UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RUTE FERREIRA DA SILVA

O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO EM GRAFOS EULERIANOS

ARAGUAÍNA
2018

RUTE FERREIRA DA SILVA

O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO EM GRAFOS EULERIANOS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2018

RUTE FERREIRA DA SILVA

O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO EM GRAFOS EULERIANOS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

____
Prof. Me. André Luiz Ortiz da Silva

____
Profa. Ma. Samara Leandro Matos da Silva

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar força e coragem nos momentos mais difíceis e pela oportunidade de eu acessar o conhecimento.

Aos meus pais, Wanderlina e Lusivan, pelo apoio e incentivo em todos esses anos. Aos meus irmãos e aos demais membros da família pelos momentos de alegria que me mantiveram viva.

Ao meu amado Uenderson, por compreender os meus sonhos e lutar comigo para realizá-los.

Aos professores do Colegiado de Matemática que compartilharam seus saberes comigo e me incentivaram e incetivam a buscar mais. Faço este agradecimento em nome do Prof. Dr. Sinval de Oliveira, minha inspiração profissional.

Aos amigos adquiridos neste caminhar: Ana Paula Mendes, Brunna Karoliny, Cristiano Junis, Davi Oliveira, Gabriel Di Angelo, Geisson Rodrigues, Jayane Neres, Kelson Araújo, Liviane Silva, Marcos Vinícius, Regina Dias, Rosalina Viana e Tallys Marcos; por dividirem os anseios e receios comigo, bem como as alegrias e conquistas.

Ao meu querido orientador, Prof. Dr. José Carlos, pelos sorrisos e conversas em meio ao caos, por acreditar em mim e pela generosa paciência no decorrer deste percurso.

A todos os profissionais da Universidade que tornaram esta caminhada possível.

Enfim, àqueles que fizeram o caminho valer a pena, ser mais leve e mais prazeroso.

Obrigada!

A verdadeira profissão do homem é encontrar seu caminho para si mesmo.

(Hermann Hesse)

RESUMO

Esta monografia visita a Teoria dos Grafos para apresentar os denominados grafos de Euler ou eulerianos. O estudo objetiva identificar as condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo seja dito euleriano e mostrar como se calcula caminhos mínimos neste grafo peculiar. Para tal fim, apresenta os conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, expõe a teoria necessária para a identificação de um grafo euleriano e indica o algoritmo de Fleury para detecção ou construção de um ciclo de Euler em grafos eulerianos e, com o auxílio do algoritmo de Dijkstra, em semieulerianos. Quanto ao método, a pesquisa tem caráter exploratório, bibliográfico, à obtenção dos dados, e qualitativo, quanto à abordagem do problema. Os resultados apontam que um grafo é euleriano se todos os seus vértices são pares e semieulerianos se possui no máximo dois vértices ímpares. Se qualquer uma destas condições for verificada em um grafo, o algoritmo de Fleury pode ser implementado e o problema do menor caminho em um grafo euleriano solucionado.

Palavras-chave: Grafos. Euler. Menor caminho. Algoritmo de Fleury. Algoritmo de Dijkstra.

ABSTRACT

This monograph visits the Theory of Graphs to present the so-called Euler or Eulerian graphs. The study aims to identify the necessary and / or sufficient conditions for a graph to be said to be Eulerian and to show how to calculate minimum paths in this peculiar graph. To this end, it presents the fundamental concepts of the Theory of Graphs, exposes the necessary theory for the identification of an Eulerian graph and indicates the Fleury algorithm for the detection or construction of an Euler cycle in Eulerian graphs and, with the aid of the algorithm of Dijkstra, in semieulerianos. As for the method, the research has an exploratory, bibliographic, data acquisition, and qualitative approach to the problem. The results indicate that a graph is Eulerian if all its vertices are pairs and semieulerians if it has at most two odd vertices. If any of these conditions are verified in a graph, the Fleury algorithm can be implemented and the problem of the smallest path in an Eulerian graph solved.

Keywords: Graphs. Euler. Shortest Path. Fleury's Algorithm. Dijkstra's Algorithm.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Um carteiro entrega correspondências todos os dias. Para tornar seu trabalho mais eficiente, precisa pensar quais caminhos tomar para que o máximo de entregas seja feita sem que se gaste energia percorrendo distâncias desnecessárias como, por exemplo, transitar pela mesma rua duas ou mais vezes ou mesmo tomar um caminho mais longo quando se tem melhores alternativas de percurso. Mas como fazê-lo?

A abordagem para este problema de caminho mínimo pode ser feita com o uso de objetos matemáticos simples à sua representação. Se considerarmos as ruas como arestas, interpondo vértices entre as que se encontram, teremos um diagrama detalhado da situação e, deste modo, podemos encontrar uma resposta satisfatória a este tipo de problema. O diagrama construído é um modo de representar grafos.

Os grafos são objetos matemáticos combinatórios que servem para representar as relações entre o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas. Isso significa que, sabendo quais objetos do problema tomar como vértices e como e quais se relacionam, podemos construir um grafo para sua representação. A partir desta representação, utilizamos os conceitos do ramo matemático denominado Teoria dos Grafos para estudar e, se possível, resolver a situação dada.

É conveniente que informemos ao leitor que a Teoria dos Grafos, além de trazer soluções para traçar trajetórias mais eficientes, pode ser uma ferramenta aplicada em diferentes questões presentes em diversos campos das ciências, servindo como base matemática para a modelagem de situações reais.

Dentre as diversas aplicações de grafos, há aquelas que são aparentemente simples e de caráter lúdico como colorir totalmente um mapa, dividido em n regiões, com exatamente quatro cores distintas sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor ou, ainda, verificar se uma peça do jogo de xadrez pode ficar em determinada casa, do tabuleiro no decorrer do jogo.

Ademais, há aplicações não necessariamente recreativas como: seu uso na atribuição de frequência na engenharia da comunicação e à canalização de gás bem como na modelação de comunidades na *web* para verificar interesses comuns ou, ainda, na descrição de objetos da bioinformática (veja [1] e [2], por exemplo). Desse modo, a Teoria dos Grafos oferece respaldo às diversas ciências ao representar, de forma compacta, diferentes objetos e as relações entre eles.

Mediante a vasta aplicabilidade desta teoria, optamos por tratar do caminho mínimo em grafos eulerianos em virtude deste ser o problema propulsor para a estruturação inicial da Teoria dos Grafos, como veremos adiante.

Delimitada a temática, propomo-nos pesquisar como encontrar um caminho de baixo custo em um grafo euleriano. Tal proposta foi transformada na pergunta-diretriz deste trabalho, a saber: Quais são as condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo seja euleriano e como encontrar um caminho mínimo em grafos com estas condições?

Para perseguir a resolução do que propomos, estabelecemos como objetivo geral: encontrar o caminho mínimo em um grafo euleriano. Para isto, objetivamos, especificamente, apresentar os conceitos fundamentais da teoria dos grafos bem como os característicos aos grafos eulerianos e expor algoritmos pertinentes para a resolução do problema do menor caminho em grafos eulerianos.

Em vista dos objetivos traçados, nossa pesquisa se caracteriza como exploratória, visto que apresentaremos uma delimitação própria do tema da pesquisa para informar o leitor a respeito do mesmo (veja [3]). Para a obtenção dos dados, utilizamos a pesquisa bibliográfica no intuito de entrarmos em contato com o que foi publicado a respeito (veja [4]). Quanto à abordagem da questão, adotamos a pesquisa qualitativa, visto que não nos preocupamos em quantificar os dados, representando-os numericamente, ao contrário, buscamos o aprofundamento da apreensão do objeto de estudo por meio da análise de dados não métricos e que têm diferentes abordagens, por exemplo (veja [3] e [5]). Com a metodologia definida, passemos à estruturação organizacional da investigação.

Em *Nota histórica*, realizaremos um breve histórico sobre o nascimento e desenvolvimento da Teoria dos Grafos. O leitor encontrará ainda alguns resultados a serem discutidos ao longo do trabalho e algumas áreas de conhecimento que utilizam seus produtos.

Em *Noções preliminares*, apresentaremos os conceitos básicos da teoria, relacionados ao nosso objeto de estudo, para o leitor não familiarizado a eles apropriar-se e ter uma leitura a partir de um texto mais acessível.

Em *Grafos eulerianos*, traremos os conceitos fundamentais e as condições para que um grafo seja dito de Euler sob a forma de teoremas e revisitaremos o problema gênese da Teoria para resolvê-lo.

Por fim, em *O problema do menor caminho*, caracterizaremos o nosso objeto de estudo com base nos capítulos anteriores, exporemos algoritmos pertinentes para a sua resolução bem como exemplos ilustrativos do problema do menor caminho em grafos eulerianos.

Desse modo, esperamos que este texto exploratório leve o leitor a reconhecer os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, sobretudo, os referentes a grafos eulerianos, além de valer-se destes e dos algoritmos expostos para modelar e resolver problemas de custo mínimo, nos quais estes se apliquem.

Capítulo 2

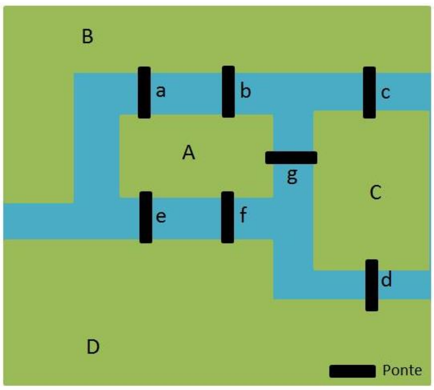
Nota Histórica

Neste capítulo, apresentaremos ao leitor o contexto histórico de nascimento da intitulada Teoria dos Grafos. Embasamo-nos em [2], [6], [7], [8], [9] e [10] para a sua estruturação.

2.1 Um Pouco de História

O pontapé inicial para a criação da Teoria dos Grafos (como é chamada hoje) foi um problema recreativo com certa popularidade na cidade de Konigsberg, Prússia (atual Kaliningrado, Rússia), do século XVIII. Na cidade, há uma ilha rodeada pelo rio Pregel que se divide em dois ramos, e estes ramos eram atravessáveis por sete pontes (Figura 01) que interligavam os quatro distritos que formam a cidade.

Figura 01 - As Sete Pontes de Konigsberg



Fonte: Arquivo pessoal.

O problema, a saber: é possível realizar um tour pela cidade de Konigsberg que atravesse cada uma das sete pontes uma única vez, no qual se parte de um distrito e, ao final do passeio, volta-se a ele? era um dos entretenimento dos prussianos, que dividiam-se entre os que acreditavam e os que não acreditavam na possibilidade de o percurso ser realizado.

A questão foi definitivamente solucionada quando o problema foi apresentado ao matemático suíço Leonhard Euler [1](1707-1783) que, em 1736, publicou em um artigo a impossibilidade do trajeto ser realizado, mais que isso, deu início ao estudo dos chamados problemas de rotas, dos quais, o Problema das Sete Pontes de Konigsberg é o primeiro. [2]

Euler estabeleceu os conceitos elementares da Teoria dos Grafos bem como os teoremas abaixo:

i) Em qualquer grafo, há um número par de vértices de grau ímpar. [3]

ii) Um grafo com todos os vértices pares pode ser percorrido sem que se repita as arestas e volte-se ao ponto de partida.

iii) Um grafo que possui exatamente dois vértices ímpares pode ser percorrido sem que se repita as arestas, mas não se pode voltar ao ponto de partida.

iv) Um grafo com mais de dois vértices ímpares não pode ser percorrido sem que se repita as arestas. [4]

Os grafos que atendem a dois destes teoremas são denominados de Euler (Capítulo 4).

Infelizmente, os resultados acima não impulsionaram um desenvolvimento consistente do estudo da Teoria dos Grafos, que foi quase que totalmente deixado de lado por mais de um século, a exceção de alguns raros casos isolados que trouxeram resultados de caráter prático, em áreas disjuntas.

Considera-se que, somente a partir da segunda metade do século XX, o desenvolvimento da Teoria dos Grafos veio a ocorrer, de fato, sob o impulso de problemas de otimização e da invenção do computador, essencial para a maior parte das aplicações dela.

Este ”redescobrimento” da Teoria dos Grafos, em sua gênese euleriana, mudou os rumos da ciência por sua aplicabilidade em muitos campos desta, a exemplo, na Biologia, Física, Química, Economia, Informática, entre muitas outras. Apesar disto, ainda é possível sentir os efeitos da não linearidade dos estudos acerca da Teoria dos Grafos, sobretudo, quando se pretende reunir seus resultados em um trabalho. Mas este fato não prejudica o que pode ser o aspecto mais fascinante para quem a estuda: há grafos em tudo (ou quase)!

[1]Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na cidade suíça Basiléia. Considerado o maior matemático do século XVIII, não apenas contribuiu a todas as áreas da Matemática de sua época, como também iniciou teorias originalmente suas, como no caso dos grafos.

[2]Exploraremos mais este problema no Capítulo 4.

[3]Na Seção 3 do Capítulo 3, este resultado é enunciado como um corolário.

[4]Voltaremos a ii), iii) e iv) no Capítulo 4.

Capítulo 3

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, necessários para que o leitor estude os demais capítulos com propriedade no assunto. Para a sua construção, utilizamos [1], [11], [12], [13], [14] e [15] como referências básicas.

3.1 Grafos

A definição de um grafo G está vinculada à união de dois conjuntos, o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas A. O conjunto V, necessariamente, é não vazio e finito. O conjunto A, por sua vez, pode ser vazio, mas deve ser finito e disjunto de V. Os elementos de A são subconjuntos de V que têm cardinalidade dois, formados por elementos distintos de V. O Exemplo 3.1 traz esses conceitos de maneira clara.

Assim, um grafo pode ser entendido como um conjunto C finito e não vazio que possui uma relação R não reflexiva e simétrica entre seus elementos. Isto significa que todo elemento de C não se relaciona consigo mesmo e que, dados dois de seus elementos, c_1 e c_2, se c_1 está relacionado com c_2, então c_2 está relacionado com c_1.

Por convenção, adotaremos $V(G)$ ou V para fazermos a notação do conjunto de vértices e $A(G)$ ou A, ao conjunto de arestas de um grafo G. Uma aresta $\{u, v\}$, isto é, um elemento do conjunto A, por exemplo, será denotada por uv ou vu. Note que estas arestas são iguais, em outras palavras, o par é não ordenado. Para denotar o número de vértices e de arestas de um grafo G, utilizaremos $|V| = p$ e $|A| = q$, respectivamente.

Em alguns casos, utilizaremos sinônimos para designar os elementos de G. Por elementos, entenda vértices e arestas. Aos primeiros, chamaremos nós ou pontos e, às últimas, segmentos.

Dados os elementos de um grafo G, os conceitos de adjacência e incidência estão presentes. Se uv é aresta de um grafo G, dizemos que u e v são vértices adjacentes e que uv incide em u e v. Caso duas arestas distintas de um grafo G incidam em um mesmo vértice, dizemos que são arestas adjacentes.

Segue um exemplo do que foi visto até aqui.

Exemplo 3.1. *Em uma certa cidade, cada quadra contém seis lotes. Em uma dessas quadras, o conjunto de moradores é $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Para instalar uma rede de coleta de esgoto, a prefeitura local quer saber quais moradores são vizinhos, isto é, aqueles que dividem diretamente a demarcação dos lotes. Vejamos a relação R, de vizinhança, entre eles: v_1 é vizinho de v_2 e v_4; v_2 é vizinho de v_1, v_3 e v_5; v_3 é vizinho de v_2 e v_6; v_4 é vizinho de v_1 e v_5; v_5 é vizinho de v_2, v_4 e v_6; v_6 é vizinho de v_3 e v_5.*

Neste exemplo, perceba que $A = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_5v_6\}$ é o conjunto de arestas e que $|V| = 6$ e $|A| = 7$. O grafo G, neste caso, é a união de A e V.

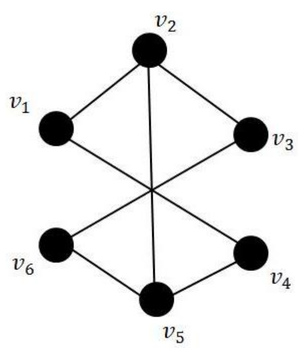
3.1.1 Representação geométrica

Embora grafos possam ser representados de outros modos, seu aspecto geométrico ganhará destaque neste trabalho.

Desse modo, dado um grafo G, podemos representá-lo como um diagrama onde cada elemento de V é representado por um ponto e cada aresta por um segmento de reta ou um arco. A descrição geométrica de G deve respeitar a relação entre seus elementos. [1]

Exemplo 3.2. *Voltemos ao Exemplo 3.1. Podemos representá-lo, geometricamente, tal como segue.*

Figura 02 - Grafo



Fonte: Arquivo pessoal.

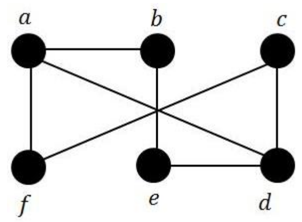
O leitor pode ter pensado em um outro diagrama para representar a situação acima. De fato, outros diagramas existem, e a existência deles é devida ao conceito de isomorfismo.

[1] Os diagramas deste trabalho foram construídos no processador de texto Microsoft Word e no criador de gráficos NodeXL Basic para o editor de planilhas Microsoft Excel.

Definição 3.3. *Dois grafos G e H são chamados isomorfos se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices que preserve as adjacências. Quando isto ocorre, dizemos que há um isomorfismo entre G e H e escrevemos $G = H$.*

Exemplo 3.4. *O grafo abaixo é isomorfo ao do Exemplo 3.2.*

Figura 03 - Grafo Isomorfo



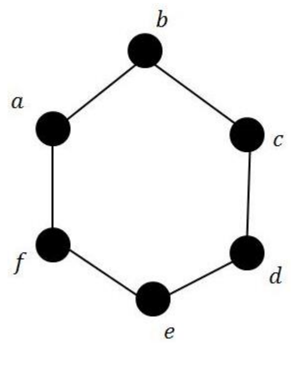
Fonte: Arquivo pessoal.

Vamos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os conjuntos de vértices dos dois diagramas. Considere a função g dada por $g(v_1) = e$, $g(v_2) = d$, $g(v_3) = c$, $g(v_4) = b$, $g(v_5) = a$, $g(v_6) = f$.

Observe que a função é adequada. Se tomarmos dois vértices adjacentes no primeiro grafo, a exemplo v_1 e v_2, a função fará a correspondência com e e d, vértices adjacentes no segundo grafo. Do mesmo modo, se tomarmos vértices não adjacentes, digamos v_1 e v_3, seus correspondentes respectivos, e e c, também não o são neste grafo.

Exemplo 3.5. *O grafo abaixo é não isomorfo ao do Exemplo 3.2.*

Figura 04 - Grafo não Isomorfo



Fonte: Arquivo pessoal.

Chamemos de G o grafo do Exemplo 3.2 e de H o grafo acima. De fato, qualquer correspondência que estabelecermos entre G e H não preservará as adjacências, visto que $|V(G)| = 6 = |V(H)|$, mas $|A(G)| = 7 \neq |A(H)|$.

Observação 3.6. *Em geral, determinar se há isomorfismo ou não entre dois grafos não é simples, aliás, não existe um método eficiente para fazê-lo. Em nosso caso, trouxemos um grafo (Figura 04) que não atende a uma condição necessária, número de arestas igual ao da Figura 02, para exemplificar grafos não isoformos. Verificar a existência de isomorfismo entre grafos é um problema curioso por ser bastante divergente de outros da teoria dos grafos e ter muita familiaridade com a teoria dos grupos em Álgebra, não sendo nosso foco aqui tratá-lo com essa perspectiva.*

3.2 Subgrafos

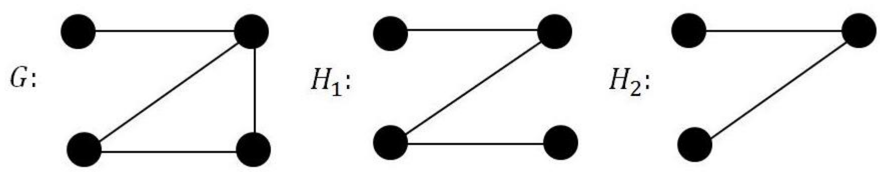
Podemos representar as estradas que interligam duas cidades por meio de um grafo G. Suponha que o façamos para avaliar a menor distância entre elas e, após a construção do grafo G, descubramos que uma das estradas é interditada. A exclusão da aresta que a representa implica a não existência de um grafo? Bem, não. A sua exclusão resultará em um subgrafo de G.

Definição 3.7. *Sejam H e G grafos. H é subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$.*

Em outras palavras, H é um subgrafo de G se os vértices de H forem vértices de G e as arestas de H forem arestas de G.

Exemplo 3.8. *Na figura abaixo, H_1 e H_2 são subgrafos de G. Perceba também que H_2 é subgrafo de H_1.*

Figura 05 - Subgrafo e Supergrafo



Fonte: Arquivo pessoal.

Observação 3.9. *Podemos dizer ainda que G é um supergrafo de H_1 e H_2.*

Observação 3.10. *Um grafo isomorfo a um subgrafo de G também será dito subgrafo de G.*

Portanto, para a obtenção de um subgrafo de G, basta que excluamos arestas e/ou vértices dele. E, se quisermos um supergrafo de G, devemos incluir elementos em G.

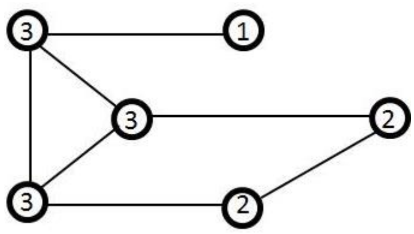
3.3 Grau de um vértice

A definição que segue é fundamental neste trabalho.

Definição 3.11. *Seja v um vértice de um grafo G. O grau ou a valência de v é o número de arestas que incidem sobre ele.*

Exemplo 3.12. *No grafo abaixo, os números mostrados são os graus de cada vértice.*

Figura 06 - Grau de um Vértice



Fonte: Arquivo pessoal.

Para denotar o grau de um vértice v, é convencional o uso de $g_G(v)$ ou, simplesmente, $g(v)$, se G estiver explícito. Se $g(v)$ for um número par, v é dito ser um vértice par; caso contrário, v é dito ser um vértice ímpar.

Observe que, no grafo do Exemplo 3.12, $|V| = 6$ e $|A| = 7$ e ainda a soma do grau de todos os vértices é $2 \times 7 = 14$. Será coincidência? O próximo teorema nos garante que não.

Teorema 3.13. *Seja G um grafo com p vértices e q arestas, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$. Então*

$$\sum_{i=1}^{p} g(v_i) = 2q.$$

Demonstração: Toda aresta de G incide em dois vértices. Quando contamos o grau destes, cada aresta é contada duas vezes, uma por vértice incidente. Portanto, a soma dos graus dos vértices de G é duas vezes o número de arestas. □

Este teorema tem uma consequência interessante.

Corolário 3.14. *Em qualquer grafo G, há um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Suponhamos que $|A(G)| = q$. Seja x a soma do grau dos vértices pares e y a soma do grau dos vértices ímpares, temos que $x + y = 2q$. Como x é a soma de inteiros pares, x é par. Segue que $y = 2q - x$ e, portanto, y é par. Daí, deve existir um número par de parcelas em y, ou seja, existe um número par de vértices de grau ímpar. □

3.4 Outras Definições em Grafos

Nesta seção, apresentaremos outras definições fundamentais em grafos, necessárias à compreensão integral do nosso objeto de estudo.

Definição 3.15 (Passeio)**.** *Sejam u e v vértices de um grafo G. Um passeio $u - v$ é uma sequência, com início em u e término em v, que alterna vértices e arestas incidentes.*

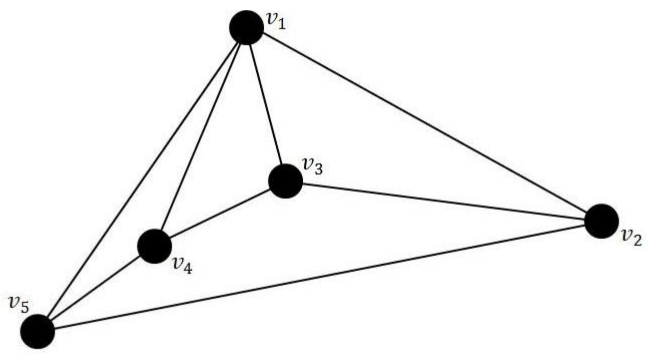
Por convenção, denotaremos um passeio $v_1 - v_n$ que passa pelos vértices $v_1, v_2, ..., v_n$ como $W : v_1, v_2, ..., v_n$ ou, quando houver necessidade de explicitação das suas arestas a_i, por $W : v_1a_1v_2a_2...a_{n-1,}v_n$

Observação 3.16. *Um passeio $u-v$ pode ser aberto ou fechado. Se $u = v$, o passeio é fechado, caso contrário, é aberto.*

Definição 3.17 (Trilha)**.** *Seja $u-v$ um passeio. Se $u-v$ não repetir arestas, então é uma trilha $T : u, ..., v$.*

Exemplo 3.18. *No grafo abaixo, $W : v_1, v_2, v_3, v_2, v_5$ é um passeio v_1-v_5 e $T : v_1, v_2, v_3, v_1, v_5$, uma trilha $v_1 - v_5$.*

Figura 07 - Passeios



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.19 (Caminho)**.** *Seja $u-v$ um passeio. Se $u-v$ não repetir arestas e vértices, então é um caminho $P : u, ..., v$.*

Observação 3.20. *Todo caminho é uma trilha.*

Definição 3.21 (Ciclo)**.** *Um ciclo C é um caminho em que os vértices inicial e final coincidem.*

Exemplo 3.22. *Considere o grafo da Figura 07. $P : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ é um caminho $v_1 - v_5$ e, $C : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ é um ciclo.*

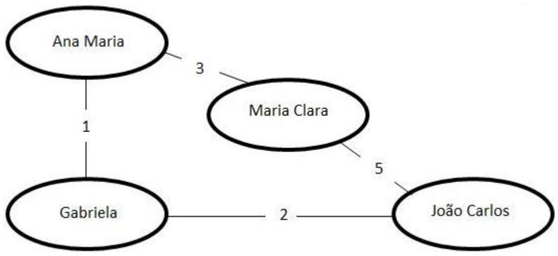
Definição 3.23 (Grafo rotulado)**.** *Grafo que possui todos os vértices associado a um rótulo (veja o Exemplo 3.25 para uma melhor compreensão).*

Definição 3.24 (Grafo valorado)**.** *Grafo no qual a todas às arestas são atribuídos valores tais como distância, tempo, custo de percurso, etc. A cada um desses valores, chamamos peso da aresta.*

Se desejarmos saber o peso de um passeio em um grafo, basta somarmos o peso de cada uma das arestas percorridas.

Exemplo 3.25. *Abaixo, um grafo rotulado e valorado no qual as arestas indicam relação de amizade e a distância, em quilômetros, entre as casas dos amigos.*

Figura 08 - Distâncias



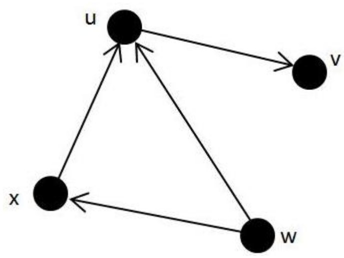
Fonte: Arquivo pessoal.

O peso de um caminho da casa de Gabriela até a de Maria Clara que passa pela residência de João Carlos é 7.

Definição 3.26 (Dígrafo)**.** *União do conjunto de vértices V com o conjunto de arestas A, disjunto de V, que contém pares ordenados de elementos distintos de V. O dígrafo é também chamado de grafo dirigido e os elementos de A são referidos como arcos.*

Exemplo 3.27. *No dígrafo abaixo, $A = \{uv, xu, wx, wu\}$.*

Figura 09 - Dígrafo



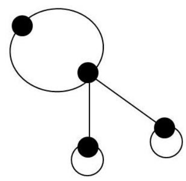
Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.28 (Laço)**.** *Se uma aresta conecta um vértice com ele mesmo, recebe o nome de laço.*

Definição 3.29 (Multigrafo)**.** *Grafo em que mais de uma aresta liga dois vértices.*

Exemplo 3.30. *Abaixo, um multigrafo com laços.*

Figura 10 - Multigrafo



Fonte: Arquivo pessoal.

Apesar de termos apresentado dígrafos, multigrafos e 'grafos' com laços nesta seção, esses não serão considerados na maior parte deste trabalho e, quando o forem, explicitaremos a terminologia adequada. Assim, o leitor deve entender o termo grafo conforme a definição dada na Seção 3.1.

3.5 Conexidade e Desconexidade em Grafos

Podemos pensar na desconexidade de um grafo como uma rede elétrica de uma cidade que, após ser atingida por um temporal, teve alguns fios danificados. Supondo que cada casa seja um vértice e os fios arestas, as casas afetadas não possuem ligação com outra que faça parte da malha, portanto, mesmo pertencendo à rede, estão desconectadas dela.

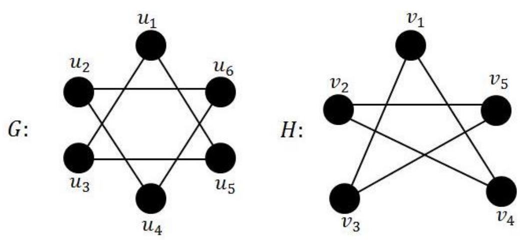
Com esta analogia em mente, apresentaremos a definição formal de conexidade.

Definição 3.31. *Sejam u e v dois vértices de um grafo G. Dizer que eles são conexos equivale a enunciar que existe um caminho $u - v$ em G. Se todos os vértices em G forem conectados entre si por um caminho, G é conexo.*

Em outras palavras, se há um caminho entre quaisquer dois nós de um grafo G, então G é conexo.

Exemplo 3.32. *Na figura abaixo, G é um grafo desconexo, pois não existe caminho que saia do vértice u_1 e termine no vértice u_2. Por outro lado, H é um grafo conexo, pois entre dois quaisquer de seus nós, existe um caminho.*

Figura 11 - Conexidade



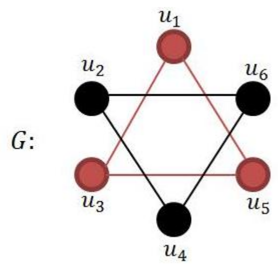
Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.33. *Para cada parte conexa de um grafo G, damos o nome de componente conexa ou componente de G.*

Denotamos a quantidade de componentes de um grafo G por $c(G)$.

Exemplo 3.34. *O grafo G do exemplo anterior tem duas componentes conexas, que estão representadas com cores diferentes na figura a seguir.*

Figura 12 - Componentes Conexas



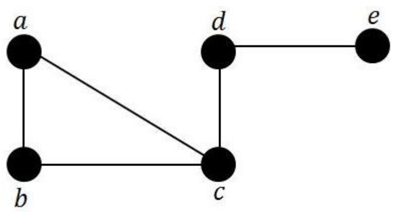
Fonte: Arquivo pessoal.

É evidente que, se G é conexo, possui apenas uma componente e que cada vértice de um grafo pertence a uma, e somente uma, componente dele.

Definição 3.35. *Se vw for uma aresta de G que, ao ser excluída, aumenta o número de componentes de G, então vw é uma ponte.*

Exemplo 3.36. *No grafo abaixo, cd é uma ponte.*

Figura 13 - Ponte



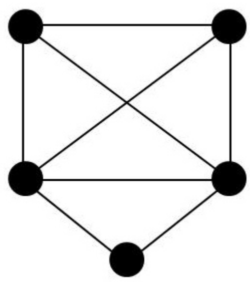
Fonte: Arquivo pessoal.

Capítulo 4

Grafos Eulerianos

Já familiarizados com os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, propomos ao leitor que tente percorrer todas as arestas do grafo abaixo sem tirar o lápis do papel e percorrendo uma única vez cada aresta. É possível?

Figura 14 - Casinha Invertida



Fonte: Arquivo pessoal.

Como você deve ter descoberto, é possível fazer este percurso com algumas condições.

Você pode ter se perguntado como este problema, aparentemente simples, se relaciona com o tema deste capítulo. Convidamo-lo a percorrer as seções que o compõem e descobrir a relação intríseca que têm. Para a sua construção, utilizamos [1], [9], [11] e [14] como referências básicas.

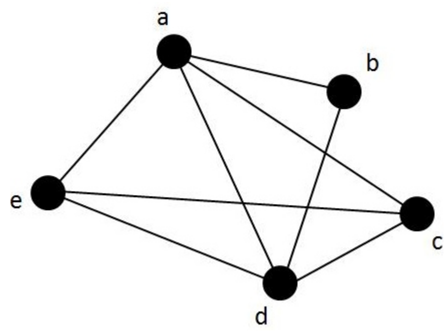
4.1 Conceitos Fundamentais

A definição de grafo euleriano está relacionada às duas primeiras definições que seguem e foi sugerida a partir do problema das sete pontes de Konigsberg (Capítulo 2).

Definição 4.1 (Caminho euleriano)**.** *Seja G um grafo conexo. Um caminho euleriano é um caminho aberto que contém todas as arestas de G.*

Exemplo 4.2. *Na Figura 15,* $P_1 : e, a, b, d, a, c, e, d, c$ *é um caminho euleriano.*

Figura 15 - Caminho Euleriano

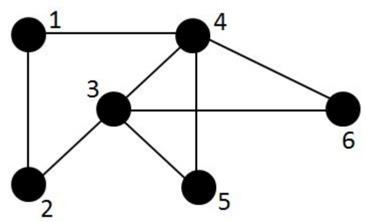


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 4.3 (Ciclo euleriano)**.** *Seja G um grafo conexo. Um ciclo euleriano é um caminho fechado que contém todas as arestas de G.*

Exemplo 4.4. *Na Figura 16,* $C_1 : 1, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 2, 1$ *é um ciclo euleriano.*

Figura 16 - Ciclo Euleriano



Fonte: Arquivo pessoal.

O leitor deve ter notado que, nos caminhos e ciclos eulerianos, permite-se que haja repetição de vértices, o que contraria a Definição 3.19 e a 3.21, no entanto, é convencional a adoção dos mesmos para designar os objetos tratados.

Vejamos agora a definição formal de grafo euleriano.

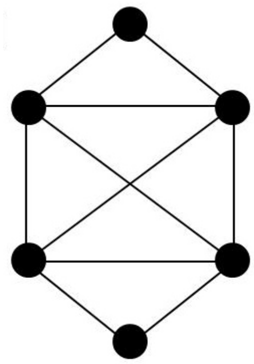
Definição 4.5 (Grafo euleriano)**.** *Seja G um grafo conexo. Se G contém um ciclo euleriano, G é um grafo euleriano.*

Exemplo 4.6. *O grafo da Figura 16 é um grafo euleriano.*

Comumente, podemos encontrar na literatura referente à Teoria dos Grafos o termo semieuleriano para designar os grafos que possuem um caminho euleriano. Nesta monografia, comumente, chamaremos de grafos eulerianos tanto caminhos quanto ciclos eulerianos. Entretanto, quando houver necessidade da observação da singularidade das terminologias, o faremos.

Voltemos à Figura 14. Trata-se de um grafo conexo que contém um caminho euleriano. Com a inserção de alguns elementos, podemos transformá-lo em um ciclo euleriano (Figura 17).

Figura 17 - Casinha Expandida



Fonte: Arquivo pessoal.

Observe que, neste grafo, todos os vértices são pares, enquanto, no primeiro (Figura 14), há dois vértices ímpares. Perceba ainda que estes vértices ímpares sempre permutam o início e o fim do trajeto solicitado, isto é, o percurso só pode ser feito com início em um e término no outro.

Note ainda que, no caso da Figura 17, pode-se fazer um percurso nas mesmas condições dadas no início do capítulo, porém com início e término em um único vértice, o que é impossível no grafo da Figura 14.

Estas observações não são coincidências em grafos eulerianos, ao contrário, são fundamentais à sua existência, como veremos na seção seguinte.

4.2 Condições à Existência de Grafos Eulerianos

No término da seção anterior, fizemos algumas observações a respeito dos caminhos e ciclos eulerianos. Nelas, apontamos que a existência de grafos eulerianos está condicionada às características dos vértices.

O lema e os teoremas apresentados abaixo tratam destas condições e nos auxiliarão a identificar que grafos são ou não eulerianos, a partir desta seção.

Lema 4.7. *Seja G um grafo. Se $g(v) \geq 2$ para todo nó v em G, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Tomemos um vértice v qualquer em G e iniciemos um caminho, escolhendo um vértice de G adjacente a v, digamos v_1. Isso é possível, pois, por hipótese, $g(v) \geq 2$. Escolhemos, então, um outro vértice de G adjacente a v_1 e diferente de v, digamos v_2, e formamos o caminho v, v_1, v_2. Novamente por hipótese, isso é possível. Agora, se não há vértices adjacentes a v_2 que sejam diferentes de v (e como $g(v_2) \geq 2$), o caminho v, v_1, v_2, v é um ciclo e o teorema está demonstrado. Caso contrário, tomamos um outro vértice adjacente a v_2 que seja diferente de v, digamos v_3. Se não há vértices adjacentes a v_3 que sejam diferentes de v, então o caminho v, v_1, v_2, v_3, v é um ciclo e o teorema está provado. Caso contrário, prosseguimos da mesma forma. Como o grafo G contém finitos vértices, esse processo, necessariamente, deve terminar em v num número n de passos, e o caminho $v, v_1, ..., v_n, v$ é um ciclo, o que conclui a demonstração. $\square$

O teorema a seguir é o mais importante deste trabalho, pois estabelece as condições necessárias e suficientes para que um grafo seja euleriano, por definição, e responde parte da nossa questão-diretriz. O nome atribuído a ele é justificável, pois foi Euler quem estabeleceu as condições necessárias e suficientes para que um grafo contenha um ciclo euleriano.

Embora tenha demonstrado somente a necessidade da paridade dos vértices, Euler afirmou que esta condição associada a conexidade do grafo era suficiente para garantir a existência de um ciclo euleriano. A demonstração desta afirmação foi feita anos mais tarde, em 1873, pelo matemático alemão Carl Hierholzer (1840-1871).

Vejamos o teorema.

Teorema 4.8 (Teorema de Euler)**.** *Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todo vértice em G é par.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se G é um grafo euleriano, ele contém um ciclo euleriano. Tomemos em G um vértice v, diferente do vértice inicial deste ciclo. Todas as vezes em que o caminho passa por v, ele utiliza duas arestas distintas, uma para chegada e outra para saída. Portanto, cada ocorrência de v representa a adição de duas arestas ao seu grau. Logo, v tem grau par. Se v é o vértice inicial, v é o vértice final, o que adiciona duas arestas ao seu grau. Nas demais vezes em que ocorre, há adição de um par de arestas. Portanto, todo vértice v em G tem grau par.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que todo vértice de um grafo conexo tem grau par. Utilizaremos indução no número de arestas q de G. Notemos que $q = 3$ é o menor valor possível para a construção de um grafo conexo com todos os vértices pares. Assumamos, então, que todo grafo conexo com vértices pares e número de arestas menor que q, $q \geq 4$, é euleriano e que G possui q arestas. Nosso objetivo é mostrar que G é euleriano. Seja u um vértice de G. Construamos um ciclo $C : u - u$ em G. Este ciclo existe em G pois, se $C' : u - v$ é um caminho dentro de G, $u \neq v$, haverá um número ímpar de arestas incidentes a v em C' e, portanto, C' pode ser extendido a um caminho com mais arestas, um caminho fechado, consequentemente, um ciclo $C : u - u$. Se C contém todas as arestas de G, G é euleriano. Caso contrário, removamos de G todas as arestas de C e eventuais vértices isolados. O grafo G' resultante tem vértices pares. Observemos que cada uma das componentes H' de G' têm menos que q arestas e são eulerianas, por hipótese de indução. Como G é conexo, cada uma das componentes de G' tem um vértice comum a C. A união dos ciclos eulerianos de cada componente H' de G' com o ciclo C resulta em um ciclo euleriano em G. Logo, G é euleriano. $\square$

Observe que, se um grafo conexo tem todos os seus nós pares, podemos tomar arbitrariamente um de seus vértices para ser vértice inicial e, portanto, final, de um ciclo euleriano.

Quando nem todos os vértices de um grafo conexo são pares, o teorema a seguir nos auxilia a identificar se este contém, ao menos, um caminho euleriano.

Teorema 4.9. *Um grafo conexo contém um caminho euleriano se, e somente se, tem exatamente dois vértices ímpares.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que G contém um caminho euleriano. Sejam u e v seus vértices inicial e final, respectivamente. Todo vértice em G, à exceção do inicial e do final, tem grau par. É imediata a imparidade de u e v.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que um grafo conexo G tem exatamente dois vértices, u e v, ímpares. Se u e v são não adjacentes, a inserção de uma aresta uv torna o supergrafo de G euleriano (Teorema 4.8). Se uv for excluída, resta em G um caminho euleriano. Podemos, ainda, adicionar a G um vértice w adjacente a u e a v, o que torna o supergrafo de G euleriano. Um caminho P neste supergrafo tem uw e vw como arestas consecutivas que, quando excluídas, produzem em G um caminho euleriano. $\square$

O teorema a seguir é uma extensão do Teorema 4.8.

Teorema 4.10. *Seja G é um grafo conexo com $2n \geq 2$ vértices ímpares. Então G tem n caminhos abertos, dois a dois disjuntos.*

Demonstração: Sejam u_i e v_i, $1 \leq i \leq n$, os vértices ímpares de G. Agora, seja H o supergrafo de G obtido com o acréscimo de n vértices w_i, $1 \leq i \leq n$, adjacentes às arestas u_i e v_i. H é euleriano e contém um ciclo C. Para cada i, $u_i w_i$ e $v_i w_i$ são arestas consecutivas em C. Portanto, se todas estas arestas forem excluídas, restam n caminhos abertos em G. Note que todos estes caminhos se iniciam e terminam em nós de grau ímpar de G e ainda que são dois a dois disjuntos, isto é, não têm segmentos comuns. $\square$

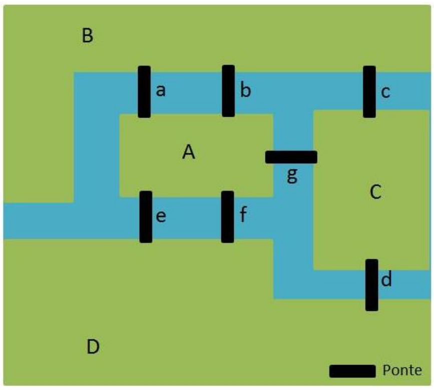
Desse modo, para que um grafo possa ser desenhado sem tirar o lápis do papel ou, equivalentemente, ser euleriano, é necessário que possua todos os seus vértices pares ou, no máximo, dois vértices ímpares.

Em posse destes teoremas, podemos resolver o Problema das Sete Pontes de Konigsberg.

4.3 O Problema das Sete Pontes de Konigsberg

No Capítulo 2, trouxemos a seguinte questão: é possível realizar um tour pela cidade de Konigsberg (Figura 18) que atravesse cada uma das sete pontes uma única vez, no qual se parte de um distrito e, ao final do passeio, volta-se a ele?

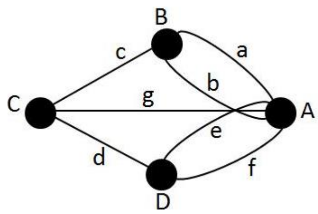
Figura 18 - As Sete Pontes de Konigsberg



Fonte: Arquivo pessoal.

Com os resultados deste capítulo, podemos facilmente resolver esta questão. Vejamos o grafo associado ao problema (Figura 19). Fizemos das pontes as arestas e dos distritos os nós.

Figura 19 - Grafo Sete Pontes



Fonte: Arquivo pessoal.

O Teorema de Euler nos diz que podemos fazer um passeio em um grafo que contenha todas as suas arestas, sem que estas se repitam, partindo de um vértice e voltando à ele ao final do percurso, se todos os seus vértices forem pares. Como todo vértice do grafo associado ao problema das sete pontes de Konigsberg tem grau ímpar, o passeio é impossível de ser realizado.

Capítulo 5

O Problema do Menor Caminho

Neste capítulo, apresentaremos o âmago do nosso trabalho: o problema do menor caminho em grafos eulerianos. Aqui, caracterizaremos o problema e mostraremos dois algoritmos para a sua resolução. Para a sua construção, utilizamos [6], [7], [14], [16], [17], [18] e [19].

5.1 Caracterização

Aplicações frequentes da teoria dos grafos estão relacionadas a grafos valorados. Seja para verificação de custos em uma rede (de transportes, telefonia e outras) ou, em casos mais corriqueiros, como o de verificar a menor distância entre dois ou mais lugares que se quer ir, o fato é que os grafos valorados podem representar diferentes situações para análise e possível resolução de um problema de custo.

Como sugerimos no título deste capítulo, um destes problemas é o problema do menor caminho (ou menor custo). Considerado o mais importante problema relacionado a caminhos em grafos por sua ampla aplicabilidade em situações reais, em geral, ele caracteriza-se por encontrar, entre elementos específicos de uma rede, uma rota de custo mínimo. Claramente, trata-se de um problema de otimização.

Uma rota de custo mínimo é utilizada: por uma transportadora para verificação da menor distância entre cidades por desejar diminuir o dispêndio, sem deixar de oferecer o serviço; por uma empresa de ônibus que quer atender o máximo de bairros com uma única linha no menor tempo possível; ou, ainda, por um mochileiro que quer conhecer o máximo de cidades com a menor quantidade de dinheiro. Enfim, quaisquer situações de rede, com custo de caminho acumulável, pode ser interpretada sob a ótica da teoria dos grafos como aplicação do problema do menor caminho.

Neste trabalho, porém, trataremos de um caso especial deste problema: desejamos, não apenas encontrar um caminho de custo mínimo entre os vértices de grafo, mas um caminho de custo mínimo que percorra todas as suas arestas.

A vertente do problema ao qual nos referimos é associada ao Problema do Carteiro Chinês (PCC) proposto pelo matemático chinês Kwan Mei-Ko, em 1962. O PCC consiste em encontrar um percurso ótimo para a entrega de correspondências, isto é, obter um caminho que se inicia e termina na estação de correios, depois que todas as ruas de uma cidade sejam percorridas uma única vez ou o menor número de vezes possível.

Em termos da Teoria dos Grafos, a resolução do Problema do Carteiro Chinês é um ciclo fechado de peso mínimo que abrange todas as arestas do grafo valorado que o contém.

Certamente, a caracterização do problema do menor caminho realizada até aqui fez o leitor lembrar-se de grafos eulerianos. No entanto, salientamos que, para que o problema tenha resolução, não, necessariamente, o grafo deve ser euleriano. Porém, consideramos esta condição para apresentar os algoritmos de resolução.

É indiscutível que, se um grafo G é euleriano, segundo a Definição 4.5, qualquer ciclo é uma solução ótima para o problema do menor caminho. Daí, basta que determinemos um ciclo em G. Para fazê-lo, precisamos de um algoritmo de determinação de ciclos.

Na seção seguinte, apresentaremos um algoritmo pertinente, considerado bom e simples, para a resolução do problema em grafos eulerianos e algumas aplicações. Convém-nos lembrar que os exemplos criados por nós são situações ideais, à nossa proposta de estudo, para ilustrar o problema do menor caminho em grafos eulerianos.

5.2 Algoritmo de Fleury

O algoritmo de Fleury é um dos mais antigos para trilhas eulerianas. Este algoritmo é atribuído ao francês M. Fleury, de quem se tem poucos dados, que o teria publicado em 1885. Sua finalidade é encontrar um ciclo euleriano em um grafo euleriano.

5.2.1 Descrição

Passo 0. Verificar se o grafo G possui todos os vértices pares.

Passo 1. Escolher um vértice arbitrário $v_0 \in V(G)$ e o conjunto $T_0 = v_0$ para ser a trilha inicial.

Passo 2. Supor que $T_i = v_0 a_1 v_1 a_2 ... a_i v_i$ tenha sido escolhida. Em seguida, escolher uma aresta a_{i+1} de $A - \{a_1, a_2, ..., a_i\}$ de modo que: i) a aresta a_{i+1} seja incidente ao vértice v_i; ii) a menos que não haja outro modo, a_{i+1} não seja uma ponte.

Em termos mais claros, a descrição geral do passo dois nos diz que, se uma aresta foi visitada, ela não pode ser visitada novamente.

Passo 3. Repetir o passo 2 até que não possa ser implementado.

A trilha construída é euleriana, por definição. [1]

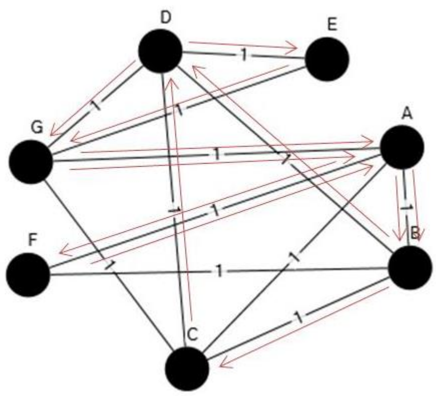
5.2.2 Aplicação

Exemplo 5.1. *A pequena cidade de Alvejança tem serviço de coleta de lixo semanal. Porém, algumas de suas ruas não são visitadas porque, segundo a prefeitura, é necessário o corte de gastos. Os moradores destas ruas são obrigados a deslocar-se até a mais próxima atendida pelo serviço. A associação de moradores decidiu fazer um estudo sobre o percurso feito pelo caminhão e, assim, verificar se há um percurso que atenda todas as ruas, mas sem custo adicional ao cofre municipal.*

Para resolver o problema, consideremos, por conveniência, as esquinas como vértices e as arestas como as vias. Como queremos encontrar um percurso que atenda todas as ruas, o peso de cada uma delas é desprezível para o problema, por isso, colocamos cada uma com peso 1 (Figura 20). Vejamos agora o percurso que a prefeitura realiza, através do grafo associado ao problema, com início e fim no vértice C (garagem).

Destacaremos as rotas feitas com as flechas vermelhas, direcionadas, paralelas às arestas do grafo associado ao problema.

Figura 20 - Passeio da Coleta de Lixo



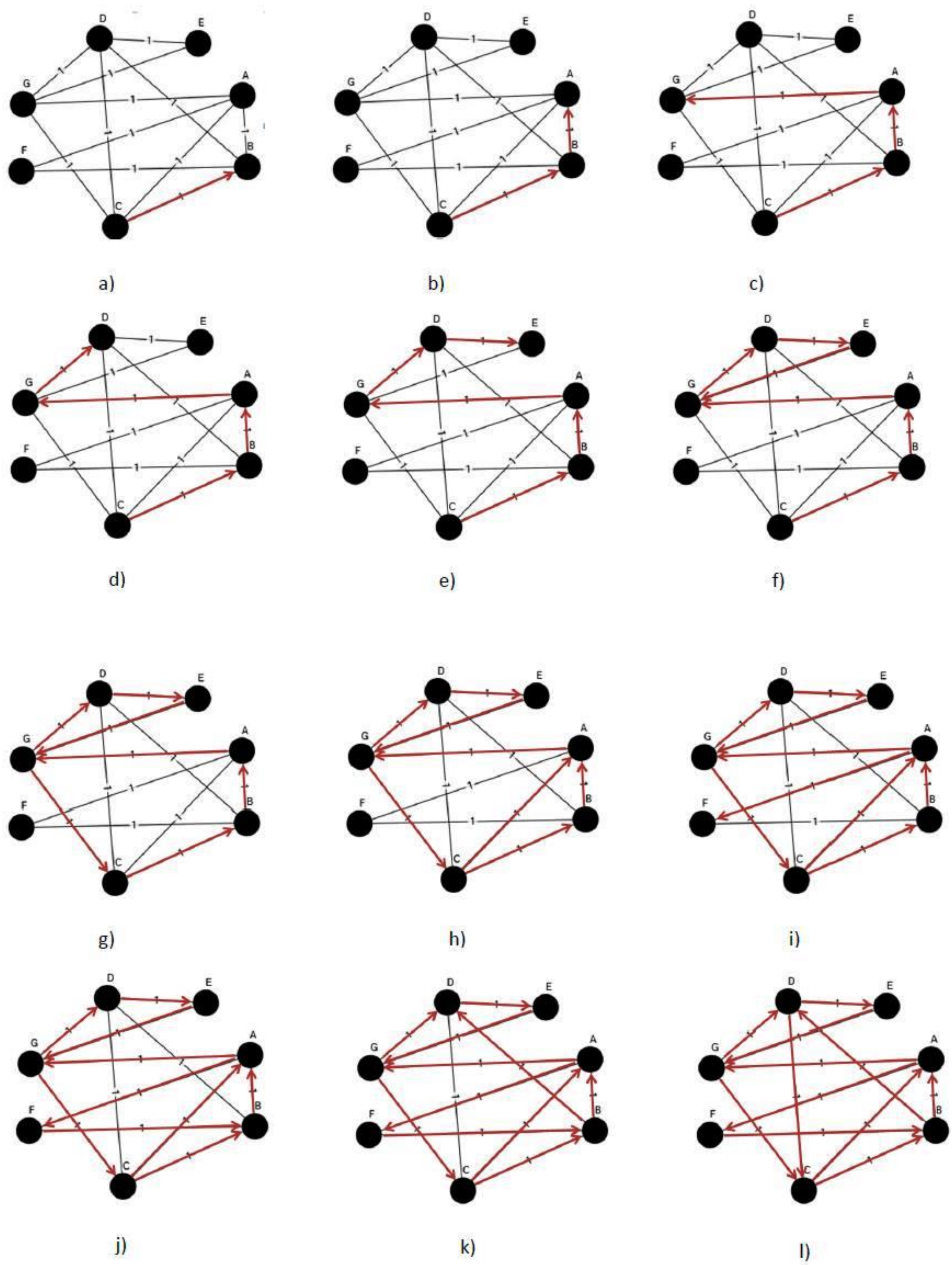
Fonte: Arquivo pessoal.

O passeio realizado é $P_1 : C, D, G, A, F, A, B, D, E, G, A, B, C$ com peso 12. Note que algumas das vias são visitadas duas vezes e outras nenhuma vez.

Mas, como o grafo associado ao problema é euleriano, podemos encontrar um ciclo de custo mínimo utilizando o algoritmo de Fleury e, assim, encontrar um percurso que atenda todas as ruas com C vértice inicial (Figura 21).

[1]O leitor interessado deve consultar Bondy e Murty (1979, p. 63) para mais detalhes.

Figura 21 - Algoritmo de Fleury para a Coleta de Lixo



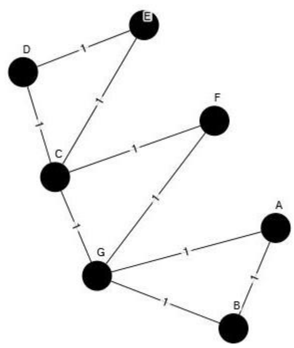
Fonte: Arquivo pessoal.

Escolhemos a aresta que liga C a B para ser a aresta inicial do passeio (Figura 20a), nas implementações seguintes (Figura 21b-l), colocamos em prática o passo 2 e encontramos o ciclo fechado de custo mínimo dado por $C_1 : C, B, A, G, D, E, G, C, A, F, B, D, C$ (Figura 21l). Observe que este percurso tem peso 12, como o realizado pela prefeitura, porém, atende a todas as ruas. Logo, é um percurso melhor.

Exemplo 5.2. *Marcília é motorista voluntária de um caminhão que faz entrega de cestas básicas à população ribeirinha de diferentes municípios. Porém, nem todos os ribeirinhos vivem em comunidade, e faz-se necessário que ela percorra todas as estradas para atendê-los, pois ninguém deve ficar sem receber seus mantimentos. Ao fazer a rota, Marcília percebe que percorre as mesmas estrada algumas vezes e reflete sobre uma forma de fazer um percurso melhor, isto é, ela quer encontrar uma rota que percorra todas as estradas em um tempo mínimo.*

Marcília tem que visitar sete municípios, interligados por nove estradas. Por conveniência, representamos os municípios como nós e as estradas como arestas. E, como o intuito é percorrer todos as arestas uma única vez, partindo do município F, o peso é desprezível e colocamos o peso de cada aresta como 1. Agora, vejamos o grafo do problema (Figura 22).

Figura 22 - Municípios e Estradas

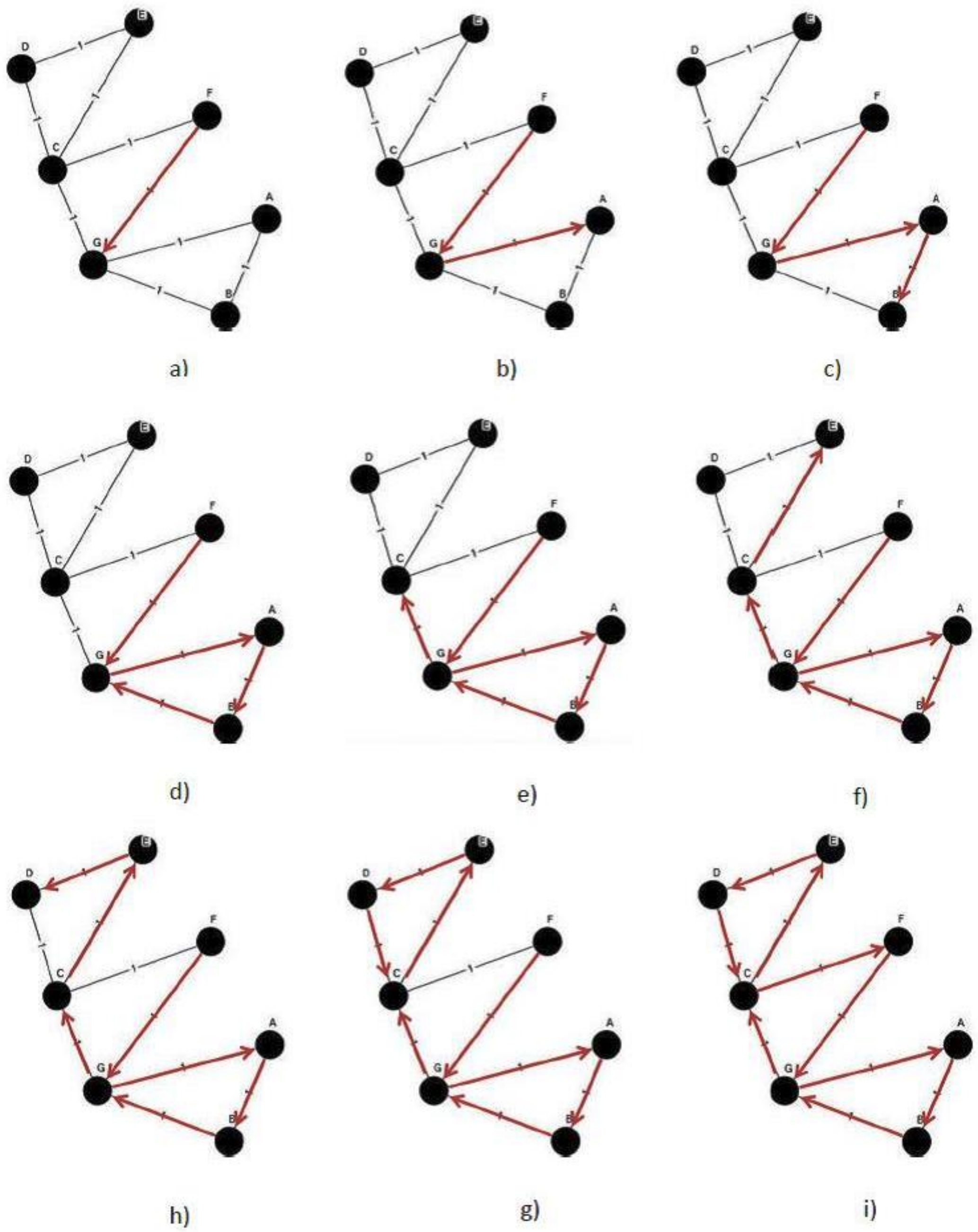


Fonte: Arquivo pessoal.

O grafo é euleriano e, portanto, o algoritmo pode ser implementado (Figura 23). Destacaremos as rotas feitas com as flechas vermelhas, direcionadas, paralelas às arestas do grafo associado ao problema.

Observe que, neste caso, devemos nos atentar às arestas que são pontes. Na Figura 23e, por exemplo, se escolhêssemos a aresta CF como seguinte, o grafo teria duas componentes, mas há outras opções de escolha para as arestas, então a fizemos.

Figura 23 - Algoritmo de Fleury para a Entrega de Cestas Básicas.



Fonte: Arquivo pessoal.

Portanto, encontramos um caminho $P: F, G, A, B, G, C, D, E, C, F$ (Figura 23i) ótimo para a entrega das cestas básicas, que atende a todos e tem custo mínimo, pois não há repetição de arestas.

Até o momento, lidamos com problemas que podem ser representados por grafos com todos os vértices pares. E se nem todos os vértices forem pares?

Na próxima seção, veremos um algoritmo auxiliar do algoritmo de Fleury para uso quando intentamos encontrar um caminho mínimo em um grafo semieuleriano, isto é, grafos com todos os vértices pares, à exceção de exatamente dois.

5.3 Algoritmo de Dijkstra

O teorema de Euler (Teorema 4.8) garante que só pode haver um ciclo euleriano se todos os vértices de um grafo forem pares, no entanto, se há exatamente dois vértices ímpares, podemos encontrar um caminho mínimo entre eles (Teorema 4.9) e este caminho será utilizado para fechar o passeio e, assim, formar um ciclo. Para encontrar esse caminho, utilizaremos o algoritmo do holandês Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002).

Dijkstra foi um cientista da computação que fez valiosas contribuições para a área de linguagem da programação, o que lhe rendeu o Prêmio Turing, em 1972. Seu algoritmo foi concebido para encontrar o caminho mínimo entre um par específico de nós de um grafo valorado com grandezas não negativas, dígrafo ou não. Apresentado em 1959, este algoritmo é considerado até hoje, computacionalmente, o mais eficiente para encontrar o menor caminho entre um vértice específico e todos os outros.

Descreveremos agora este algoritmo e, em seguida, traremos mais informações sobre sua implementação conciliada ao de Fleury.

5.3.1 Descrição

Passo 0. Verificar se o grafo G é semieuleriano e identificar os seus dois vértices ímpares. Seja v_0 um destes vértices, v_0 será o vértice raiz da busca.

Passo 1. Atribuir a v_0 a estimativa de custo mínimo 0 (custo de v_0 até ele mesmo) e aos demais vértices a estimativa ∞ (para informar que o vértice não foi percorrido).

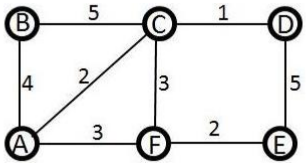
Passo 2. Enquanto houver vértices sobre os quais não foi obtido caminho de custo mínimo (chamados de vértices abertos):

i. Se u é um vértice aberto com o menor custo no meio dos abertos restantes, fechar u;

ii. Se w é um vértice aberto, sucessor de u, somar a estimativa de custo com o peso do aresta que liga u a w. Se esta soma resultar em uma estimativa de custo inferior à vigente para w, faça a substituição e coloque u como anterior a w. Se não houver aresta que ligue w e u, coloque a estimativa como ∞.

Exemplo 5.3. *Considere o grafo valorado abaixo. Vamos encontrar o menor caminho entre os dois vértices ímpares.*

Figura 24 - Um grafo valorado



Fonte: Arquivo pessoal.

Utilizaremos uma quadro auxiliar na resolução. Destacaremos em vermelho os vértices fechados e, em azul, as arestas que compõem as estimativas de custo até o momento.

Observe que A e F são os vértices ímpares deste grafo semieuleriano. Escolhamos A, vértice de grau ímpar, para ser o vértice raiz da busca. Queremos encontrar o caminho de custo mínimo de A ao demais nós.

Inicialmente, atribuíamos a A o custo mínimo 0 e aos demais vértices ∞. Como A é o vértice aberto de menor custo, fechamo-lo e, no passo seguinte, o custo dos vértices adjacentes a ele serão analisados.

No passo 2, calculemos a estimativa de custo dos vértices adjacentes a A.

Observe que o vértice C é o vértice com a menor estimativa de custo, logo deve ser fechado e a estimativa de custo dos vértices adjacentes a ele, verificada.

D e F tem a mesma estimativa de custo, escolhemos D para ser fechado, mas poderíamos escolher F. Analisemos a estimativa de custo dos vértices adjacentes a D.

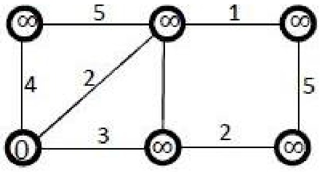
Note que a estimativa de custo dos vértices analisados anteriormente, não adjacentes ao vértice fechado por último, continuam as mesmas.

No passo 4, F é o vértice aberto com a menor estimativa. Fechemos F. E adjacente a F tem uma estimativa de custo 5, menor que a anterior, quando analisada sua adjacência a D. Substituíamos, então, a estimativa de E pela menor.

Restam dois vértices abertos. B é o aberto de menor custo, portanto, será fechado. Como os vértices adjacentes a ele estão fechados, resta-nos fechar o vértice restante E.

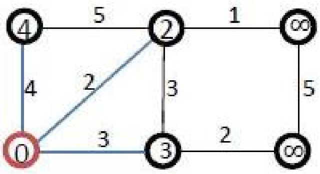
Figura 25 - Algoritmo de Dijkstra

a)



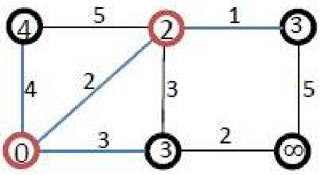
Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞

b)



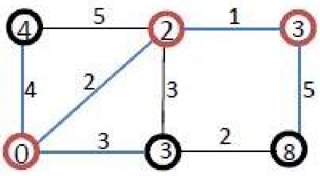
Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2		4	2	∞	∞	3

c)



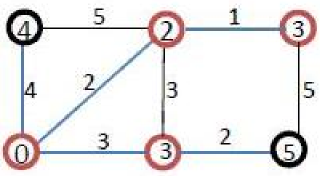
Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2		4	2	∞	∞	3
3		4		3	∞	3

d)



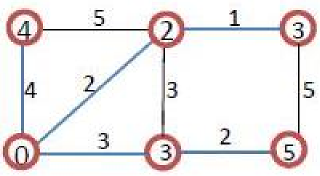
Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2		4	2	∞	∞	3
3		4		3	∞	3
4		4			8	3

e)



Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2		4	2	∞	∞	3
3		4		3	∞	3
4		4			8	3
5		4			5	

f)



Passo	Vértice					
	A	B	C	D	E	F
1	0	∞	∞	∞	∞	∞
2		4	2	∞	∞	3
3		4		3	∞	3
4		4		3	5	
5		4			5	
6					5	

Fonte: Arquivo pessoal.

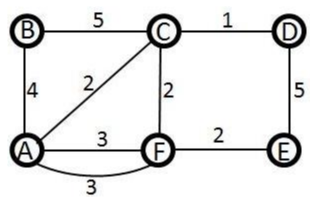
Em azul, temos o subgrafo de custo mínimo, via algoritmo de Dijkstra, do vértice A aos demais vértices.

Agora que encontramos o caminho de custo mínimo de A até F, vamos utilizar uma operação denominada duplicação de arestas para que, no grafo, possa ser implementado o algoritmo de Fleury.

Definição 5.4. *Duplicar uma aresta significa repetí-la.*

Exemplo 5.5. *Abaixo, o grafo resultante da duplicação do caminho de custo mínimo de A a F no grafo da Figura 24.*

Figura 26 - Duplicação de Aresta



Fonte: Arquivo pessoal.

Agora, o grafo tem todos os vértices pares, daí, para encontrar um ciclo nele, basta utilizar Fleury.

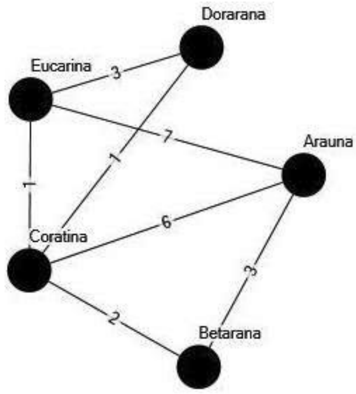
Observe que o que Dijkstra faz é minimizar o custo para que certas arestas, necessárias para o fechamento do caminho determinado por Fleury, sejam revisitadas.

5.3.2 Aplicação

Exemplo 5.6. *Emerson é mochileiro adepto ao cicloturismo. Depois de viajar diversos países, ele resolve conhecer cidades interioranas, mais que isso, visitar todos os pontos turísticos de cada estrada que transitar. Para economizar dinheiro e energia, o melhor é que andarilhe uma única vez por cada estrada ou o mínimo de vezes possíveis.*

As cidades que Emerson quer visitar são; Arauna (A), Betarana (B), Coratina (C), Dorarana (D), Eucarina (E). Elas são interligadas por sete estradas. Vejamos o grafo associado ao problema (Figura 27).

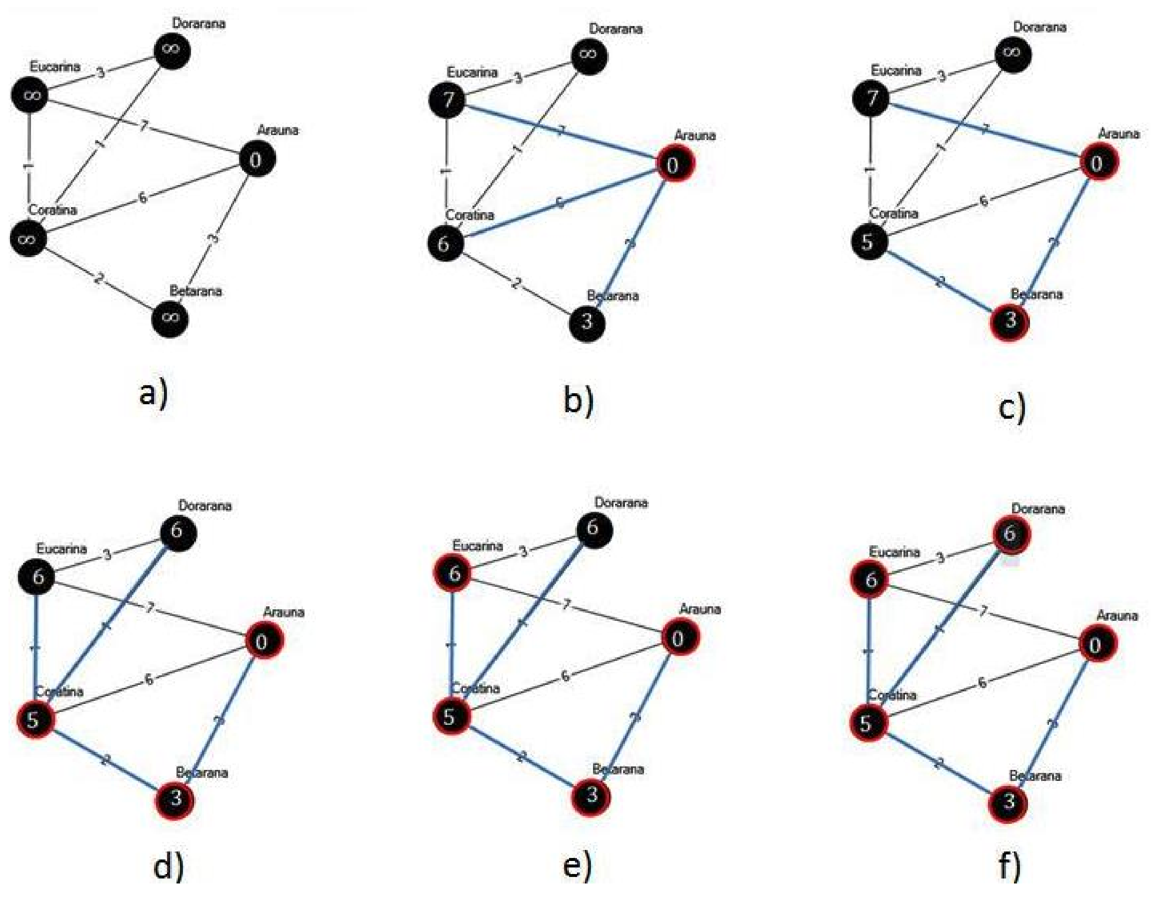
Figura 27 - Cidades e Estradas



Fonte: Arquivo pessoal.

Note que o grafo é semieuleriano e as cidades que têm um número ímpar de arestas incidentes são Arauna e Eucarina. Aplicaremos agora o Algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mínimo entre elas. Destacaremos em vermelho os vértices fechados e, em azul, as arestas que compõem as estimativas de custo até o momento.

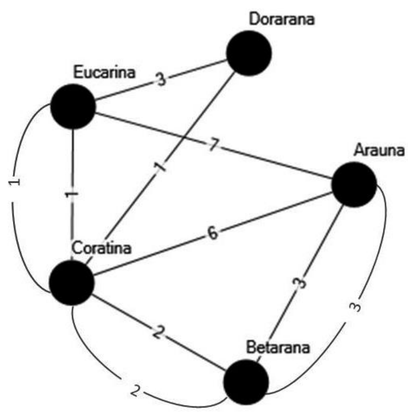
Figura 28 - Algoritmo de Dijkstra nas Cidades e Estradas



Fonte: Arquivo pessoal.

Duplicaremos agora as arestas que formam o caminho mínimo entre Arauna e Eucarina (Figura 29), encontradas acima (Figura 28f).

Figura 29 - Cidades e Estradas com Arestas de Custo Mínimo Duplicadas



Fonte: Arquivo pessoal.

Com a aplicação do algoritmo de Fleury na Figura 29, construímos o passeio fechado de menor caminho $P : A, B, C, E, D, C, E, A, C, B, A$ e o problema está resolvido.

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, tencionamos descobrir a quais condições um grafo deve atender para que seja chamado grafo de Euler igalmente mostrar o modo como o problema de custo mínimo deve ser abordado nestes grafos. Para isto, expomos os conceitos fundamentais da teoria dos grafos bem como os que caracterizam o nosso objeto de estudo, além de algoritmos apropriados para a resolução do problema do menor caminho em grafos eulerianos.

Por nossa pesquisa se caracterizar como exploratória, servimo-nos da pesquisa bibliográfica para a obtenção dos dados e da qualitativa para abordar a questão-diretriz, explicitamente: Quais são as condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo seja euleriano e como encontrar um caminho mínimo em grafos com estas condições?

A princípio, verificamos que uma das condições necessárias para que um grafo seja dito de Euler é a existência de um caminho entre quaisquer dois de seus vértices, isto é, que o grafo seja conexo. Se além de atender à conexidade em grafos, possuir todos os seus nós de grau par ou, no máximo, dois vértices de grau ímpar, chamamos este grafo de euleriano.

No caso em que todos os vértices do grafo forem pares, existirá uma sequência que alterna vértices e arestas incidentes do grafo, que visita todas as suas arestas, cada uma, uma única vez, cujo vértice inicial do percurso, escolhido arbitrariamente, coincide com o final. Esta sequência recebe o nome de ciclo euleriano.

Se, porém, o grafo possuir exatamente dois vértices ímpares, ainda se pode visitar cada uma das arestas do grafo uma única vez por meio de uma sequência que alterna nós e arestas, no entanto, os vértices inicial e final do percurso serão distintos e o percurso deverá ser iniciado em um dos vértices ímpares, caso contrário, arestas serão repetidas. Sequências que atendem estas condições são chamadas caminhos eulerianos.

Apesar de, por definição, um grafo ser chamado de euleriano somente quando possuir um ciclo de Euler, admitimos chamar de eulerianos, grafos que contêm um caminho euleriano, pois acreditamos que o abuso de terminologia não tenha acarretado problemas nem à construção deste trabalho ou ao entendimento do leitor, tampouco esteja em contraste com a literatura visitada. Assim, assumimos que, para que um grafo conexo seja euleriano é necessário e suficiente que possua todos os vértices pares ou, no máximo, dois vértices ímpares.

Quanto ao problema do menor caminho em um grafo euleriano, este se caracteriza por, não somente encontrar um caminho de custo mínimo entre vértices, como também aquele que percorra todas as arestas do grafo. Para encontrar este caminho, valemo-nos de dois algoritmos, a saber o algoritmo de Fleury, utilizado para identificar um ciclo euleriano em um grafo euleriano com todos os vértices pares e o algoritmo de Dijkstra, como algoritmo auxiliar, a ser usado no caso em que o grafo de Euler possua exatamente dois vértices ímpares. O algoritmo de Dijkstra encontra o caminho de menor custo entre os vértices ímpares, do qual as arestas são duplicadas. Neste processo, obtém-se um supergrafo do grafo inicial, no qual todos os vértices são pares, daí, o algoritmo de Fleury pode ser implementado.

Na busca por responder à pergunta-diretriz que direcionou esta pesquisa, verificamos que há poucos trabalhos de cunho matemático que abordam diretamente a questão aqui tratada. Acreditamos que este fato seja resquício da heterogeneidade de aplicações que a teoria dos grafos possui, por um lado fascinante, mas que por outro não permitiu ainda que se conseguisse um corpo teórico convencional a todas as áreas que a utilizam, o que dificulta trabalhos neste sentido.

Sob este ponto de vista, confiamos que este trabalho pode contribuir significamente para estudos iniciais sobre a teoria dos grafos e também sobre o problema do menor caminho em grafos eulerianos por trazer elementos-chave para compreensão destes. Acreditamos ainda que esta monografia possa servir como base para a modelagem de alguns problemas aos quais a teoria aqui tratada se aplique, o que pode provocar o aparecimento de novos trabalhos na área, que encorparão os estudos acerca da teoria dos grafos.

Nesta investigação suscitou-nos dois questionamentos, a saber: Em posse do algoritmo de Dijkstra posso tornar euleriano qualquer grafo e, posteriormente, implementar o algoritmo de Fleury para encontrar um caminho mínimo que percorra todas as arestas? Quais as condições necessárias para que determinar um isomorfismo entre dois grafos? Este último questionamento não possui relação direta com o nosso principal objeto de estudo, no entanto, após encontrar esta incógnita, estamos a refletir sobre ela.

Quanto às recomendações ao leitor que pretende estudar grafos, aconselharemos o que nos foi útil no decorrer desta pesquisa. Primeiro: não se apegar à geometria de representação de grafos. Embora facilite a compreensão dos problemas, a princípio, à medida que você se aprofundar na teoria, descobrirá que este não é um bom caminho. Segundo: Busque diferentes autores para se embasar, mas não se perca nas notações. De fato, existem notações convencionais, mas muitos autores não as seguem fielmente, o que pode dificultar o estudo. Não desanime por isto. Terceiro: Escreva suas próprias definições - devidamente embasadas, é claro! - dos termos da teoria dos grafos, isto facilita a compreensão delas e te dar uma fonte acessível para esclarecer eventuais dúvidas. Por fim: conheça, ainda que superficialmente, a vasta aplicação de grafos, isto vai ajudar a desenhar novos questionamentos e modos de solucioná-los com os conceitos da teoria.

Ou talvez estes questionamentos não obtenham resposta, ou melhor, induzam a novos questionamentos. Mas quem sabe esta incerteza seja, de fato, a beleza de se estudar Matemática.

Referências

[1] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos:** a experiência russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[2] RAHMAN, M. S. **Basic graph theory.** Bangladesh: Springer, 2017.

[3] PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. E-book. ISBN 978-85-7717-158-3. Disponível em: <www.feevale.br/.../E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2017.

[4] MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** São Paulo: Atlas, 2003.

[5] SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. Em: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. E-book. ISBN 978-85-386-0071-8. Disponível em: <www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2017.

[6] MUNIZ JUNIOR, Ivail. **Encontrando, minimizando e planejando percursos:** uma introdução à teoria dos grafos no ensino médio. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Centro Educacional de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em: <http://dippg.cefet-rj.br/index.php?option=com_docman&task=doc_view& gid=1565&tmpl=component& format=raw&Itemid=167>. Acesso em: 28 jul. 2017.

[7] BOAVENTURA NETTO, P. O. **Teoria e modelos de grafos.** São Paulo: E. Blücher, 1979.

[8] SÁNCHEZ, G. R.; MARTÍNEZ, F. J. Z. Caminos eulerianos y la fórmula de Euler. Em: MENESES, A. A.; DELGADO, J.; PÉREZ, J. M. (Ed.) **El legado matemático de Leonhard Euler:** a trescientos años de su nacimiento. Naucalpan: Universidad Autónoma Metropolitana, 2007. p. 305-332.

[9] EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

[10] MOL, R. S. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2017.

[11] BEHZAD, M.; CHARTRAND, G. **Introduction to the theory of graphs**. Boston: Allyn and Bacon, 1971.

[12] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna.** Boston: Allyn and Bacon, 1971. São Paulo: Atual, 2003.

[13] FEOLILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos.** Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Acesso em: 01 jun. 2017.

[14] JURKIEWICZ, S. **Grafos:** uma introdução. Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2017.

[15] RUOHONEN, K. **Graph theory.** Disponível em: <http://math.tut.fi/~ruohonen/GT_English.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2017.

[16] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph teory with applications.** New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1979. Disponível em: <https://www.iro.umontreal.ca/~hahn/IFT3545/GTWA.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2018.

[17] DREYFUS, S. E. **An appraisal of some shortest path algorithms.** Berkeley: University of California, 1969. Disponível em: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/661265.pdf>. Acesso em: 10 set. 2017.

[18] CASTRO, C. E. P. S. **Djikstra.** São Luís: Universidade Federal do Maranhão, [20–]. 41 slides, color. Disponível em: <http://www.deinf.ufma.br/~portela/ed211_Dijkstra.pdf>. Acesso em: 22 out. 2017.

[19] RIBEIRO, P. **Distâncias mínimas.** Porto: Universidade do Porto, 2014. 27 slides, color. Disponível em: <http://www.dcc.fc.up.pt/dcc/contactos/listasmail.php?dep=13&item=264>. Acesso em: 30 jan. 2018.