apresenta um decágono regular inscrito no círculo. Por esse motivo, os dez lados do polígono são iguais. Entendendo cada lado do decágono como uma corda, temos que cada corda corresponde ao ângulo de  $36^\circ$ . Em particular, os vértices  $A$  e  $B$ , determinam com o centro  $O$ , um ângulo de  $36^\circ$ . Tomando essa seção em particular, iremos obter a figura 24.



Figura 24: Corda de  $36^\circ$ 

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

O ângulo  $\widehat{AOB}$  é o ângulo ao centro do decágono regular por isso equivale a  $36^\circ$ , dessa forma, o lado do decágono tem medida  $x = \overline{AB}$ . Os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  equivalem ao raio de medida  $r$  da circunferência. Logo o triângulo  $AOB$  é isósceles, com os ângulos da base  $AB$  iguais e valendo  $72^\circ$ .

Desenhando um um arco de circunferência com centro em  $A$  e raio  $AB$ , iremos determinar um ponto  $C$  sobre  $OB$  tal que  $\overline{AC} = x$ . Com isso, o triângulo formado por  $ABC$  também é isósceles com os ângulos da base  $BC$  são iguais a  $72^\circ$ , logo

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - (72^\circ + 72^\circ) \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

Dessa forma, como  $\widehat{OAB} = 72^\circ$  e  $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} + \widehat{CAB}$ , logo

$$72^\circ = \widehat{OAC} + 36^\circ \Leftrightarrow \widehat{OAC} = 36^\circ.$$

No triângulo  $OAC$  os ângulos da base  $OA$  são iguais a  $36^\circ$ , isso garante que este triângulo é isósceles, com os lados  $\overline{AC} = \overline{CO} = x$ . Em consequência disso,  $\overline{BC} = r - x$ . Os triângulos  $ABC$  e  $AOB$  são semelhantes pelo critério *Ângulo-Ângulo* pois:

- $\widehat{ACB} = \widehat{OAB} = 72^\circ$
- $\widehat{BAC} = \widehat{AOB} = 36^\circ$

Dessa forma, vale a relação:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \\ \frac{x}{r-x} &= \frac{r}{x} \Leftrightarrow \\ x \cdot x &= r(r-x) \Leftrightarrow \end{aligned} \tag{5}$$

$$x^2 = r^2 - xr \Leftrightarrow$$

$$x^2 + xr - r^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática e considerando apenas a solução positiva, obtemos:

$$x = \frac{1}{2}r \cdot (\sqrt{5} - 1)$$

Logo através da relação acima, obtemos uma expressão que, em função do raio  $r$  da circunferência, nos dá o valor de  $x$ , ou seja, o comprimento do lado do decágono que é a medida da  $crd(36^\circ)$ .

Como Ptolomeu considerou  $r = 60$ , logo, a  $crd(36^\circ)$  será dada por:

$$crd(36^\circ) = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{60}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = 30 \cdot (\sqrt{5} - 1) \Leftrightarrow$$

$$crd(36^\circ) \cong 37,0804.$$

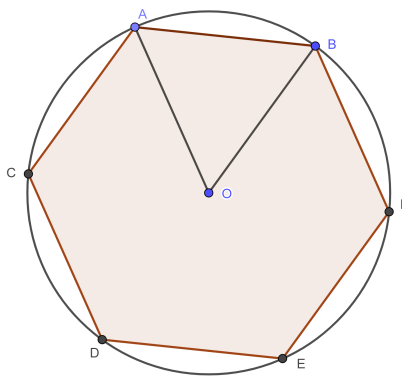
Em notação sexagesimal, pode ser escrita como:

$$crd(36^\circ) = 37;4,55$$

#### 4.1.2 Construção e cálculo da corda de $60^\circ$

Inscrevendo um hexágono regular no círculo de raio  $r$ , tal polígono possui lado  $l_6$ , com  $A$  e  $B$  sendo dois de seus vértices, iremos obter a figura 25.

Figura 25: Cálculo da corda de  $60^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

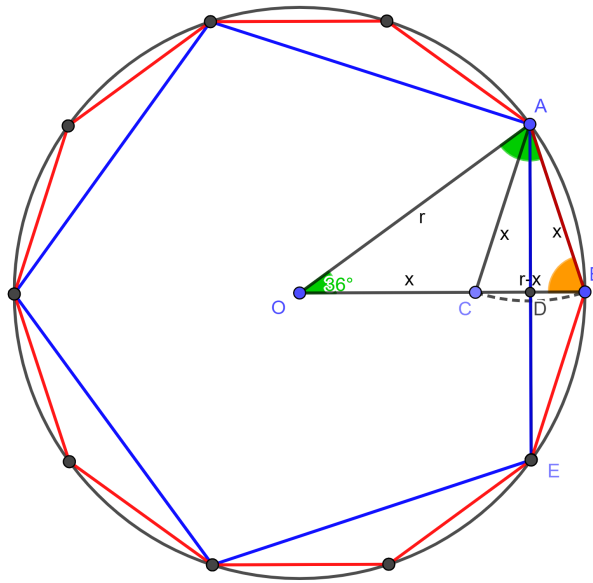
O valor do ângulo  $\widehat{AOB}$  será dado por

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Dessa forma,  $\overline{AB} = l_6$  é a corda de  $60^\circ$ . Como  $\overline{AO} = \overline{BO} = r$  e  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ , temos que  $AOB$  é um triângulo equilátero, da mesma forma que foi mostrado em 3.1.2, logo  $\overline{AB} = r$ . Como Ptolomeu considerou  $r = 60$ , portanto  $crd(60^\circ) = 60$ .

#### 4.1.3 Construção e cálculo da corda de $72^\circ$

Figura 26: Cálculo da corda de  $72^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Tomando como base as ilustrações da seção 4.1.1, temos que  $x = l_{10}$  e  $l_5$ , equivalem respectivamente às medidas do lado do decágono regular e do pentágono regular, inscritos na circunferência. Traçando agora a altura  $AD$  do triângulo  $ABC$ , temos que  $AD$  é igual a metade da corda correspondente ao dobro do arco  $AB$ , pois o dobro do arco  $AB$  é o arco  $AE$ .  $AB$  e  $BE$  são arco de  $36^\circ$  e  $AE$  é o arco de  $72^\circ$ . A corda  $AE$  é igual a  $\overline{AD} + \overline{DE}$ , mas  $\overline{AD} = \overline{DE}$ , com isso  $\overline{AD} = \frac{\overline{AE}}{2}$ , logo

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}l_5.$$

Como  $\overline{OC} = x = l_{10}$ , temos que  $\overline{CB} = r - x = r - l_{10}$ , então:

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}(r - l_{10})$$

O triângulo  $ABC$  é isósceles e como  $AD$  é a altura em relação à base  $BC$ , logo  $ABD$  é triângulo retângulo. Dele temos:

$$\left(\frac{l_5}{2}\right)^2 + \left(\frac{r - l_{10}}{2}\right)^2 = (l_{10})^2 \Leftrightarrow \frac{(l_5)^2}{4} + \frac{(r - l_{10})^2}{4} = (l_{10})^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{(l_5)^2 + r^2 - 2rl_{10} + (l_{10})^2}{4} &= (l_{10})^2 \Leftrightarrow \\
(l_5)^2 + r^2 - 2rl_{10} + (l_{10})^2 &= 4 \cdot (l_{10})^2 \Leftrightarrow \\
(l_5)^2 &= 4(l_{10})^2 - (l_{10})^2 - r^2 + 2rl_{10} \Leftrightarrow \\
(l_5)^2 &= 3(l_{10})^2 - r^2 + 2rl_{10}
\end{aligned} \tag{6}$$

Por 5, temos:

$$\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}} \Leftrightarrow r^2 - rl_{10} = (l_{10})^2 \Leftrightarrow rl_{10} = r^2 - (l_{10})^2$$

Substituindo esse resultado em 6, teremos que:

$$\begin{aligned}
(l_5)^2 &= 3(l_{10})^2 - r^2 + 2(r^2 - (l_{10})^2) \Leftrightarrow \\
(l_5)^2 &= 3(l_{10})^2 - 2(l_{10})^2 + 2r^2 - r^2 \Leftrightarrow \\
(l_5)^2 &= (l_{10})^2 + r^2
\end{aligned} \tag{7}$$

Como  $l_{10} = 37;4,55 \Leftrightarrow (l_{10})^2 = 1375;4,15$  e  $r^2 = 60^2 = 3600$ , usando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$(l_5)^2 = (l_{10})^2 + r^2 \Leftrightarrow (l_5)^2 = (1375;4,15) + 3600 = 4975;4,15$$

Portanto

$$l_5 = \text{crd}(72^\circ) = 70;32,3 = 70,534$$

A equação 7, é resultado da seguinte proposição de Euclides:

**Proposição 1** *Se um pentágono equilátero está inscrito em um círculo, então o quadrado do lado do pentágono é igual a soma dos quadrados dos lados do hexágono e do decágono inscrito no mesmo círculo.*

#### 4.1.4 Construção e cálculo da corda de $90^\circ$

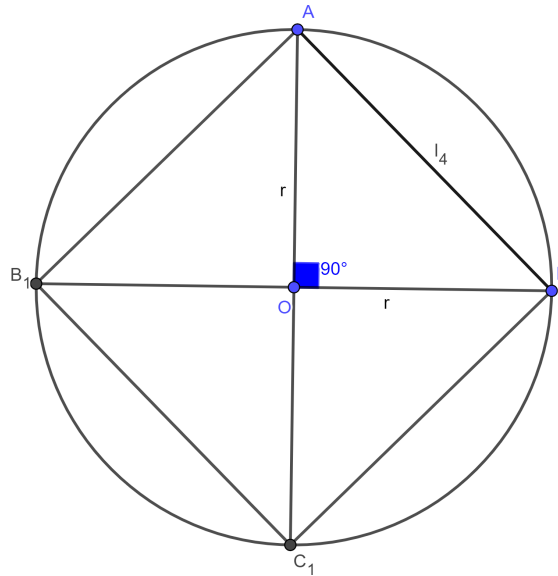
Inscrevendo um quadrado de lado  $l_4$  no círculo de raio  $r$ , iremos obter a figura 27. Utilizando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$(l_4)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \Leftrightarrow (l_4)^2 = 2(60)^2 = 7200$$

Recorrendo a uma tabela de raízes, Ptolomeu concluiu que:

$$l_4 = \text{crd}\left(\frac{360^\circ}{4}\right) = \text{crd}(90^\circ) = 84;51,10 = 84,853$$

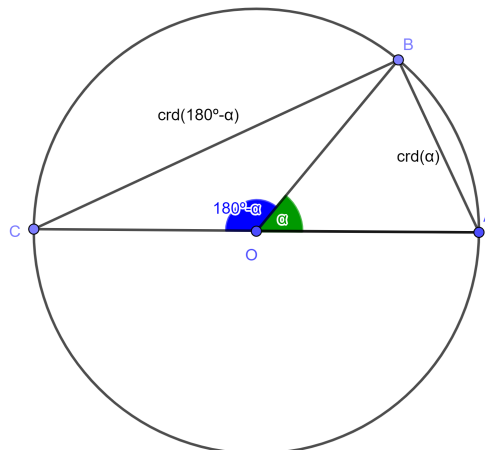
Figura 27: Cálculo da corda de 90°



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

#### 4.1.5 Fórmula da Corda do Arco Suplementar

Figura 28: Fórmula da corda do Arco suplementar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Podemos perceber na figura que, o triângulo  $ABC$  está inscrito na circunferência, de modo que o lado  $AC$  coincide com o diâmetro, dessa forma,  $ABC$  é um triângulo retângulo e  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ . De modo similar à Hiparco, podemos calcular a  $crd(180^\circ - \alpha)$ , (ângulo suplementar a  $\alpha$ ), utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$crd^2(180^\circ - \alpha) + crd^2 \alpha = (2r)^2.$$

Dessa forma, a  $crd(180^\circ - \alpha)$  será dada por:

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - crd^2 \alpha} \Leftrightarrow crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2 \cdot 60)^2 - crd^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(120)^2 - crd^2 \alpha} \Leftrightarrow crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{14400 - crd^2 \alpha}.$$

Um exemplo para a aplicação da fórmula do ângulo suplementar, é o cálculo da  $crd(144^\circ)$ , pois  $144^\circ$  é o ângulo suplementar a  $36^\circ$ .

$$crd(144^\circ) = \sqrt{14400 - crd^2(36^\circ)} = \sqrt{14400 - (1375;4,15)} = \sqrt{13024;55,45} = 114;7,37.$$

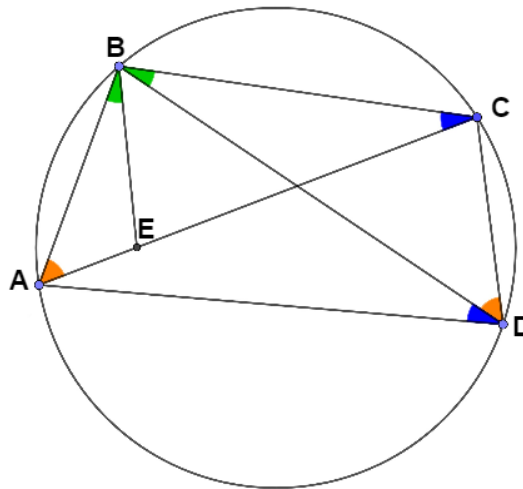
#### 4.1.6 Demonstração do Teorema de Ptolomeu

**Teorema 4.1.1 (Teorema de Ptolomeu)** *Num quadrilátero inscrito numa circunferência, o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos, isto é,*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{DA} \cdot \overline{CB}$$

Observe a figura abaixo:

Figura 29: Teorema de Ptolomeu



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Seja ABCD um quadrilátero inscrito numa circunferência. Traçando BE de modo que  $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$ . Observe que os triângulos ABE e DBC são semelhantes pelo caso *Ângulo-Ângulo*:

- $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$  (Por construção)
- $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$  (Pois são ângulos inscritos no mesmo arco)

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (8)$$

De modo análogo, os triângulos  $CBE$  e  $ADB$  são semelhantes pelo critério *Ângulo-Ângulo*, pois  $B\hat{D}A = B\hat{C}E$  são inscritos no mesmo arco; e  $E\hat{B}C = E\hat{B}D + D\hat{B}C = E\hat{B}D + A\hat{B}E = A\hat{B}D$ . Temos:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{BD} \cdot \overline{CE} \quad (9)$$

Adicionando membro a membro as equações 8 e 9, obteremos:

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \Leftrightarrow$$

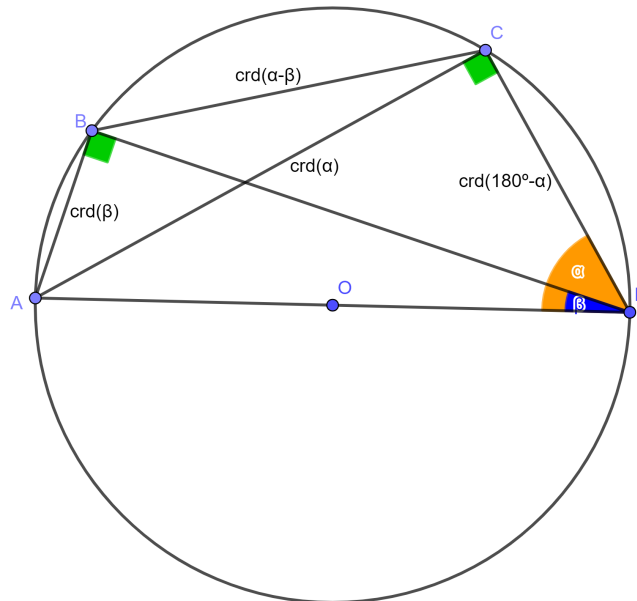
$$\overline{BD}(\overline{AE} + \overline{CE}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Como  $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$ , decorre o resultado.

#### 4.1.7 Fórmula da diferença de dois arcos

Tomando dois arcos,  $\alpha$  e  $\beta$ , apresentados na figura abaixo, para calcular a corda da diferença desses dois arcos, Ptolomeu usou o teorema anterior com  $\overline{AC} = \text{crd}(\alpha)$  e  $\overline{AB} = \text{crd}(\beta)$  e considerou o diâmetro da circunferência como  $\overline{AD}$ . Logo, como  $\overline{BC} = \text{crd}(\alpha - \beta)$  temos:

Figura 30: Fórmula da diferença de dois arcos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD} - \overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \text{crd}(\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}(\alpha) \cdot \overline{BD} - \text{crd}(\beta) \cdot \overline{CD}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\text{crd}(\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}(\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)}{d}$$

A partir dessa fórmula, é possível obter por exemplo a corda que subtende o arco de

$12^\circ$ , utilizando dois resultados anteriores, das cordas de  $60^\circ$  e  $72^\circ$ , pois  $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$ .

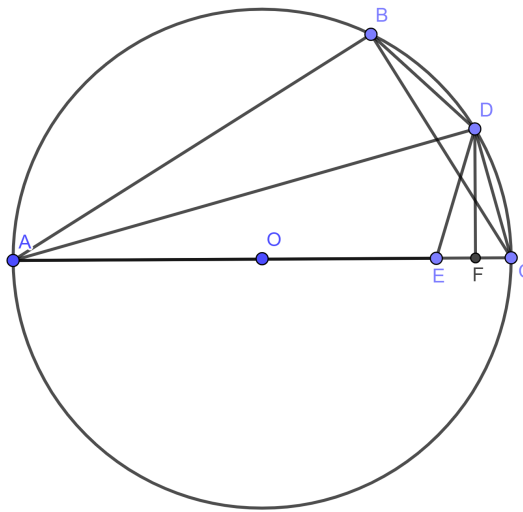
Tomando  $d = 1$ , é possível traduzí-la na fórmula moderna do seno da diferença de dois ângulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

#### 4.1.8 Fórmula da corda do arco metade

Observe a seguinte figura:

Figura 31: Fórmula da Corda do arco Metade



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Seja  $BC$  a corda dada. A partir de  $C$ , tome um ponto  $A$  de modo que  $AC$  seja o diâmetro. Seja  $D$  o ponto médio do arco  $BC$ . Traça  $DF$  perpendicular a  $AC$  passando pelo ponto  $D$ .

Construindo sobre o segmento  $AC$  um ponto  $E$  tal que  $\overline{AE} = \overline{AB}$ . Temos que, pelo caso *Lado-Ângulo-Lado*:

- $\overline{AE} = \overline{AB}$  (Por construção);
- $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$  ( $AD$  bisseta o ângulo  $\widehat{BAC}$ );
- $AD$  é comum aos dois triângulos.

Os triângulos  $BAD$  e  $EAD$  são congruentes. Em particular,  $\overline{DE} = \overline{BD}$ .

Como  $\overline{DE} = \overline{BD}$  e  $\overline{BD} = \overline{CD}$  resulta que  $\overline{DE} = \overline{CD}$ , logo o triângulo  $CDE$  é isósceles. Pela construção de  $DF$ , perpendicular a  $AC$ , e pelas propriedades de triângulos isósceles,  $DF$  é a altura relativa à base  $CE$  e a mediana, onde resulta que  $\overline{EF} = \overline{CF}$ , logo:

$$\overline{FC} = \frac{(\overline{AC} - \overline{AE})}{2} = \frac{(\overline{AC} - \overline{AB})}{2}$$



Como  $\overline{AC} = 2r = 120$  e  $\overline{AB}$  é a corda do suplementar do arco  $BC$ , então  $\overline{FC}$  pode ser calculado. Aplicando ao triângulo  $ACD$  o *Corolário de Euclides VI,8*: um lado num triângulo retângulo é a média proporcional (ou média geométrica: a média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto dos dois números, donde o quadrado da média geométrica de dois números é igual ao seu produto) entre a sua projeção na hipotenusa e a hipotenusa.

Com isso obtemos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{FC} = 120 \cdot \overline{FC} = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) \quad (10)$$

Podemos escrever a equação acima como:

$$\overline{CD} = \sqrt{\frac{\overline{AC}}{2} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB})}$$

Fazendo  $\widehat{BAC} = \alpha \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\overline{AC} = 2r$  e  $\overline{AB} = \text{crd}(180^\circ - \alpha)$ , podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{2r}{2} \cdot (2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha))} \Leftrightarrow \\ \text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{2r^2 - r \text{crd}(180^\circ - \alpha)} \end{aligned}$$

Ptolomeu, agora, mostra que a partir da  $\text{crd}(12^\circ)$  pode-se determinar  $\text{crd}(6^\circ)$ ,  $\text{crd}(3^\circ)$ ,  $\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ)$ ,  $\text{crd}(3\frac{3}{4}^\circ)$ , usando a fórmula do arco metade repetidamente. Que resulta, por exemplo, em:  $\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ) = 1;34,15$  e  $\text{crd}(3\frac{3}{4}^\circ) = 0;47,8$ .

A equação 10, pode ser traduzida em notação atual para a fórmula do seno do Arco Metade. Para tanto, basta dividi-la por  $(\overline{AC})^2$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\right)^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}}\right)^2 - \frac{(\overline{AC} \cdot \overline{AB})}{(\overline{AC})^2} \right] \Leftrightarrow \\ \frac{(\overline{CD})^2}{(\overline{AC})^2} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \right). \end{aligned}$$

Fazendo  $\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ ,  $\text{cos}(2\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ , temos,

$$\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{cos}(2\alpha)).$$

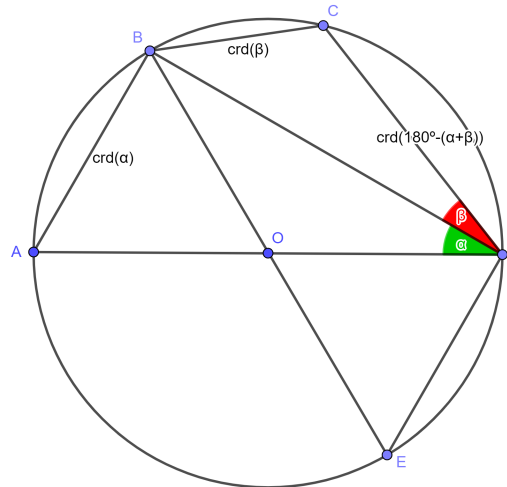
Portanto,

$$\text{sen}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \text{cos}(2\alpha)}{2}}.$$

#### 4.1.9 Fórmula da soma de dois arcos

Sejam  $AB$  e  $BC$  as cordas dadas, construindo os diâmetros  $AD$  e  $BE$ , unimos os pontos por segmentos de retas, como na figura 32.

Figura 32: Fórmula da Soma de Dois Arcos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

É possível determinar  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$ , pois são as cordas dos suplementares dos arcos dados  $AB$  e  $BC$ , respectivamente.

Os triângulos  $ADB$  e  $EBD$  são congruentes pelo critério *Lado-Ângulo-Ângulo Oposto*.

- $\overline{AD} = \overline{EB}$ , pois ambos são diâmetro;
- $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$  pois os ângulos estão inscritos no arco  $BD$ ;
- $\widehat{ABD} = \widehat{BDE} = 90^\circ$ , pois os triângulos  $ABD$  e  $BDE$  estão inscritos numa circunferência e um lado de cada um coincide com o diâmetro, dessa forma, são triângulos retângulo.

Dessa forma, podemos afirmar que  $\overline{DE} = \overline{AB}$ .

Aplicando então o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $BCDE$ , temos:

$$\overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} + \overline{CD} \cdot \overline{BE} \Leftrightarrow$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{BE} = \overline{BD} \cdot \overline{CE} - \overline{BC} \cdot \overline{DE}.$$

Como  $\overline{BE}$  é igual ao diâmetro, e este foi dividido em 120 partes iguais, logo substituindo  $\overline{BE}$  por 120 e  $\overline{DE}$  por  $\overline{AB}$ , iremos obter:

$$\overline{CD} \cdot 120 = \overline{BD} \cdot \overline{CE} - \overline{BC} \cdot \overline{AB}.$$

Note que todos os membros do lado direito da igualdade são conhecidos:  $\overline{BC} = \text{crd}(\beta)$ ,  $\overline{AB} = \text{crd}(\alpha)$ ,  $\overline{BD} = \text{crd}(180^\circ - \alpha)$  e  $\overline{CE} = \text{crd}(180^\circ - \beta)$ ; Logo, podemos determinar  $\overline{CD}$  e com isso, a corda do ângulo suplementar, ou seja,  $\overline{AC}$ ,

$$120 \cdot \text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{crd}(180^\circ - \alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(\alpha)$$

Com isso, a fórmula da soma de dois arcos pode ser expressa como:

$$\text{crd}(\alpha + \beta) = \frac{\text{crd}(\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) + \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)}{2r}$$

Em notação atual, ela pode ser escrita como:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

As aplicações dessa fórmula permite que sejam calculadas, por exemplo, as seguintes cordas:

- $\text{crd}\left(3^\circ + 1\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}\left(4\frac{1}{2}^\circ\right)$
- $\text{crd}\left(4\frac{1}{2}^\circ + 1\frac{1}{2}^\circ\right) = \text{crd}(6^\circ)$

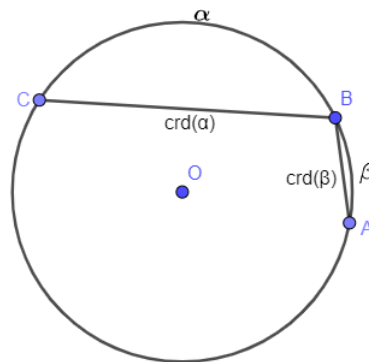
#### 4.1.10 Cálculo da corda de $1^\circ$

Ptolomeu prova o seguinte teorema, para então aplicá-lo no cálculo da  $\text{crd}(1^\circ)$ , onde obteve que  $\text{crd}(1^\circ) = 1;2,50$ .

**Teorema 4.1.2** *Se forem dadas duas cordas desiguais sendo a corda  $\alpha$  maior que a corda  $\beta$ ,  $0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$ , então:*

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\text{crd } \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Figura 33: Teorema para corda de  $1^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A demonstração do Teorema 4.1.2 é encontrada em (NOGUEIRA, 2013, p. 43).

Para encontrar o valor procurado, Ptolomeu considerou dois casos, um com  $\alpha = 1\frac{1}{2}^\circ$  e  $\beta = 1^\circ$ , e outro onde  $\alpha = 1^\circ$  e  $\beta = \frac{3}{4}^\circ$ .

No primeiro caso o teorema pode ser aplicado da seguinte forma:

$$\frac{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < \frac{1\frac{1}{2}^\circ}{1^\circ} \Leftrightarrow \frac{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{crd(1^\circ)}{crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow crd(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)$$

Pelos métodos anteriores, aplicando a fórmula do arco metade sucessivamente a partir da  $crd(12^\circ)$ , obtém-se que o valor de  $crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = 1;34,15$ , logo:

$$crd(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot (1;34,15) = 1;20,50,10.$$

Pelo segundo caso, o teorema pode ser aplicado da seguinte forma:

$$\frac{crd(1^\circ)}{crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{1^\circ}{\frac{3}{4}^\circ} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow crd(1^\circ) < \frac{4}{3} \cdot crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)$$

Da mesma forma, recorrendo a tabela de Ptolomeu:

$$crd(1^\circ) < \frac{4}{3} \cdot (0;47,8) = 1;20,50,40.$$

A partir dos resultados encontrados nos dois casos, o valor encontrado por Ptolomeu foi:

$$1;20,50,10 < crd(1^\circ) < 1;20,50,40$$

Concluindo então que  $crd(1^\circ) = 1;20,50$  e aplicando a este resultado a fórmula do arco metade, resulta que  $crd\left(\frac{1}{2}^\circ\right) = 0;31,15$ .

## 4.2 Reconstrução da Tábua de Cordas de Ptolomeu

A Tábua de Cordas de Ptolomeu, é mais completa que a de Hiparco, ela possui os valores das cordas de ângulos entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , com intervalos de meio em meio grau. A sua construção segue a mesma linha usada na seção 3.2, porém, apenas teremos o cálculo das cordas de  $108^\circ$ ,  $12^\circ$ ,  $80^\circ$  e de  $130^\circ$ , para exemplificar o seu uso.

- A corda de  $108^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do arco suplementar no ângulo de  $72^\circ$ :

$$crd(108^\circ) = crd(180^\circ - 72^\circ) = \sqrt{14400 - crd^2(72^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$crd(108^\circ) = \sqrt{14400 - (70,534)^2} \Leftrightarrow$$

$$crd(108^\circ) = \sqrt{9424,25} = 97,082$$

- A corda de  $12^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da Diferença de dois Arcos nos ângulos de  $72^\circ$  e  $60^\circ$ :

$$crd(12^\circ) = crd(72^\circ - 60^\circ) = \frac{crd(72^\circ) \cdot crd(180^\circ - 60^\circ) - crd(60^\circ) \cdot crd(180^\circ - 72^\circ)}{2 \cdot 60}$$

$$crd(12^\circ) = \frac{crd(72^\circ) \cdot crd(120^\circ) - crd(60^\circ) \cdot crd(108^\circ)}{120} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{crd}(12^\circ) &= \frac{(70,534) \cdot (103,923) - (60) \cdot (97,082)}{120} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(12^\circ) &= \frac{1505,184}{120} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(12^\circ) &= 12,543 \end{aligned}$$

- A corda de  $80^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da corda do arco metade no ângulo de  $160^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}(80^\circ) &= \text{crd}\left(\frac{160^\circ}{2}\right) = \sqrt{2(60)^2 - 60 \cdot \text{crd}(180^\circ - 160^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(80^\circ) &= \sqrt{2(60)^2 - 60 \cdot \text{crd}(20^\circ)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(80^\circ) &= \sqrt{2(60)^2 - 60 \cdot (20,838)} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(80^\circ) &= 77,134 \end{aligned}$$

- A corda de  $130^\circ$  é obtida aplicando a fórmula da Soma de dois Arcos nos ângulos de  $100^\circ$  e  $30^\circ$ :

$$\begin{aligned} \text{crd}(130^\circ) &= \text{crd}(100^\circ + 30^\circ) \Leftrightarrow \\ \frac{\text{crd}(100^\circ) \cdot \text{crd}(180^\circ - 30^\circ) + \text{crd}(30^\circ) \cdot \text{crd}(180^\circ - 100^\circ)}{2r} &\Leftrightarrow \\ \text{crd}(130^\circ) &= \frac{\text{crd}(100^\circ) \cdot \text{crd}(150^\circ) + \text{crd}(30^\circ) \cdot \text{crd}(80^\circ)}{2 \cdot 60} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(130^\circ) &= \frac{91,925 \cdot 115,911 + 31,058 \cdot 77,134}{120} \Leftrightarrow \\ \text{crd}(130^\circ) &= 108,756 \end{aligned}$$

As Tábuas de Cordas são referentes às atuais tabelas trigonométricas. Na época de Hiparco e Ptolomeu, os estudos na área estavam baseados na utilização dos conceitos de corda, ângulo e arco. Após o período de auge da Matemática grega, a Trigonometria teve maior desenvolvimento com os povos hindus, os árabes e posteriormente com os europeus. Acredita-se que a Trigonometria tomou o rigor que conhecemos hoje por conta da criação da Álgebra, por volta do século XVII. Como abordado anteriormente, ela foi criada principalmente para auxiliar o estudo da Astronomia, somente por volta do século XV tem-se registro de trabalhos como áreas independentes.

Cada um dos povos, em um determinado período histórico, fez uma contribuição para o desenvolvimento da mesma. É atribuído aos trabalhos dos hindus por exemplo, as primeiras aparições do seno de um ângulo. Hoje, através da equação 2 é possível determinar o valor do seno de um ângulo através do valor de sua corda.

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2r}$$

Onde  $r$  é a medida do raio da circunferência,  $\overline{AB}$  é a corda do ângulo  $\alpha$  e  $\frac{\alpha}{2}$  é o ângulo no qual procura-se o valor do seu seno. Por exemplo, sendo  $\alpha = 80^\circ$  teremos o valor do seno de  $40^\circ$ , basta substituir os valores:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{80^\circ}{2}\right) &= \operatorname{sen}(40^\circ) = \frac{77,134}{2 \cdot 60} \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}(40^\circ) &= 0,6428.\end{aligned}$$

Outro exemplo é encontrar o seno de  $1^\circ$  a partir da corda de  $2^\circ$ , ou seja,  $\alpha = 2^\circ$  e  $\operatorname{crd}(\alpha) = 2,094 = \overline{AB}$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{2^\circ}{2}\right) &= \operatorname{sen}(1^\circ) = \frac{2,094}{2 \cdot 60} \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}(1^\circ) &= 0,01745.\end{aligned}$$

Dessa forma, com esses métodos é possível obter tanto os valores das cordas, quanto encontrar o valor do seno correspondente. Na tabela 2 e na tabela 3, temos os valores de alguns ângulos, o valor da sua corda correspondente, notado no sistema decimal e em sexagesimal (misto). Além disso, na quarta coluna possui o valor do seno correspondente ao ângulo, obtido através da equação 2. Os valores de seno para ângulos maiores que  $90^\circ$  e menores ou igual a  $180^\circ$ , são equivalentes ao seno do seu suplementar.

Alguns dados são de Nogueira (2013) e Oliveira (2010), os demais valores, bem como o valor do seno de cada ângulo foi calculado pelo autor. Vale ressaltar que a tabela não está completa como a de Hiparco.

Tabela 2: Tábua de Cordas de Ptolomeu- Parte 1

$\theta$	$crd(\theta)$ em Decimal	$crd(\theta)$ em Sexagesimal	$sen(\theta)$
$0^\circ$	0	0; 0, 0	0
$\frac{1}{2}^\circ$	0,057	0; 31, 25	0,0087
$1^\circ$	1,047	1; 2, 50	0,0174
$1\frac{1}{2}^\circ$	1,5708	1; 34, 15	0,0261
$2^\circ$	2,094	2; 5, 40	0,0349
$2\frac{1}{2}^\circ$	2,618	2; 37, 4	0,0436
$3^\circ$	3,141	3; 8, 28	0,0523
$3\frac{1}{2}^\circ$	3,664	3; 39, 52	0,0610
$4^\circ$	4,188	4; 11, 16	0,0697
$4\frac{1}{2}^\circ$	4,711	4; 42, 40	0,0784
$5^\circ$	5,234	2; 5, 40	0,0871
$5\frac{1}{2}^\circ$	5,7575	5; 14, 4	0,0958
$6^\circ$	6,280	6; 16, 49	0,1045
$6\frac{1}{2}^\circ$	6,803	6; 48, 11	0,1132
$7^\circ$	7,326	7; 19, 33	0,1218
$7\frac{1}{2}^\circ$	7,848	7; 50, 54	0,1305
$10^\circ$	10,459	10; 27, 32	0,1736
$12^\circ$	12,543	12; 32, 35	0,2079
$15^\circ$	15,663	15; 39, 47	0,2588
$20^\circ$	20,838	20; 50, 16	0,3420
$22\frac{1}{2}^\circ$	23,410	23; 24, 36	0,3826
$25^\circ$	25,972	25; 58, 22	0,4226
$30^\circ$	31,058	31; 3, 30	0,5
$36^\circ$	37,0804	37; 4, 55	0,5877
$37\frac{1}{2}^\circ$	38,572	38; 34, 19	0,6087
$40^\circ$	41,0425	41; 2, 33	0,6427
$45^\circ$	45,922	45; 55, 19	0,7071
$50^\circ$	50,7141	50; 42, 51	0,7660
$52\frac{1}{2}^\circ$	53,074	53; 4, 27	0,7933
$60^\circ$	60	60; 0, 0	0,8660
$67\frac{1}{2}^\circ$	66,668	66; 40, 5	0,9238
$70^\circ$	68,829	68; 49, 45	0,9396
$72^\circ$	70,534	70; 32, 3	0,9537
$75^\circ$	73,051	73; 3, 5	0,9659
$80^\circ$	77,134	77; 8, 2	0,9848
$82\frac{1}{2}^\circ$	79,121	79; 7, 17	0,9914
$90^\circ$	84,853	84; 51, 10	1

Tabela 3: Tábua de Cordas de Ptolomeu - Parte 2

$\theta$	$crd(\theta)$ em Decimal	$crd(\theta)$ em Sexagesimal	$sen(\theta)$
$90\frac{1}{2}^\circ$	85,222	85; 13, 20	0,9999
$95^\circ$	88,473	88; 28, 24	0,9961
$97\frac{1}{2}^\circ$	90,220	90; 13, 14	0,9914
$100^\circ$	91,925	91; 55, 32	0,9848
$105^\circ$	95,202	95; 12, 08	0,9659
$108^\circ$	97,082	97; 04, 56	0,9510
$110^\circ$	98,298	98; 17, 54	0,9396
$112\frac{1}{2}^\circ$	99,776	99; 46, 33	0,9238
$115^\circ$	101,206	101; 12, 25	0,9063
$120^\circ$	103,923	103; 55, 23	0,8660
$125^\circ$	106,441	106; 26, 29	0,8191
$127\frac{1}{2}^\circ$	107,624	107; 37, 29	0,7933
$130^\circ$	108,756	108; 45, 21	0,7660
$135^\circ$	110,865	110; 51, 57	0,7071
$140^\circ$	112,757	112; 45, 28	0,6427
$142\frac{1}{2}^\circ$	113,631	113; 37, 53	0,6087
$144^\circ$	114,126	114; 07, 37	0,5877
$150^\circ$	115,911	115; 54, 39	0,5
$155^\circ$	117,155	117; 09, 20	0,4226
$157\frac{1}{2}^\circ$	117,694	117; 41, 38	0,3826
$160^\circ$	118,177	118; 10, 37	0,3420
$165^\circ$	118,973	118; 58, 23	0,2588
$170^\circ$	119,543	119; 32, 37	0,1736
$172^\circ$	119,707	119; 42, 28	0,1391
$172\frac{1}{2}^\circ$	119,743	119; 44, 35	0,1305
$174\frac{1}{2}^\circ$	119,862	119; 51, 43	0,0958
$175^\circ$	119,886	119; 53, 10	0,0871
$175\frac{1}{2}^\circ$	119,907	119; 54, 27	0,0784
$176^\circ$	119,927	119; 55, 38	0,0697
$176\frac{1}{2}^\circ$	119,944	119; 56, 39	0,0610
$177^\circ$	119,959	119; 57, 32	0,0523
$177\frac{1}{2}^\circ$	119,971	119; 58, 18	0,0436
$178^\circ$	119,981	119; 58, 55	0,0349
$178\frac{1}{2}^\circ$	119,99	119; 59, 24	0,0261
$179^\circ$	119,995	119; 59, 44	0,0174
$179\frac{1}{2}^\circ$	119,999	119; 59, 56	0,0087
$180^\circ$	120	120; 0, 0	0



## 5 APLICAÇÕES DAS TÁBUAS DE CORDAS

A Trigonometria é base para diversas áreas, apresentando muitas aplicações teóricas e práticas, como o cálculo de áreas triangulares, a forma trigonométrica dos números complexos, movimento balístico e trabalho realizado por uma força constante. Uma aplicação das Tábuas de Cordas, principalmente de Ptolomeu, está na aproximação do valor de  $\pi$ .

As informações que seguem se baseiam em (NASCIMENTO, 2005, p. 70).

Por volta do século II a.C., Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), famoso inventor grego, sabia que a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, resultava em uma constante, que apesar de ser chamada por muitos como a Constante de Arquimedes, ficou mais conhecida pela sua nomenclatura do século XVIII, de William Jones, que representou esta constante pela letra grega  $\pi$  (pi). Nascimento (2005) destaca que é possível determinar o quociente  $\frac{C}{2r}$  por:

$$\frac{p}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{P}{2r} \quad (11)$$

Onde  $2r$  é duas vezes o raio, ou seja, o diâmetro da circunferência;  $p$  é o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência de diâmetro  $2r$ ; e  $P$  é o perímetro do polígono regular circunscrito. Logo, quanto maior a quantidade de lados do polígono, mais próximo do valor exato estará. Arquimedes através de um polígono de 96 lados obteve o seguinte valor:

$$\frac{p}{2r} = \frac{223}{71} < \frac{C}{2r} < \frac{220}{70} = \frac{P}{2r} \Leftrightarrow$$

$$3,140845... < \frac{C}{2r} < 3,142857...$$

Tal tarefa não era tão simples para a época, porém, Ptolomeu, a partir de sua Tábua de Cordas, obteve um resultado que foi essencial para a aproximação de  $\pi$ , que foi o valor da corda de meio grau. A importância desse resultado está no fato de que o ângulo central de um polígono regular de 720 lados é meio grau. Observe na figura 34, onde o esquema fora de proporção, representa um arco da circunferência onde o polígono está inscrito.

Em notação moderna, podemos fazer este cálculo da seguinte forma: Usando a fórmula de 2, considere  $\alpha = \frac{1^\circ}{2}$  e  $\overline{AB} = l_{720}$  como o lado do polígono inscrito, onde:

$$l_{720} = 2r \cdot \text{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$$

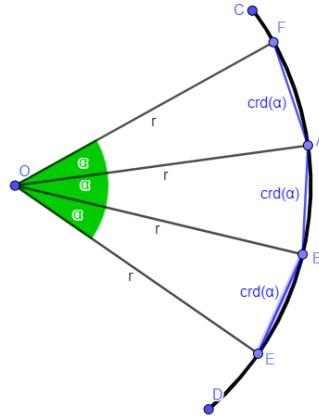
Com isso seu perímetro será

$$p = 720 \cdot l_{720} = 720 \cdot 2r \cdot \text{sen} \left( \frac{1^\circ}{4} \right)$$

Circunscrevendo um polígono de 720 lados na mesma circunferência (em vermelho), obtem-se a figura 35. Porém, se tomarmos um triângulo formado entre dois vértices consecutivos e o centro, esse triângulo será isósceles e não terá lado  $r$ , mas sim sua altura

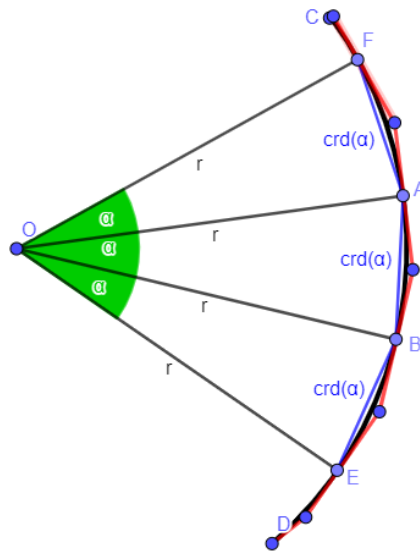
equivale a  $r$ .

Figura 34: Esquema para esboço de um polígono de 720 lados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Figura 35: Esquema para esboço de um polígono de 720 lados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A função a ser usada neste caso é  $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$ . Dessa forma, o lado do polígono circunscrito terá medida:

$$L_{720} = 2r \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{1^\circ}{4}\right)}{\text{cos}\left(\frac{1^\circ}{4}\right)}$$

Com isso seu perímetro será

$$P = 720 \cdot L_{720} = 720 \cdot 2r \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{1^\circ}{4}\right)}{\text{cos}\left(\frac{1^\circ}{4}\right)}$$

Substituindo em 11, obtemos:

$$3,14158 < \frac{C}{2r} < 3,14162$$

Assim, ele obteve o valor de 3,1416 como aproximação para  $\pi$ .

Além dessas aplicações, a Trigonometria, mais específico, as Tábuas de Cordas apresentam aplicações na Astronomia. Como destaca Boyer (1974, p. 119, apud NASCIMENTO, 2005, p. 50), “Suas tabelas foram criadas para serem usadas na astronomia”.

## 5.1 Astronomia

A Astronomia é a ciência que estuda o Universo e que apresenta aplicações práticas no cotidiano. Como citado, a observação do Céu já estava presente nas antigas civilizações, muito antes de seu ápice, por volta de 500 a.C. até 300 d.C., na Grécia. Filho e Saraiva (2016), afirmam que “Os registros astronômicos mais antigos datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios”. Esse estudo dos astros tinha objetivo prático. Ao observar, perceberam por exemplo, o ciclo de fases da Lua, a localização e aparecimento de certas constelações. Com isso, associaram esses acontecimentos com acontecimentos na Terra, como épocas de chuva, de frio, de calor, de seca, neve, cheia dos rios e o movimento das marés. Conhecendo a influência dos astros, era possível saber qual época das cheias dos rios, de plantio e colheita, além de toda parte relacionada à Astrologia, pois nas crenças desses povos, os deuses tem poderes sobre as chuvas, a colheita, e com isso determinava também as épocas de festas religiosas.

Notando tal associação, um marco muito importante foi a criação de calendários, acredita-se que o primeiro calendário da história era baseado na observação da Lua, como destaca Borges (2020), “o primeiro calendário possuía 12 meses lunares de 29 a 30 dias. No entanto, esse calendário foi inventado pelos Sumérios e aperfeiçoado pelos Caldeus por volta de 2700 a.C, na Mesopotâmia”. Com esse calendário lunar, o ano tinha duração de 354 dias. O calendário Solar, têm sua criação associada ao povo egípcio, ele é dividido em 365 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada, os outros 5 dias eram postos ao final do ano, não existia ano bissexto e eram apenas três estações: Inverno, Verão e Inundação. Este foi essencial para a agricultura deste povo, que utilizava as margens férteis do rio Nilo para tal atividade, por isso, conhecer as épocas das cheias do rio foi condição vital para esta civilização.

Além desses, Borges (2020) apresenta ainda o calendário Chinês, que leva em consideração as observações tanto do Sol quanto da Lua. Apresenta peculiaridades, divide-se em ciclos de doze anos, cada ano do ciclo é representado por um animal, relacionando com a Astrologia. O calendário Cristão ou Gregoriano, tem como o primeiro ano baseado no nascimento de Jesus Cristo, sendo utilizado oficialmente em 1582, e é o mais usado no Ocidente. Enquanto o calendário Maia, criado em 550 a.C. é dividido em duas partes, para civis e para os nobres, com diferença de dias entre um e outro, 365 e 260 dias respectivamente. Filho

e Saraiva (2016) destacam que “Nas Américas, o observatório mais antigo descoberto é o de Chankillo, no Peru, construído entre 200 e 300 a.C.”.

Porém, o ápice de evolução da chamada Astronomia antiga, se deu na Grécia, segundo Filho e Saraiva (2016). Destacam cientistas como Tales de Mileto (624-546 a.C.) que introduziu na Grécia os fundamentos astronômicos e de geometria que foram trazidos do povo egípcio; Euclides de Alexandria (330 a.C.); Aristarco de Samos (310-230 a.C.) que foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol (sistema Heliocêntrico), antecipando Copérnico em quase 20 séculos; Hiparco, que é considerado o maior astrônomo da era Pré-Cristã; e Ptolomeu, que compilou no *Almagesto* todo esse conhecimento, e é considerado o último grande astrônomo da antiguidade.

Na época das grandes navegações, principalmente nos séculos XV e XVI, quando os europeus chegaram nas Américas, por exemplo, a observação do céu teve importância fundamental. A famosa Estrela Polar (vista no hemisfério norte) e a constelação Cruzeiro do Sul (vista no hemisfério sul), guiaram muitas embarcações, como as expedições lideradas por Bartolomeu Dias (1450-1500) e Pedro Álvares Cabral (1467-1520), destaca Suárez (2021).

Um objeto que impulsionou a observação do Céu, que era feita à olho nu até o século XVI, foi a luneta, um instrumento óptico que tinha por objetivo observar astros ampliando sua imagem. Ela foi criada pelo inventor holandês Hans Lippershey (1570-1619) em 1608. Porém, o primeiro cientista a fazer uso da luneta para observação de astros, foi Galileu Galilei, como destaca Fernandes (s.d.), “Galileu soube dos detalhes da criação de Lippershey e, com utensílios semelhantes (tubos e lentes), construiu um modelo três vezes mais poderoso que o do holandês. Esse primeiro modelo foi sendo aperfeiçoado por Galileu entre os anos de 1609 e 1610”.

Figura 36: Hans Lippershey e sua Luneta



Fonte: Blogspot Luneta Física <sup>12</sup>

A luneta astronômica de Galileu foi considerada a precursora dos atuais telescópios. A partir desse avanço, Fernandes (s.d.) afirma que os primeiros resultados das pesquisas que Galileu obteve com o uso da sua luneta astronômica foram publicados já em 1610 com o título

<sup>12</sup>Disponível em: <http://lunetafisica.blogspot.com/2014/10/historia-da-luneta.html>. Acesso em: 19 maio 2022.

de “O mensageiro estelar”. Onde acredita-se que o mesmo teria descoberto as crateras na Lua, os anéis de Saturno e os satélites naturais de Júpiter. Este acontecimento foi um marco para a Astronomia, pois contribuiu para provar o modelo de sistema Heliocêntrico.

Figura 37: A Luneta de Galileu



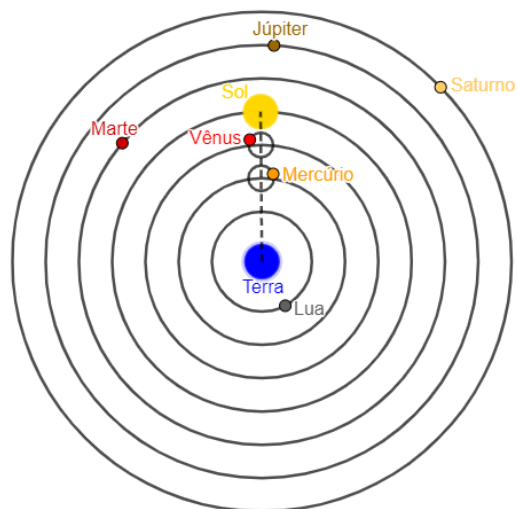
Fonte: Museu de Astronomia e Ciências Afins <sup>13</sup>

Como já abordado, a Trigonometria é auxiliar à Astronomia, sendo utilizada em diversos processos que visam conhecer mais sobre o Universo. Por exemplo, a duração do ano Solar, o número de dias entre equinócios e solstícios, a equação dos tempos, cálculo do raio da Terra e do Sol, e em geral, é utilizada para calcular distâncias.

Nogueira destaca que

Os astrónomos gregos acreditavam que as órbitas dos planetas e dos objetos celestes iluminados da astronomia deveriam ser círculos ou partes de círculos. A maneira, mais simples, de representar o movimento aparente do Sol observado a partir da Terra ( $T$ ) seria um círculo no plano da eclíptica, centrado em  $T$ . (NOGUEIRA, 2013, p. 50)

Figura 38: Órbitas dos Planetas e dos objetos celestes iluminados, segundo os gregos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Conforme abordado no capítulo 3, acredita-se que Hiparco descobriu a Precessão dos Equinócios. Equinócio ocorre duas vezes por ano, essa palavra significa “noite igual ao dia”.

<sup>13</sup>Disponível em: [http://site.mast.br/multimedia\\_instrumentos/luneta\\_historico.html](http://site.mast.br/multimedia_instrumentos/luneta_historico.html). Acesso em: 19 maio 2022.

Solstício representa o momento em que o Sol atinge, em relação à linha do Equador, sua maior declinação em latitude, o que significa que um dos hemisférios receberá maior incidência dos raios solares. O Solstício também ocorre duas vezes por ano e essa palavra significa que “o Sol ficou parado”.

Portanto, são eventos astronômicos que marcam o início das estações do ano nos hemisférios: Verão, Outono, Inverno e Primavera. Veja na Tabela ?? as datas dos Solstícios e Equinócios, em 2022 no Hemisfério Sul. Os dados são de Toda Matéria<sup>14</sup>.

Tabela 4: Datas dos Solstícios e Equinócios no Hemisfério Sul em 2022

	Equinócio de Outono	Solstício de Inverno	Equinócio de Primavera	Solstício de Verão
2022	20/03 às 12h33	21/06 às 06h14	22/09 às 22h04	21/12 às 18h48

Como acreditavam nessa época que as órbitas dos planetas deveriam ser necessariamente circulares, por isso a duração de dias entre Equinócios e Solstícios deveria ser igual. Observe na figura 39 que, pelo pensamento da época, se o número de dias fossem iguais, os quadrantes determinados por eles também deveriam ser iguais, o que significa que o ângulo entre um Solstício, a Terra e um Equinócio deveria ser igual a  $90^\circ$ .

Figura 39: Solstícios e Equinócios



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Tomando a duração do ano como  $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300}$  dias, de acordo com o resultado que Hiparco obteve, cada intervalo teria  $91 + \frac{187}{600}$  dias. Ou seja, se  $y$  for a quantidade de dias de um

<sup>14</sup>Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/solsticio-equinocio/>. Acesso em: 24 maio 2022.

ano, cada intervalo entre um Equinócio e um Solstício teria exatamente  $\frac{y}{4}$  dias, como destaca Nogueira (2013, p. 51). Porém, as medições feitas por ele, concluem que isso não acontece, observe na figura 40 o modelo proposto por Hiparco.

Figura 40: Modelo de Solstícios e Equinócios por Hiparco



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Nesse modelo, a Terra estaria parada,  $A$  é o centro da circunferência  $c$  no qual o Sol se move num movimento uniforme. Essa circunferência onde o Sol se move, se diz excêntrica à Terra, significa que a Terra não está situada no centro, ou seja, a Terra não está no ponto  $A$ . Pois, a mesma teve que ser “retirada” do centro para gerar intervalos mais longos entre os intervalos de Solstícios e Equinócios.

Outra aplicação das Tábuas de Cordas e da Trigonometria na Astronomia é a determinação da medida do raio da Terra. As informações do método que seguem, para a medida do raio da Terra, é de Lima et al.(2006, p. 12, apud OLIVEIRA, 2015, p. 74):

Considere o raio  $R$  e o ponto  $O$  como o centro da Terra. Subindo em uma torre que possui altura  $h$ , considerando  $A$  como ponto de observação e topo da torre, temos que  $AO$  determina o segmento entre o ponto de observação e o centro da Terra, logo  $\overline{AO} = R + h$ . Da reta do horizonte de  $A$ , tome um segmento  $AB$ . Dessa forma, a reta que passa por  $AB$  tangencia a circunferência da Terra no ponto  $B$ , com isso  $\widehat{ABO} = 90^\circ$ . Observe na figura 41.

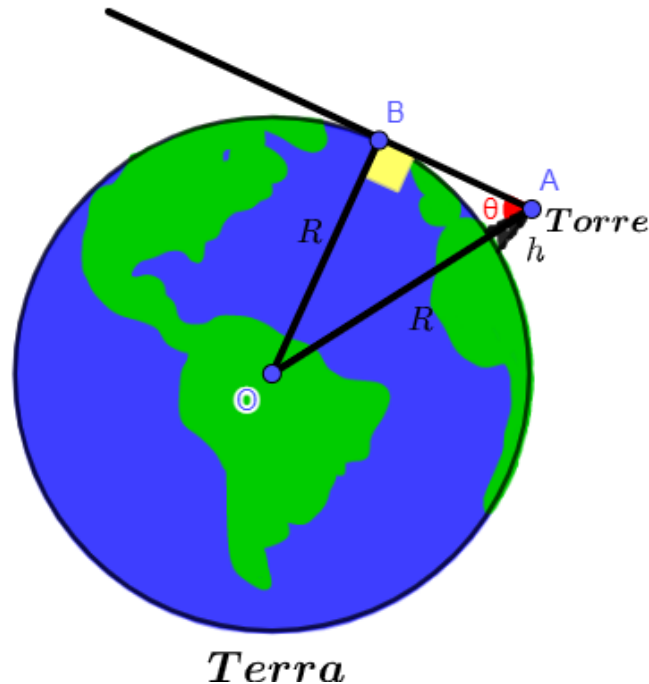
Seja  $\theta = \widehat{BAO}$ . Como o triângulo  $ABO$  é retângulo, podemos usar o seno de  $\theta$ :

$$\text{sen } \theta = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow$$

$$R \cdot \text{sen } \theta + h \cdot \text{sen } \theta = R \Leftrightarrow$$

$$R(1 - \text{sen } \theta) = h \cdot \text{sen } \theta \Leftrightarrow R = \frac{h \cdot \text{sen } \theta}{1 - \text{sen } \theta}$$

Figura 41: Medida do Raio da Terra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Com isso, tendo as medidas de  $h$  e de  $\theta$  e utilizando uma tabela de senos, que é referente à uma Tábua de Cordas, podemos calcular a medida de  $R$ . Oliveira (2015, p. 75) realizou as medições em sua cidade e obteve  $h = 102,83$  m e  $\theta = 89,68^\circ$ , logo:

$$R = \frac{102,83 \cdot \text{sen } 89,68^\circ}{1 - \text{sen } 89,68^\circ}$$

$$R = 6593097,1 \text{ metros.}$$

Portanto o raio da Terra calculado equivale a 6593,1 km, o valor considerado correto é de 6371 km.

Veja um método usando as definições de corda, em vez do seno, para calcular a medida do raio da Terra. Considerando os mesmos valores para  $R$  e  $h$ , e os valores das cordas da Tábua de Cordas de Ptolomeu. Observe a figura 42.

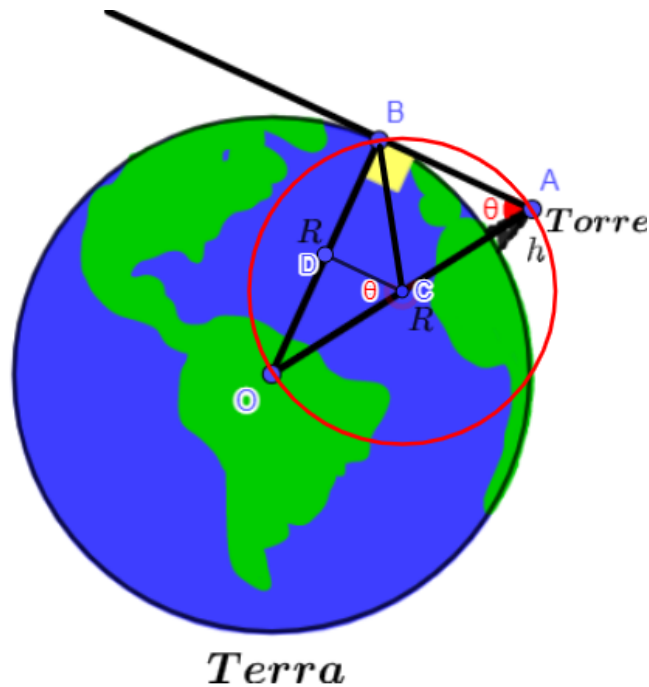
Como o triângulo  $ABO$  é retângulo, podemos inscrevê-lo em uma circunferência (em vermelho), onde a hipotenusa coincide com o diâmetro da mesma. Logo, o ponto  $C$  é o centro da circunferência e está sob  $\overline{AO}$ , de modo que  $\overline{AC} = \overline{CO}$ . Ligando os pontos  $B$  e  $C$  por um segmento, temos que  $BCO$  determinam um triângulo isósceles, pois  $\overline{BC} = \overline{CO}$ . Tomando  $D$  como a interseção entre  $BO$  e a bissetriz do ângulo  $\widehat{BCO}$ , temos que  $\widehat{CDO} = 90^\circ$ , dessa forma,  $CD \parallel AB$ , logo  $\widehat{DCO} = \theta$  e como  $CD$  está sobre a bissetriz,  $\widehat{BCO} = 2\theta$ .

O valor de  $\theta$  é  $89,68^\circ$ , com isso,

$$\widehat{BCO} = 2 \cdot 89,68^\circ = 179,36^\circ.$$



Figura 42: Cálculo da medida do Raio da Terra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Usando o valor próximo ao da  $crd(179\frac{1}{2}^\circ)$  da Tábua de Cordas de Ptolomeu, temos que

$$crd(2\theta) = \overline{BO} = R = 119,998$$

Como  $R + h = 120$ , pois é o diâmetro,  $h = 120 - 119,998 = 0,002$ . Dividindo o valor real de  $h$  pelo valor encontrado, obteremos uma constante.

$$\frac{102,83}{0,002} = 51415$$

Multiplicando este número pelo valor de  $R$  encontrado, iremos obter o valor real de  $R$ :

$$51415 \cdot 119,998 = 6169697,17 \text{ metros.}$$

Portanto, por esse método podemos verificar que a medida do raio da Terra equivale a aproximadamente 6169,7 km.

Veja outras aplicações da Trigonometria na Astronomia no Apêndice A, onde descreve um dos métodos para cálculo de distâncias entre astros, o método da Paralaxe Trigonométrica. Além do cálculo da medida do raio linear do Sol.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste estudo, observou-se que a Trigonometria, e conseqüentemente a Matemática, não é produto de apenas um povo ou um período histórico. O objetivo geral de estudar os métodos empregados na construção das Tábuas de Cordas de Hiparco e Ptolomeu, bem como os objetivos específicos de fazer um levantamento bibliográfico dos dois pesquisadores e apresentar algumas aplicações das suas Tábuas de Cordas, foram contemplados.

O interesse que surgiu a partir do estudo de algumas áreas, como Cálculo Diferencial e Integral, Física, História da Matemática e Geometria, culminou nesta pesquisa. Apesar de não se ter acesso aos trabalhos originais, e da dificuldade de encontrar informações relacionadas à vida dos dois estudiosos, a reunião das informações encontradas é importante para entender como surgiram as tabelas que foram base para a “criação” da Trigonometria. Com isso, serviu como resultado prático na Astronomia, e conseqüentemente, contribuiu para o progresso da humanidade, assim como diz a epígrafe deste trabalho.

Estas Tábuas foram usadas para diversas aplicações astronômicas e matemáticas, que permitiram, por exemplo, uma aproximação para  $\pi$ , que é importante para o funcionamento do GPS e do celular. Também é importante destacar que elas foram base para o desenvolvimento da Trigonometria, e esta, é usada em áreas da ciência, como na Física, no estudo de ondas e campo magnético; nas Geociências, no estudo do nível das marés e no aumento angular do olho humano; e no estudo da Ótica, sendo empregada no desenvolvimento de lentes melhores e com alcance maior.

No desenvolvimento deste trabalho, foi possível reforçar e aprofundar os conhecimentos em Geometria, Construções Geométricas, e em Trigonometria. Operar o Geogebra para a construção das figuras e a utilização do LaTeX foram outras aprendizagens significativas.

Ainda existem inúmeras outras possibilidades e assuntos a serem abordados no mesmo ramo estudado. Esta pesquisa apresenta uma fração dos estudos históricos nos quais a Trigonometria se desenvolveu, como já exposto, ao longo da história diversos povos e diversos períodos contribuíram para isto. Existem então, inúmeras outras fases do desenvolvimento da Trigonometria que podem ser estudados, por exemplo, a criação das funções seno, cosseno e tangente. Por se tratar de um assunto de grande relevância e aplicações cotidianas, e mesmo com os diversos estudos na área, esta têm despertado a curiosidade de muitos pesquisadores, o que contribui para a continuidade dos estudos. Resgatar e estudar esses métodos e fases é importante para entender que a Trigonometria e conseqüentemente a Matemática não é uma ciência pronta.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, C. F. **Trigonometria e Números Complexos: Uma abordagem Elementar com aplicações**. Orientador: Prof. Dr. Antônio José da Silva. Coorientador: Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior. 78 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2019. Disponível em: <https://tedebc.ufma.br/jspui/bitstream/tede/2665/2/CleniltonAlves.pdf>. Acesso em: 02 jul. 2022.
- ARAÚJO, T. **Como se mede a distância entre a Terra e outros astros?** Mundo Estranho, 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-se-mede-a-distancia-entre-a-terra-e-outros-astros/>. Acesso em: 28 mar. 2022.
- ASTROBIOFÍSICA, A. **A Paralaxe Trigonométrica - Medindo distâncias na Astronomia - Astronomia em Grau Olímpico**. Youtube, 2021. Disponível em: <https://youtu.be/veuYKFWFETA>. Acesso em: 10 maio 2022.
- BOCZKO, R. **Conceitos de Astronomia**. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1984. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5300798/mod\\_resource/content/1/Conceitos\\_de\\_astronomia.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5300798/mod_resource/content/1/Conceitos_de_astronomia.pdf). Acesso em: 10 mar. 2022.
- BORGES, D. **História, origem e funções do calendário**. Conhecimento Científico, 2020. Disponível em: <https://conhecimentocientifico.com/calendario/>. Acesso em: 21 maio 2022.
- COSTA, J. R. V. **História das constelações ocidentais – 1ª parte**. Astronomia no Zênite, 2000. Disponível em: <https://www.zenite.nu/historia-das-constelacoes-ocidentais>. Acesso em: 22 maio 2022.
- CRISTO, R. F. **Conheça Plimpton 322 – um tablete de argila com escrita cuneiforme babilônica datado em 3800 anos**. Blog RCRISTO, 2018. Disponível em: <https://bit.ly/390aX2f>. Acesso em: 29 set. 2021.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.
- EVES, H. **História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004. 844 p.
- FERNANDES, C. **A invenção do telescópio por Galileu Galilei**. Brasil Escola, s.d. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/historiag/a-invencao-telescopio-por-galileu-galilei.htm>. Acesso em: 21 maio 2022.
- FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia Antiga**. 2016. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm>. Acesso em: 21 maio 2022.
- FRAZÃO, D. **Claudio Ptolomeu**. Ebiografia, 2019. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/claudio-ptolomeu/>. Acesso em: 15 mar. 2022.

GÁZQUEZ, J. M. **A Importância de Ptolomeu e do Almagesto no Trabalho de Traduções das Ciências Árabes na Idade Média**. Tradução de César Augusto. Espaço Astrológico, 2022. Disponível em: <https://bit.ly/3wRj1Kx>. Acesso em: 22 maio 2022.

GUIMARÃES, C. G. B. **Hiparco de Nicéia (190 a.C -120 a.C)**. Unicentro, 2021. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2021/07/16/hiparco-de-niceia-190-a-c-120-a-c/>. Acesso em: 15 mar. 2022.

HIPARCO. **Stringfixer**. s.d. Disponível em: <https://stringfixer.com/pt/Hipparchus>. Acesso em: 23 mar. 2022.

HIPPARCHUS. **Encyclopedia.com**. 2018. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/people/history/ancient-history-greece-biographies/hipparchus-astronomer>. Acesso em: 12 mar. 2022.

KILHIAN, K. **Elementos de Euclides**. O Baricentro da Mente, 2010. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2010/01/elementos-de-euclides.html>. Acesso em: 01 maio 2022.

LUCIZANI, A. C. **Aplicação da Astronomia no Ensino da Matemática**. Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, Paraná, 2016. Disponível em: <http://dspace.unila.edu.br/123456789/1757>. Acesso em: 21 abr. 2022.

MARK, J. J. **Hipparchus of Nicea**. World History Encyclopedia, 2022. Disponível em: [https://www.worldhistory.org/Hipparchus\\_of\\_Nicea/](https://www.worldhistory.org/Hipparchus_of_Nicea/). Acesso em: 24 mar. 2022.

MENDES, M. J. de F.; ROCHA, M. L. P. C. **Rumos que levam à tabela trigonométrica a partir da corda**. Belém: SBEM-PA. (Coleção Educação Matemática na Amazônia, 1), 2010. 38 p. Disponível em: <http://www.sbempara.com.br/files/Colecao-1---V---01.pdf>. Acesso em: 22 maio 2022.

NASCIMENTO, A. Z. do. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni. 228 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11511/2/Alessandra%20Nascimento.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2022.

NOGUEIRA, D. M. M. **Tópicos da História da Trigonometria**. Orientador: Prof. Doutora Ana Maria Reis d'Azevedo Breda. 239 f. Dissertação (Mestrado) – Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2013. Disponível em: <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/13298/1/Tese.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2022.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Hipparchus of Rhodes**. MacTutor History of Mathematics Archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hipparchus/>. Acesso em: 13 mar. 2022.

OLIVEIRA, J. da S. **Aplicações da Trigonometria nas Ciências**. Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, Roraima,

2015. Disponível em: [http://www.bdt.d.ufr.br/tde\\_arquivos/7/TDE-2015-06-19T045317Z-235/Publico/JoerkdaSilvaOliveira.pdf](http://www.bdt.d.ufr.br/tde_arquivos/7/TDE-2015-06-19T045317Z-235/Publico/JoerkdaSilvaOliveira.pdf). Acesso em: 20 abr. 2022.

OLIVEIRA, J. de. **Tópicos Selecionados de Trigonometria e a sua História**. Orientador: João Carlos Vieira Sampaio. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/graduacao/attachments/article/156/313530.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2022.

PROCOPIO, M. R. com P. R. **Como calcular a distância da Terra até a Lua com Hiparco de Nicéia? (ft. Canal da Física)**. Youtube, 2015. Disponível em: [https://youtu.be/OJKQHGu5N\\_I](https://youtu.be/OJKQHGu5N_I). Acesso em: 17 mar. 2022.

RIBEIRO, E. **Ptolomeu**. 2013. Disponível em: <http://curiosidadesepoemas.blogspot.com/2013/09/claudio-ptolomeu-nasceu-no-alto-egito.html>. Acesso em: 22 maio 2022.

SILVA, C. R. da. **A Matemática Babilônica e Egípcia**. Luz da Matemática, 2017. Disponível em: <http://luzdamatematica.blogspot.com/2017/10/a-matematica-babilonica-e-egipcia.html>. Acesso em: 01 maio 2022.

SILVA, L. P. M. **Elementos do círculo e da circunferência**. Mundo Educação, s.d. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/elementos-circulo-e-circunferencia.htm>. Acesso em: 12 abr. 2022.

SOBRINHO, J. L. G. **Estudo do Meio Físico-Natural I - Astronomia**. Grupo de Astronomia da Universidade da Madeira, 2014. Disponível em: <http://www3.uma.pt/Investigacao/Astro/Ensino/EMFNI2014/problemas2014.pdf>. Acesso em: 16 maio 2022.

SOUZA, R. **Solstício e equinócio**. Mundo Educação, s.d. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/solsticios-equinocios.htm>. Acesso em: 17 mar. 2022.

STEINER, J. **Hiparco fundou a astronomia científica muito antes do telescópio**. Entrevistador: Luiza Caires. Entrevista concedida a coluna Entender as Estrelas - Uma viagem pela astronomia, na Rádio USP. Jornal da USP, 2019. Disponível em: <https://jornal.usp.br/atualidades/hiparco-fundou-a-astronomia-cientifica-muito-antes-do-telescopio/>. Acesso em: 23 mar. 2022.

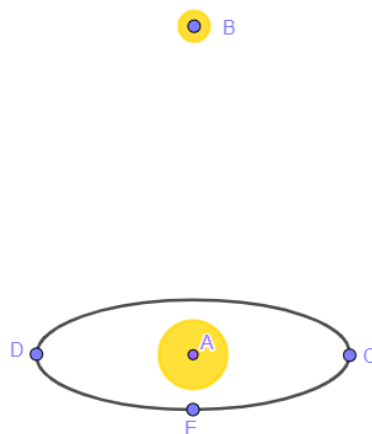
SUÁREZ, V. J. P. **A Observação do Céu na História das Grandes Navegações**. Museu de Astronomia e Ciências Afins, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/mast/pt-br/assuntos/noticias/2021/abril/a-observacao-do-ceu-na-historia-das-grandes-navegacoes>. Acesso em: 16 maio 2022.

## APÊNDICE A – PARALAXE TRIGONOMÉTRICA E RAIOS LINEAR DO SOL

Uma das principais aplicações da Trigonometria na Astronomia é a medida de distâncias. Como abordado no capítulo 3 sobre o cálculo da distância Terra-Lua, a medida da distância entre o nosso planeta e outros corpos celestes muitas vezes não é possível com alguns métodos convencionais, recorrendo então à Trigonometria para tal propósito. Um dos métodos trigonométricos empregados, é a chamada *Paralaxe Trigonométrica*.

Segundo Boczko (1984, p. 230), “A paralaxe é, pois um efeito geométrico aparente de deslocamento angular do astro devido à posição relativa entre o astro e o observador”. Um exercício sugerido por Astrobiofísica (2021) é estender o braço paralelo ao solo, levantar o dedo indicador e, observá-lo, ora com um olho fechado, ora com o outro. Com isso há a percepção de que aparentemente o dedo muda de posição. Segundo ele, o olho humano usa o método de Paralaxe para ter noção de profundidade. Isso é fundamental no cálculo de distância de astros que não estejam muito distantes da Terra. Para o cálculo dessa distância de estrelas “próximas”, o que irá causar esse efeito, não é “fechar e abrir o olho”, mas sim a observação do astro de acordo com a posição que o planeta se encontra em relação ao Sol. As informações que seguem se baseiam em (ASTROBIOFÍSICA, 2021).

Figura 43: Paralaxe Trigonométrica



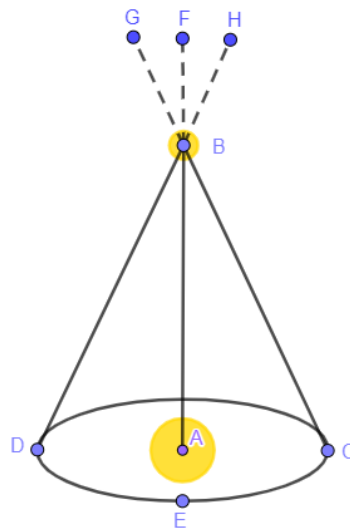
Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Conforme apresentado no esquema fora de escala, na figura 43, temos que *A* representa o centro do Sol, *B* o centro do astro observado, *C*, *E* e *D* representam posições de observação. Ou seja, esses três pontos representam a posição do planeta Terra na primeira observação, ponto

$D$ , três meses depois na segunda observação, ponto  $E$ , e seis meses após a primeira, na terceira observação, ponto  $C$ . Os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ , foram tomados de modo que  $C, A$  e  $D$ , sejam colineares; e que  $\widehat{CAB} = 90^\circ = \widehat{DAB}$ , ou seja,  $AB \perp CD$ .

Vale ressaltar que essa divisão de tempo de três meses é aleatória, podendo ser empregados espaços de tempo menores, desde que sejam utilizados equipamentos de observação melhores, como telescópios espaciais. Se, para essas observações for utilizados telescópios de solo ou à olho nu, é necessário ou maior espaço de tempo, ou maior quantidade de observações para maior precisão. Aqui será apresentado as observações nos pontos  $D$  e  $C$ , conforme a figura 44. Observando o astro na primeira posição, a luz emitida ou refletida percorre o segmento  $BD$ , o que faz com que ele seja visto como se estivesse projetado no ponto  $H$ . Observando de  $C$ , a luz percorrerá o segmento  $BC$ , que faz com que ele seja visto como se estivesse projetado no ponto  $G$ . Se ele fosse observado do Sol, a luz percorrerá o segmento  $BA$ , que faz com que ele seja visto como se estivesse projetado no ponto  $F$ . Se observássemos nos pontos  $C$  e  $D$ , seria equivalente ao exercício de “fechar ora um olho, ora o outro”.

Figura 44: Paralaxe Trigonométrica



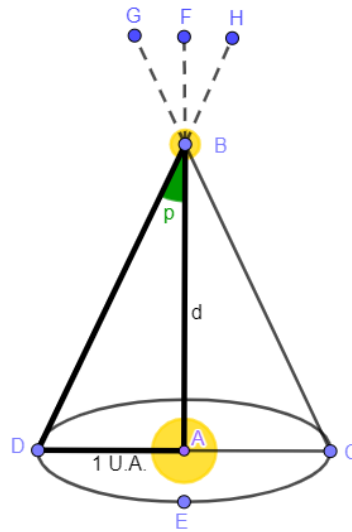
Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Considerando os segmentos  $BD$  e  $AB$ , temos um triângulo retângulo  $ABD$ , pois  $\widehat{DAB} = 90^\circ$ . O ângulo  $\widehat{ABD}$  é chamado Paralaxe. O segmento  $AD$  é conhecido, se trata da distância entre a Terra e o Sol, que equivale a aproximadamente 150 milhões de quilômetros, ou  $1,5 \cdot 10^8$  km, considerado como uma Unidade Astronômica (1 U.A.).  $AB$  é a medida a ser encontrada, representada por  $d$ , conforme 45.

Com isso, no triângulo retângulo,  $AD$  é o cateto oposto em relação ao ângulo de paralaxe, enquanto  $AB$  é o cateto adjacente. A relação entre cateto oposto e cateto adjacente é tangente, logo:

$$\tan p = \frac{AD}{AB} = \frac{1 \text{ U.A.}}{d} \quad (12)$$

Figura 45: Paralaxe Trigonométrica



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Para ângulos muito pequenos, temos a seguinte aproximação:

$$\tan \theta \cong \sin \theta \cong \theta$$

Logo  $\tan p$  pode ser considerada como  $p$ , considerando que a paralaxe seja medida em radianos.

$$\tan p = p(\text{rad}) = \frac{1 \text{ U.A.}}{d(\text{U.A.})} \quad (13)$$

Vale ressaltar que, quanto maior a distância  $d$ , menor será o ângulo  $p$ , ou seja, temos grandezas inversamente proporcionais.

Para descobrir o valor de  $1 \text{ rad}$ , temos a seguinte igualdade:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \Leftrightarrow 1 \text{ rad} \approx 57,29^\circ$$

Transformando de graus para segundo de arco, pois para medidas astronômicas é mais utilizado.

$$1 \text{ rad} \approx 57,29^\circ = 206265''$$

Dessa forma, a equação 13, pode ser escrita como:

$$p('') = \frac{206265}{d(\text{U.A.})} \quad (14)$$

Para isso, a unidade de medida empregada é o Parsec, que é a unidade representada por “ $pc$ ”, usada para medir distâncias de astros que estão fora do Sistema Solar. Um  $pc$  é equivalente a um segundo de arco, ou seja,  $1 pc \cong 206265 \text{ U.A.} \cong 3,3 \text{ anos-luz}$ . Com o emprego



dessa unidade, a equação 14 pode ser reescrita como:

$$p'' = \frac{1 \text{ pc}}{d(\text{pc})}$$

Exemplo da utilização desta fórmula:

1. A Paralaxe de Alfa Centauro é igual a  $0,76''$ . Qual a distância entre o Sol e Alfa Centauro?

$$p'' = \frac{1 \text{ pc}}{d(\text{pc})} \Leftrightarrow d(\text{pc}) = \frac{1 \text{ pc}}{p''}$$

Logo

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{0,76''} = 1,3158 \text{ pc.}$$

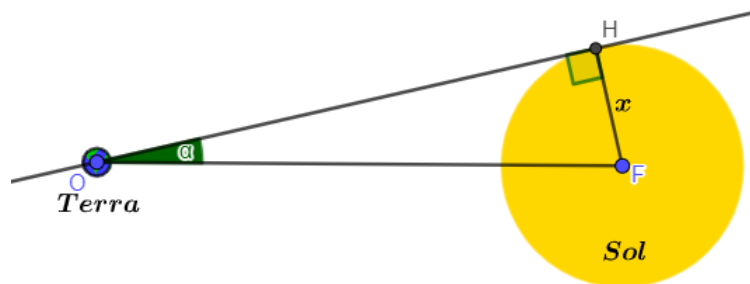
Convertendo para anos-luz, temos que  $1,3158 \text{ pc} \cong 4.3421 \text{ anos-luz}$ .

Isso equivale a dizer que a distância entre nós e Alfa Centauro é de aproximadamente  $4,125 \cdot 10^{13} \text{ km}$ , ou  $271\,403,487 \text{ U.A.}$

Uma outra aplicação da Trigonometria na Astronomia, está em calcular a medida do raio linear do Sol, para isso, utilizaremos informações da Questão 3 de (SOBRINHO, 2014), “Determine o raio linear do Sol sabendo que o seu raio angular (para um observador terrestre) é de aproximadamente 950 segundos de arco.”

Observe a figura 46:

Figura 46: Medida do Raio Linear do Sol



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Seja  $O$  o centro da Terra,  $F$  o centro do Sol,  $OH$  o segmento que pertence a reta que tangencia a circunferência do Sol no ponto  $H$ ,  $OF$  a distância entre a Terra e o Sol, que equivale a  $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ,  $\widehat{FOH} = \alpha$  é o raio angular e  $FH = x$  a medida procurada.

Transformando  $950''$  em graus, temos:  $\alpha = 950'' \cong 0,2639^\circ$ .

O seno de  $\alpha$  será dado pela relação entre o cateto oposto pela hipotenusa:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{FH}}{\overline{FO}} \Leftrightarrow \text{sen}(0,2639^\circ) = \frac{x}{1,5 \cdot 10^8} \Leftrightarrow$$

$$\text{sen}(0,2639^\circ) \cdot 1,5 \cdot 10^8 = x \Leftrightarrow x \cong 690\,886 \text{ km.}$$