UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOCER DE SOUZA MONTEIRO NETO

OPERADORES LINEARES AUTO-ADJUNTOS E O TEOREMA ESPECTRAL

ARAGUAÍNA
2017

JOCER DE SOUZA MONTEIRO NETO

OPERADORES LINEARES AUTO-ADJUNTOS E O TEOREMA ESPECTRAL

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profª. Msc. Renata Alves da Silva.

ARAGUAÍNA
2017

JOCER DE SOUZA MONTEIRO NETO

OPERADORES LINEARES AUTO-ADJUNTOS E O TEOREMA ESPECTRAL

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profª. Msc. Renata Alves da Silva .

Aprovada em: 17 / 05 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Msc. Renata Alves da Silva (orientadora)

____
Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

____
Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele nada disso estaria acontecendo. Agradeço por ter me dado a possibilidade de viver e de me proporcionar saúde para continuar nesse caminho para obter uma melhor formação profissional.

À toda a minha família: avós, tios, tias, madrinhas, primos, primas, cunhados e cunhadas, mas em especial aos meus pais, Jocer de Souza Monteiro Filho e Cacilda Mary de Sousa, que sempre me apoiaram nos meus estudos e no meu dia-a-dia. Aos meus irmãos Jardel William e Jader Monteiro que sempre foram de alguma maneira um incentivo durante a minha formação acadêmica

À minha namorada, Antoniana Alves Feitosa , que me deu total apoio para continuar prosseguindo no curso, quando eu pensei em desistir, ela estava lá do meu lado, uma pessoa muito importante para mim, se eu não à conhecesse não sei o que seria de mim, hoje.

A todos os meus colegas e amigos que estiveram sempre comigo nessa caminhada: Samuel, Paulo Sérgio, Evanilde Brito, José Domingos, Kelson Feitosa, Regina, Ruth, Glêcyanne, Antônia Gleice, Sílvia, Paulo Denizar, Waleska, Jamison, Kelliton, Jailson, Danrley, Elani Cristina, Daniella, Ana Claudia, Letícia, Artur, Lucas Costa Brito, que por diversas vezes, ficamos horas estudando para provas e trabalhos e que nas horas vagas, tinha aquele lanche e aquelas conversas jogadas fora para discontrair e tirar o estresse. Em geral, agradeço a todos os discentes do colegiado de Matemática, que ao meu ver, todos são capazes de se tornarem professores críticos e revolucionários.

Aos meus amigos do futsal que por várias vezes viajamos para jogar campeonatos levando o nome da Universidade Federal do Tocatins (UFT) para outros estados. Nos divertimos muito. Em especial, agradeço aos meus amigos Gustavo Lima, Daniel Ribeiro e Felipe Rocha da Costa vulgo "zika".

Quero agradecer também ao pessoal que trabalhamos juntos no Programa de Atendimento aos Discentes Ingressantes (PADI) da UFT, campus Araguaína, que durante a minha passagem pela a Universidade foi de suma importância tanto para meu futuro como professor como auxílio financeiro. Nesse programa adquiri laços de amizade em que vou levar para o resto da minha vida: José Eurivan, Danrley, Melquisedeque, João Marcos, Lee-andro.

Aos meus amigos João Pedro(JP) e Adriana, que por várias vezes viajarmos para os eventos da UFT, no Rio de Janeiro-RJ, em Natal-RN. Agradeço também aos meus professores e a todos os servidores das escolas que estagiei, o Colégio da Policia Militar (CPM) e Colégio Estadual Francisco Máximo de Sousa. Em especial aos professores Wender Dominguos e Pedro Dias Carneiro, que tiveram uma participação direta na minha formação.

E por fim, a todos os docentes do Colegiado de Matemática que contribuíram gradativamente para minha formação acadêmica: Elisângela, Plínio, Douglas, Odair, Elzimar, Kathia, Jarderson, Freud, Alvaro, André, Claudenice, Fernanda, José Carlos, Osvaldo, Sinval, Yukiko, Robledo, Roselba e Lilyan. Em especial, a orientadora professora mestre Renata Alves da Silva, por dar todo o apoio, suporte, atenção e muita paciência, algo que foi bastante necessário, para que esse trabalho ficasse da melhor maneira possível, e de fácil entendimento.

Resumo

Neste trabalho, apresenta-se um dos resultados mais relevantes da Álgebra Linear, o Teorema Espectral. Este teorema nos diz que existe uma base de V, em que V é um espaço vetorial real de dimensão finita, tal que certos operadores lineares $T : V \to V$ possuem a matriz em relação a esta base da forma mais simples possível, a matriz diagonal. Existem casos dos operadores unitários, operadores normais e operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert, que possuem esta propriedade, mas daremos ênfase apenas aos operadores auto-adjuntos. Quando é possível determinar essa base, dizemos que o operador linear T é diagonalizável. Assim, o Teorema Espectral nos diz que todo operador linear auto-adjunto é diagonalizável, ou seja, a matriz que o representa é uma matriz diagonal e ainda mais, os elementos da diagonal principal são os autovalores associados ao operador. O principal objetivo desse trabalho é apresentar e demonstrar o Teorema Espectral e trazer exemplos e aplicações dele. Para isso, abordaremos os seguintes assuntos: operadores auto-adjuntos, autovalores e autovetores e operadores diagonalizáveis.

Palavras-chaves: Autovetores e Autovalores. Operadores Diagonalizáveis. Operadores Auto-adjuntos. Teorema Espectral.

Abstract

In this work, we present one of the most relevant results of Linear Algebra, the Spectral Theorem. This Theorem tells us that there exists a basis of V, where V is a real vector space of finite dimension such that certain linear operators $T : V \to V$ have that matrix with respect to this base of the simplest possible form, the diagonal matrix. There are cases of unit operators, normal operators and self-adjoint compact operators in Hilbert spaces, which have this property, but we will emphasize only the self-adjoint operators. When it's possible to determine this basis, we say that the linear operator T is diagonalizable. Thus, the Spectral theorem tells us that every self-adjoint linear operator is diagonalizable, that is, the matrix that represents it is a diagonal matrix and still more, the elements of the main diagonal are the eigenvalues associated with the operator. The main objective of this work is to present and demonstrate the Spectral Theorem and to bring examples and applications of it. For this, we will cover the following subjects: self-adjoint operators, eigenvalues and eigenvectors and diagonalizable operators.

Keywords: Eigenvectors and Eigenvalues, Diagonalizable Operators, Self-Adjoint Operators, Spectral Theorem.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Espaço com Produto Interno **9**

2.1 Norma Proveniente de um Produto Interno 12

3 Operadores Lineares **15**

3.1 Adjunta de uma Aplicação Linear 15

3.2 Operadores Auto-Adjuntos 17

3.3 Autovalores e Autovetores 19

3.4 Polinômio Característico 21

3.5 Diagonalização de Operadores 22

4 O Teorema Espectral **26**

5 Considerações Finais **30**

Referências **31**

1 Introdução

A Álgebra Linear é uma teoria cujo principal objeto de estudo são os espaços vetoriais de dimensão finita. Encontrar uma base adequada de um espaço vetorial para solucionar determinados problemas nem sempre é algo simples. O Teorema Espectral vem nesta direção e é um resultado de grande importância por garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores para operadores unitários, operadores normais e operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert. Equivalentemente, o operador linear é diagonalizável, o que facilita bastante os cálculos.

Este trabalho tem como principal objetivo enunciar e demonstrar o Teorema Espectral e apresentar sua aplicabilidade na teoria de operadores diagonalizáveis. A importância desse resultado está no fato de se poder encontrar uma base de autovetores, apresentando com isso uma melhor forma de representa esses operadores matricialmente.

Para cumprir com este objetivo, vamos desenvolver o aparato teórico, explorando alguns resultados sobre operadores lineares, autovalores e autovetores, espaços vetoriais com produto interno e base ortonormal.

O trabalho se baseou em pesquisas bibliográficas, buscando trabalhos acadêmicos e livros que abordam esse assunto. A metodologia usada foi dada por estudos técnicos desses trabalhos, onde desmembramos demonstrações, contas e exemplos que foram de suma importância para o entendimento do tema, a fim de deixar simples tal estudo.

2

Espaço com Produto Interno

Neste capítulo, apresentaremos a teoria de espaços vetoriais com produto interno, trazendo suas principais propriedades e resultados. Essa noção de produto interno nos permite definir e generalizar vários conceitos de caráter geométrico vistos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$, como por exemplo: ângulos entre vetores, distância e ortogonalidade. Veremos que todo espaço vetorial real de dimensão finita admite uma base ortornormal, este resultado é bastante importante quando aprofundarmos nossos estudos em operadores lineares.

Daqui em diante, trabalharemos apenas com espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo dos números reais, salvo menção contrária.

É importante que nesse capítulo o leitor tenha cohecimentos de espaços vetoriais e suas propriedades como também noções de dependência e independência linear entre vetores. Uma bibliografia que pode ser consultada para lembrar desses conceitos é [1], capítulo 4.

Definição 2.1 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função que, a cada par de vetores $v_1, v_2 \in V$, associa um número real, denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ *para todo vetor* $v \in V$ *e* $\langle v, v \rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

ii) $\langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle$ *para todo real* α*;*

iii) $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$ *para todos os vetores* $v_1, v_2, v_3 \in V$*;*

iv) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ *para todos* $v_1, v_2 \in V$.

Veja a seguir alguns exemplos de espaços vetoriais com produto interno.

Exemplo 2.2 *Considere $V = \mathbb{R}^n$. Para $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $u = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definimos a função $\langle\ ,\ \rangle$ como*

$$\langle v, u \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Afirmamos que a função $\langle\ ,\ \rangle$ *é um produto interno em* $\mathbb{R}^n$. *De fato, note que*

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0,$$

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 + x_2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

e que

$$\langle v, u\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \langle u, v\rangle.$$

Com isso, as condições i) e iv) são satisfeitas. Seja $w = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, *então*

$$\begin{aligned}\langle v+u, w\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \cdots + (x_n+y_n)z_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n) \\ &= \langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle.\end{aligned}$$

Agora, tomando um número real α *qualquer, temos*

$$\langle \alpha v, u\rangle = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 \cdots + x_ny_n) = \alpha\langle v, u\rangle.$$

Com isso, mostramos que as condições ii) e iii) também são satisfeitas. Portanto, $\langle\ ,\ \rangle$ *define um produto interno em* $\mathbb{R}^n$. *Esta função é chamada de produto interno (ou escalar) usual em* $\mathbb{R}^n$, *generalizando o produto escalar de* $\mathbb{R}^2$ *e de* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.3 *Sejam* $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$ *vetores em* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2, definidos por* $p_1(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$ *e* $p_2(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$. *A função definida por*

$$\langle p_1, p_2\rangle = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3,$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *pois se trata de um isomorfismo de espaços vetoriais*

$$T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$$

$$b_1 + b_2x + b_3x^2 \mapsto (b_1, b_2, b_3).$$

Exemplo 2.4 *Seja* V *o conjunto das funções contínuas no intervalo* $[0, 1]$. *Dados* $f_1, f_2 \in V$, *definimos*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx.$$

É possível mostrar(provar) que $\langle\ ,\ \rangle$ *define um produto interno em* V.

A seguir, definiremos a ortogonalidade entre dois vetores.

Definição 2.5 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$. *Diz-se que dois vetores* v *e* w *de* V *são ortogonais (em relação a este produto interno) se* $\langle v, w\rangle = 0$. *No caso em que* v *e* w *são ortogonais, escrevemos* $v \perp w$.

Lema 2.6 *As seguintes propriedades são satisfeita:*

i) $0 \perp v$ *para todo* $v \in V$;

ii) $v \perp w$ *implica que* $w \perp v$;

iii) Se $v \perp w$ *para todo* $w \in V$, *então* $v = 0$;

iv) Se $v_1 \perp w$ *e* $v_2 \perp w$, *então* $(v_1 + v_2) \perp w$;

v) Se $v \perp w$ *e* λ *é um escalar,* $\lambda v \perp w$.

Demonstração: $i)$ Como **vetor nulo** $= 0 \cdot v$, então $\langle 0, v\rangle = \langle 0 \cdot v, v\rangle = 0\langle v, v\rangle = 0$. $ii)$ Segue do fato de $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$. $iii)$ Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, em particular para $w = v \in V$, então $0 = \langle v, v\rangle$, e pela primeira condição de produto interno (veja a Definição 2.1), temos que $v = 0$. $iv)$ O fato de $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$ mostra essa propriedade. $v)$ Como $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, a propriedade fica provada. $\square$

Exemplo 2.7 *Seja* V *o espaço das funções contínuas no intervalo* $[0, 1]$, *munido do produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ *conforme Exemplo 2.4. Temos que os polinômios* $f_1(x) = 4ux^3 + 3vx^2 + t$ *e* $f_2(x) = 1$ *para todo* $x \in [0, 1]$ *são ortogonais em* V, *quando* $u + v + t = 0$. *De fato,*

$$\int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx = \int_0^1 (4ux^3 + 3vx^2 + t)dx = u + v + t = 0.$$

Portanto, f_1 *e* f_2 *são ortogonais em* V. $\square$

A proposição a seguir estabelece uma relação entre ortogonalidade e independência linear.

Proposição 2.8 *Seja* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ *um conjunto de vetores não nulos e dois a dois ortogonais num espaço vetorial* V, *isto é,* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *para* $i \neq j$. *Então, o conjunto* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é linearmente independente.*

Demonstração: Suponha que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$, com $a_{i's} \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Para isso, temos que

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle = 0.$$

Como os $a_{i's}$ são constantes, pela definição de produto interno, tem-se

$$a_1\langle v_1, v_i\rangle + a_2\langle v_2, v_i\rangle + \cdots + a_i\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + a_n\langle v_n, v_i\rangle = 0.$$

Como por hipótese, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ quando $i \neq j$, temos que $a_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$. Desde que $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$, dado que $v_i \neq 0$, tem-se $a_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Portanto, mostramos que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente. $\square$

Definição 2.9 *Dizemos que uma base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *de um espaço vetorial* V *é uma base ortogonal se* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *para* $i \neq j$*, isto é, se os vetores da base são dois a dois ortogonais.*

Exemplo 2.10 *As bases* $\{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$*, em relação ao produto interno usual, visto no Exemplo 2.2, são bases ortogonais de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*, respectivamente.*

2.1 Norma Proveniente de um Produto Interno

A norma em um espaço vetorial V nos dá uma noção de comprimento de um vetor, de distância entre vetores e nos possibilita dar um significado de proximidade entre dois vetores. Através do conceito de norma, veremos quando um vetor é considerado unitário e definiremos bases ortonormais, estas bases que são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 2.11 *Seja* V *um espaço vetorial. Uma norma em* V *é uma função dada por* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ *que satisfaz:*

i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$*;*

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e todo* $v \in V$*;*

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para quaisquer* $v, w \in V$ *(Desigualdade Triangular).*

Um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de espaco vetorial normado.

Exemplo 2.12 *Seja* $V = \mathbb{R}^n$*. São exemplos de normas em* V *as seguintes funções* $\|u\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$, $\|u\|_M = \max\{|y_1|, \cdots, |y_n|\}$*, e* $\|u\|_S = |y_1| + \cdots + |y_n|$*, e são chamadas de norma euclidina, norma do máximo e norma da soma, respectivamente, com* $u = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

No próximo exemplo, traremos uma norma que é proveniente do produto interno.

Exemplo 2.13 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*. Então, a partir deste produto interno,* V *recebe naturalmente a estrutura de espaço normado. Em outras palavras, se* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ *for uma função definida por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

então, $\|\cdot\|$ *satisfaz as seguintes propriedades* *i)* $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se, e somente se* $v = 0$*;*

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $v \in V$*;*

iii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ *(Desigualdade de Cauchy-Schwartz), para todo* $v, w \in V$

iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para quaisquer* $v, w \in V$*.*

Em particular, $\|\cdot\|$ *é uma norma, chamada norma proveniente do produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*.*

Note que, a condição *i)* segue de imediato da definição de produto interno, tem-se $\|v\| \geq 0$ e, além disso,

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle v, v\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Em *ii)* temos que $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|$. Para provar *iii)*, desigualdade de Cauchy-Schwartz, veja que ela é verdadeira quando $w = 0$. Agora, supondo que $w \neq 0$ e tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ um número qualquer, sempre vale que $\|v + \alpha w\|^2 \geq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v + \alpha w\|^2 &= \langle v + \alpha w, v + \alpha w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, \alpha w\rangle + \alpha^2\langle w, w\rangle \\ &= \alpha^2\|w\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Desse modo, como $\|w\|^2 > 0$, obtemos uma equação do segundo grau que é sempre não negativa. Logo, o seu discriminante Δ deve ser negativo ou nulo. Assim,

$$\Delta = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|.$$

Por fim, usando a desigualdade de Cauchy- Schwartz, mostraremos a quarta condição. Tem-se

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\ &\leq \langle v, v\rangle + 2|\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

que, tomando a raiz quadrada, prova-se a desigualdade. □

Se $\|v\| = 1$, v é chamado de vetor unitário. Dado qualquer vetor $v \in V$ com $v \neq 0$, normalizar v significa considerar no lugar de v o vetor unitário $u = \dfrac{v}{\|v\|}$.

Exemplo 2.14 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$*, com* $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$*. Vamos normalizar o vetor* $v = (1, 2, 1)$*. Para isso, tomamos o vetor* $u = \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = (\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$*.*

A seguir, vamos caracterizar um tipo de base que, em geral, é mais conveniente quando se trabalha com espaços vetoriais com produto interno, pois as coordenadas de um vetor nessa base são dadas em relação a este produto.

A partir de agora, quando mencionarmos que um espaço vetorial V possui produto interno, consideraremos em V a norma proveniente deste produto interno.

Definição 2.15 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V é ortonormal se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é,*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j; \\ 1 & i = j. \end{cases} . \tag{2.1}$$

Observe que se tivermos uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$, os coeficientes x_i de um vetor $w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ são dadas por

$$x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \langle w, v_i \rangle.$$

De fato pois como $i = j$, $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, então $x_i = \langle w, v_i \rangle$.

Exemplo 2.16 *Seja $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \ , \ \rangle$ o produto interno usual e $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Veja que β é uma base ortonormal. Temos $x_1 = \langle v, e_1 \rangle$ e $x_2 = \langle v, e_2 \rangle$.*

Existe um processo que, a partir de uma base qualquer de um espaço vetorial pode-se obter uma base ortonormal. Esse processo é chamado de processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Teorema 2.17 *(Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt) Todo espaço vetorial munido de produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração: A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [2], página 174. □

3

Operadores Lineares

Neste capítulo, vamos introduzir os operadores lineares, mais especificadamene os operadores adjuntos e auto-adjuntos. Para isso, usaremos como principais referências [1], [4] e [6]. Falaremos também de autovalores e autovetores, conceitos muito importantes para o entendendimento deste trabalho.

Traremos sempre que possível exemplos da teoria abordada de forma a facilitar o entendimento do leitor.

3.1 Adjunta de uma Aplicação Linear

Antes de apresentarmos o conceito de operador auto-adjunto, vamos definir a adjunta de uma transformação linear. Para isso, sejam V e F espaços vetoriais com produto interno que, por abuso de notação denotaremos ambos por $\langle\ ,\ \rangle$ e $T : V \to F$ uma transformação linear. É possível mostrar que, fixado $w \in F$, existe um único vetor $u_w \in V$ tal que

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, u_w\rangle, \quad \forall v \in V.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada no Teorema 2.1 em [4], página 262. A unicidade de u_w segue do fato de, se existir $r_w \in V$ com a mesma propriedade de u_w, então $\langle v, r_w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \langle v, u_w\rangle$ para todo $v \in V$. Isso implica que

$$\langle v, r_w - u_w\rangle = 0, \quad \forall v \in V.$$

Tomando $v = r_w - u_w$, segue que $r_w = u_w$ pela definição de produto interno.

Com a existência e a unicidade de u_w, fica bem definida a aplicação $T^* : F \to V$ dada por $T^*w = u_w$. Note que

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle \quad \forall v \in V, \forall w \in F.$$

Chamamos T^* de adjunta de T. Quando $V = F$, chamamos também de operador adjunto de T.

Lema 3.1 *Sejam V e F espaços vetoriais com produto interno e $T : V \to F$ uma transformação linear. Então, a adjunta de T, T^*, é linear.*

Demonstração: Sejam $x \in V$, y , $z \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Então,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(y + \lambda z)\rangle &= \langle Tx, y + \lambda z\rangle = \langle Tx, y\rangle + \lambda\langle Tx, z)\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, \lambda T^* z\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\langle x, T^*(y + \lambda z) - T^* y - \lambda T^* z\rangle = 0.$$

Tomando $x = T^*(y + \lambda z) - T^* y - \lambda T^* z$, concluímos que

$$\|T^*(y + \lambda z) - T^* y - \lambda T^* z\| = 0$$

ou seja, $T^*(y + \lambda z) = T^* y + \lambda T^* z$ □

Exemplo 3.2 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (3x + y, z, x)$. Queremos determinar a adjunta de T. Note que*

$$\begin{aligned} \langle (a, b, c), T(x, y, z)\rangle &= \langle (a, b, c), (3x + y, z, x)\rangle \\ &= 3xa + ay + bz + cx \\ &= x(3a + c) + ya + zb \\ &= \langle (x, y, z), (3a + c, a, b)\rangle. \end{aligned}$$

Pela definição de adjunta de T e como (a, b, c) é um vetor genérico, temos que $T^*(x, y, z) = (3x + z, x, y)$.

Exemplo 3.3 *Seja T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - 2y, x + 3y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encontraremos T^*.*

$$\begin{aligned} \langle (a, b), T(x, y)\rangle &= \langle (a, b), (2x - 2y, x + 3y)\rangle \\ &= 2xa - 2ya + bx + 3yb \\ &= x(2a + b) + y(-2a + 3b) \\ &= \langle (x, y), (2a + b, -2a + 3b)\rangle. \end{aligned}$$

Como (a, b) é um vetor genérico, temos que $T^*(x, y) = (2x + y, -2x + 3y)$. Observemos que a matriz associada a T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e veja também que a matriz da adjunta de T é a matriz transposta de T, isto é, $A^T = A^*$, sendo

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, $T^*(x, y) = (2x + y, -2x + 3y)$ é a adjunta de T, observe que ela também é a transposta conjugada do operador T.

3.2 Operadores Auto-Adjuntos

Nesta seção, definiremos o principal operador que será discutido nesse trabalho, o operador auto-adjunto.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno. Vimos que para cada operador linear T: $V \to V$, existe um único operador linear $T^* : V \to V$ tal que $\langle \mathrm{T}w, v\rangle = \langle w, T^*v\rangle$ para quaisquer $v, w \in V$.

O operador linear T^* é chamado de *operador adjunto* de T. Quando $T{=}T^*$, ou seja, quando $\langle Tw, v\rangle = \langle w, Tv\rangle$, dizemos que T é um operador *auto-adjunto* para quaisquer $w, v \in V$.

Exemplo 3.4 *Sejam $\mathbb{R}^2$, munido com o produto interno usual, e A, B: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares definidos por $A(x,y) = (x,-y)$ e $B(x,y) = (y,x)$. Para quaisquer $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que*

$$\langle (a,b), A(x,y)\rangle = \langle (a,b),(x,-y)\rangle = ax - by = \langle (a,-b),(x,y)\rangle.$$

Pela definição de adjunta de A, temos que $A^*(a,b) = (a,-b)$. Como (a,b) é um vetor genérico, segue que $A^* = A$. Portanto, A é um operador auto-adjunto. De forma análoga mostramos que B também é auto-adjunto.

Exemplo 3.5 *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear definido por $T(u) = \langle v,u\rangle v$, sendo v um vetor fixado. Vamos mostrar que T é auto-adjunto. De fato, para quaisquer $u, w \in V$, tem-se*

$$\langle w, T(u)\rangle = \langle w, \langle v,u\rangle v\rangle = \langle v,u\rangle\langle w,v\rangle = \langle\langle w,v\rangle v, u\rangle = \langle T(w), u\rangle.$$

Portanto, $T^* = T$, ou seja, T é auto-adjunto.

O lema seguinte nos fornece uma maneira de determinar a matriz de um operador linear, relativo a uma base ortonormal do espaço vetorial V.

Lema 3.6 *Seja $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é a matriz que representa um operador $T : V \to V$, com relação à base α, ou seja, $A = [T]_\alpha$, então*

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle, para\, todos\, i, j,\ com\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Demonstração: Começamos a demonstração lembrando que a base dada segue o parâmetro de uma base ortonormal, ou seja,

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Temos que, $T(v_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}v_k$ com $k = 1, \cdots, n$. Fazendo o produto interno por v_i em ambos os lados da igualdade, temos

$$\langle Tv_j, v_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle v_k, v_i\rangle = a_{ij}\langle v_i, v_i\rangle = a_{ij}.$$

uma vez que a base β é ortonormal, ou seja, os seus vetores são unitários e dois a dois ortogonais. □

O resultado a seguir mostra como podemos obter T^* a partir de uma representação matricial de T.

Proposição 3.7 *Para toda base ortonormal α de V e para todo operador linear T definido em V, temos que*

$$[T^*]_\alpha = ([T]_\alpha)^t.$$

Demonstração: Considere as matrizes $[T]_\alpha = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $[T^*]_\alpha = [b_{ij}]_{n\times n}$. Pelo Lema 3.6, $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$ e $b_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i\rangle$ com $1 \leq i, j \leq n$. Logo, pela definição de adjunta,

$$b_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i\rangle = \langle v_i, T^*(v_j)\rangle = \langle T(v_i), v_j\rangle = a_{ji}$$

para $1 \leq i, j \leq n$, provando o resultado. □

Pela Proposição 3.7, observamos que T é um operador auto-adjunto se,e somente se, para alguma base ortonormal α de V temos

$$[T]_\alpha = ([T]_\alpha)^t.$$

Assim, $T : V \to V$ é auto-adjunto se, e somente se, $[T]_\alpha$ é uma matriz simétrica. Observamos que o fato de um operador ser auto-adjunto não depende da base ortonormal escolhida. Portanto, se $[T^*]_\alpha$ for uma matriz simétrica em uma determinada base ortonormal α, então $[T^*]_\beta$ será também simétrica para qualquer outra base ortonormal β.

O exemplo seguinte traz as matrizes associadas aos operadores lineares auto-adjuntos do Exemplo 3.4. Veja que elas são matrizes simétricas.

Exemplo 3.8 *As matrizes dos operadores A e B do Exemplo 3.4 na base canônica de $\mathbb{R}^2$ são, respectivamente,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a base canônica é ortogonal, podíamos concluir daqui que A e B são auto-adjuntos.

Exemplo 3.9 *Sejam $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares munidos do produto interno usual definidos por $S(x, y, z) = (x - 2y, -2x + 4y - 5z, -5y)$ e $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - y, 3x - 2z)$. Temos que S e T são operadores auto-adjuntos, pois as matrizes associadas a esses operadores na base canônica são simétricas.*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \; e \; T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.3 Autovalores e Autovetores

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, tais que $Tv = \lambda v$, λ será chamado de *autovalor* de T e v de *autovetor* de T associado ao autovalor λ.

É possível mostrar que se v é um *autovetor* de um operador T associado a um *autovalor* λ, qualquer múltiplo v, ou seja, $w = \alpha v$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, é também um *autovetor* de T associado a λ, do mesmo modo a soma de autovetores também é um autovetor. Desse modo, o conjunto $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$, é um subespaço vetorial de V, denominado *autoespaço* de T associado a λ. Veja que V_λ é formado pelo vetor nulo de V e por todos os *autovetores* de T associado a λ.

Exemplo 3.10 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (5x - y, 3x + y)$. Queremos determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, não nulo, tais que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja, tais que $(5x - y, 3x + y) = \lambda(x, y)$. Temos*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - y &=& \lambda x, \\ 3x + y &=& \lambda y. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Da primeira equação do sistema (3.1), temos $y = 5x - \lambda x$. Substituindo este valor de y na segunda equação do sistema, temos $x(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$, que é satisfeita se $x = 0$ ou se $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Veja que, se $x = 0$, então $y = 0$. Como queremos $v = (x, y) \neq 0$, segue que $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Portanto, os autovalores de T são $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$. Vamos agora calcular os autovetores de T associados a $\lambda = 2$. De (3.1), obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - y &=& 2x, \\ 3x + y &=& 2y, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

que equivale à equação $3x - y = 0$, cujo conjunto solução é dado por $(x, 3x), x \in \mathbb{R}$. Assim, os autovetores de T associado a $\lambda = 2$ são os vetores da forma $(x, 3x)$, em que $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Para calcularmos os autovetores de T associados a $\lambda = 4$, devemos resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - y &=& 4x, \\ 3x + y &=& 4y, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

que é o mesmo que resolver a equação $x - y = 0$, cujo conjunto solução é dado por $(x, x), x \in \mathbb{R}$. Logo, os autovetores de T associados a $\lambda = 4$ são os vetores da forma (x, x), em que $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Exemplo 3.11 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-2y, x)$. se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, são tais que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, então $(-2y, x) = \lambda(x, y)$. Desse modo,*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2y &=& \lambda x, \\ x &=& \lambda y, \end{array} \right. \tag{3.4}$$

que obtemos a equação $(\lambda^2 + 2)y = 0$. Como $\lambda \in \mathbb{R}$, então $y = 0$. No entanto, se $y = 0$, pela segunda equação do sistema 3.4, temos $x = 0$. Como $v = (x, y)$ é não nulo, isso não pode ocorrer. Portanto, T não admite autovalores e nem autovetores.

O exemplo acima nos mostra que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores.

Veremos na próxima proposição que autovetores associados a autovalores distintos são Linearmente Independentes.

Proposição 3.12 *Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T. Se $v_1, v_2, \dots, v_r$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, respectivamente, então $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é Linearmente Independente.*

Demonstração: Provaremos usando indução sobre r. Note que o resultado é válido para $r = 1$, pois se $T : V \to V$ é um operador linear com autovalor λ_1 e se v_1 é um autovetor de T associado a λ_1, então $\{v_1\}$ é linearmente independente, pois $v_1 \neq 0$. Vamos supor agora que o resultado é válido para $r - 1$ e vamos prová-lo para r, $r \geq 2$. Para isso, considere a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0, \tag{3.5}$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_r$ são números reais. Aplicando T em (3.5) , obtemos

$$a_1(\lambda_1v_1) + a_2(\lambda_2v_2) + \cdots + a_r(\lambda_rv_r) = 0, \tag{3.6}$$

já que $T(v_j) = \lambda_jv_j$, para todo $1 \leq j \leq r$. Por outro lado, T possui pelo menos um autovalor não nulo, digamos $\lambda_r \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da equação (3.5) por λ_r, obtemos

$$a_1(\lambda_rv_1) + a_2(\lambda_rv_2) + \cdots + a_r(\lambda_rv_r) = 0. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7),

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_r)v_2 + \cdots + a_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0. \tag{3.8}$$

Pela hipótese de indução,$\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é Linearmente Independente. Portanto, de (3.8), segue que

$$a_j(\lambda_j - \lambda_r) = 0\,, para\, todo\, 1 \leq j \leq r - 1. \tag{3.9}$$

Como por hipótese os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ são todos distintos, de (3.9) obtemos que $a_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq r - 1$. Substituindo esses valores em (3.6), concluímos que $a_r = 0$, já que $v_r \neq 0$. Portanto, $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é Linearmente Independente. □

Corolário 3.13 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $dimV = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T, consideremos G como vetor gerador.*

Demonstração: Pela Proposição 3.12, autovetores associados a autovalores distintos são Linearmente Independentes. Como T possui n autovalores distintos, existe um conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearmente independente. Como $G(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset V$ e $dimG(v_1, v_2, \dots, v_n) = n = dimV$, temos que $G(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$. Portanto, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V. □

Veremos na seção 3.5, que a existência de uma base de V formada por autovetores de um operador linear $T : V \to V$ é equivalente à existência de uma representação deste operador por uma matriz diagonal, que é a forma mais simples de se representar um operador.

Na seção seguinte, apresentaremos uma maneira mais simples e prática de determinar autovalores e autovetores associados a um operador linear.

3.4 Polinômio Característico

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Procuramos $v \in \mathbb{R}^n$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Av = \lambda v$. Note que essa equação pode ser escrita por $(A - \lambda I)v = 0$, onde I é a matriz indentidade de ordem n. Como estamos interessados em calcular autovetores de A, ou seja, $v \neq 0$ tais que $(A - \lambda I)v = 0$, necessariamente $det(A - \lambda I) = 0$ caso contrário teria soluções triviais.

Definição 3.14 *$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é chamado de polinômio característico de A.*

Exemplo 3.15 *Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz do operador $T(x, y) = (5x - y, 3x + y)$ em relação à base canônica. O polinômio característico de A é o polinômio*

$$P_A(t) = det \begin{bmatrix} 5-t & -1 \\ 3 & 1-t \end{bmatrix} = t^2 - 6t + 8$$

.

Exemplo 3.16 *Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz do operador $T(x, y) = (-2y, x)$ em relação à base canônica. O polinômio característico de A é o polinômio*

$$P_A(t) = det \begin{bmatrix} -t & -2 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 2.$$

Note que as raízes do polinômio do Exemplo 3.15, $t_1 = 4$ e $t_2 = 2$, são os autovalores do operador dado no Exemplo 3.10 da seção anterior. O mesmo ocorre em relação ao Exemplo 3.11, que não tem autovalores e o polinômio característico de sua matriz associada não tem raízes reais. Diante disso, podemos concluir que existe uma relação entre os autovalores de um operador linear e as raízes do polinômio característico associado a ele.

O próximo teorema nos fornece essa relação.

Teorema 3.17 *Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então*

(i) v é um autovetor de T associado a t_0 se, e somente se,$[v]_\alpha$ é uma solução não trivial do sistema linear $AX = 0$, onde $A = t_0 I - [T]_\alpha^\alpha$;

(ii) $t_0 \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se,e somente se, t_0 é uma raiz do polinômio característico da matriz $[T]_\alpha^\alpha$, ou seja, $P_{[T]_\alpha^\alpha}(t_0) = 0$,

Demonstração: A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3], página 235. □

3.5 Diagonalização de Operadores

Na seção 3.3, vimos que, algumas vezes, é possível determinar uma base de V formada por autovetores de um operador linear $T : V \to V$. Quando isso ocorrer, diremos que o operador linear T é um operador diagonalizável, pois a matriz que o representa na base de autovalores é uma matriz diagonal.

Teorema 3.18 *Um operador linear $T : V \to V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se, a base β for formada por autovetores de T.*

Demonstração: Vamos supor que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, digamos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

Como

$$T(v_j) = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + a_j v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n = a_j v_j,$$

para cada $1 \leq j \leq n$, segue que a_j é um autovalor de T e v_j é um autovetor de T associado a a_j. Portanto, β é uma base formada de autovetores de T. Suponhamos agora que $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T. Existem, então, números reais $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tais que, para cada $1 \leq j \leq n\,, T(u_j) = b_j u_j$. Observamos que os $b_{j`s}$ não são necessariamente todos distintos. Por definição, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$$

ou seja,$[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal. □

Pela demonstração acima, podemos concluir que se, um operador T tem uma representação matricial dada por uma matriz diagonal $[T]_\beta^\beta$, então as entradas da diagonal principal são dadas por autovalores de T e, mais ainda, a ordem que os autovalores aparecem na entrada principal da diagonal é a mesma que os autovetores respectivos na base β.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.19 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (-3x - 5y, 2y)$ cuja matriz na base canônica é*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é dado por

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda).$$

Pelo segundo item do Teorema 3.17, os autovalores de T são as raízes reais de $P(\lambda)$. Então, $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ e, portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ são os autovalores de T. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue da Proposição 3.12 que os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são linearmente independentes e como dim $\mathbb{R}^2 = 2$, formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Portanto, T é um operador diagonalizável. Agora, vamos exibir uma base de autovetores. Considere

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 2$, temos $y = -x$. Desse modo, os autovetores associados a λ_1 são da forma $v_1 = (x, -x) = x(1, -1)$, $x \in \mathbb{R}$. Para $\lambda_2 = -3$, temos que $y = 0$. Assim, os autovetores são $v_2 = (x, 0) = x(1, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Logo, o conjunto $\{(1, -1), (1, 0)\}$ forma uma base de autovetores de $\mathbb{R}^2$.

Até o momento, mostramos que um operador é diagonalizável exibindo uma base de autovetores. Esse procedimento é satisfatório quando lidamos com espaços vetoriais de dimensão baixa. Para espaços vetoriais de dimensão alta essa maneira pode não ser conveniente, pois os cálculos são longos. Veremos a seguir como verificar se um operador $T : V \to V$ tal que $dimV = n$ é diagonalizável através de um polinômio chamado polinômio minimal.

Definição 3.20 *Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_o$ tal que*

i) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula A.

ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A.

Mostraremos no teorema adiante uma relação importante entre polinômio minimal e operador diagonalizável. Veremos que é possível determinar se um operador é diagonalizável ou não sem calcular os autovetores.

Teorema 3.21 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e β uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de $[T]_\beta^\beta$ é da forma*

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ são todos distintos, com $r \leq n$.

O teorema a seguir nos dá uma maneira de encontrarmos o polinômio minimal de uma matriz, apresentaremos agora um dos teoremas mais relevantes da Álgebra Linear.

Teorema 3.22 *(Cayley-Hamilton) Seja A uma matriz quadrada e seja $P_A(t)$ o polinômio característicao de A. Então, $P_A(A) = 0$, onde 0 é a matriz nula.*

Demonstração: A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3], página 240. $\square$

Exemplo 3.23 *Vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de A é*

$$P_A(t) = det(A - tI) = det \begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t \end{bmatrix} = t^2 - t + 2.$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$. Vamos verificar agora esta igualdade. Temos,

$$P_A(A) = A^2 - A + 2I,$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja, obedece $P_A(A) = 0$.

Observação: Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que o polinômio característico é um candidato para o polinômio minimal.

Exemplo 3.24 *O operador linear* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *definido por* $T(x, y, z, w) = (3x-4z, 3y+5z, z, w)$ *é diagonalizável. De fato, considere* $\gamma = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^4$*. Então,*

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos o polinômio característico. Temos

$$p(\lambda) = det([T]_\gamma^\gamma - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -1$*, ambos com mutiplicidade 2, então os candidatos para polinômio minimal são*

$$p_1(y) = (y-3)(y+1)$$

$$p_2(y) = (y-3)^2(y+1)$$

$$p_3(y) = (y-3)(y+1)^2$$

$$p_4(y) = (y-3)^2(y+1)^2.$$

É possível mostrar que $p_1([T]_\gamma^\gamma) = 0$ *e é, dentre todos os candidatos, o de menor grau.*
Logo,

$$p_1(y) = (y-3)(y+1)$$

é o polinômio minimal. Portanto, pelo Teorema 3.21, T *é diagonalizável, isto é, existe uma base* β *de autovetores e nesta base*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4

O Teorema Espectral

Neste capítulo, apresentaremos um dos teoremas mais relevantes da Álgebra Linear, o Teorema Espectral. O mesmo nos dá uma caracterização de um operador linear auto-adjunto. Iremos mostrar que todo operador auto-adjunto é diagonalizável, isto é, existe uma base de autovetores na qual a matriz que o representa nessa base é uma matriz diagonal.

A proposição a seguir nos diz que, dado um operador auto-adjunto, as raízes do polinômio característico da matriz associada a esse operador são todas reais, isto é, são autovalores.

Proposição 4.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e β uma base de V. Se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto, então todas as raízes do polinômio característico $P_{[T]_\beta^\beta}$ são números reais.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente da Proposição 9.4.1 na referência [3] , página 252. $\square$

Lema 4.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno e $T\colon V \to V$ um operador auto-adjunto. Se $W \subset V$ é um espaço invariante por T, isto é, $T(W) \subset W$, então a restrição de T a W define um operador auto-adjunto sobre o subespaço W.*

Demonstração: De fato, se $T : V \to V$ é um operador auto-adjunto, então $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$, $\forall\, v, w \in V$, em particular, para os elementos de W, pois $W \subset V$. Para concluir a demonstração, note que $T : W \to W$ é um operador linear bem definido, uma vez que W é um espaço vetorial invariante por T, ou seja, $T(W) \subset W$.
$\square$

Finalmente, diante de todos esses resultados, estamos aptos para apresentar e demonstrar o resultado principal deste trabalho, o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos. Mostraremos que todo operador auto-adjunto é diagonalizável.

Teorema 4.3 *(Teorema espectral para operadores auto-adjuntos) Seja V um espaço vetorial. Se $T : V \to V$ é um operador auto-adjunto, então existe uma base ortonormal β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.*

Demonstração: Usaremos indução finita sobre a dimensão de V. Veja que, se dim $V = 1$, o resultado é óbvio, pois toda matriz de ordem 1×1 é diagonal. Suponha que $n \geq 1$ e que o resultado é valido para espaços de dimensão n. Sejam V um espaço de dimnsão $n+1$, β uma base de V e λ uma raiz real do polinômio P_T como T é auto-adjunto, pela Proposição 4.1, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, λ é um autovalor de T. Considere v um autovetor unitário de T associado a λ. O conjunto

$$W = \{w \in V; \langle w, v\rangle\} = 0,$$

é um subespaço vetorial de V, visto que W nada mais é que o complemento ortogonal do subespaço gerado por v. Afirmamos que W é invariante por T, isto é, $T(W) \subset W$. Com efeito, seja $w \in W$. Pelo fato de T ser um operador auto-adjunto, temos que

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0,$$

o que implica que $T(W) \subset W$. Assim, pelo Lema 4.2, a restrição $S = T|_W$ é um operador linear auto-adjunto. Portanto, como $dim[v] = 1$ e como pela Proposição 2.8 todo vetor não nulo de W é linearmente independente com v, pois são vetores dois a dois ortogonais, segue-se que dim$W = n$, visto que dim$V = n + 1$. Pela hipótese de indução, W admite uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de S (logo de T). Consequentemente, $\beta = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T. Logo, a matriz de T na base β, $[T]_\beta^\beta$, é diagonal. □

Observação: Veja que a recíproca do teorema também é verdadeira, ou seja, se β é uma base ortonormal de V formada por autovetores, T é auto-adjunto, pois $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz simétrica e β é uma base ortonormal e o resultado segue da Proposição 3.7.

Exemplo 4.4 *Considere o operador $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $A(x, y, z) = (3z, -y, 3x)$. Considere também em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual note que A é auto-adjunto, pois sua matriz*

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é simétrica. O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(-1 - \lambda),$$

que possui três raízes reais distintas, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$ e os autovalores correspondentes $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$ são dois a dois ortogonais. Deste modo,

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0, \ \ \langle v_1, v_3\rangle = 0 \ \ e \ \ \langle v_2, v_3\rangle = 0,$$

com $\{v_1, v_2, v_3\}$ *base de* $\mathbb{R}^3$. *Vamos normalizar* v_1 *e* v_3. *Como* $\|v_1\| = \sqrt{2}$ *e* $\|v_3\| = \sqrt{2}$, *temos*

$$v_1' = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

e

$$v_3' = \frac{v_3}{|v_3|} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Portanto, $\{v_1', v_2, v_3'\}$ *é a base ortornormal de* $\mathbb{R}^3$ *descrita pelo Teorema Espectral.*

A seguir, iremos apresentar um exemplo envolvendo sistemas de equações diferenciais que recorremos ao Teorema Espectral para encontrar a sua solução.

Alguns fenômenos naturais podem ser modelados por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, a população de coelhos em um determinado ambiente depende do tamanho das populações de predadores e da disponibilidade de alimentos. É claro que quanto maior o número de predadores, menor a população de coelhos e quanto maior a disponibilidade de alimentos, possivelmente será maior a população de coelhos. Para representar e estudar esse tipo de fenômeno, precisamos usar mais de uma variável dependente e mais de uma equação. Sistemas de equações diferenciais são a chave para isso.

Exemplo 4.5 *Seja* A *uma matriz real simétrica* $n \times n$. *Queremos encontrar as soluções em* $\mathbb{R}^n$ *da equação diferencial*

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t),$$

onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

é dada em termos de coordenadas que são funções de t, *e*

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \\ \vdots \\ dx_n(t)/dt \end{pmatrix}.$$

Como a equação é dada em termos de coordenadas arbitrárias, a sua solução pode não ser tão simples. Então, esqueçamos um pouco essas coordenadas. Como por hipótese A *é simétrica, o operador* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *associado a* A *é auto-adjunto. Assim, pelo Teorema Espectral 4.3, existe uma base de* $\mathbb{R}^n$ *de autovetores de* T. *Agora, com respeito a essa nova base, podemos identificar qualquer vetor* $v \in \mathbb{R}^n$ *com novas coordenadas, as quais indicamos por* $y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Em relação a essa nova base, temos que* T *é representado por uma matriz diagonal, digamos:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *são autovalores de* T. *Em termos dessas convenientes coordenadas, nossa equação diferencial se torna*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}.$$

isto é,

$$y_1'(t) = \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \dots, y_n'(t) = \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n,$$

Desse modo, considerando $y_i(t) \neq 0$ *para todo* t *e* $i = 1, \dots, n$, *temos*

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \lambda_i.$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} dt = \int \lambda_i dt \Rightarrow$$

$$\ln y_i(t) = \lambda_i t + c \Rightarrow$$
$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot e^c,$$

tomando $e^c = k_i$ *uma constante, obtemos a solução geral*

$$y_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}.$$

Usamos esse exemplo para dar uma noção do quanto é importante a escolha adequada da base, deve-se usar sempre que possível uma notação sem coordenadas, até que a escolha das coordenadas seja definida, a fim de solucionar o problema com maior facilidade.

5 Considerações Finais

O trabalho permitiu abordarmos o assunto de diagonalização de operadores, com ênfase nos operadores auto-adjuntos. Vimos que $T : V \to V$ é um operador diagonalizável se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores de T. Mostramos através do resultado principal desse trabalho o Teorema Espectral, que todo operador auto-adjunto é diagonalizável, ou seja, admite uma base ortonormal de autovetores e a matriz que o representa é uma matriz diagonal, onde os elementos da diagonal principal são os autovalores de T.

Vimos em alguns exemplos o quanto trabalhar com operadores diagonalizáveis pode facilitar na resolução de determinados problemas, encontrar suas soluções se tornam mais simples.

Aqui, estudamos operadores lineares definidos apenas em espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, mas poderíamos estender esses resultados para espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. Nesse último caso, os operadores são chamados de operadores hermitianos. O caso que tratamos aqui é um caso particular do Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos. Existem diversas generalizações do Teorema Espectral, bem como para operadores unitários, operadores normais e operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert.

Acreditamos que nosso objetivo principal foi atingido e como resultado obtivemos um texto claro, bem estruturado, acessível a diversos estudantes, mesmo que não possuam muito conhecimento sobre o assunto. Este trabalho foi muito importante para os meus estudos, pois me permitiu o aprofundamento neste tema bem como aperfeiçoar competências de investigação, organização e comunicação da informação. Buscamos escrever da forma mais simples possível, para a construção de todo o trabalho, que esperamos ter alavancado com extrema clareza e objetividade.

Referências

[1] BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda.1980.

[2] CALLIOLI, Carlos. A; DOMINGUES, Hygino. H; COSTA, Roberto. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 6. ed. ver, São Paulo: Atual, 1990.

[3] HEFEZ, Abramo.FERNANDEZ, Cecília de Sousa. Introdução à Álgebra Linear.2 ed. Coleção PROFMAT. SBM. 2016.

[4] LANG, Serge. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

[5] LAWSON, Terry. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

[6] LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear: teoria e problemas. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.