UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GILBERTO SILVA OLIVEIRA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

ARAGUAÍNA
2018

GILBERTO SILVA OLIVEIRA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Msc. Basilides Temistocles Colunche Delgado.

ARAGUAÍNA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

O48v OLIVEIRA, Gilberto Silva.
Variáveis Aleatórias Discretas. / Gilberto Silva OLIVEIRA. – Araguaína, TO, 2018.
66 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2018.
Orientador: Basilides Temistocles Colunche Delgado

1. Experimento Aleatório. 2. Evento. 3. Medidas de Probabilidades. 4. Variáveis Aleatórias. I. Título

CDD 510

GIBERTO SILVA OLIVEIRA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Msc. Basilides Temistocles Colunche Delgado.

Aprovada em: ____ / ____ / ______ .

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Msc. Basilides Temistocles Colunche Delgado (orientador)

____
Prof. Dr. Luís Antônio Cabral

____
Prof. Msc. Raimundo Calvacante Maranhão Neto

Dedico este trabalho aos meus avós João Nazaré e Teodora Maria (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo que tem feito na minha vida, a ele devo todo meu agradecimento se hoje estou aqui é porque a sua infinita misericórdia é grande para comigo. Nos momentos mais difíceis da minha vida, pude sentir o seu grande amor por mim, seus cuidados, sua proteção. Como disse o profeta Samuel:"Até aqui me ajudou o Senhor" (I Samuel 7:12).

Agradeço a UFT- Universidade Federal do Tocantins por ter acolhido e a todos seus funcionários que trabalham na mesma obrigado por tudo que fizeram por mim. Agradeço a todos os professores do colegiado de Matemática, os mesmos que contribuíram para o meu aprendizado, o meu sincero agradecimentos a vocês.

Agradeço ao meu orientador Basiles Temistocles que atenciosamente dedicou o seu tempo valioso para me orientar em cada passo deste trabalho. Mesmo com as dificuldades que eu tinha sobre o tema que eu escolhi, mas o professor nunca disse o não para mim, sempre que eu tinha dúvidas sobre o tema o senhor tirava um tempo para sanar as minhas dúvidas. Professor meus sinceros agradecimentos a você por tudo que fez por mim.

Agradeço aos meus amigos: Lusinaldo, Talles Marcos, Cristiano, Ana Claudia, Ana Flávia, Jhonathan, Gecivaldo, Danielle, Wga Kelly, Simão, Walyson, pessoas que eu aprendi amar e criar um vínculo de amizade como se fôssemos irmãos e a todos os alunos da turma do périodo 2013.1. Nos momentos mais difíceis vocês me ajudaram e, souberam me compreender isso não tem preço. A vocês, obrigado por tudo.

Agradeço a minha família, meus pais, meus irmãos pelo o apoio que me deram durante a minha a graduação, vocês acreditaram em mim e hoje sou grato a vocês pela a confiança que tiveram em mim. Agradeço aos meus avós João Nazaré e a Teodora *(In Memória)* por tudo que fizeram por mim, vó a saudade que você faz queria tanto que tivesse aqui para me ver formado, mas sei onde estiver creio que está torcendo por mim e cuidando de mim. Dedico este trabalho a vocês meus avós.

Jamais poderia esquecer de agradecer uma pessoa que me ajudou muito ao longo da minha graduação na UFT, ao professor Sinval agradeço o senhor por tudo que me ensinaste e me fizeste ser uma pessoa que sou hoje. Graças ao senhor eu aprendi o que é ser um professor, ao senhor meus sinceros agradecimentos.

Agradeço a banca examinadora deste trabalho (Raimundo, Temistocles, Cabral) que muito contribuiu com as suas sugestões aprovando o meu trabalho.

A todos que me ajudaram diretamente e indiretamente meus sinceros agradecimentos.

‘‘Na vida só há duas possibilidades o fracasso e o sucesso.”

Gilberto Silva

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o estudo de experimentos aleatórios de tipo discreto e as medidas de probabilidade inerentes a eles. Um componente deste estudo está constituído pelas variáveis aleatórias de tipo discreto. Nestas, a associação $X = x_j$, ocorre sob uma certa medida de probabilidade *P* definida por uma sequência de probabilidade p_j onde j assume um conjunto finito de valores $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ ou um conjunto infinito de valores $j = 1, 2, 3, \cdots$. São objeto de nosso estudo aqueles modelos probabilísticos discretos que mais se destacam e que tem contribuído decididamente no desenvolvimento da teoria matemática das Probabilidades tais como o modelo de Bernoulli, modelo Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, Hipergeométrica e de Poisson, e que tem sido profudamente estudados por matemáticos tais como Bernoulli, Pascal, Fermat, Laplace e outros.
Palavras-chave: Experimento aleatório. Evento. Medida de probabilidade. Variáveis aleatórias.

ABSTRACT

In this work we present the study of random and the measures of probability inherent in them. A component of this study is made up of random variables of discrete type. In these, the association $X = x_j$, occurs under a certain measure of probability P defined by a probability sequence p_j where j assume a finite set of values $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ or an set of infinite values $j = 1, 2, 3, \cdots$. The object of our study are those discrete probabilistic models that and has contributed decisively to the development of the mathematical theory of Probabilities such as Bernoulli model, model Binomial, Geometric, Negative Binomial, Hypergeometric and Poisson, and which has been thoroughly studied by mathematicians such as Bernoulli, Pascal, Fermat, Laplace and others.

Keywords: Random experiment. Event. Measure of probability. Random variables.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Como é do nosso conhecimento, a Teoria das Probabilidades tem ocupado uma atribuição de fundamental importância em diversas áreas da ciência uma vez que a mesma tem um papel interdisciplinar e isto faz com que tal campo esteja bastante ensinado nas universidades. Como por exemplo, o caso das variáveis aleatórias discretas e suas distribuições. Com isso, muitos questionamentos podem surgir, um deles seria o caso de identificar o tipo de distribuição probabilística de uma variável aleatória discreta e suas características, na qual muitos acadêmicos que cursam a disciplina de Probabilidade apresentam dificuldades. Primeiramente vamos definir o que seria uma variável aleatória discreta. Uma variável aleatória X é discreta se sua imagem ou conjunto de valores que ela assume for um conjunto finito ou enumerável $X = x_i$, $i = 1, 2, \cdots$. E a medida de probabilidade que mede quão provável a associação $X = x_i$ é definida por uma sequência de probabilidade (p_i), $i = 1, 2, \cdots$.

Os modelos probabilísticos discretos destacados são as seguintes: Bernoulli, Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica, Poisson;os quais modelam experimentos aleatórios tais como: lançamentos de dados e moedas, jogos de cartas e outros experimentos provenientes da Física.

A presente monografia está divida em 3 capítulos. O primeiro capítulo tem como título conceitos básicos. Foi de nossa pretensão apresentar os conceitos básicos quando se procura estudar sobre probabilidades. Eles perpassam pelo que denominamos de introdução à teoria dos conjuntos que são: operações com conjuntos, partições, produto cartesiano, Conjuntos de Natureza Discreta e a medida de contagem fenômeno e experimentos aleatórios, finalizando com sigma álgebra e espaço amostral.

O capitulo 2 é denominado de Medidas de Probabilidade. Nesse capitulo foi de nossa pretensão, apresentar o conceito da mesma através do que chamamos de estudos dos fenômenos ou experimentos aleatórios através espaço de probabilidade, medida de probabilidade, probabilidade condicional probabilidade total e a probabilidade envolvendo o teorema de Bayes.

Por fim, o terceiro capitulo denominamos de variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade nos levou a definir o que é variáveis aleatórias e ainda função de distribuição, esperança matemática, variância, e as algumas variáveis aleatórias discretas.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Elementos da teoria de conjuntos

A Teoria das Probabilidades usa os conjuntos como material primário para a formalização matemática de fenômenos aleatórios. Por esta razão mencionamos as pricipais operações com estes objetos. Para maiores detalhes pode-se consultar as referências [8, 5, 12].

2.1.1 Operações com conjuntos

Definição 2.1.1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Definem-se então, dois novos conjuntos, o conjunto $A \cup B$ denominado de união de A com B e o conjunto $A \cap B$ denominado de interseção de A com B, definidos como*

$$A \cup B = \{x \textit{ tal que } x \in A \quad ou \quad x \in B\}$$

e

$$A \cap B = \{x \textit{ tal que } x \in A \quad e \quad x \in B\}.$$

Estas definições podem ser generalizadas em termos de famílias enumeráveis de conjuntos.

Seja a família de conjuntos $A_1, A_2, A_3, ...$, que a podemos denotar também como $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Temos então que, a união dessa família é

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{\infty} =& A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \\ =& \{x \quad \text{tal que} \quad x \in A_j \quad \text{para algum} \quad j \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

A interseção dessa família é

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=1}^{\infty} &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \\ &= \{x \quad \text{tal que} \quad x \in A_j \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.1. *Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{3, 6, 9\}$. A união desse dois conjuntos é: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 9\}$.*

Exemplo 2.1.2. *Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 7, 8\}$. A interseção desses dois conjuntos é : $A \cap B = \{2, 4\}$.*

Diz-se que a família dos conjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots$, é disjunta se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para qualquer par (i, j) com $i \neq j$ em $\mathbb{N}$.

Diz-se que a união $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ é disjunta se a família $A_1, A_2, \cdots$, é disjunta.

Se A e B são dois conjuntos e todos os elementos do conjunto A são elementos do conjunto B é dito, que A está *contido* em B ou que A é um *subconjunto* de B. Escrevemos esta situação como $A \subseteq B$.

2.1.2 Partições

Definição 2.1.2. *Seja Ω um conjunto. Uma família $(A_j)_{j \in \mathbb{I}}$ é dita uma partição de Ω se ela é disjunta e $\bigcup_{j \in \mathbb{I}} A_j = \Omega$.*

Exemplo 2.1.3. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números irracionais $\mathbb{Q}^c$ constituem uma partição do conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.*

Exemplo 2.1.4. *Considere-se uma urna U contendo quatro bolas brancas, duas bolas vermelhas e três pretas. Os conjuntos $\{B, B, B, B\}$,$\{V, V\}$ e $\{P, P, P\}$, onde B representa bola branca, V representa bola vermelha e P representa bola preta, constituem uma partição do conjunto das bolas contidas na urna:*

$$U = \{B, B, B, B\} \cup \{V, V\} \cup \{P, P, P\}.$$

2.1.3 Produto cartesiano

Definição 2.1.3. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dados dois elementos, $a \in A$ e $b \in B$, um um par ordenado a,b é um objeto que pode ser denotado como (a, b). Deduzimos então, da definição que, se a e b são diferentes, então o par ordenado(b, a) é um par diferente do par (a, b).*

Dados os conjuntos A e B. O *produto cartesiano* de A com B é o conjunto dos pares ordenados (a, b) sendo que a é um elemento de A e b é um elemento de B. Isto é

$$A \times B = \{(a, b)/\text{tal que } a \in A \quad e \quad b \in B\}.$$

Exemplo 2.1.5. *Sejam os conjuntos $R = \{a, b, c\}$ e $Q = \{1, 2\}$. Temos então o produto cartesiano $R \times Q$:*

$$R \times Q = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

e por outro lado, o produto cartesiano $Q \times R$

$$Q \times R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Exemplo 2.1.6. *Seja $X = \{a, b, c\}$. Temos então o produto cartesiano $X \times X = X^2$*

$$X \times X = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}.$$

Decorre da definição que,se A não é o próprio B então $A \times B \neq B \times A$.

Sejam agora $A_1, A_2, \cdots, A_k$, conjuntos não vazios e sejam $a^1 \in A_1, a^2 \in A_2, \cdots, a^k \in A_k$. Analogamente à definição de par ordenado se pode definir uma k-upla $a^1, a^2, \cdots, a^k$ como objeto $(a^1, a^2, \cdots, a^k)$ com os elementos nessa ordem.

Uma k-upla também é conhecida como uma *upla de tamanho k*.

Consideremos k um conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_k$. Então definimos o produto cartesiano de $A_1, A_2, \cdots, A_k$ como um conjunto de k-upla $(a^1, a^2, \cdots, a^k)$ sendo que $a^1 \in A_1, a^2 \in A_2, \cdots, a^k \in A_k$, nessa ordem.

O produto cartesiano de k vezes um mesmo conjunto A escrito como A^k. Isto é, $A^k = A \times A \times \cdots \times A, k$ vezes.

2.2 Conjuntos de Natureza Discreta e a Medida de Contagem

Dizemos que um conjunto A é finito se existe um número natural n e uma bijeção

$$f : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow A.$$

O número natural n é denominado de *números de elementos de* A ou de *tamanho de* A e denotaremos

$$\#A = n.$$

Como o conjunto vazio $\emptyset$ não possui elementos, $\#\emptyset = 0$.

Diz-se que um conjunto A é *infinito* se A não é finito.

Diz-se que um conjunto A é *enumerável* se é infinito e existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Um conjunto A é dito de *natureza discreta* se é finito ou enumerável.

Algumas vezes podemos usar ainda a denominação de *contável* para referir-nos aos conjuntos de natureza discreta.

2.2.1 A medida da contagem

A Medida de probabilidade se realiza através da Medida da contagem e a Medida de Lebesgue. E a diferença entre essa duas medidas é: a medida da contagem se realiza através de conjuntos de natureza discreta e a medida de Lebesgue se realiza através de conjuntos de natureza contínua.

Os conjuntos de naturezas contínuas são representados por sua vez por intervalos de números reais no contexto de $\mathbb{R}$ ou por transformação destes ao contexto de $\mathbb{R}^n$.

Trataremos aqui as formulações matemáticas estabelecidas para determinar o número de elementos de um conjunto ou a quantidade de conjuntos determinados por certos procedimentos.

Estabeleceremos, em primeiro lugar, as fórmulas que determinam o número de elementos dos conjuntos formados pela operação união e de conjuntos formados pela operação produto cartesiano.

Teorema 2.1. *Se A e B são conjuntos finitos e $A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B$ é um conjunto finito e o número de elementos de $A \cup B$ é dado pela fórmula*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Corolário *Sejam A, B, e C conjuntos finitos. Logo $A \cup B \cup C$ é um conjunto finito e*

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Teorema 2.2. *Se A e B são conjuntos finitos então $A \times B$ é finito e o número de elementos de $A \times B$ é dado pela fórmula*

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B.$$

Exemplo 2.2.1. *Supomos que um conjunto A possui 4^{10} elementos e B possui 3^{10} elementos. Pelo teorema, o conjunto $A \times B$ possui $4^{10}.3^{10} = 12^{10}$.*

Corolário Se $A_1, A_2, \cdots, A_k$ é uma sequência finita de conjuntos finitos, então, o conjunto $A_1 \times \cdots \times A_k$ é finito e o número de elementos de $A_1 \times \cdots \times A_k$ é dado pela fórmula $\#(A_1 \times \cdots \times A_k) = \#(A_1) \cdots \#(A_k)$.

2.2.2 Experimentos sobre conjuntos finitos

Dado um conjunto finito, podemos efetuar diversos procedimentos e querer saber a quantidade dos possíveis resultados deles. Especificamente vamos tratar de experimentos de seleção e determinar a natureza dos possíveis resultados e contabilizar a quantidade deles. Um dos instrumentos matemáticos usado é o produto cartesiano que tem uma versão conhecida como Regra do Produto.

Regra do produto

Suponhamos que no processo que tem k etapas para ser realizado:

- na primeira etapa há ω_1 possibilidades;
- na segunda etapa há ω_2 possibilidades, e assim por diante,
- na k etapa há ω_k possibilidades. Então o número total de possibilidades para ser realizado o processo será de $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_k$.

Exemplo 2.2.2. *Um teste consite de 20 questões. Cada questão apresenta cinco alternativas de respostas. Quantas as possibilidades de ser respondido o teste?*

Solução:
O processo consta de 20 etapas. Cada questão é uma etapa. Há 5 possibilidades de resposta para a primeira questão, há 5 possibilidades de resposta para a segunda questão, e assim por diante, há 5 possibilidades de resposta para vigésima questão. Logo há 5^{20} possibilidade de responder o teste.

Experimentos de seleção e o produto cartesiano

Seja A um conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ com n número de elementos e seja o produto cartesiano $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ onde na realização desse produto cartesiano o conjunto A é considerado k vezes. Já sabemos que o número de elementos de A^k, ou seja o número de k-uplas que o constituem é $\#A^k = n^k$. Consideremos a ordem estabelecida nos elementos das k-uplas. As k-uplas de A^k podem ser classificadas em duas classes: a primeira classe é a classe das k-uplas que tem todos seus elementos diferentes; e a segunda classe é a das k-uplas nas quais há elementos repetidos sendo que estas repetições vão de 2 até k.

Uma k-upla que tem todos seus objetos diferentes é denominada de *permutação de tamanho k* e uma k-upla que tem pelo menos um elemento repetido há denominamos de *arranjo de tamanho k*. O conjunto de permutações de tamanho k o denotaremos por $\mathbb{P}_k(n)$.

Exemplo 2.2.3. *Seja o conjunto $B = \{a, b, c\}$, $k = 2$ e consideramos o produto cartesiano B^3. Este conjunto é*

$$B^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}.$$

Experimentos de seleção com reposição e com ordem na observação

Seja A um conjunto com n objetos. O experimento consta de $k \leq n$ etapas e cada etapa consiste em selecionar um objeto qualquer de A. Na primeira etapa selecionamos um objeto qualquer, observamos e repõe-se. Na segunda etapa selecionamos outro objeto qualquer, observamos e repõe-se, e assim por diante até a k-ésima etapa. O registro das observações é feito na ordem que aconteceram as seleções. Observamos que há n possibilidades de seleção na primeira etapa, há também n possibilidades de seleção na segunda etapa, e assim por diante, há n possibilidades de seleção na k-ésima etapa. Logo pela regra do produto temos

$$n^k$$

possíveis k-uplas a serem obtidas que é o tamanho de A^k.

Podemos apreciar que, o registro das observações deste tipo de experimento estabelece o conjunto A^k e sua respectiva quantidade de elementos.

Exemplo 2.2.4. *Considere o conjunto $A = \{w, x, y, z\}$. Considerando 3 extrações com reposição e considerando a ordem dos registros das extrações o número de 3-uplas é*

$$\#A^3 = 4^3 = 64.$$

Experimentos de seleção sem reposição e com ordem na observação

Seja A um conjunto com n objetos. O experimento consta de $k \leq n$ etapas. Na primeira etapa selecionamos um objeto qualquer de entre os n objetos e registramos a observação e não repomos o objeto selecionado, na segunda etapa selecionamos um objeto qualquer dentre os $n - 1$ objetos restantes, registramos a observação e não repomos o objeto selecionado, e assim por diante até k-ésima etapa que consiste em selecionarmos um objeto qualquer dentre os $n - (k - 1)$ objetos restantes e registrarmos a observação. O registro das observações é feito na ordem que aconteceram as seleções.

Observamos que há n possibilidades de seleção na primeira etapa, há também $n - 1$ possibilidades de seleção na segunda etapa, e assim por diante há $n - (k - 1)$ possibilidades de seleção na k-ésima etapa. Logo, pela regra do produto temos:

$$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

possíveis k-uplas a serem obtidas.

Pela natureza do experimento, em nenhuma destas k-uplas há objetos repetidos. Assim, como já mencionamos, o resultado deste tipo de experimento é um conjunto das permutações de tamanho k.

Corolário 2.2.1. *Seja A um conjunto com n elementos e seja* $k \leq n$. *Então, o número de elementos de* $\mathbb{P}_k(A)$ *é*

$$\#\mathbb{P}_k(A) = (n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Em particular, se $k = n$, então, o número de elementos de $\mathbb{P}_n(A)$, ou seja, o número de permutações de tamanho n elementos de um conjunto de n elementos é

$$\mathbb{P}_n(A) = n!.$$

Exemplo 2.2.5. *Considere o conjunto* $B = \{1, 2, 4\}$. *O conjunto de permutações de tamanho 3 desse conjunto é* $\mathbb{P}_3(B) = \{124, 142, 241, 214, 412, 421\}$ *cujo tamanho é* $\#\mathbb{P}_3(B) = 6$.

Corolário 2.2.2. *O conjunto de arranjos de tamanho k formados com os n elementos do conjunto A é o complementar de* $\mathbb{P}_k(A)$ *e seu número total de elementos é* $n^k - \frac{n!}{(n-k)!}$.

Corolário 2.2.3. *Seja A um conjunto com n elementos e seja* $k > n$. *Então,* A^k *não possui permutações.*

Experimentos de seleção sem reposição e sem ordem na observação

Este tipo de experimento é um experimento de seleção sem reposição, mas sem ter em conta o registro da ordem das observações. Se for feito o registro das observações, então, o conjunto de todos os possíveis resultados seria o conjunto $\mathbb{P}_k(A) = (n)_k$ cuja quantidada de elementos é $\#\mathbb{P}_k(A) = (n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Mas, como para cada conjunto com k elementos se tem $k!$ permutações, então, ignorando a ordem, as $k!$ permutações as podemos representar por apenas uma só. Estes objetos os denominaremos de *combinações de tamanho k* sem elementos repetidos, ou seja, podemos chamar também de *conjuntos de tamanho k* formados com os elementos de um conjunto de tamanho n. O número de subconjuntos com k elementos de um subconjunto com n elementos é dado pelo teorema que veremos a seguir.

Teorema 2.3. *Seja A um conjunto com n elementos e seja $k \leq n$. Então, o número de subconjuntos de A, com k elementos,é*

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemplo 2.2.6. *Uma comissão formada por três estudantes deve ser escolhida em uma classe de trinta alunos para organizar os jogos interclasses. De quantas maneiras essa comissão deve ser escolhida?*

Solução:
Como a comissão deve ter três membros distintos, as 3-uplas devem ser selecionadas sem reposição, e como a ordem da escolha dos participantes é irrelevante, trata-se de 3-uplas não ordenadas. Assim, temos

$$C_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!3!} = 4060.$$

Experimentos de seleção com reposição e sem ordem na observação

Considerando um conjunto A com n elementos e executando-se um experimento de $k < n$ extrações e no qual se tem em conta o registro das observações, o resultado que se obtém é o conjunto A^k, cujos elementos são k-uplas de elementos de A. Estas k-uplas se podem classificar em classes e A^k se pode expressar como uma partição destas classes. Para detalhes relacionados com esta classificação pode-se consultar [4] no qual, usando a identidade

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

se prova que a quantidade de classes nas quais se particiona A^k é

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Se no experimento desconsiderar-mos a ordem no registro das observações, cada classe se converte em apenas um objeto só. Cada um destes novos objetos é o que se denomina de combinação de tamanho k obtida de entre os n elementos do conjunto A e constituem um novo conjunto denotado por $\mathbb{C}_k A$ e denominado de conjunto das combinações de tamanho k formadas com os n elementos do con junto A. Esse novo conjunto se particiona em dois tipos de combinações, aquelas sem elementos repetidos que são as que provém das permutações e aquelas combinações com elementos repetidos que são as que provém dos arranjos.

Pelo que foi visto acima, se tem que o número de elementos de $\mathbb{C}_k A$ é $C(n+k-1,k)$.

2.3 Fenômenos e Experimento Aleatório

2.3.1 Conjunto universo do experimento Ω

Um *fenômeno aleatório* é uma sequência de possíveis eventos. O registro desses possíveis eventos define um conjunto Ω dito de *conjunto universo* do fenômeno em questão. Um caso especial de fenômeno aleatório é um *experimento aleatório*. Um experimento aleatório é um conjunto de procedimentos fixado um determinado objetivo, que fornece um fenômeno aleatório e cujo conjunto Ω que registra os seus possíveis resultados é dito de *conjunto universo do experimento*.

Um experimento aleatório precisa de objetos físico, por exemplo uma moeda, um dado, uma urna, um jogo de cartas, etc, e procedimentos que geram resultados. Objeto físico envolvido num experimento aleatório sera traduzido por um conjunto que o denominamos de *conjunto base, S*.

O registro de cada um dos resultados do experimento aleatório forma um conjunto que denominamos de *conjunto universo do experimento* Ω. Cada elemento ω do conjunto Ω, ou seja, cada observação ω do experimento chamamos de *ponto amostral* e cada conjunto unitário $\{\omega\}$ será chamado de *evento elementar*.

Conjuntos de pontos amostrais definidos segundo uma certa característica são denominados de *eventos aleatórios* entre os quais se encontra o conjunto Ω, o conjunto de todos os possíveis resultados. Usamos letras maísculas tais como, por exemplo *A,B,C*, para representarmos eventos.

A partir de um evento ou eventos podemos considerar outros eventos, por exemplo se A é um evento , complementar de A é A^c, então A^c também será considerado um evento. Por lado lado, se consideramos A e B como dois eventos aleatórios, então $A \cup B$ ou *A ou B*, $A \cap B$ ou *A e B* serão também eventos. Neste contexto, podemos afirmar, então, que o conjunto vazio $\emptyset = \Omega^c$, também é um evento.

Por outro lado, Ω pode ser discreto (ou seja finito ou infinito enumerável) ou contínuo (ou seja infinito não enumerável).

Exemplo 2.3.1. *Considera-se um dado cúbico regular com faces numeradas de 1 a 6. O experimento consiste em lançar o dado sobre uma superfície plana horizontal e observar o número de face de cima. Neste caso o conjunto base é conjunto* $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ *e o conjunto universo do experimento é* $\Omega = S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemplo 2.3.2. *Considera-se duas moedas regulares não idênticas. O experimento consiste lancar as moedas de uma vez só e observar a face de cima de ambas não impondo a ordem nas* *observações delas. Neste caso o conjunto base é* $S = \{F_1, N_1, F_2, N_2\}$. *O conjunto universo do experimento é*

$$\Omega = \{\{F_1, F_2\}, \{F_1, N_2\}, \{N_1, F_2\}, \{N_1, N_2\}\}.$$

2.4 Sigma Álgebra. Espaço Amostral

Definição 2.4.1. ***Sigma Álgebra***

Seja $\mathscr{F}$ *uma família de subconjuntos de* Ω, *onde* Ω *é um conjunto não vazio. Diz-se que* $\mathscr{F}$ *é uma* σ*-álgebra sobre* Ω *se forem verificadas as seguintes condições:*

S_1. $\Omega \in \mathscr{F}$;

S_2. *Se* $A \in \mathscr{F}$, *então* $A^c \in \mathscr{F}$;

S_3. *Se* $A, B \in \mathscr{F}$, *então* $A \cup B \in \mathscr{F}$,

S_4. *Se* $A_1, A_2, \cdots, \in \mathscr{F}$, *então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.4.1. *Seja* $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. *Se tem que a família* $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$,*é uma* σ*-álgebra sobre* Ω. *Com efeito,* $A = \{a\}$ *e* $B = \{b, c, d, e\}$ *são elementos de* $\mathscr{F}$, *assim* $\Omega = A \cup B \in \mathscr{F}$ *pela condição* S_3. *e* S_1.. *Além disso,*$\emptyset^c = \Omega$,$\Omega^c = \emptyset$,$A^c = B$ *e* $B^c = A$ *são elementos de* $\mathscr{F}$. *Logo a condição* S_2. *é verificada. As condições* S_3. *e* S_4. *são verificadas considerando todas as uniões dos elementos de* $\mathscr{F}$ *e observando que estas sejam elementos de* $\mathscr{F}$: *Com efeito,* $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathscr{F}$, $\emptyset \cup A = A \in \mathscr{F}$, $\emptyset \cup B = B \in \mathscr{F}$, $A \cup B = \Omega \in \mathscr{F}$, $A \cup \Omega = \Omega \in \mathscr{F}$, $B \cup \Omega = \Omega \in \mathscr{F}$. *Logo* $\mathscr{F}$ *é uma sigma-álgebra sobre* Ω.

Preposição 2.4.1. *Seja* $\mathscr{F}$ *uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω. *Então:*

1. $\emptyset \in \mathscr{F}$;

2. *Se* $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$, *então* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

3. *Se* $A, B \in \mathscr{F}$, *então* $A - B \in \mathscr{F}$, *e* $A \triangle B \in \mathscr{F}$.

Notação: $A - B = A \cap B^c$ *e* $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

Definição 2.4.2. ***Espaço Amostral***

O par $(\Omega, \mathscr{F})$ *é dito de espaço amostral e os subconjuntos que pertecem à família* $\mathscr{F}$ *são denominados de eventos.*

Capítulo 3

Medidas de Probabilidade

A abordagem matemática de um fenômeno aleatório começa com a definição do conjunto universo Ω. Dado que este está constituído de possíveis resultados para a pergunta de saber *quão provável é que determinado resultado aconteça.* O próprio problema em si já contempla na sua essência uma certa medida para tal. Daí a definição de uma medida de probabilidade P.

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos sobre uma medida de probalilidade, os quais serão de uso importante nos próximos capítulos deste trabalho.Para maiores detalhes pode-se consultar as referências [2, 10, 12]

3.1 Medida de Probabilidade

Definição 3.1.1. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço amostral. Uma medida de probabilidade é uma função* $P : \mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaz estas três propriedades:*

P_1. $P(\Omega) = 1$

P_2. $P(A) \geq 0$*, para quaisquer* $A \in \mathscr{F}$

P_3. *Se* $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$*, é uma sequência de evento, com* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, para* $n \neq m$*, então*

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Estas propriedades iniciais ou axiomas foram estabelecidos por A.N. Kolmogorov em 1933. A partir destes axiomas vamos conhecer outras propriedades que cumprem todas as medidas de probabilidade.

Preposição 3.1.1. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *um espaço de probabilidade, então*

P_1. $P(\emptyset) = 0$*;*

P_2. $P(A^c) = 1 - P(A)$*;*

P_3. $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$*;*

P_4. *Se* $A \subseteq B$*, então* $P(A) \leq P(B)$*;*

P_5. $0 \leq P(A) \leq 1$*;*

P_6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*,*

P_7. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

3.2 Espaço de Probabilidade

O modelo matemático criado durante o primeiro terço do século XX, para estudar os experimentos aleatórios é denominado como *espaço de probabilidade*. Este modelo consiste de um espaço amostral $(\Omega, \mathscr{F})$ e uma medida de probabilidade P. Mais precisamente, um espaço de probabilidade está constituído por

- um conjunto universo de experimento Ω;
- uma sigma álgebra $\mathscr{F}$ sobre Ω,
- uma medida de probabilidade P definida sobre $\mathscr{F}$.

Com as considerações acima denotamos um espaço de probabilidade como $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

3.2.1 A medida de probabilidade discreta finita

Consideremos que o conjunto de todos os possíveis resultados Ω de um experimento aleatório seja finito e seja o espaço amostral $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, onde $\mathscr{P}(\Omega)$ é o conjunto de partes de Ω, como vemos na seguinte definição:

Definição 3.2.1. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço amostral finito onde* $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_k\}$ *e seja uma sequência finita* $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$*. Seja* $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida pela regra* $P(\omega_j) = p_j \geq 0$ *para todo* $j = 1, 2, \cdots, k$ *tal que para qualquer* $A \in \mathscr{F}$ *se define* $P(A)$ *como*

$$P(A) = \begin{cases} \sum_{\omega \in A} P(\omega) & se \quad A \neq \emptyset \\ \\ 0 & se \quad A = \emptyset \end{cases}$$

Dizemos então que, P é uma medida de probabilidade se e somente se

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Exemplo 3.2.1. *Seja a variável X definida pela tabela de frequências pontuais.*

Tabela 3.1: Frequências Pontuais

x_i	f_i	fr_i
10	5	$\frac{5}{80}$
13	2	$\frac{2}{80}$
15	10	$\frac{10}{80}$
17	5	$\frac{5}{80}$
19	13	$\frac{13}{80}$
22	12	$\frac{12}{80}$
24	14	$\frac{14}{80}$
26	7	$\frac{7}{80}$
28	8	$\frac{8}{80}$
30	4	$\frac{4}{80}$
	$\sum f_j = 80$	$\sum fr_j = 1$

Se tem que o número de observações da variável X é $n = f_1 + f_2 + \cdots + f_{10} = 5 + 2 + 10 + 5 + 13 + 12 + 14 + 7 + 8 + 4 = 80$. Então a coluna de frequências relativas fr_j , constitui uma sequência de probabilidade e,então neste cenário se pode dizer que a variável X assume o valor de x_j com probabilidade fr_j, assim por exemplo, X assume o valor de $x_1 = 10$ com probabilidade de $fr_1 = \frac{5}{80}$, X assume o valor de $x_2 = 13$ com probabilidade de $fr_2 = \frac{2}{80}$ e assim por diante.

3.2.2 A medida de probabilidade de Laplace

Vamos definir agora uma outra medida de probabilidade, neste caso definida por Laplace. A mesma pode ser observada através do teorema que se segue

Teorema 3.1. *Seja o espaço amostral $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, onde Ω é um conjunto finito. Definimos a função $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

donde:

- *P(A): probabilidade do evento ocorrer;*
- *$\#A$: números de casos favoráveis,*
- *$\#\Omega$: números de casos possíveis.*

Se tem que P é uma medida de probabilidade.

Corolário 3.2.1. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço amostral finito onde* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ *e seja P uma medida de Laplace. Então para todo* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*,*

$$P(\{\omega_j\}) = \frac{\#\{\omega_j\}}{\#\Omega} = \frac{1}{n}.$$

Exemplo 3.2.2. *Uma urna contém 6 bolas do mesmo tamanho das quais, duas são de cor verde e quatro são de cor preta. Extrai-se se uma bola ao acaso e observa-se a cor. Qual a probabilidade da bola extraída ser preta?*

Solução:
O conjunto base S será

$$S = \{V_1, V_2, P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Como a extração é de uma bola e observada sua cor o espaço amostral é $\Omega = S$.
Agora identificamos um evento da qual queremos determinar a probabilidade de acontecer. O evento em questão será

A= "a bola extraída ser preta"

que em termos de conjunto será

$$A = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Dado que a medida P que se quer usar para medir probabilisticamente este evento é a probabilidade de Laplace, calculamos $\#\Omega$ e $\#A$: $\#\Omega = 6$ e $\#A = 4$. Logo

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3.3 Probabilidade Condicional

Nesta seção iremos ver os conceitos de eventos condicionados e medida de probabilidade condicional. Mais ainda veremos o conceito de independência de eventos.

Definição 3.3.1. *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo* $P(B) > 0$*, define-se o evento condicionado* A *dado* B *denotado por* $A|B$*. A probabilidade de* $A|B$ *dita de probabilidade condicional de A dado B é definida por*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{3.1}$$

Da fórmula 3.1 que define a probabilidade condicional do evento A dado B, logramos a seguinte expressão:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B) \tag{3.2}$$

Exemplo 3.3.1. *Consideremos o experimento que consiste em lançar uma moeda duas vezes e observar a face superior de cima em cada lançamento. Sejam os seguintes eventos:*

A: observar figura F *B: observar número N*

Queremos descobrir qual seria a probabilidade de ocorrer B dado que ocorreu A?
Seja Ω o espaço amostral $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, onde $\Omega_1 = \{N, F\}$ é o espaço amostral do primeiro lançamento; e $\Omega_2 = \{N, F\}$ é o espaço amostral do segundo lançamento. Então $\Omega = \{N, F\} \times \{N, F\} = \{NF, NN, FF, FN\}$.
O evento A é $A = \{NF, FN, FF\}$. E o evento B é $B = \{NF, FN, NN\}$.
A interseção de $A \cap B$ é $A \cap B = \{NF, FN\}$. Calculando as probabilidades temos:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{4} \quad e \quad P(A \cap B) = \frac{\#A \cap B}{\#\Omega} = \frac{2}{4}$$

daí, calculamos a probabilidade de B dado que A ocorreu

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 3.3.2. *Considere uma urna com 4 bolas pretas e 8 bolas azuis. Duas bolas são retiradas, uma após outra e sem reposição. Determine a probabilidade de sair:*

a) *ambas da mesma cor;*

b) *cores diferentes*

Solução:

a) Vamos calcular a probabilidada de sair ambas da mesma cor.
Sabemos que a probabilidade de sair uma bola azul na urna é $\frac{8}{12}$, como as retiradas das duas bolas são sem reposição, temos

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap A_1) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \\ &= \frac{8}{12}.\frac{7}{11} \\ &= \frac{56}{132} = \frac{14}{33}. \end{aligned}$$

De maneira, análoga, a probabilidade de sair uma bola preta da urna é $\frac{4}{12}$, como as retiradas das duas bolas são sem reposição. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
P(P_2 \cap P_1) &= P(P_1)P(P_2|P_1) \\
&= \frac{4}{12}.\frac{3}{11} \\
&= \frac{12}{132} = \frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
P(\text{ambas da mesma cor}) &= P(A_2 \cap A_1) + P(P_2 \cap P_1) \\
&= \frac{14}{33} + \frac{1}{11} \\
&= \frac{17}{33}.
\end{aligned}
$$

b) A probabilidade de sair cores diferente é

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap P_2) &= P(A_1)P(P_2|A_1) \\
&= \frac{8}{12}.\frac{4}{11} \\
&= \frac{32}{132} = \frac{8}{33}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
P(P_1 \cap A_2) &= P(P_1)P(A_2|P_1) \\
&= \frac{4}{12}.\frac{8}{11} \\
&= \frac{32}{132} = \frac{8}{33}
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
P(\text{cores diferentes}) &= P(A_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap A_2) \\
&= \frac{8}{33} + \frac{8}{33} \\
&= \frac{16}{33}.
\end{aligned}
$$

3.3.1 Independência de Eventos

Definição 3.3.2. *Sejam A e B dois eventos e suponha que* $P(A) > 0$. *O evento B é dito independente do evento A, se:*

$$P(B|A) = P(B). \tag{3.3}$$

Nestas condições afirmamos que se o evento B é independente do evento, então vale a expressão:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{3.4}$$

De fato, $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(B)P(A)$.

Concluímos também que se o evento B é independente de A, então o evento A também é independente de B. De fato,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

.

Exemplo 3.3.3. *Lança-se uma moeda duas vezes, observamos a face e registramos. Qual a probabilidade de sair número "N" no primeiro lançamento? E figura "F" no segundo lançamento?*

Solução:
O espaço amostral será $\Omega = \{F, N\}^2 = \{F, N\} \times \{F, N\} = \{FF, FN.NF, NN\}, \#\Omega = 4$.
Seja A o evento "sair figura primeiro lançamento". Assim, temos $A = \{FF, FN\}$, então, $\#A = 2$.
Seja B o evento "sair número no segundo lançamento". Logo, $B = \{FN, NN\}$, então, $\#B = 2$.
Agora a $A \cap B = \{FN\}$, então $\#(A \cap B) = 1$.
Daí, calculamos as probabilidades dos eventos acontecerem

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{1}{4}$$

daí

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Portanto, A e B são independentes.

3.4 Probabilidade Total

Teorema 3.2. *Seja $A_1, A_2, \cdots, A_n$ um partição do espaço amostral Ω, isto é, esses eventos são mutuamente exclusivos e sua reunião é Ω, seja B um evento e P uma probabilidade definida nos eventos de Ω, temos*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k). \tag{3.5}$$

Da fórmula 3.5 é denominada como a fórmula das probabilidades totais, e por meio da mesma se pode calcular a probabilidade do evento B, quando se conhecem as probabilidades de cada um dos elementos da partição de Ω e, mediante ainda a introdução das probabilidades condicionais do evento B dado cada elemento da partição.

Exemplo 3.4.1. *São dadas três urnas com as seguintes composições: a urna A tem 2 bolas pretas e 3 roxas; a urna B tem 3 bolas pretas e 5 roxas e a urna C tem seis bolas pretas e uma roxa. Escolhe-se uma das três urnas de acordo com as seguintes probabilidades: a urna A com probabilidade $\frac{2}{9}$; urna B com probabilidade $\frac{4}{9}$ e a urna C com probabilidade $\frac{3}{9}$. Uma bola é retirada da urna selecionada. Qual a probabilidade da bola retirada ser roxa?*

Solução:
Seja R o evento "a retirada de uma bola roxa da urna selecionada". A urna selecionada pode ser a "urna A" ou a "urna B" ou a "urna C". Daí a $A \cup B \cup C$ é disjunta e, então

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap C). \tag{3.6}$$

E daqui

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C). \tag{3.7}$$

Coletando os dados do exemplo, temos

$$P(A) = \frac{2}{9} \quad P(B) = \frac{4}{9} \quad P(C) = \frac{3}{9}$$
$$P(R|A) = \frac{3}{5} \quad P(R|B) = \frac{5}{8} \quad P(R|C) = \frac{1}{7}$$

substituindo os valores na expressão 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{3}{5}.\frac{2}{9} + \frac{5}{8}.\frac{4}{9} + \frac{1}{7}.\frac{3}{9} \\ &= \frac{6}{45} + \frac{20}{72} + \frac{3}{63} \\ P(R) &= 0,063. \end{aligned}$$

3.5 Teorema de Bayes

Teorema 3.3. *Sejam os eventos A e B com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad ou \quad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Teorema 3.4. *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$, eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas $P(A_j)$ e $P(B|A_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Então:*

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}, j = 1, 2, \cdots. \tag{3.8}$$

Exemplo 3.5.1. *Três máquinas A,B e C, produzem $50\%, 30\%,$ e 20%, respectivamente, total de peças de uma máquina. As porcentagens de produção defeituosa destas são: $3\%, 4\%$ e 5%, respectivamente. Se uma peça é selecionada aleatoriamente, ache a probabilidade de que ela seja defeituosa. Se a peça selecionada é defeituosa, encontre a probabilidade dela ter sido produzida pela a máquina C.*

Solução:
Sejam os eventos:

- A "quantidades de peças produzidas pela a máquina A";
- B "quantidades de peças produzidas pela a máquina B";
- C "quantidades de peças produzidas pela a máquina C",
- D "a peça selecionada é defeituosa".

Os dados que o exemplos nos fornecem

$$P(A) = 50\% = \frac{50}{100} = 0,5 \quad P(B) = 30\% = \frac{30}{100} = 0,3 \quad P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$P(D|A) = 3\% = \frac{3}{100} = 0,03 \quad P(D|B) = 4\% = \frac{4}{100} = 0,04 \quad P(D|C) = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

Calculamos a Probabilidade Total das peças defeituosas produzidas das máquinas A,B e C

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(D\cap A) + P(D\cap B) + P(D\cap C)\\
&= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)\\
&= 0,03.0,5 + 0,04.0,3 + 0,05.0,2\\
P(D) &= 0,037.
\end{aligned}$$

Calculamos agora $P(C|D)$, a peça selecionada é defeituosa e é produzida pela a máquina C

$$\begin{aligned}
P(C|D) &= \frac{P(C\cap D)}{P(D)}\\
&= \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)}\\
&= \frac{0,05.0,2}{0,037}\\
P(C|D) &= \frac{0,01}{0,037} = 0,27 = 27\%.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

4.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos um conceito de uso muito importante na área da Teoria de Probabilidade a saber: variável aleatória. Abordaremos as definições de variáveis aleatórias discretas e contínuas e suas distribuições de probabilidade que no caso seriam as funções que indicam seu processamento probabilístico, isto é, no caso de uma variável aleatória discreta usaremos a sequência de probabilidade ou função de probabilidade. E no caso da contínua usaremos a função densidade de probabilidade. E ainda falaremos sobre a função de distribuição acumulada $F_X(x)$ que é dada de um modo geral tanto para as v.a. discretas quanto contínuas. Neste capítulo iremos abordar variáveis aleatórias discretas e suas distribuições de probabilidade, tais como a Binomial, a Geométrica, a Binomial Negativa, a Poisson e a Hipergeométrica. Não daremos muita ênfase no caso da variável aleatória contínua.Para maiores detalhes podemos consultar as referências [1, 2, 6, 9]

4.2 Variáveis Aleatórias

Definição 4.2.1. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade, uma variável aleatória é uma função*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{F}.$$

Nota-se que expressão 4.2.1 pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} =& X^{-1}(-\infty, x]\\ =&(X \leq x)\\ =&(X \in (-\infty, x]).\end{aligned}$$

Denotamos a imagem de X por $\mathcal{X} = X(\Omega) \subset \mathbb{R}$. As variáveis aleatórias são classificadas em dois tipos: variáveis aleatórias discretas e variáveis aleatória contínuas.

Veremos a seguir a definição de variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Definição 4.2.2. *Uma variável aleatória é discreta se a sua imagem, ou valores que ela assume, for um conjunto finito* ($\mathcal{X} = X(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$)*; ou enumerável* ($\mathcal{X} = X(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots, \infty\}$)*. Se a sua imagem for um conjunto infinito não enumerável, isto é, que assume valores em números reais, como por exemplo:* $\mathcal{X} = X(\Omega) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$*;* $\mathcal{X} = X(\Omega) = [0, 1] \subset \mathbb{R}$*, dizemos que a variável aleatória é contínua.*

Variável aleatória discreta

Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma função X com domínio Ω e contradomínio $\mathbb{R}$, é uma variável discreta se a sua imagem é um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \cdots\}$, tal que,

$$P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}] = P[X = x_j] = p_j, \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots$$

é uma sequência de probabilidade.

Uma v.a discreta está associada a uma medida de probabilidade definida por uma sequência de probabilidade, isto é, uma sequência (p_j), com $p_j \geq 0$ tal que $\sum_{j=0}^{k} p_j = 1$ se a sequência for finita e $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ se a sequência for infinita.

Exemplo 4.2.1. *Lança se uma moeda duas vezes. Seja X o número de ocorrência da face N. Determinar a sequência de probabilidade de X.*

Solução:
O conjunto universo do experimento é

$$\Omega = \{FF, FN, NF, NN\}.$$

Se X é o número de ocorrência da face N, então X assume os seguintes valores $0, 1, 2$ que podem ser associados aos eventos E_1, E_2, E_3 como se observa na tabela abaixo

X	Eventos correspondentes
0	$E_1 = \{FF\}$
1	$E_2 = \{FN, NF\}$
2	$E_3 = \{NN\}$

desta maneira podemos associar a cada um dos valores assumidos por X as probabilidades dos respectivos eventos

$$\begin{aligned} P(X=0) =& P(E_1) = \frac{1}{4} \\ P(X=1) =& P(E_2) = \frac{2}{4} \\ P(X=2) =& P(E_3) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e portanto fica definido a sequência de probabilidade $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Variável aleatória contínua

Seja $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma função X com domínio Ω e contra-domínio $\mathbb{R}$, é uma variável aleatória contínua se a sua imagem é um subconjunto não discretos em $\mathbb{R}$, tal que

$$P[\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\}] = P(a \leq X \leq b) = \int_b^a f(x)dx$$

onde a e b são dois números reais quaisquer e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função que verifica as seguintes condições:

i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$;

2i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

A função $f(x)$ e denominada de função de densidade de probabilidade.

Note que os cálculos das probabilidades de X v.a. contínua, nos intervalos $[a, b]$; $[a, b)$; $(a, b]$; (a, b), são os mesmos e os valores também sao iguais.

Exemplo 4.2.2. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 2x, & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & se \quad x \leq 0 \quad ou \quad x > 1 \end{cases}$ *e determine que f(x) seja f.d.p.*

Solução

a) $f(x) \geq 0$ *para todo x.*

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$

então f(x) é uma função densidade de probabilidade.

4.3 Função de distribuição

Toda variável aleatória está associada a função que denominamos como função de distribuição. Como vemos na definição abaixo.

Definição 4.3.1. *Uma função de distribuição de uma variável aleatória X é uma função* $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$*, que a cada número real x associa o valor*

$$F_X(x) = P[X \leq x]. \tag{4.1}$$

Lema 1. *A função de distribuição de uma variável aleatória X satisfaz as seguintes condições:*

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*
2. $F_X(x)$ *é não decrescente e é contínua à direita,* $F_X(x+) = F_X(x)$*;*
3. *Se* $x_1 \leq x_2$*, então* $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$*,*
4. $lim_{x\to-\infty}F_X(x) = 0$ *e* $lim_{x\to\infty}F_X(x) = 1$ *.*

Agora vamos definir a forma que a função de distribuição $F_X(x)$ definida na variável aleatória *X* seja no caso discreta ou quando *X* está definida no caso contínua.

- Se *X* é uma v.a discreta com sequência de probabilidade $p_k = P(X = x_k)$,com $k = 1, 2, \cdots, j$, então a função de distribuição de *X*, $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{se} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{se} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{j-1} & \text{se} \quad x_{j-1} \leq x < x_j \\ 1 & \text{se} \quad x \geq x_j. \end{cases}$$

  Observamos que

$$F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k). \tag{4.2}$$

Nota-se que neste caso, $F_X(x)$ é uma função escada com pontos de descontinuidade os pontos x_k, $k = 1, 2, \cdots, j$.

- Se *X* é uma v.a contínua com densidade de probabilidade *f(x)* se tem que a função de distribuição de *X*, $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.3}$$

Neste caso $F_X(x)$ é uma função contínua.

Exemplo 4.3.1. *Suponha que uma variável aleatória X tenha a seguinte sequência de probabilidade*

X	*P(X)*
1	*0,1*
2	*0,3*
3	*0,2*
4	*0,2*
5	*0,1*
6	*0,1*
	1

Definimos a função de distribuição de X. Temos então

$$
\begin{aligned}
F_X(1) =& P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0,1 \\
F_X(2) =& P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4 \\
F_X(3) =& P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6 \\
F_X(4) =& P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,8 \\
F_X(5) =& P(X \leq 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,9 \\
F_X(6) =& P(X \leq 6) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1
\end{aligned}
$$

Com resultados que obtivemos podemos escrever:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad x < 1 \\ 0,1 & \textit{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,4 & \textit{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,6 & \textit{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0,8 & \textit{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 0,9 & \textit{se} \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & \textit{se} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

4.3.1 Esperança Matemática

Se *X* é uma v.a, então o **valor esperado** da v.a *X* é dada por:

- Se *X* é discreta com sequência de probabilidade $p(x_k)$. Então se define:

  Definição 4.3.2. *A esperança matemática de uma v.a discreta X que assume os valores* $x_1, x_2, \cdots, x_j$*, com respectivas probabilidades* $P[X = x_k]$*, para* $k = 1, 2, \cdots$ *é dado por*
  $$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P[X = x_k] \tag{4.4}$$
  se a soma for um número real.

- Se X é contínua com função de densidade f(x), então se define

  Definição 4.3.3.
  $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$
  se a integral imprópria existir.

As notações para $E(X)$ são também $\mu(x), \mu_x, \mu$.

Vejamos as propriedades da esperança de uma v.a *X*. Seja *x* e *y* v.a com esperança finita e seja *c* uma constante. Então

1. $E(c) = c$;
2. $E(c.X) = c.E(X)$;
3. $E(X) = (X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. Se $X \geq 0$, então $E(X) \geq 0$,
5. Se X e Y são independentes, então $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

4.3.2 Variância

Seja *X* uma variável aleatória com esperança finita μ. Então a variância de *X* é um número que denotamos por $Var(X)$ e definimos mais precisamente assim:

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2. \tag{4.5}$$

Se *X* é uma v.a discreta, logo

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu_x)^2 . p(x_k). \tag{4.6}$$

Se *X* é v.a contínua, temos

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \tag{4.7}$$

Uma variância é uma medida do grau de dispersão dos valores de uma v.a em torno do valor esperado e ponderados por suas respectivas probabilidades.

Usamos as seguintes notações para representar uma variância que são elas: $Var(X), V(X), \sigma_x^2, \sigma^2$.

Vejamos as seguintes propriedades da variância. Considerando *X* e *Y* com variâncias finitas e *c* uma constante.

1. $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$;
2. $Var(c) = 0$;
3. $Var(X) \geq 0$;
4. $Var(cX) = c^2 Var(X)$;
5. $Var(X + c) = Var(X)$,
6. Em geral $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$. A igualdade se cumpre quando *X e Y são independentes.*

4.4 Variáveis Aleatórias Discretas e suas distribuições

4.4.1 Variável Aleatória de Bernoulli e sua distribuição

Vamos considerar um experimento aleatório básico que apresenta como resultado final somente um dos possíveis resultados: sucesso, fracasso. Mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição 4.4.1. *Um experimento de Bernoulli é um experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis: sucesso e o fracasso.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.4.1. *O aluno é aprovado ou reprovado em determinada disciplina.*

Exemplo 4.4.2. *No lançamento de uma moeda pode ocorrer número ou figura.*

Exemplo 4.4.3. *Numa entrevista o entrevistado concorda ou não concorda em responder as perguntas que o entrevistador fizer.*

Agora definiremos uma variável aleatória de Bernoulli.

Consideramos inicialmente o conjunto dos possíveis resultados de um experimento de Bernoulli

$$\Omega = \{sucesso, fracasso\}$$

Definimos agora uma função X com domínio Ω e imagem $\mathbb{R}$ como

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer o sucesso} \\ 0, & \text{se ocorrer o fracasso} \end{cases}$$

X estará definida como uma variável aleatória se a cada um dos valores assumidos por ela associarmos a respectiva probabiliade de ocorrência. Associaremos a probabilidade p de sucesso, $(0 < p < 1)$, e por $1-p$ a probabilidade de fracasso. Mais precisamente, uma variável aleatória de Bernoulli X fica definida como

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com} \quad P(X=1) = p \\ 0, & \text{com} \quad P(X=0) = 1-p \end{cases}$$

Como mostra na tabela abaixo:

k	0	1
P[X=k]	1-p	p

Provaremos agora que a sequência $(p, 1-p)$ é uma sequência de probabilidade. Isto é imediato pois, $p > 0$ e $1-p > 0$ e a soma destes valores é igual a 1: $p + (1-p) = 1$

Denotaremos por $X \sim Ber(p)$ e diremos que X é uma variável aleatória de Bernoulli de parâmetro p. A sequência $(p, 1-p)$ define uma medida de probabilidade dita de distribuição de Bernoulli com parâmetro *p*. Note que no experimento de Bernoulli, o que nos interessa procurar saber é o valor de *p*, ou seja, a probabilidade de sucesso.

4.4.2 Esperança e Variância

Seja variável aleatória $X \sim Ber(p)$. Então

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} kP(X = k) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = 0.(1 - p) + 1.p = p.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 P(X = k) = 0^2.P(X = 0) + 1^2.P(X = 1) = 0.(1 - p) + 1.p = p.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1 - p).$$

portanto

$$X \sim Ber(p) \begin{cases} E(X) = & p \\ Var(X) = & p(1-p). \end{cases}$$

4.4.3 Variável Aleatória Binomial e sua distribuição

Consideremos a realização de n experimentos independentes de Bernoulli de parâmetro p, $0 < p < 1$. De entre esses n experimentos considere-se a obtenção de k sucessos sendo $k = 0, k = 1, \cdots, k = n$. Este experimento é denominado de experimento binomial e a medida de quão provável é que se tenha k sucessos é medida pela medida de probabilidade binomial definida pela sequência de probabilidade

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \tag{4.8}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.9}$$

sendo $n!$ o fatorial de n, definido como

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1 \tag{4.10}$$

Por definição $0! = 1$

Definição 4.4.2. ***Variável aleatória binomial***

Para um experimento binomial consistindo em n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p, define-se a variável aleatória

X="o número de sucessos nas n repetições do experimento" *cuja imagem $\mathcal{X}$ é $\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, para um certo $n \in \mathbb{N}$, e a medida de probabilidade de que aconteça, a associação $X = k$ está definida pela sequência de probabilidade binomial. Isto é*

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Denotaremos por $X \sim Bin(n, p)$, o fato de a v.a X ter distribuição binomial com parâmetros n e p. Podemos, alternativamente, descrever $X \sim Bin(n, p)$ como

$$X = \begin{cases} 0, & \text{com} \quad P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \\ 1, & \text{com} \quad P(X=1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \\ 2, & \text{com} \quad P(X=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \\ \vdots & \\ n-1, & \text{com} \quad P(X=n-1) = \binom{n}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-(n-1)} \\ n, & \text{com} \quad P(X=n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n}. \end{cases}$$

Observamos que a denominação experimento binomial deriva do fato de que as probabilidades atribuídas a cada uma das possibilidades do experimento são os somandos da expansão da potencia $(p+q)^n$.

$$(p+q)^n = \binom{n}{o} q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} p^n.$$

Daí, se observa que $\binom{n}{o} q^n = P(X = 0)$; $\binom{n}{1} p q^{n-1} = P(X = 1)$, e, em geral,$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Notação: $p + q = 1$, ou seja, $q = 1 - p$.

Verifica-se que a equação (4.8), que $P[X = k] \geq 0$ é uma sequência de probabilidade, isto é, a soma de todas as probabilidade é 1. Logo, usaremos o teorema de binômio de Newton para demonstrar essa situação.

Teorema 4.1. *Dado dois números reais quaisquer a e b e um inteiro qualquer n, então*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Aplicando o teorema 4.1 à distribuição binomial, temos

$$\sum_{k=0}^{n} P[X = k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

onde $a = p$ e $b = 1 - p$.

Assim, concluímos que a equação (4.8) é realmente uma sequência de probabilidade.

Esperança e Variância

Seja X uma variável aleatória $X \sim Bin(n,p)$, então

$$E(X) = np \quad e \quad Var(X) = np(1-p).$$

Vamos calcular a E(X). Pela definição de Esperança, temos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Note que quando $k = 0$, a parcela correspondente no somatório é nula. Logo

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} (p \times p^{k-1})(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ E(X) &= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Tomando $y = k-1$, temos que $k = 1+y$, $k = 1 \Rightarrow y = 0$ e $k = n \Rightarrow y = n-1$. Logo

$$\begin{aligned} E(X) &= np\underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^{y} (1-p)^{n-1-y}}_{1} \\ E(X) &= np. \end{aligned}$$

Note-se que a expressão: $\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} = 1$ é a expressão de Newton para $(a+b)^{n-1}$ com $a = p$ e $b = 1-p$. Assim, temos

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{y=1}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} = [p + (1-p)]^{n-1} = 1^{n-1} = 1$$

ou seja, a expressão $\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} = 1$, é também conhecido como a soma das probabilidades de uma variável aleatória binomial com parâmetros $n-1$ e p.

$$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow E(X) = np.$$

Analogamente, calcularemos $E(X^2)$, usando o raciocinio usado no cálculo da $E(X)$, temos que:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)n!}{(k-1)!(n-k)!} (p \times p^{k-1}) (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} (y+1) \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-y-1} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} y \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-y-1} + np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-y-1} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} y \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} + np \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y}}_{1} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} y \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} + np \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} y \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-1-y} + np \\
&= np \sum_{y=1}^{n-1} y \frac{(n-1)(n-2)!}{y(y-1)!(n-y-1)!} (p \times p^{y-1}) (1-p)^{n-1-y} + np
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= np[(n-1)p] \sum_{y=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(y-1)!(n-y-1)!} p^{y-1}(1-p)^{n-y-1} + np \\
E(X^2) &= np[p(n-1)] \sum_{y=1}^{n-1} \binom{n-2}{y-1} p^{y-1}(1-p)^{n-y-1} + np.
\end{aligned}
$$

Tomando $z = y - 1$ e $y = z + 1$, $y = 1 \Rightarrow z = 0$ e $y = n - 1 \Rightarrow z = n - 2$. Logo

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= np[p(n-1)] \sum_{z=0}^{n-2} \binom{n-2}{z} p^{z}(1-p)^{n-z-2} + np \\
&= np[p(n-1)] \underbrace{\sum_{z=0}^{n-2} \binom{n-2}{z} p^{z}(1-p)^{n-z-2}}_{1} + np \\
E(X^2) &= np[p(n-1)] + np
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= np[p(n-1)] + np - (np)^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= -np^2 + np \\
Var(X) &= np(1-p)
\end{aligned}
$$

ou seja

$$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow Var(X) = np(1-p).$$

Exemplo 4.4.4. *Um determinado sistema eletrônico contém 10 componentes. Suponha que a probabilidade de que cada componente individual falhe seja 0,2 e que os componentes falhem independentemente uns dos outros. Dado que pelo menos um dos componentes falhou, qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos componentes falharam?*

Solução:

X: números de falhas (sucesso) isto é $X = 0, 1, 2, \cdots, 10$

$$n = 10 \quad \text{e} \quad p = 0,2 \Rightarrow X \sim B(10; 0,2).$$

Agora sejam os eventos:

A: pelo menos um falhou, isto é, $X \geq 1$.

B: pelo menos dois falharam, isto é,$X \geq 2$.

Logo, a $A \cap B = [X \geq 2]$. Se quer $P(B|A)$, então temos

$$
\begin{aligned}
P(B|A) =& \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
=& \frac{P[X \geq 2]}{P[X \geq 1]} = \frac{1 - P(X < 2)}{1 - P(X < 1)} = \frac{[1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}]}{1 - P(X = 0)} = \\
=& \frac{0,6241904}{0,8926258} = 0,6992744.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.4.5. *Suponha que a probabilidade de que um certo experimento será bem sucedido é 0,4. Seja X o número de sucessos que são obtidos em 15 tentativas independentes do experimento. Calcule o valor da* $P(6 \leq X \leq 9)$.

Solução:

X: números de sucessos

$$X = 0, 1, 2, \cdots, 15 \Rightarrow p = 0,4 \Rightarrow X \sim B(15; 0,4).$$

Queremos calcular o valor da $P(6 \leq X \leq 9)$. Logo

$$
\begin{aligned}
P(6 \leq X \leq 9) =& \sum_{k=6}^{9} P(X = k) \\
=& P(X = 6) + P(X = 7)P(X = 8)P(X = 9) \\
=& \binom{15}{6}(0,4)^6(0,6)^9 + \binom{15}{7}(0,4)^7(0,6)^8 + \binom{15}{8}(0,4)^8(0,6)^7 + \binom{15}{9}(0,4)^9(0,6)^6 \\
=& 0.5629511.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.4.6. *Suponha que a probabilidade de um item produzido por uma máquina seja defeituoso é 0,1. Determine a probabilidade de que uma amostra de dez itens conterá no máximo dois itens defeituosos.*

Solução:

X: O número de itens defeituosos (sucesso)

$$X = 0, 1, 2, \cdots, 10 \Rightarrow p = 0,1 \Rightarrow X \sim B(10; 0,1).$$

Agora calculemos a probabilidade de uma amostra de dez itens que apresentem no máximo dois itens defeituosos. Logo

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) =&(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\ =&\binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10}+\binom{10}{1}(0,1)^1(0,9)^9+\binom{10}{2}(0,1)^2(0,9)^8\\ =&0.9298092.\end{aligned}$$

4.4.4 Variável Aleatória de Poisson e sua distribuição

Suponha-se que estejamos nas condições da variável aleatória binomial $X \sim Bin(n,p)$ onde o número de ensaios n é grande $(n \to \infty)$ e p é pequeno $(p \to 0)$, situações nas quais o cálculo das probabilidades binomiais

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

tornem-se difíceis. O resultado a seguir garante que em tais condições podemos aproximar $X \sim Bin$ por uma $X \sim Poisson$ como nos garante o seguinte teorema:

Teorema

Seja $X \sim B(n,p)$, e queremos calcular $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Considere-se $p=\frac{\lambda}{n}$ e $(1-p)=1-\frac{\lambda}{n}$. Logo

$$lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Demonstração

Mostraremos que $P(X=k)\cong\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Nesse caso quando $n\to\infty$. Seja

$$\begin{aligned}P(X=k)=&\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ =&\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\ P(X=k)=&n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times\frac{1}{k!}\times p^k\times(1-p)^n\times(1-p)^{-k}.\end{aligned}$$

Aplicamos o $lim_{n\to\infty}$. Logo

$$
\begin{aligned}
P(X=k) \cong & lim_{n\to\infty}\Big\{n \times (n \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) \times \frac{1}{k!} \times \Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \times (1-\frac{\lambda}{n})^n \times \\
& (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}\Big\} \\
= & lim_{n\to\infty}\Big\{1 \times \Big(1-\frac{1}{n}\Big) \times \Big(1-\frac{2}{n}\Big) \times \cdots \times \Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) \times \frac{1}{k!} \times \lambda^k \times \Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^n \times \\
& \Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}\Big\} \\
P(X=k) = & 1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times \lambda^k \times \frac{1}{k!} \times e^{-\lambda} \\
P(X=k) = & \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$lim_{n\to\infty}P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Portanto, vemos que a podemos aproximar da distribuição binomial pela distribuição Poisson, para valores $(n > 30)$ e $(p < 0,1)$.

Agora podemos definir uma variável aleatória Poisson.

Definição 4.4.3. *A variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ se para $k = 0, 1, 2, \cdots$ a probabilidade de que o evento $X = k$ aconteça é medida pela função*

$$f(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \lambda > 0 \quad e \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.11}$$

dita de sequência de probabilidade de Poisson.

Assim a variável aleatória de Poisson fica definida como

$$X = \begin{cases} 0, & \text{com} \quad P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \\ 1, & \text{com} \quad P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}\lambda \\ 2, & \text{com} \quad P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \\ \vdots \end{cases}$$

com a imagem $\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$ e a medida de probabilidade de que a avaliação aconteça é dada por

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

. É dito que *X* tem distribuição de Poisson com parâmetro λ: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Para mostrar que a expressão (4.11) define uma sequência de probabilidade, ou seja, devemos provar que $\sum_k P(X = k) = 1$. De fato

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Note que

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \left\{1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\right\}.$$

Portanto, a equação (4.11) é realmente uma sequência de probabilidade.

4.4.5 Esperança e Variância

Seja variável aleatória $X \sim Poisson(\lambda)$. Então

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda.$$

Pela definição de Esperança, temos

$$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ =& \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{k(k-1)!} \\ E(X) =& \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Tomando $y = k - 1$,$k = 1 \Rightarrow y = 0$. Logo

$$\begin{aligned} E(X) =& \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\ =& \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda} \\ E(X) =& \lambda. \end{aligned}$$

e portanto

$$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda.$$

Analogamente vamos calcular $E(X^2)$.

$$
\begin{aligned}
E(X^2) =& E[X(X-1)+X] \\
=& E[X(X-1)] + E(X) \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X=k) + \lambda \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda \\
=& \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{k(k-1)(k-2)!} + \lambda \\
E(X^2) =& \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda.
\end{aligned}
$$

Tomando $y = k-2$, $k = 2 \Rightarrow y = 0$. Logo

$$
\begin{aligned}
E(X^2) =& \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} + \lambda \\
=& \lambda^2 . e^{-\lambda} . e^{\lambda} + \lambda \\
E(X^2) =& \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
Var(X) =& E(X^2) - E^2(X) \\
=& \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
Var(X) =& \lambda
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \lambda.$$

Exemplo 4.4.7. *O CRH de uma firma entrevista 150 candidatos a emprego por hora. Qual a probabilidade de entrevistar:*

a) *no máximo 3 candidatos em 2 minutos?*

b) *exatamente 8 candidatos em 4 minutos*

Solução:

Sabemos que o CRH de uma firma entrevista 150 candidatos a uma vaga de emprego por hora (1 hora equivale a 60 minutos). É dito que a CRH entrevista em média 2,5 candidatos por minuto.

Então, dizemos que X é v.a que dá o número de entrevistados por minuto, e podemos considerar , $X(t) \sim Poisson(2,5t)$. Com isso, calcularemos a probabilidade de que:

a) 2 minutos $\rightarrow \lambda = 5$

$$\begin{aligned} P(X(2) \leq 3) =& P(X(2) = 0) + P(X(2) = 1) + P(X(2) = 2) + P(X(2) = 3) \\ =& \frac{e^{-5}.5^0}{0!} + \frac{e^{-5}.5^1}{1!} + \frac{e^{-5}.5^2}{2!} + \frac{e^{-5}.5^3}{3!} \\ =& 0.2650259. \end{aligned}$$

b) 4 minutos $\rightarrow \lambda = 10$

$$\begin{aligned} P(X(4) = 8) =& \frac{e^{-10}.10^8}{8!} \\ =& \ 0.112599. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4.8. *Suponha que em um determinado final de semana o número de acidentes em uma determinada interseção tenha a distribuição de Poisson com média 0,7. Qual é a probabilidade de que haverá pelo menos três acidentes no cruzamento durante o fim de semana?*

Solução:

Seja X a v.a que fornece nos número de acidentes em um determinado cruzamento, tem-se $X \sim Poisson(0,7)$. Agora calcularemos a probabilidade de haver pelo menos três acidentes no cruzamento, durante o fim de semana. Assim, temos

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) =& 1 - P(X < 3) \\ =& 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\} \\ =& 1 - \left\{ \frac{e^{-0,7}.(0,7)^0}{0!} + \frac{e^{-0,7}.(0,7)^1}{1!} + \frac{e^{-0,7}.(0,7)^2}{2!} \right\} \\ =& 1 - 0.9658584 \\ =& 0.0341416. \end{aligned}$$

4.4.6 Variável Aleatória Geométrica e sua distribuição

Consideremos uma sequência infinita de ensaios independentes de Bernoulli, onde probabilidade de sucesso em cada ensaio é $p \in (0,1)$. Definimos a função *X* como o número de fracassos antes de se obter o primeiro sucesso. Esta função *X* é dita variável aleatória geométrica de parâmetro p e denota-se $X \sim Geo(p)$ quando os valores que ela assume são medidos probabilisticamente pela sequência de probabilidade $(p, p(1-p), p(1-p)^2, \cdots)$. Mais precisamente, se tem a seguinte definição

$$X = k \quad \text{com} \quad P(X = k) = p(1-p)^k \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.12}$$

O domínio desta função é conjunto universo do experimento

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}$$

sendo cada ω_i como a seguir

$$\Omega = \begin{cases} \omega_1 : S & \text{(zero falhas e sucesso no primeiro ensaio)} \\ \omega_2 : FS & \text{(uma falha e um sucesso no segundo ensaio)} \\ \omega_3 : FFS & \text{(duas falhas e um sucesso no terceiro ensaio)} \\ \vdots & \end{cases}$$

Para provarmos que a sequência acima dada é uma sequência de probabilidade, obtermos a média e a variância de X usaremos a seguinte série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ conhecida como *série geométrica* que é dado pela a seguinte definição:

Definição 4.4.4. *Uma série geométrica é uma série da forma*

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

onde a e r são números reais fixos e $a \neq 0$*. A série pode ser ainda escrita como* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$*. Se* $|r| < 1$*, a série* $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1} + \cdots$ *converge a* $\frac{a}{1-r}$*. Logo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1. \tag{4.13}$$

Se $|r| \geq 1$ *a série diverge. Note que o valor* $\frac{a}{1-r}$ *se obtém quando o índice do somatório começa com* $n = 1$ *na expressão* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.

Verifiquemos agora que a série 4.12 é uma sequência de probabilidade, isto é, cada elemento da sequência é não negativo e $\sum_k P(X = k) = 1$. É claro que $P(X = k) > 0$ e temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k.$$

Tomando $k = y - 1$, $k = 0 \Rightarrow y = 1$ e $k = \infty \Rightarrow y = \infty$, logo

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p \sum_{y=1}^{\infty} (1 - p)^{y-1}.$$

Usando a expressão 4.13, fazendo $a = 1$ e $r = 1 - p$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p \frac{1}{[1 - (1 - p)]} = p \frac{1}{p} = 1.$$

Portanto a sequência 4.12 é uma sequência de probabilidade.

4.4.7 Esperança e Variância

Seja a variável aleatória $X \sim Geo(p)$. Então

$$E(X) = \frac{1 - p}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Para calcular a média e a variância da distribuição geométrica, iremos usar os seguintes recursos

1. $p + q = 1$, pois $q = 1 - p$;
2. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regra da Potência),
3. $\frac{d}{dx}\left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(x_J) \right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx}\{f_j(x_j)\}$ nos pontos onde a função é derivável.

Vamos calcular $E(X)$, pela definição temos

$$\begin{aligned}
E(X) = & \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1+1} = \\
& = pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) = pq \frac{d}{dq}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right\} = \\
& = pq \frac{d}{dq}\left\{ \frac{q}{1 - q} \right\} = pq \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \\
& = \frac{1 - p}{p}
\end{aligned}$$

portanto

$$X \sim Geo(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1 - p}{p}.$$

Note que a expressão $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ pode ser escrito desta maneira:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1+1} = q \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = q \frac{1}{1 - q} = \frac{q}{1 - q}.$$

Analogamente, calculemos a $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) =&E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \\
=&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)pq^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kpq^k}_{\frac{q}{p}} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-2+2} + \frac{q}{p} = \\
=&pq^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{q}{p} = pq^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^k) + \frac{q}{p} = \\
=&pq^2 \frac{d^2}{dq^2}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} q^k\Big\} + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d^2}{dq^2}\Big\{\frac{q}{1-q}\Big\} + \frac{q}{p} = \\
=&pq^2 \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{p} = \frac{2pq^2}{p^3} + \frac{q}{p} = \\
=&\frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}
\end{aligned}$$

logo

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \Big(\frac{q}{p}\Big)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

e portanto

$$X \sim Geo(p) \Rightarrow Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemplo 4.4.9. *Um atirador acerta no alvo,* 15% *dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar no alvo pela primeira vez no oitavo tiro?*

Solução:

Seja X a v.a que dá o número de tentativas necessárias que o atirador acerte no alvo, X tem distribuição geométrica com $p = 0,15$. Agora, calculemos a probabilidade do atirador acertar pela primeira vez no alvo no oitavo tiro, logo

$$\begin{aligned}
P(X=7) =&0,15.(1-0,15)^7 \\
=&0,15.0,85^7 \\
=&0.04808656.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4.10. *Numa sequência de lançamento de um dado regular, se quer saber a probabilidade de se observe a face 4 pela primeira vez no décimo lançamento?*

Solução:

Denotamos X a v.a que indica o número de lançamentos necessários ao aparecimento da primeira face 4. X tem distribuição geométrica com parâmetro $\frac{1}{6}$, isto é, $X \sim Geo(\frac{1}{6})$. Calculemos a probabilidade que no décimo lançamento ocorra a face 4 pela primeira vez, logo

$$\begin{aligned} P(X=9) =& \left(\frac{1}{6}\right).\left(1-\frac{1}{6}\right)^9 \\ =& \left(\frac{1}{6}\right).\left(\frac{5}{6}\right)^9 \\ =& 0.03230112. \end{aligned}$$

A distribuição geométrica possui uma propriedade que se diferencia das outras distribuições discretas: a perda da memória. Que pode ser expressada no seguinte lema

Lema 2. *Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição geométrica dada na expressão 4.12, então para todo j,k* $= 1, 2, 3, \cdots$*, tem-se:*

$$P[X \geq j+k | X \geq j] = P[X \geq k] \tag{4.14}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} P[X \geq j+k|X \geq j] =& \frac{P[X \geq j+k, X \geq j]}{P[X \geq j]} = \frac{P[X \geq j+k]}{P[X \geq j]} = \\ =& \frac{\sum_{i=j+k}^{\infty}(1-p)^i p}{\sum_{i=j}^{\infty}(1-p)^i p} = \frac{\frac{(1-p)^{j+k}}{p}}{\frac{(1-p)^j}{p}} = \\ =& (1-p)^k = P[X \geq k]. \end{aligned}$$

Essa propriedade é denominada como a perda da memória ou de desgate da distribuição geométrica. Podemos definir essa propriedade mais precisamente assim: Vamos considerar um objeto com que o tempo de duração de vida seja uma variável aleatória *X* com distribuição geométrica com parâmetro *p*. Suponhamos que tempo de duração desse objeto seja medido em unidades discretas, isto é, observa-se o objeto ao final de cada unidade de tempo e reparamos se o objeto está em funcionamento ou se deixou de funcionar. A expressão 4.14 nos concede a informação que esse objeto teve seu tempo de funcionamento até o determinado instante *j*, logo a probabilidade de que esse objeto voltasse a funcionar por mais *k* unidades de tempo seria a mesma a probabilidade de que um objeto novo funcionasse por *k* unidades de tempo.

4.4.8 Variável Aleatória Binomial Negativa e sua distribuição

Suponha que se tem uma sequência infinita de experimentos independentes Bernoulli sendo que em cada ensaio a probabilidade de sucesso é $p \in (0, 1)$ e seja r um número natural fixo. Definindo como X o número de fracassos antes de obter o r sucessos, fica definda a variável aleatória binomial negativa como

Definição 4.4.5. *Para repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p defina a variável aleatória*

“X=o número de repetições até a ocorrência de r-ésimo sucesso”

cuja imagem $\mathcal{X}$ é $\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$ e a medida de probabilidade de que aconteça a avaliação $X = k$, para $k = 0, 1, 2, \cdots$, é dada pela sequência de probabilidade binomial negativa de parâmetros (r, p) definida pela regra

$$f(k) = \begin{cases} \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^k & se \quad j = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & , caso\ contrário. \end{cases}$$

Isto é

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, para \quad r \geq 2 \quad e \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.15}$$

Neste caso diz-se que X é uma variável aleatória com a distribuição binomial negativa e escrevemos $X \sim BinNeg(r, p)$. Reiteramos que r indica o número de sucessos esperado e k indica a k-ésima realização do experimento de Bernoulli até obter-mos o k-ésimo sucesso. No exemplo que segue vamos observar o domínio de X binomial negativa na qual $r = 7$. O domínio de X é o conjunto universo do experimento Ω constituído por sequências como a seguir. Para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, respectivamente, se em
$1111111, 01111111, 10111111, 11011111, 11101111, 11110111, 11111011, 11111101, 001111111,$
$100111111, 110011111, 111001111, 111100111, 111110011, 111111001, 010111111, 101011111,$
$110101111, 111010111, 111101011, 111110101, 111111001, 011011111, 101101111, 110110111,$
$111011011, 111101101, 011101111, 101110111, 110111011, 111011101, 011110111, 101111011,$
110111101, 101111101, 011111101; e assim por diante, para $k = 3$, $k = 4$, etc. Observe que para $k = 0$ temos $\binom{7+0-1}{0} = 1$ sequências de comprimento sete; para $k = 1$ temos $\binom{7+1-1}{1} = 7$ sequências de comprimento oito; para $k = 2$ temos $\binom{7+2-1}{2} = 28$ sequências de comprimento nove, e assim por diante continuam os elementos de Ω.

Observação: No exemplo anterior, representamos ”0”para fracassos e ”1”para o sucesso, assim poderíamos escrever por exemplo $SSSSSSS, FSSSSSSSS, \cdots, FSSSSSSFS$.

Com isso, podemos generalizar que para cada $k \geq 0$ de k zeros teremos que as sequências de tamanhos $r + k$ nas quais se tenham k zeros se obterão de um conjunto de $r + k - 1$ elementos, pois o último 1 dos r que se devem ter não conta já que o penúltimo 1 se deve ter os k zeros, como por exemplo $11111101, 111111001, 111101101, 1110111001$. Segue que, para cada $k \geq 0$, o números de sequências é

$$\binom{r+k-1}{k}$$

alternativamente, uma variável aleatória binomial negativa $X \sim BinNeg(r,p)$ fica definida assim

$$X = \begin{cases} 0, & \text{com} \quad P(X=0) = \binom{r+0-1}{0} p^r (1-p)^0 = \binom{r-1}{0} p^r \\ 1, & \text{com} \quad P(X=1) = \binom{r+1-1}{1} p^r (1-p)^1 = \binom{r}{1} p^r (1-p) \\ 2, & \text{com} \quad P(X=2) = \binom{r+2-1}{2} p^r (1-p)^2 = \binom{r+2}{2} p^r (1-p)^2 \\ \vdots \end{cases}$$

Para provarmos que a equação (4.4.5) é uma sequência de probabilidade , provaremos que $f(k) \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$.

Para tanto, usaremos a generalização do binômio de Newton que consiste considerar $n = -k$, com $r > 0$ e $k \geq 0$ em $\mathbb{Z}$, e então, para a,b se tem

$$(a+b)^{-r} = (b+a)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} b^k a^{-r-k}.$$

Agora se tem que

$$\begin{aligned} \binom{-r}{k} &= \frac{-r \times (-r-1) \times \cdots \times (-r-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(r+k-1) \times (r+k-2) \times \cdots \times k}{k!} (-1)^k \\ \binom{-r}{k} &= \binom{r+k-1}{k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Logo, considerando $a = 1$ e $b = p - 1$, usando fórmula do binômio se tem

$$\begin{aligned} p^{-r} = (1+p-1)^{-r} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (1-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-1)^k (1-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k = p^r \times p^{-r} = 1.$$

Concluímos, então que equação 4.4.5 é uma sequência de distribuição de probabilidade.

4.4.9 Esperança e Variância

Seja X uma variável aleatória $X \sim BinNeg(r,p)$, então

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Vamos calcular a $E(X)$. Pela definição de esperança, temos

$$\begin{aligned}
E(X) =& \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k\binom{r+k-1}{k} p^r(1-p)^k \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!} p^r(1-p)^k \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(r+1+(k-1)-1)!r}{(k-1)!(r-1)r!} p^{r+1}(1-p)^{k-1+1} \\
=& \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r+1+(k-1)-1)!}{(k-1)!r!} p^{r+1}(1-p)^{k-1} \\
E(X) =& \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r+1+(k-1)-1}{k-1} p^{r+1}(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

Tomando $y = x-1$, $t = r+1$ e $k = 1 \Rightarrow y = 0, k = \infty \Rightarrow y = \infty$. Logo

$$\begin{aligned}
E(X) =& \frac{r(1-p)}{p} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \binom{t+y-1}{y} p^t(1-p)^y}_{1} \\
E(X) =& \frac{r(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

Logo

$$X \sim BinNeg(r,p) \Rightarrow E(X) = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Analogamente, calcularemos $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) =& E(X(X-1)+X)\\
=& E(X(X-1))+E(X)\\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\binom{r+k-1}{k}p^r(1-p)^k + \frac{r(1-p)}{p}\\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{r+k-1}{k!(r-1)!}p^r(1-p)^k + \frac{r(1-p)}{p}\\
=& \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{(r+2+(k-2)-1)!r(r+1)}{k(k-1)(k-2)!(r-1)r(r+1)!}p^{r+2}(1-p)^{k-2+2} + \frac{r(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=& \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(r+2+(k-2)-1)!}{(k-2)!(r+1)!}p^{r+2}(1-p)^{k-2} + \frac{r(1-p)}{p}\\
E(X^2) =& \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}\sum_{k=2}^{\infty}\binom{r+2+(k-2)-1}{k-2}p^{r+2}(1-p)^{k-2} + \frac{r(1-p)}{p}.
\end{aligned}$$

Tomando $s=k-2$ e $z=r+2$; $k=2 \Rightarrow s=0$ e $k=\infty \Rightarrow s=\infty$. Logo

$$\begin{aligned}
E(X^2) =& \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}\underbrace{\sum_{s=0}^{\infty}\binom{z+s-1}{s}p^z(1-p)^s}_{1} + \frac{r(1-p)}{p}\\
E(X^2) =& \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
Var(X) =& E(X^2)-E^2(X)\\
=& \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} - \left(\frac{r(1-p)}{p}\right)^2\\
=& \frac{r(1-p)}{p^2}[(r-1)(1-p)+p-r(1-p)]\\
Var(X) =& \frac{r(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

ou seja

$$X \sim BinNeg(r,p) \Rightarrow Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exemplo 4.4.11. *Deseja-se produzir 5 peças boas, em uma máquina que dá* 15% *de peças* *defeituosas. Qual é a probabilidade de ser necessário fabricar 9 peças para se conseguir as 5 peças boas?*

Solução:
Seja X a v.a que quantifica peças boas. X tem distribuição binomial negativa com $p = 0,15$ e $r = 5$, ou seja, $X \sim BinN(0,15;5)$. Calculemos a probabilidade de se obter 5 peças boas dentre as 9 peças fabricadas, logo

$$\begin{aligned} P(X=9) =& \binom{5+9-1}{9}(0,15)^5.(0,85)^9 \\ =& 0.01257571. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4.12. *Suponha que um jogador de basquete acerte 3 bolas a cada 5 lances livres. Seja X o número de erros antes do quarto acerto. Determine a probabilidade de que ele precise fazer 7 lances, isto é,* $P(X = 7)$.

Solução:
Neste caso, tem-se: $p = \frac{3}{5} = 0,5$ e $r = 4$.
X: número de tentativas antes do quarto acerto, então $X \sim BinN(4, 0.6)$
onde $X = 4, 5, 6, 7, \cdots$.

$$\begin{aligned} P(X=k) =& \binom{r+k-1}{k} p^r(1-p)^k \\ P(X=7) =& \binom{4+7-1}{7}.(0,6)^4.(0,4)^7 \\ P(X=7) =& 0,0254804. \end{aligned}$$

4.4.10 Variável Aleatória Hipergeométrica e sua distribuição

Suponha uma população de tamanho *N* constituída de duas classes de objetos, onde a primeira classe é composta de *M* "sucessos" e a outra por *N-M* "fracassos". Dessa população, extraímos uma amostra de tamanho *n* sem reposição

O espaço amostral deste experimento estará formado pelo conjunto de amostras não ordenadas de tamanho *n* obtidas dos *N* objetos, ou seja, pelo conjunto das combinações de tamanho *n*, sem elementos repetidos, obtidas de entre os N objetos da população. O total destas amostras é $\binom{N}{n}$.

Por outro lado, há $\binom{M}{k}$ combinações de tamanho *k* retiradas de entre os *M* elementos da primeira classe e $\binom{N-M}{n-k}$ combinações de tamanho $n-k$ retiradas de entre os $N-M$ elementos da segunda classe. Assim, o número de combinações de tamanho *n* extraídas dos N elementos sendo k dos M elementos e $n-k$ dos $N-M$ elementos é, pela regra do produto o produto, $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$.

O experimento induz a definição da seguinte sequência finita

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

onde $0 \leq k \leq n$ e $k \leq M$.

Agora definiremos uma variável aleatória hipergeométrica.

Definição 4.4.6. ***Variável Aleatória Hipergeométrica***

De uma população de tamanho N, formada por M sucessos e N-M fracassos, extrai-se uma amostra de tamanho n sem reposição. Definimos a função

"X= número de sucessos na amostra"

onde sua imagem $\mathcal{X}$ é $\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$, com a medida de probabilidade de que aconteça $X = k$ é dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{4.16}$$

Assim, X hipergeométrica fica definida da seguinte maneira

$$X = \begin{cases} 0, & \text{com} \quad P(X = 0) = \frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{n-0}}{\binom{N}{n}} \\ 1, & \text{com} \quad P(X = 1) = \frac{\binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ \vdots & \\ n, & \text{com} \quad P(X = n) = \frac{\binom{M}{n}\binom{N-M}{n-n}}{\binom{N}{n}}. \end{cases}$$

Notação: $X \sim H(N, M, n)$ de parâmetros (N, M, n).

Vamos verificar agora que a sequência p_k acima definida é uma sequência de probabilidade, ou seja que $P(X = k) \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$. De fato, usando a identidade,

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{a}{j}\binom{b}{m-j} = \binom{a+b}{m}$$

se tem

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{N}{n} = 1.$$

4.4.11 Esperança e Variância

Seja X uma variável aleatória $X \sim H(N, M, n)$, então

$$E(X) = \frac{nM}{N} \quad e \quad Var(X) = \frac{nM}{N}\left[\frac{(N-n)(N-M)}{N(N-1)}\right].$$

Vamos calcular a E(X). Pela definição de Esperança, temos

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\frac{M!}{k!(M-k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{M!}{k!(M-k)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{M(M-1)!}{k(k-1)!(M-k)!}\frac{n(n-1)!(N-n)!}{N(N-1)!}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \frac{nM}{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{(M-1)!}{(k-1)!(M-k)!}\frac{(n-1)!(N-n)!}{(N-1)!}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \frac{nM}{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{(M-1)!}{(k-1)!(M-k)!}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}\binom{N-m}{n-k} \\
E(X) &= \frac{nM}{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Tomando $y = k-1$, pois $k = y+1$ e $k = 1 \Rightarrow y = 0, k = n \Rightarrow y = n-1$. Logo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{nM}{N}\underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{M-1}{y}\binom{N-M}{n-y-1}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{1} \\
E(X) &= \frac{nM}{N}.
\end{aligned}$$

Onde usamos a seguinte identidade

$$\sum_{y=0}^{n-1}\binom{M-1}{y}\binom{N-M}{n-y-1} = \binom{N-1}{n-1}.$$

Assim

$$P(X=y)=\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{M-1}{y}\binom{N-M}{n-y-1}}{\binom{N-1}{n-1}}=1$$

é a soma de todas probabilidades de distribuição hipergeométrica com parâmetro $N-1, M-1, n-1$. Isto é $H(N-1, M-1, n-1)$. Logo

$$X\sim H(N,M,n)\Rightarrow E(X)=\frac{nM}{N}.$$

Analogamente, vamos calcular $E(X^2)$. Temos

$$\begin{aligned}
E(X^2)=&E[X(X-1)+X]\\
=&E(X(X-1)+E(X)\\
=&\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}+\frac{nM}{N}\\
=&\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{\frac{M!}{k!(M-k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\binom{N-m}{n-k}+\frac{nM}{N}\\
=&\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{M!}{k!(M-k)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}\binom{N-m}{n-k}+\frac{nM}{N}\\
=&\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{M(M-1)(M-2)!}{k(k-1)(k-2)!(M-k)!}\frac{n(n-1)(n-2)!(N-n)!}{N(N-1)(N-2)!}\binom{N-m}{n-k}+\frac{nM}{N}\\
=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{(M-2)!}{(k-2)!(M-k)!}\frac{(n-2)!(N-n)!}{(N-2)!}\binom{N-m}{n-k}+\frac{nM}{N}\\
=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{\frac{(M-2)!}{(k-2)!(M-k)!}}{\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}}\binom{N-m}{n-k}+\frac{nM}{N}\\
E(X^2)=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}\sum_{k=2}^{n}\frac{\binom{M-2}{k-2}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-2}{n-2}}+\frac{nM}{N}.
\end{aligned}$$

Tomando $y=k-2$, pois $k=y+2$ e $k=2\Rightarrow y=0, k=n\Rightarrow y=n-2$. Logo

$$\begin{aligned}
E(X^2)=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}\underbrace{\sum_{y=0}^{n-2}\frac{\binom{M-2}{y}\binom{N-M}{n-y-2}}{\binom{N-2}{n-2}}}_{1}+\frac{nM}{N}\\
E(X^2)=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{nM}{N}.
\end{aligned}$$

Onde usamos a seguinte identidade

$$\sum_{y=0}^{n-2}\binom{M-2}{y}\binom{N-M}{n-y-2}=\binom{N-2}{n-2}.$$

Assim

$$P(X=y)=\sum_{y=0}^{n-2}\frac{\binom{M-2}{y}\binom{N-M}{n-y-2}}{\binom{N-2}{n-2}}=1$$

è a soma e todas probabilidades de uma distribuição hipergeométrica com parâmetro $N-2, M-2, n-2$. Isto é, $H(N-2, M-2, n-2)$.

Portanto

$$\begin{aligned}
Var(X)=&E(X^2)-E^2(X)\\
=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{nM}{N}-\Big(\frac{nM}{N}\Big)^2\\
=&n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{nM}{N}-\frac{n^2M^2}{N^2}\\
Var(X)=&\frac{nM}{N}\Big[\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}\Big]
\end{aligned}$$

logo

$$X\sim H(N,M,n)\Rightarrow Var(X)=\frac{nM}{N}\Big[\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}\Big].$$

Exemplo 4.4.13. *Suponha que uma caixa contenha cinco bolas vermelhas e dez bolas azuis. Se sete bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição, qual é a probabilidade de que pelo menos três bolas vermelhas serão obtidas?*

Solução:

Seja X a v.a que dá o número de extração de bolas vermelhas na amostra de 7, $X \sim H(N, M, n)$, com $N = 15$,$M = 5$ e $n = 7$. Calculemos a probabilidade de que pelo menos 3 bolas vermelhas seja obtida, logo

$$\begin{aligned}
P(X\geq 3)=&1-P(X<3)\\
=&1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\}\\
=&1-\Big\{\frac{\binom{5}{0}\binom{10}{7}}{\binom{15}{7}}+\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{6}}{\binom{15}{7}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{7}}\Big\}\\
=&1-\{0.01864802+0.1631702+0.3916084\}\\
=&1-0.5734266\\
=&0.4265734.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4.14. *Com a finalidade de aumentar a arrecadação do seu sistema de loterias, a Caixa Econômica implantou um novo jogo denominado Loto II, no qual o apostador escolhe seis dezenas do conjunto* $\{01, 02, \cdots, 50\}$*.Toda semana a caixa sorteia seis dezenas desse mesmo conjunto e atribui prêmios aos seus acertadores da:(a) Sena - as seis dezenas sorteadas, (b) Quina - cinco das dezenas sorteadas, (c) Quadra - quatro das dezenas sorteadas. Determine a probabilidade de que uma pessoa que aposta na Loto II ganhe algum dos prêmios oferecidos.*

Solução:

Seja X a v.a que dá o número de prêmios aos acertadores. Dizemos que X tem distribuição hipergeométrica com $N = 50, M = 6, n = 6$, isto é, $X \sim H(50, 6, 6)$. Calculemos a probabilidade de que uma pessoa aposta na Loto II ganhe algum prêmios dos oferecidos, logo

a) Sena - as seis dezenas sorteadas:

$$\begin{aligned} P(X = 6) = & \frac{\binom{6}{6}\binom{44}{0}}{\binom{50}{6}} \\ = & 0,00000006292989. \end{aligned}$$

b) Quina - cinco das dezenas sorteadas:

$$\begin{aligned} P(X = 5) = & \frac{\binom{6}{5}\binom{44}{1}}{\binom{50}{6}} \\ = & 0,00001661349. \end{aligned}$$

c) Quadra - quatro das dezenas sorteadas:

$$\begin{aligned} P(X = 4) = & \frac{\binom{6}{4}\binom{44}{2}}{\binom{50}{6}} \\ = & 0.0008929751. \end{aligned}$$

Uma pessoa que aposta na Loto II tem a probabilidade de ganhar na sena ou quina ou quadra, isto é, ganhar um dos prêmios oferecidos. Logo:

P(ganhar um dos prêmios)=P(Sena ou Quina ou Quadra)

$$\text{P(ganhar um dos prêmios)} = \frac{\binom{6}{6}\binom{44}{0}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{44}{1}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{44}{2}}{\binom{50}{6}} = 0.0009096515.$$

Capítulo 5

Considerações Finais

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática como bem sabemos que cria, desenvolve e em geral pesquisa determinados modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Os temas abordados nesta monografia são dos mais comuns e mais estudados e sua apresentação procura iniciar ao estudante nesta área ou a continuar nela. O estudo dos modelos probabilísticos discretos básicos, que são o objeto de nosso estudo exige contudo alguns conhecimentos iniciais tais como: a teoria dos conjuntos, funções reais, sequências, permutações, arranjos, combinações e outros e uma dose de intuição probabilística.

Referências

[1] ALVAREZ, Miguel Angel García. **Introducición a la Teoria de la Probabilidad**,vol 1. México:nUNAM, 2003.

[2] ARUNACHALAM, Viswanathan; CASTAÑEDA, Liliana Blanco; DHARMARAJÁ, Dervamuthu. **Introduction to Probability and Stochastic Processes with Aplications**. Hoboken: Wiley, 2012.

[3] BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística Básica**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2011.

[4] COLUNCHE DELGADO, B. Temístocles.**Experimentos sobre Conjuntos finitos e Contagem**. Araguaína, UFT,2017.

[5] DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. **Probabilidade: aplicações à Estatística**. 2. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004.

[6] FARIAS, Ana Maria Lima de. **Variáveis Aleatórias Discretas**. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2015.

[7] HASS, Joel; THOMAS, George B.; WEIR, Maurice B. **Cálculo**,volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

[8] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos e funções**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] MENDENHALL III, Willian; SCHEAFFER, Richard L.; WACKERLY, Denis D. **Mathematical Statistics with Applications**. 17. ed. Belmont: Thompson, 2008.

[10] MEYER, Paul L. **Probabilidade aplicações à Estatística**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[11] MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística Básica: Probabilidade e Interferência**, volume único. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

[12] RINCÓN, Luis. **Curso Intermedio de Probabilidad**. México: UNAM, 2007.