UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS-UFT
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PAULO DENIZAR ARAÚJO SOUSA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

ARAGUAÍNA
2016

PAULO DENIZAR ARAÚJO SOUSA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Renata Alves da Silva

ARAGUAÍNA
2016

PAULO DENIZAR ARAUJO SOUSA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Renata Alves da Silva
Orientadora

Prof. Msc. Andre Luiz Ortiz da Silva
Membro 1

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior
Membro 2

RESUMO

Quando em um circuito elétrico pretende-se determinar as correntes elétricas ou quando pretende-se balancear certas reações químicas ou, ainda, quando pretende-se estudar o fluxo de tráfego numa determinada via, a teoria de sistemas de equações lineares se torna essencial para tal fim. Ela é uma parte fundamental da Álgebra Linear, sendo suporte para várias teorias na Matemática Moderna. A Física, a Química, as Engenharias e a Biologia são exemplos de outras áreas que se beneficiam dos resultados de sistema de equações lineares. Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares que, por sua vez, são polinômios de grau 1 com coeficientes reais (ou complexos). Quando nos deparamos com um sistema de equações lineares, o objetivo principal é encontrar uma solução para ele, que deve satisfazer simultaneamente todas as equações lineares. Neste trabalho, apresentaremos parte da teoria de sistemas de equações lineares e daremos ênfase em algumas de suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Vamos nos basear em vários autores e especialmente em: Boldrini (1986), Dante (2013) e Iezzi, G. Hazzan, S. (2004). O trabalho consiste também em apresentar algumas das possíveis aplicações dos sistemas de equações lineares, visando ampliar os conhecimentos do leitor a cerca do estudo de equações lineares. Procura-se resolver algumas situações problemas que envolvem sistemas de equações lineares. O processo de investigação da pesquisa consiste em uma revisão bibliográfica em livros de Matemática e História da Matemática, artigos, monografias e outros trabalhos científicos que tratam do tema.

Palavras-chave: Equações Lineares, Sistemas de Equações Lineares, Aplicações de Sistemas de Equações Lineares.

ABSTRACT

When an electric circuit is intended to determine the electric currents or when it is intended to balance certain chemical reactions, or when it is intended to study the flow of traffic in a particular path, the theory of systems of linear equations becomes essential for such end. It is a fundamental part of Linear Algebra, being support for several theories in Modern Mathematics. Physics, Chemistry, Engineering and Biology are examples of other areas that benefit from the results of a linear equation system. A system of linear equations is a set of linear equations which, in turn, are degree 1 polynomials with real (or complex) coefficients. When we come across a system of linear equations, the main objective is to find a solution for it, which must simultaneously satisfy all linear equations. In this work, we will present part of the systems theory of linear equations and will emphasize some of its applications in different areas of knowledge. We will rely on several authors and especially on: Boldrini (1986), Dante (2013) e Iezzi, G. Hazzan, S. (2004). The work also consists of presenting some of the possible applications of systems of linear equations, aiming to widen the reader's knowledge about the study of linear equations. It is tried to solve some situations problems that involve systems of linear equations. The research process of the research consists of a bibliographical revision in Mathematical and Mathematical History books, articles, monographs and other scientific works that deal with the theme.

Keywords: Linear Equations, Systems of Linear Equations, Applications of Systems of Linear Equations.

Sumário

1 Introdução

Existem vários conteúdos de Matemática que são bastante aplicadas em outras áreas do conhecimento. Sistemas de Equações Lineares é um deles. Chamamos de equação linear toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$. Os elementos ordenados $(a_1, a_2, , , a_n)$ são chamados de coeficientes das incógnitas, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ as incógnitas e (b) é o termo independente, que será o resultado da equação.

Um Sistema de Equações Lineares é um conjunto de equações lineares, ou seja, as equações devem ser consideradas em conjunto, e não de forma individual. A teoria de sistemas lineares é a base e uma parte fundamental da Álgebra Linear.

Esse trabalho tem como objetivo apresentar algumas aplicações do estudo da álgebra linear através dos sistemas de equações lineares, visando ampliar os conhecimentos acerca desse assunto. Procuramos resolver algumas situações problemas do nosso cotidiano que envolvem esses conceitos, fazendo com que o leitor perceba, interprete e identifique as aplicações dos mesmos em seus diversos campos e saiba resolver esses possíveis problemas usando o melhor método de resolução, haja vista que a percepção da aplicação da matemática em si é um grande desafio para os alunos, sendo consideradoalgo extremamente complexo visualizar um problema usual, modelado matematicamente e resolvido utilizando métodos algébricos. Daí, parte um dos principais motivos da elaboração deste trabalho.

O trabalho foi desenvolvido em cinco capítulos. No segundo capítulo faremos uma breve introdução do tema, abordando os conceitos e as definições de equações e sistemas lineares, e abordando um pouco da História relacionada. No terceiro capítulo, citaremos os métodos de resoluções de sistemas de equações lineares, sendo esse capítulo um dos mais interessantes, pois é nele que encontraremos uma ótima base para resolver problemas envolvendo sistemas. O quarto capítulo merece uma maior atenção, pois se trata da peça chave do trabalho. Nele, estão contidas algumas das possíveis aplicações dos sistemas de equações lineares. Finalizaremos com o quinto capítulo com as considerações e contribuições finais.

2

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo apresentaremos a teoria de Sistemas de Equações Lineares, que foi de fundamental importância para a realização do objetivo principal, que foi apresentar algumas de suas várias aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Ressaltamos que trabalharemos apenas sobre o corpo $\mathbb{R}$.

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA

Para de fato entendermos o que é uma equação linear, ou como se obtém um sistema linear, é preciso antes, viajarmos no tempo para compreendermos melhor como se deu a introdução a esse estudo. É preciso conhecer aqueles que influenciaram e contribuíram para o crescimento e desenvolvimento dessa área.

Conforme Campos (2010), a viagem começa a ser analisada no período em que os conhecimentos matemáticos algébricos eram utilizados apenas para auxiliar e desenvolver as atividades e necessidades do dia-a-dia, vivenciadas pelos Egípcios e Babilônicos em meados dos séculos IX e VIII a.C. Esses conhecimentos algébricos utilizados por esses povos antigos eram bem superficial, haja vista que a matemática começava a dar seus primeiros passos ali.

Um pouco mais adiante, ainda de acordo com Campos (2010), por volta dos séculos II e I a.C. com os conhecimentos algébricos bem mais consolidados começou a ser difundido no oriente e ocidente os conceitos e estudos de sistemas de equações lineares, sendo bem mais aceito no oriente (200 a.C e 100 a.C). No oriente médio, foi publicado o livro de Matemática “chui Chang suan shu” “nove capítulos sobre a arte da Matemática”. Considerado por alguns autores como um dos textos mais importantes de Matemática Chinesa. Entre os assuntos abordados pelo livro, encontram-se problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedade, engenharia, cálculos, triângulos retângulos e solução de sistemas de equações lineares, onde pedaços de bambus em tabuleiro eram usados para representar os sistemas de equações lineares, e a técnica usada para manipular os pedaços de bambus para chegar ao resultado do problema, assemelha-se com métodos de resolução desenvolvidos e utilizados em épocas mais adiantes.

> O Cap. 8 do nove capítulos é significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares, usando tanto números positivos quanto negativos. O último problema no capítulo envolvem quatro equações em cinco incógnitas, e o tópico das equações indeterminadas continuaria a ser um dos preferidos entre os povos orientais. (BOYER, 1996, p.134)

É no nove capítulos que encontramos o primeiro registro do uso de matriz associada a sistemas de equações lineares, com a representação da matriz ampliada para resolver o seguinte problema.

> Existem três tipos de milho, dos quais três montes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro totalizam 39 medidas. Dois montes do primeiro, três do segundo e um do terceiro totalizam 34 medidas. Finalmente, um monte do primeiro, dois do segundo e três do terceiro totalizam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um monte de cada um dos tipos? O problema leva a um sistema de três equações lineares a três incógnitas, que o autor escreve como
>
> $$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$
>
> (ANTON; BUSBY, 2006, p. 64).

Dando um salto no tempo, chegamos ao século XVII e nos deparamos como um dos maiores matemáticos da época, o japonês Seki Kowa, que contribuiu para matemática progredindo os conhecimentos adquiridos dos Chineses sobre determinantes, onde o termo determinante ainda não estava claramente definido. Posteriormente, ainda no mesmo século por volta de 1693, Gohfried Wilhelm Leibniz, atribuía as primeiras referências aos determinantes, citados em cartas escritas por ele para L'Hospital.

Avançando um pouco mais na História, vamos conhecer alguns estudiosos que também contribuíram com os métodos de resolução de sistemas de equações lineares. Gabriel Cramer (1704-1752) foi um deles, conhecido pela regra de cramer, método esse que leva seu nome. Este método consiste em resolver sistemas, em que a matriz dos coeficiente seja inversível e que o número de equações lineares seja igual ao número de incógnitas. A solução do sistema é classificada em possível, possível e indeterminada e impossível de acordo com o determinante da matriz A. (Veremos isso no capítulo III)

Outro matemático que contribuiu bastante para resolução de sistemas foi o matemático Carl Friedrich Gauus, com o método de eliminação de Gauss ou método do escalonamento, que consiste em reduzir através de operações elementares a matriz ampliada do sistema em uma matriz na sua forma escada, obtendo assim um novo sistema equivalente (que tem o mesmo conjunto solução) ao sistema inicial.

2.2 EQUAÇÃO LINEAR.

Segundo Dante (2013, p. 109), uma equação linear defini-se da seguinte forma.

> De modo geral, denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita da forma geral: $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b)$. na qual:
> $x_1, x_2, , , x_n$ são incógnitas;
> $a_1, a_2, , , a_n$ são números reais chamados coeficiente das incógnitas;
> b é o termo independente.

Dessa forma, temos que uma equação linear é um tipo de equação que contempla relações algébricas entre variáveis de grau um.

Exemplos de equações lineares:

Exemplo 2.1

1. 2 x - 30 = x + 15;
2. x + 30 = 80;
3. x + 2y + 4z = 19 e
4. 4x - 20 = 3x + 20.

É importante ressaltar que existem equações que não são lineares. Mas esses tipos de equações não serão estudados aqui, por não fazerem parte dos objetivos do nosso trabalho.

2.3 SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR.

Antes de definirmos de modo geral como encontar a solução de uma equação linear, observaremos como é o comportamento da mesma quando atribuímos valores para suas incógnitas. Feito isso, definiremos como determinar a solução de uma equação linear.

Exemplo 2.2 $2x + 2y = 10$.

Para esse exemplo vamos verificar alguns pares ordenados.

- $(2, 3)$ É uma possível solução, pois $2.(2) + 2.(3) = 10$;
- $(5, 0)$ Também é solução, pois $2.(5) + 2.(0) = 10$ e
- $(4, 2)$ não é solução, pois $2.(4) + 2.(2) \neq 10$

Observando o exemplo acima, a partir da verificação dos pares ordenados, podemos generalizar que a solução de uma equação linear é uma n-upla[1] de números reais de modo que satisfaça a equação. Assim como Dante (2013) generaliza a solução de uma equação linear.

> Generalizando, dada a equação linear:
> $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, dizemos que ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, , , \alpha_n)$ é solução da equação se, e somente se: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ (idem, p. 110)

A seguir, daremos mais alguns exemplos de equações lineares.

Exemplo 2.3 $2x + 3x = 25$.

Exemplo 2.4 $x + y = 5$.

Exemplo 2.5 $x + y + z = 3$.

Exemplo 2.6 Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180, e que um triângulo equilátero possui todos os ângulos iguais, qual o valor de cada ângulo interno desse triângulo?
Exemplo 2.7 Daqui a 7 anos terei 21 anos de idade. Quantos anos tenho hoje?

2.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

Antes de definirmos formalmente o que é um sistema de equações lineares, é interessante definir primeiro o que é um sistema. Propriamente dito, é um conjunto, coleção, uma combinação de elementos organizados para formar algo maior. Para nosso estudo, esses elementos tratam-se das equações lineares. Agora ficou fácil compreender o que de fato é um sistema de equações lineares ou sistema linear.

Vejamos com o Dante (2013) define um sistema de equações linear.

[1] É a uma sequência ordenada de termos finitos

Definição 2.8

> Denomina-se sistema linear m x n o conjunto de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado assim:
> $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
> $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
> ....
> $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m$. (idem, p. 111)

O sistema apresentado acima possue ordem m x n, (que se lê m por n), e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $b_i \in \mathbb{R}$ e i, j, m e n $\in \mathbb{Z}$.

Apresentaremos aqui as noções básicas de como um dado sistema de equações lineares se associa a uma matriz. Esses conhecimentos serão necessários para compreendermos alguns métodos de resolução desses sistemas, que serão apresentados no próximo capítulo.

considerando o sistema linear m x n abaixo.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

.

Ele pode ser escrito na forma matricial $AX = B$. Veja a representação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- A é a matriz dos coeficientes;
- X é a matriz das incógnitas e
- B é a matriz dos termos independentes.

Multiplicando a matriz A pela matriz X das variáveis e igualando a matriz B dos termos independentes retornaremos ao nosso sistema inicial.

Outra forma de associar um sistema linear m x n, a uma matriz é representá-lo como uma matriz aumentada ou ampliada, cujos elementos são os coeficientes e os termos independentes dispostos da seguinte forma.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A matriz aumentada tem ordem *m* x *(n+1)*.

2.5 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Entender como é a relação do determinante de uma matriz com sistemas de equações lineares foi de fundamental importância para o nosso estudo, pois essa relação nos revelou informações relevantes sobre a solução de um determinado sistema. Isso será apresentado no próximo capítulo com mais detalhes, onde veremos que o determinante está intrinsicamente ligado a solução de sistemas lineares.

Denotaremos o determinante da matriz A por det(A).

Exemplo 2.6

Exemplo 2.9 Dado um sistema com uma equação e uma incógnita, $ax = b$, com $a \neq 0$. A matriz dos coeficintes é $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, e a solução é $x = \frac{b}{a}$.

Perceba no denominador, que o determinante de A está diretamente associado a matriz dos coeficientes. Caso ele seja igual a zero, temos uma indeterminação, onde pode haver infinitas ou nenhuma solução para o sistema. Para o caso em que $a = 0$ e $b \neq 0$, dizemos que a equação não tem solução. Já no caso em que $a = 0$ e $b = 0$, a equação possui infinitas soluções.

A seguir, iremos relacionar o conceito de determinante e a solução de um sistema linear.

Exemplo 2.10 Seja um sistema de ordem 2. Considere $ad - bc$ diferente de zero.

$$S = \begin{cases} ax + by = K_1(i) \\ cx + dy = K_2(ii) \end{cases}$$

.

Ele pode ser escrito na forma matricial $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por c a equação (i) e poe a a equação (ii) e,em seguida subtraindo (ii) de (i) obtemos:

$$S = \begin{cases} acx + bcy = cK_1 \\ acx + ady = aK_2 \end{cases}$$

$$ady - bcy = K_2a - K_1c$$

$$y(ad - bc) = K_2a - K_1c$$

Como $ad - bc \neq 0$, segue que

$$y = \frac{K_2a - K_1c}{ad - bc}$$

No sistema inicial, se multiplicarmos (i) por d e (ii) por b, em seguida subtrairmos (ii) de (i) obtemos analogamente,

$$x = \frac{K_1d - K_2b}{ad - bc}$$

Assim, a solução única é $x = \frac{K_1d-K_2b}{ad-bc}$ e $y = \frac{K_2a-K_1c}{ad-bc}$.

Desse modo, podemos concluir que, se o determinate da matriz dos coeficientes, $ad - bc$, for diferente de zero, o sistema admite solução única.

Por não fazer parte diretamente do objetivo do trabalho, omitiremos algumas demonstrações a respeito de determinante e suas propriedades. Para o leitor curioso, veja Boldrini (1986), capítulo 3.

Para Dante (2013, p. 92) e Boldrini (1986, p. 66).

Definição 2.11 “O determinante é um número real que está diretamente associado as matrizes quadradas”.

Por exemplo o determinante de uma matriz 2x2, ou de ordem 2, é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Para calcular o detreminante de ordem 3, aplicaremos a regra de Sarrus, que consiste em repetir à direita as duas primeiras colunas da matriz dada e aplicar o mesmo procedimento usado para calcular o determinante de ordem 2.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$D = (\mathrm{a}_{11}*a_{22}*a_{33}+a_{12}*a_{23}*a_{31}+a_{13}*a_{21}*a_{32})-(a_{31}*a_{22}*a_{13}+a_{32}*a_{23}*a_{11}+a_{33}*a_{21}*a_{12})$$

A seguir, daremos uma definição mais formal do cálculo de determinante de uma matriz de ordem qualquer. Nesta, usamos a teoria de permutações. Iremos omitir aqui o detalhamento dessa teoria que pode ser encontrada no livro de Boldrini (1986, p. 67).

Definição 2.12 det[a$_{ij}$] $=\sum_p (-1)^j a_1 j_1 a_2 j_2 a_3 j_3 .... a_n j_n$. Onde $j = j(j_1, j_2, ..., j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1, j_2, ..., j_n)$, e p indica que a soma é estendida a todas n! permutações de $(1, 2, 3, ..., n)$.

Observação: existe outro método para calcular determinantes de uma matriz quadrada de qualquer ordem chamado de Desenvolvimento de Lapalce. Por não fazer parte dos objetivos do trabalho, omiteremos esse método que pode ser encontrado em qualquer livro de Álgebra Linear, por exemplo Boldrini (1986) entre outros.

2.6 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.

Até aqui, já sabemos a definição de como resolver uma equação linear, que é uma n-upla ordenada de números reais que satisfaz a equação. Para um sistema linear, segue-se o mesmo padrão, com apenas uma observação: Essa n-upla ordenada deve necessariamente satisfazer simultaneamente todas as equações do sistema.

A seguir, daremos alguns exemplos em que explicitamos as soluções de um dado sistema linear. Porém, não daremos ênfase nos métodos de resolução, que serão vistos com detalhes no terceiro capítulo.

Definição 2.13 "Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, , , \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, , , \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema" (DANTE, 2013, p. 111)

Exemplo 2.14

$$S = \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$$

.

Verificando o par ordenado $(5, 1)$.

1. $2.5 + 3.1 = 13$ e

2. $3.5 - 5.1 = 10$.

O par ordenado $(5, 1)$ satisfaz ambas equações. Logo, é solução para o sistema. É possível ainda mostrar que essa é a única solução.

Na resolução de um sistema linear temos os seguintes casos: solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução, onde uma, e somente uma, é verdadeira para cada sistema.

Para demonstrar e exemplificar esses casos, seguiremos a mesma linha que o autor Boldrini (1986) utiliza na teoria de sistemas. Iremos considerar uma sistema de ordem 2 em que daremos a sua solução e sua representação gráfica.

- **Possível e determinado:** tem apenas uma única solução.

Exemplo 2.15

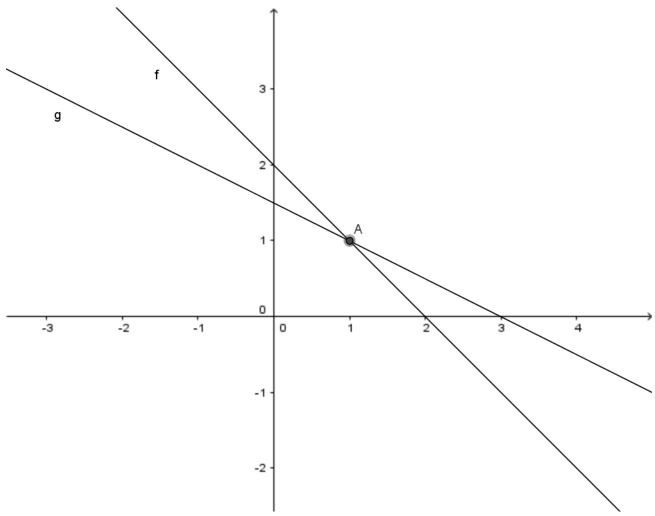
Para o sistema $ax = b$ com $a \neq 0$ temos $x = \frac{b}{a}$. Este sistema possui solução única.

$$S = \begin{cases} x + y = 2(i) \\ x + 2y = 3(ii) \end{cases}$$

.

Subtraindo (ii) de (i), $y = 1$, aplicando em (i), encontramos $x = 1$, o par ordenado $(1, 1)$ é solução única do sistema. Para ver isso geometricamente, perceba que $(1, 1)$ é o único ponto comum às duas retas concorentes (i) de (ii). Por isso o sistema possui única solução.

Figura 1 – Representação geométrica: Caso Possível e Determinado



Fonte: Sousa (2016)

- **Possível e indeterminado:** tem infinitas soluções.

Exemplo 2.16

$ax = b$ com $a = 0$ e $b = 0$, temos $0x = 0$. Qualquer número real x é solução.

$$S = \begin{cases} x + y = 2(i) \\ 2x + 2y = 4(ii). \end{cases}$$

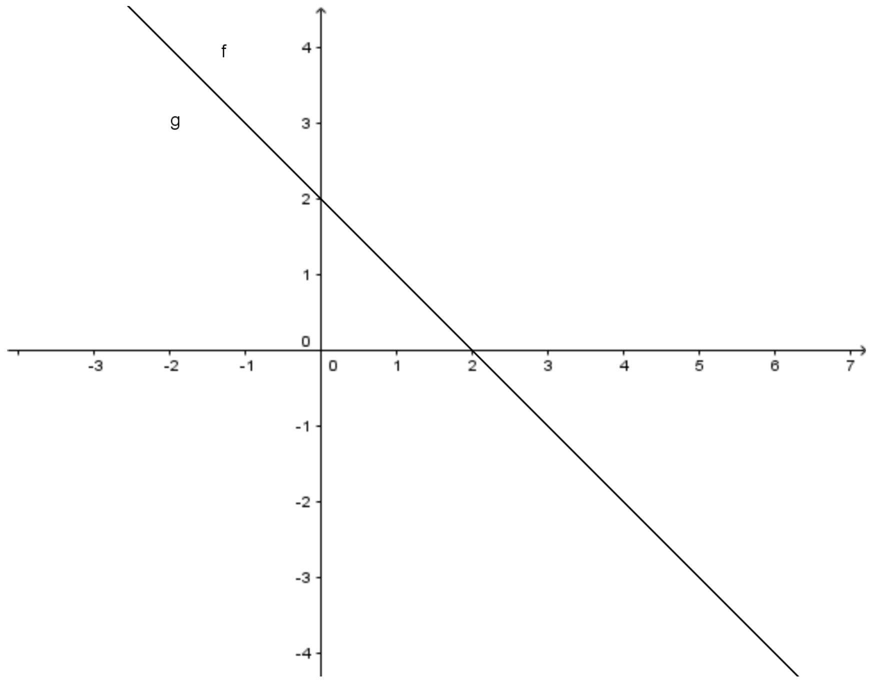
Subtraindo (ii) de (i), temos $x + y = 2$, aplicando em ii,

$2x + 2y = 4$ ⇒2(2 - y) + 2y = 4⇒4 - 2y + 2y = 4⇒4 - 0y = 4⇒0y = 0

Observe que quando temos 0y = 0, podemos considerar qualquer valor para y que mesmo assim, a igualdade se mantém verdadeira, o conjunto solução desse sistema é obtido atribuindo-se valores à incógnita y. Logo, temos infinitas soluções.

Representação geométrica:

Figura 2 – Representação geométrica: Caso Possível e Indeterminado



Fonte: Sousa (2016)

O gráfico trata-se de duas retas coincidentes. Portanto, todos os pontos de uma reta é comum a outra.

- **Impossível:** quando não tem solução.

$ax = b$ com $a = 0$ e $b \neq 0$ temos $0x = b$. Não existe solução, com $x \in \mathbb{R}$

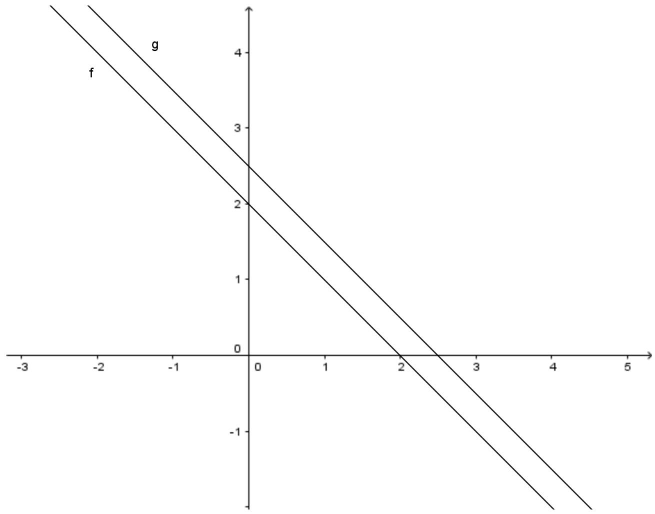
$$S = \begin{cases} x + y = 2(i) \\ 2x + 2y = 5(ii) \end{cases}$$

Subtraindo (ii) de (i), temos $x + y = 3$, aplicando em ii,

$2x + 2y = 5$ ⇒2(3 - y) + 2y = 5⇒6 - 2y + 2y = 5⇒6 - 0y = 5⇒0y = 1 impossível.

perceba que não existe valores para x e y que satisfaça a segunda equação. Geometricamente, temos.

Figura 3 – Representação geométrica: Caso Impossível



Fonte: Sousa (2016)

o gráfico trata-se de duas retas paralelas. Portanto não existem pontos comuns entre elas.

Obs: Os três gráficos foram feitos no geogebra.

3

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

Quando se estuda sistemas lineares, o principal objetivo é determinar o seu conjunto solução, o que nem sempre é simples. Pois, dependendo do número de equações e variáveis, essa tarefa se torna bastante complicada. Para isso, existem alguns métodos que podem simplificar o nosso trabalho. Neste capítulo, iremos apresentar e exemplificar alguns dos diferentes métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

Em todos os métodos iremos considerar sistemas de ordem 2, apenas para simplificar os cálculos. No entanto, podemos considerar sistemas lineares de ordem qualquer.

Dentre os métodos de resolução aqui apresentados, temos: o método da substituição e da adição, (esses são mais usados na educação básica) a regra de Cramer, o método de escalonamento e o método de Gauss.

3.1 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO E DA ADIÇÃO.

O método da substituição consiste basicamente em isolar uma incógnita de uma determinada equação e substituir em outra equação para encontrar os valores das outras incógnitas. Encontrando o valor de uma, basta substituí-la em qualquer uma das equações do sistema para encontrar os valores das demais incógnitas, resolvendo assim o sistema. Já em sistemas de maior ordem esse método se torna um pouco mais trabalhoso, não sendo o mais recomendado, a menos que esse esteja na forma triangular.

Caso esteja na forma triangular como explica Lamin (2000, p. 15), “Resolve-se a n-ésima equação para x_n. Este valor é usado para calcular x_{n-1} na (n-1)-esima equação. Os valores de x_n e x_{n-1} são usados na (n-2)-ésima equação para encontrar x_{n-2}, e assim sucessivamente”.

Apresentaremos a seguir um exemplo, para que fique mais claro a utilização do método citado acima.

Exemplo 3.1

$$S = \begin{cases} 2x + y = 4 & (i) \\ x + y = 3 & (ii) \end{cases}$$

Primeiro passo: escolher uma equação e isolar uma incógnita. Escolhemos a equação (ii) e isolamos a incógnita x, temos $x = (3 - y)$ (iii);

Segundo passo: aplicando esse novo resultado em (i), temos

$$2(3 - y) + y = 4 \Rightarrow 6 - 2y + y = 4 \Rightarrow -y = -2(-1) \Rightarrow y = 2.$$

encontrando, assim, o valor de uma das incógnitas.

Terceiro passo: aplicar o valor da incógnita em qualquer uma das equações (i) ou (ii). Aplicando em (ii), tem-se

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1.$$

logo a solução do sistema S é $\{x = 1, \, y = 2\}$.

No final desse capítulo, resolveremos um sistema na forma triangular.

MÉTODO DA ADIÇÃO.

O método da adição consiste em somar as duas equações. Seu uso é adequado quando o coeficiente de uma das incógnitas em uma das equações é inverso aditivo do coeficiente da mesma incógnita na outra equação. Assim, aplicando a operação de soma, conseguimos eliminar essa incógnita.

Vamos resolver o sistema dado no exemplo 3.1, utilizando o método da adição.

$$S = \begin{cases} 2x + y = 4 & (i) \\ x + y = 3 & (ii) \end{cases}$$

Multiplicando (ii) por -1 temos

$$S = \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtem-se $x = 1$. Agora, substituindo esse valor em (i) ou (ii) encontraremos o valor $y = 2$.

Exemplo 3.2

$$S_1 = \begin{cases} 5x + 2z = 0 & (i) \\ -5x - y = 0 & (ii) \end{cases}.$$

Somando as duas equações temos

$$2z - y = 0 \Rightarrow \text{2z = y} \quad \Rightarrow \quad \text{z} = \tfrac{y}{2}$$

aplicando em (i), tem-se

$$5x + y = 0 \Rightarrow \text{5x = -y} \quad \Rightarrow \quad \text{x} = \tfrac{-y}{5}$$

O conjunto solução de S_1 é $\{\frac{-y}{5}, y, \frac{y}{2}\}$ com $y \in \mathbb{R}$. Logo, temos infinitas soluções.

Perceba que o conjunto solução depende do valor atribuído a y.

Exemplo 3.3

$$S_2 = \begin{cases} 2x + 2y = 4 & (i) \\ -x - y = 4 & (ii) \end{cases}.$$

Multiplicando (ii) por 2 somando com (i), obtemos diretamente $0 = 12$, o que é um absurdo.

Portanto, o sistema S_2 não possui solução.

3.2 REGRA DE CRAMER.

A regra de Cramer é um excelente método de resolução, mas que possui algumas restrições. Esse método só pode ser usado em sistema de ordem n (n x n), pois sua aplicação se apoia inteiramente no estudo de determinantes, e, além disso, não é muito comum utilizá-lo em sistemas de ordem maiores que 3.

Conforme destacam (SILVA; FEITOZA; DALL‘AGNOL, 2011, p. 15), “A Regra de Cramer é muito utilizada em Sistemas de Equações Lineares de até no máximo três incógnitas, pois mais que isso ela se tornará mais trabalhoso em sua resolução, apresentando desvantagens sobre outros métodos”.

Vimos que, dado um sistema linear de ordem n, podemos associá-lo a uma matriz cuja representação é da forma $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes. Vamos chamar de D o determinante de A. A Regra de Cramer só poderá ser usada quando o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, ou seja, no caso em que a matriz A seja inversível.

Teorema 3.4 Seja S um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas. Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

para $\forall_i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna de A pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Usaremos um sistema genérico para exemplificar a Regra de Cramer.

$$S = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema na sua forma matricial $AX = B$, sendo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

primeiro, vamos calcular o determinante da matriz dos coeficientes.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D.$$

De acordo com o teorema, consideremos $D \neq 0$, para que o sistema possua uma única solução. Agora, vamos calcular o determinante, substituindo na matriz dos coeficientes a coluna dos termos independente, da seguinte forma:

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1,$$

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = D_2 \quad e$$

$$det(A_z) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = D_3.$$

pelo teorema 3.4, o valor de cada incógnita será dado da seguinte forma

$$x = \frac{D_1}{D}, \; y = \frac{D_2}{D}, \; z = \frac{D_3}{D}.$$

A seguir, resolveremos um exemplo usando esse método. **Exemplo 3.5**

$$S_1 = \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Temos;

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Então, o sistema possui única solução, segundo o teorema 3.4.

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad e$$

$$det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3.$$

Temos que, $x = \frac{(-6)}{(-3)} = 2$, $y = \frac{(-3)}{(-3)} = 1$, $z = \frac{(-3)}{(-3)} = 1$, é solução de S_1.

S_1 é {x = 2, y = 1, z = 1}.

3.3 MÉTODO DO ESCALONAMENTO.

Esse método consiste em reduzir o sistema inicial em um sistema equivalente mais simples (na sua forma escalonada), onde se entende por sistema equivalente aquele que possui o mesmo conjunto solução do inicial.

Esse é um método utilizado para todos os tipos de sistemas e que segundo Iezzi (2004), define-se da seguinte forma.

Definição 3.6 "Dado um sistema linear S em que em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, dizemos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes não nulos aumenta de equação para equação". (IEZZI, 2004, p.140).

Para chegarmos ao sistema escalonado, primeiro o colocaremos na forma matricial e, em seguida, realizaremos as seguintes operações elementares entre as linhas da matriz aumentada.

- Trocar de posição;
- Multiplicar por uma constante diferente de zero;
- Somar membro a membro, de uma linha para outra.

O que garante o uso dessas operações são os seguintes teoremas.

Teorema 3.7 Em um sistema linear S, podemos permutar a i-ésima pela j-ésima linha ($L_i \leftrightarrow L_j$). O novo sistema obtido S', será equivalente a S.

Encontramos um exemplo no livro [2].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.8 Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Encontramos a demonstração no livro [7].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow 3 * L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

A seta $\leftarrow$, aponta a linha que será modificar pela operação, e o $3 * L_3$, é a operação.

Teorema 3.9 Se uma equação de um sistema linear S for substituída pela soma, membro a membro, dela com outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.

Encontramos a demonstração também em [7].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2 * L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

FORMA ESCADA OU TRIANGULAR.

A matriz na sua forma escada ou triangular tem a forma abaixo e satisfaz as seguintes condições.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

- O elemento pivô é aquele que possui apenas elementos nulos abaixo dele.
- Coluna pivô é aquela que possui o elemento pivô.
- Na forma escada, temos que o pivô de cada linha não nula é 1. E ele é o único elemento não nulo de sua coluna.

Para escalonar um sistema na forma matricial, adotaremos alguns algoritmos que poderão ser usados em sistemas de qualquer ordem.

1. A primeira coluna não nula da esquerda para a direita é uma coluna pivô;
2. Se necessário, troque linhas para ter um pivô não nulo;
3. Zere os elementos *abaixo* e *acima* do pivô (aplicando as operações p. 24);
4. Repita os passos nas próximas linhas.

Depois da matriz aumentada associada ao sistema ser escalonada, obtemos de imediato a solução do sistema.

Um sistema linear se caracteriza em possível determinado, quando possui uma única solução, possível indeterminado, quando possui infinitas soluções, e impossível, quando não possui solução. Quando após o escalonamento ocorrer uma linha da forma, $0 \quad 0 \quad \dots \quad \lambda$, com $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que o sistema é impossível.

Verificamos se o sistema é possível quando não ocorre nenhuma linha dessa forma acima.

Então, ou o sistema possui única ou infinitas soluções.

Proposição: Sejam A uma matriz m x n e B uma matriz m x 1. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.

Demonstração Seja $X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda\ X_1$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que X_λ é solução do sistema $AX = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto vamos mostrar que $AX_\lambda = B$.

$AX_\lambda = A[(1-\lambda)X_0 + \lambda\ X_1] = A(1-\lambda)X_0 + A\lambda\ X_1 = (1-\lambda)AX_0 + \lambda\ A\ X_1$.
Como X_0 e X_1 são soluções de $AX = B$, então $AX_0 = B$ e $AX_1 = B$, portanto $AX\lambda =$ (1 - λ)B+λ B = [(1 - λ) + λ]$B = B$, pela propriedade distributividade, de matrizes.

Assim o sistema $AX\lambda = B$ tem infinitas soluções, pois para qualquer valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução. Observe que para $\lambda = 0$, $X\lambda = X_0$, para $\lambda = 1$, $X_\lambda = X_1$, para $\lambda = \frac{1}{2}$, $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$, para $\lambda = 3$, $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$ e para $\lambda = -2$, $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$. Essa proposição foi encontrado em Brasil (2010, p. 48)

Se o sistema for de ordem n e possuir todas as colunas com pivô, isso significa que o sistema é possível e determinado, ou seja, possui única solução.

Quando existir pelo menos uma coluna sem pivô, esse sistema será possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções. Teremos, então, incógnitas dependentes e outras livres.

Exemplo 3.10 Para melhor entendermos como se dá o processo de escalonamento de um sistema, resolveremos um exemplo, para que fique claro os algoritmos do escalonamento. Considere

$$S = \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 9 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Primeiro Passo. Escrever a matriz ampliado do sistema: Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora vamos escalonar a matriz, utilizando as operações entre linhas e seguindo os algoritmos para chegarmos a um sistema equivalente ao primeiro, só que mais simples de resolver.

Segundo Passo. Zerar os elementos abaixo e acima do pivô

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow 2 * L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Terceiro Passo. Para estar na forma escada, o primeiro elemento não nulo da segunda linha deve ser igual a 1, ou seja, o pivô deve ser igual a 1. Após feito isso, repetir os mesmos passos feito no segundo passo.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow 3 * L_2 + L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Quarto Passo. Para estar na forma escada, o primeiro elemento não nulo da terceira linha deve ser igual a 1, ou seja, o pivô deve ser igual a 1. Após feito isso, repetir os mesmos passos feito no 2º passo.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow \tfrac{L_3}{10} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3 * L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2 * L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa última matriz, está na forma escalonada ou na forma triangular.

Agora, vamos analisar o comportamento da matriz escalonada para sabermos se o sistema tem solução. Como o sistema possui todas as colunas com pivô, isso significa que o sistema é possível e determinado, ou seja, possui única solução. Obtemos o seguinte resultado:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & 4 \\ & 1 & & 2 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

conjunto solução {x = 4, y = 2, z = 1}.

Vamos resolver outro exemplo usando o mesmo método.

Exemplo 3.11

$$S_e = \begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 8z = 5 \end{cases}.$$

A matriz ampliada do sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares nas linhas da matriz, obtemos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 5 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow 2 * L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daí segue que, o sistema na sua forma escalonada possui a última linha igual a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Então, o sistema não possui solução.

3.4 MÉTODO DE GAUSS.

Esse método é semelhante ao anterior, porém envolve um menor número de operações elementares. Continua-se trabalhando com a matriz ampliada do sistema, aplicando as operações elementares de modo a chegar em um sistema equivalente. O que difere da forma escada é que.

- A coluna que contém o elemento pivô de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero.

Os algoritmos para esse método continuam os mesmos da forma escada mudando apenas o item 3, que passa a ser: Zere os elementos *abaixo* do pivô (aplicando as operações).

Para verificarmos como se aplica o método de Gauss em um sistema, resolveremos novamente o **Exemplo 3.10**.

$$S = \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 9 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Primeiro Passo. Escrever a matriz ampliada do sistema:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segundo Passo. Zerar os elementos abaixo do pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow 2 * L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow 3 * L_2 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{10} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

o próximo passo e reescrevê-la em forma de sistema, sendo esse novo sistema equivalente ao primeiro.

$$S_e = \begin{cases} x + y + z = 7 \ (i) \\ y + 3z = 5 \ (ii) \\ z = 1 \ (iii) \end{cases}.$$

Aplicando o **método da substituição** que vimos no começo desse capítulo, chegaremos ao conjunto solução desse sistema. Temos que $z = 1$, substituindo na equação (ii), encontramos $y = 2$ e, por fim, aplicando os dois valores na equação (i), tem-se $x = 4$. Portanto, o conjunto solução do sistema é {x = 4, y = 2, z = 1}.

Observação: Perceba que há uma semelhança muito grande entre este método e o anterior. o que tem de especial no escalonamento é o fato de que, no final do processo, obtemos a solução imediata do sistema. No entanto, aplicando um número maior de operações elementares do que o método de Gauss. Este é um fato importante que difere os dois métodos. No método de Gauss, o uso das operações é mais reduzido, porém temos que ainda utilizar o método da substituição para determinar o conjunto solução.

4 APLICAÇÕES.

Os estudos sobre sistemas de equações lineares é uma área da álgebra linear que possui diversas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Como, por exemplo: em circuitos elétricos, geração de imagens digitais, estrutura de um avião, alocação de recursos, no tráfego de veículos, planejamento da produção, tomografia computadorizada, no balanceamento de reações químicas, cálculo de estruturas (pontes, torres, edifícios, etc.), em transferência de calor, em dinâmica dos fluidos, na alimentação balanceada, na estatística, em robótica, navegação astronômica, sistema de posicionamento global (GPS), em geodésia, entre outras.

Nesse capítulo, iremos trazer algumas das possíveis aplicações de sistemas de equações lineares. Para que o trabalho não fique extenso, nos limitaremos a detalhar três aplicações envolvendo sistemas de equações lineares. Com isso, será possível verificar na prática como esse estudo está relacionado com outras áreas do conhecimento, assim como na Química, através de balanceamento de reações químicas, aplicação na Engenharia Elétrica, através de circuitos elétricos, e no tráfego de veículos.

Algumas dessas aplicações tais como na alimentação, no tráfego de veículos e etc. são situações que envolvem o nosso cotidiano. Esse tipo de situação não só pode como deve ser apresentada em sala de aula. De acordo com os Parametros Curriculares Nacionais PCNs,

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1997, p. 25)

4.1 APLICAÇÃO I: Circuitos Elétricos.

Para que seja possível compreender como são aplicados os sistemas lineares em circuitos elétricos, antes, é preciso introduzir os conceitos fundamentas, ou seja, as leis que os regem.

Em circuitos elétricos mais simples, encontramos os seguintes componentes: Bateria ou Gerador e Resistência ou Resistor.

Dentro do circuito, o papel da bateria, é de criar a corrente elétrica, e os resistores tem a função de limitar essa corrente. Nos estudos de circuitos elétricos, usamos algumas grandezas físicas e suas abreviações, tais como; potencial elétrico (E) que também é chamado de tensão elétrica e é medida em volts (V), a corrente elétrica (I) medida em amperes (A), resistência (R) medida em ohms (Ω).

Falaremos das leis básicas e posteriormente mostraremos como é possível obter através delas os sistemas de equações lineares, na qual sua solução é exatamente a corrente que fluem pelo circuito.

Para fazer uso destas leis é importante antes definirmos:

- Nó é um ponto do circuito onde se encontra no mínimo três elementos,
- Ramo é um trecho de um circuito compreendido entre dois nós consecutivos e
- Malha é um trecho fechado do circuito que forma uma trajetória elétrica.

De acordo com Kurokawa (2013), circuitos elétricos são regidos pelas seguintes leis:

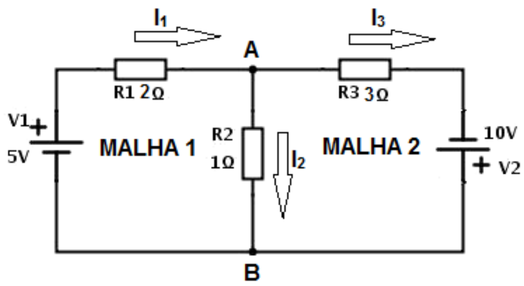
Lei de Ohms. A diferença do potencial elétrico através de uma resistência (lâmpada, motor, resistor) é o produto da corrente (I) pela resistência (R). Em outras palavras, a corrente elétrica ao passar por uma resistência, uma parte da tensão (potencial elétrico ou voltagem) é consumida ocasionando uma queda de tensão, que segundo a lei de Ohms e calculada por $V = I * R$.

Primeira Lei de Kirchhoff. "A soma algébrica das correntes em um nó é sempre igual à zero."Isso quer dizer que em um nó não é possível o armazenamento de carga, logo a quantidade de carga que entra no nó é exatamente igual a que saem dele. Usualmente, é considerada como positiva as correntes que entram e negativa as que saem do nó.

Segunda Lei de Kirchhoff. Em torno de qualquer circuito fechado (também chamado de malha), a soma algébrica das diferenças de potencial, (I.R) é zero.

Usando os conhecimentos acima fixados, vamos determinar as correntes elétricas do circuito abaixo.

Figura 4 – Circuito com duas Malhas

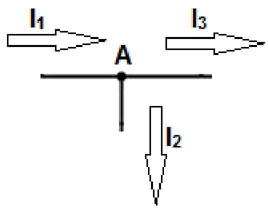


Fonte: Sousa (2016)

Para efeito de demonstração, usaremos um circuito simples com duas baterias e três resistores.

APLICAÇÃO DA PRIMEIRA LEI DE KIRCHHOFF: No ponto A, temos a corrente I_1 entrando e I_2 e I_3 saindo, como mostra a figura abaixo.

Figura 5 – Correntes no ponto A



Fonte: Sousa (2016)

Aplicando a primeira Lei de Kirchhoff, temos $I_1 = I_2 + I_3$, que implica em: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ equação (1). Como o número de equações não é suficiente para encontrarmos $I_1, I_2 e I_3$, vamos aplicar a segunda Lei de Kirchhoff. Antes, é preciso, por convenção escolhermos um sentido de fluxo da corrente. Vamos escolher o sentido horário. Esse sentido adotado nos revelará a seguinte informação no final do cálculo: caso as correntes resultantes I_1, I_2 ou I_3 tenham sinal negativo, isso vai significar que aquele sentido, entrando ou saindo do nó estava equivicado.

A segunda Lei de Kirchhoff será aplicada juntamente com a lei de Ohms ($V = R * I$) e será aplicada individualmente em cada malha. Assim, temos

$$S = \begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 - 5 = 0 \text{ (Malha 1)} \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 - 10 = 0 \text{ (Malha 2)} \end{cases}.$$

$$= \begin{cases} 2I_1 + I_2 = 5 \ (ii) \\ -I_2 + 3I_3 = 10 \ (iii) \end{cases}.$$

Juntando as três equações, obteremos o seguinte sistema:

$$S_1 = \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2 * I_1 + I_2 = 5 \\ -I_2 + 3 * I_3 = 10. \end{cases}$$

Agora, é so aplicar o melhor método de resolução. Usaremos aqui dois métodos diferentes, o método de escalomento e a regra de Cramer. Em todos os métodos utilizados, a solução do sistema sempre será a mesma.

MÉTODO DO ESCALONAMENTO.

Representação matricial do sistema, (matriz ampliada)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares nas linhas da matriz, temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow 2 * L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow (-1)L_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow 3L_2 + L_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & -35 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{(-11)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{11} \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{11} \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{30}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{11} \end{bmatrix}$$

Da matriz acima, obtemos o seguinte sistema que é equivalente ao sistema inicial.

$$S_e = \begin{cases} I_1 = \frac{30}{11} \ (1) \\ I_2 = \frac{-5}{11} \ (2) \\ I_3 = \frac{35}{11} \ (3) \end{cases}.$$

Perceba que o sistema fornece direto os valores de I_1, I_2 e I_3.

$$I_1 = \frac{30}{11}A;$$
$$I_2 = \frac{(-5)}{11}A;$$
$$I_3 = \frac{35}{11}A.$$

Observação: perceba que I_2 é negativo, $I_2 = \frac{(-5)}{11}$ Amperes, isso quer dizer que nos equivocamos quando assumimos que I_2 estava saindo do nó A, na verdade seu sentido real é entrando. O conjunto solução do sistema S é. $\{x = \frac{30}{11}, y = \frac{5}{11}, z = \frac{35}{11}\}$.

REGRA DE CRAMER

Resolvendo o mesmo problema usando o regra de Cramer, temos:

$$S_1 = \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2 * I_1 + I_2 = 5 \\ -I_2 + 3 * I_3 = 10. \end{cases}$$

Escrevendo S_1 na forma matricial $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Então o sistema possui única solução. Como

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 30.$$

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{vmatrix} = (-5).$$

$$det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 35.$$

Temos que a solução do sistema S_1 é.

$$x = \tfrac{30}{11},\ y = \tfrac{(-5)}{11},\ z = \tfrac{35}{11}.$$

4.2 APLICAÇÃO II: Fluxo de Tráfego.

Essa aplicação consiste em verificar a quantidade de veículos que passam por um certo cruzamento de mão única durante o horário de pico.

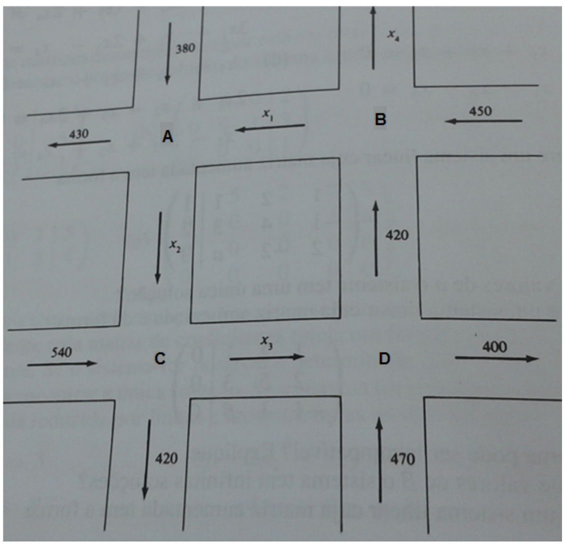
Esse tipo de aplicação é encontrado em vários livros, bem como no livro Álgebra Linear com Aplicações de Leon, S. J. (2008). O autor apresenta um exemplo na página 16, resolvendo passo a passo, e deixa um exercício na página 22.

Resolveremos o exercício proposto pelo autor para que possamos entender como essa situação do dia a dia está relacionada com o nosso estudo.

APRESENTANDO O PROBLEMA.

Em uma determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam como mostra a Figura 6. A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário de pico é dada também na Figura 6. Determine a quantidade de veículos entre cada um dos quatro cruzamentos.

Figura 6 – Cruzamentos de ruas de mão única



Fonte: Leon, 2008, p. 22

Queremos encontrar x_1, x_2, x_3 e x_4, onde x_1 representa a quantidade de veículos que entram no cruzamento A, x_2 a quantidade de veículos que entram no cruzamento C, x_3 a quantidade de veículos que entram no cruzamento D e x_4, a quantidade de veículos que saem do cruzamento B. Para encontrá-los, analisaremos o diagrama da seguinte forma: “a quantidade de veículos que entra em um cruzamento é exatamente a mesma que sai“.

Para o cruzamento A, temos: Número de veículos entrando = ao número de veículos saindo. Obtemos a seguinte equação: $380 + x_1 = 430 + x_2$.

Para o cruzamento B, temos: $450 + 420 = x_1 + x_4$.

Para o cruzamento C, temos: $540 + x_2 = 420 + x_3$.

Para o cruzamento D, temos: $470 + x_3 = 400 + 420$.

Agrupando as equações obteremos o seguinte sistema.

$$S = \begin{cases} 380 + x_1 = 430 + x_2 \\ 450 + 420 = x_1 + x_4 \\ 540 + x_2 = 420 + x_3 \\ 470 + x_3 = 400 + 420 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 430 - 380 \\ x_1 + x_4 = 450 + 420 \\ x_2 - x_3 = 420 - 540 \\ x_3 = 400 + 420 - 470 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 50 \quad (i) \\ x_1 + x_4 = 870 \quad (ii) \\ x_2 - x_3 = -120 \quad (iii) \\ x_3 = 350 \quad (iv) \end{cases}.$$

Do sistema acima, temos que, $x_3 = 350$. Usando o método da substituição. temos Aplicando (iv) em (iii)

$$x_2 - 350 = -120 \Rightarrow x_2 = -120 + 350 \Rightarrow x_2 = 230.$$

Assim, $x_2 = 230$. Aplicando x_2 em (i),

$$x_1 - 230 = 50 \Rightarrow x_1 = 230 + 50 \Rightarrow x_1 = 280.$$

Logo, $x_1 = 280$. Aplicando x_1 em (ii), obtemos

$$280 + x_4 = 870 \Rightarrow x_4 = 870 - 280 \Rightarrow x_4 = 590.$$

Ou seja, $x_4 = 590$.

O conjunto solução do sistema S é $\{\mathrm{x}_1 = 280, x_2 = 230, x_3 = 350, x_4 = 590\}$.

Método do escalonamento

Agora vamos resolver o mesmo exemplo usando outro método. Usaremos o método do escalonamento para chegarmos ao mesmo conjunto solução.

Do sistema inicial, temos a seguinte matriz ampliada,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{bmatrix}.$$

aplicando as aperações elementares entre as linhas, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 940 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 940 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 940 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 540 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 540 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 540 \end{bmatrix} \Rightarrow S_e = \begin{cases} x_1 = 280 \\ x_2 = 230 \\ x_3 = 350 \\ x_4 = 540 \end{cases}.$$

Assim, temos o mesmo conjuto solução, como já sabíamos.

4.3 APLICAÇÃO III: Balanceamento de Reações Químicas.

Essa é outra área do conhecimento onde são aplicados os estudos de sistemas de equações lineares.

Para fazer o balanceamento de reações químicas, existem alguns métodos como por tentativas, método redox, método íon-elétron, método algébrico. Apresentaremos aqui apenas o método algébrico, por ser o método mais próximo do nosso tema.

Antes de descrever essa aplicação, faz-se necessário compreendermos um pouco da teoria de balanceamento de reações químicas.

A ESTEQUIOMETRIA é uma ferramenta da Química que está inteiramente ligada à compreensão de massas atômicas e é regida pela Lei da conservação das massas (LAVOISIER, 1789). Tem como principal função dentre outras, informar a quantidade de reagentes que deve ser adicionada em uma reação para obter uma determinada quantidade de produto.

Segundo Vieira (2016, p. 4), "o balanceamento de equações químicas deve ser feito sempre que se deseja retirar alguma informação acerca de uma reação fornecida".

Para que ocorra de maneira correta o processo de balanceamento de equações químicas, é necessário que se atenda alguns princípios, como explica e exemplifica Vieira (2016)

> 1) Lei de conservação de massa: indica que a soma das massas de todos os reagentes deve ser sempre igual à soma das massas de todos os produtos (princípio de Lavoisier). 2) Lei das proporções definidas: Os produtos de uma reação são dotados de uma relação proporcional de massa com os reagentes. Assim, se 12g de C reagem com 36g de oxigênio para formar 48g de CO_2, 6g de C reagem com 18g de oxigênio para formar 24g de CO_2. 3) Proporção atômica: De maneira análoga à lei das proporções definidas, os coeficientes estequiométricos devem satisfazer as atomicidades das moléculas de ambos os lados da equação. Portanto, são necessárias 3 moléculas de oxigênio (O_2) para formar 2 moléculas de ozônio (O_3). (Idem, p. 5).

E, segundo Vieira (2016),

> Para que uma equação encontre-se devidamente balanceada, é necessário que se tenha um balanço de cargas, ou seja, a carga final dos produtos deve ser igual à carga final dos reagentes e que átomos de um mesmo elemento químico estejam presentes em igual quantidade tanto nos reagentes quanto nos produtos. (Idem, p. 1)

EXEMPLO CLÁSSICO.

Apresentaremos um exemplo clássico de uma equação balanceada e de outra que não está balanceada, para que possamos internalizar os conceitos de balanceamento de equações químicas.

Exemplo 4.1 Equação balanceada: $C + O_2 \rightarrow CO_2$.

Em uma reação química, como essa acima, o símbolo ($\rightarrow$) tem a mesma função da igualdade ($=$) em uma equação linear. Ele serve para separar o primeiro e o segundo membros. No primeiro membro, encontram-se os reagentes; no segundo, está o produto que é o resultado do processo feito pelos reagentes. Perceba no exemplo que há um átomo de Carbono no reagente e um átomo de Carbono no produto, assim como há dois átomos de Oxigênio no reagente e dois átomos de Oxigênio no produto. Logo, a equação atende aos princípios do balanceamento e, portanto, está balanceada.

Exemplo 4.2 Equação química não balanceada: $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

Perceba que existem dois átomos de Hidrogênio no reagente e dois átomos de Hidrogênio no produto. Até aqui, tudo certo! Porém, quando analisamos a outra parcela do reagente, perceba que há dois átomos de Oxigênio nesse reagente e apenas um átomo no produto. Fica evidente que há um desequilíbrio, ou seja, a equação não está balanceada.

Vamos fazer o balanceamento dela calculando os coeficientes estequiométricos. Vejamos como fica a equação:

$xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$, onde x, y e z são os nossos coeficientes estequiométricos. Obtemos assim, o seguinte sistema.

$$S = \begin{cases} 2x = 2z \quad (Hidrog\hat{e}nio) \\ 2y = z \quad (Oxig\hat{e}nio) \end{cases}.$$

O sistema possui três incógnitas e duas equações, se tratando de um sistema possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções. Colocando as incógnitas x e z em função de y, temos o conjunto o solução $S = \{x = 2y, y = y, z = 2y\}$ como resultado. Por simplificação, utilizaremos o menor inteiro positivo, $y = 1$, obtendo assim $x = 2$ e $z = 2$. Aplicando esses valores na equação temos, $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.

Analisando agora a equação, vemos que ela possui quatro átomos de Hidrogênio no reagente e quatro no produto e dois átomos de Oxigênio no reagente e dois no produto. Agora a reação está balanceada.

Considere agora a reação,

$$C_2H_6O + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

que representa a combustão completa do etanol C_2H_6O. Vamos banlancear esta reação. Consideremos x, y, z e w os coeficientes estequiométricos. Assim temos:

$$xC_2H_6O + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O$$

$$S = \begin{cases} 2x = z \ (Carbono) \\ 6x = 2w \ (Hidrog\hat{e}nio) \\ x + 2y = 2z + w \ (Oxig\hat{e}nio) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = z \ (i) \\ 6x = 2w \ (ii) \\ x + 2y = 2z + w \ (iii) \end{cases}$$

Como o sistema possui três equações e quatro incógnitas, vamos mostrar que do sistema, temos de imediato que $z = 2x$. Portanto, possuirá infinitas soluções. De fato, de (ii), segue que $w = 3x$.

Aplicando $w = 3x$ e $z = 2x$ em (iii), segue que $y = 3x$.

O conjunto solução é dado em função da variável x, sendo $\{x = x, y = 3x, z = 2x, w = 3x\}$. Considerando o menor inteiro positivo, $x = 1$, temos $\{x = 1, y = 3, z = 2, w = 3\}$. Portanto, a equação balanceada é $C_2H_6O + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a verificação de algumas das possíveis aplicações de sistemas de equações lineares em situações problemas, dando-nos uma visão mais ampla das áreas distintas de conhecimentos, onde é possível aplicar esse estudo. Além disso, permitiu o uso de alguns métodos de resolução para obter o resultado. De modo geral, essas aplicações tiveram um único propósito, viabilizar o estudo de Sistemas de Equações Lineares, que no decorrer da pesquisa notamos ser um dos conteúdo que pode quebra as barreiras da sala de aula, quando é contextualizado com situações reais, fazendo com que o leitor perceba a importância e a presença da Matemática no nosso cotidiano.

No capítulo 2 e 3, encontramos o referencial teórico e o suporte necessário para apresentar as aplicações e, com a finalização do capítulo 4, ficou evidente que o objetivo principal do trabalho foi realmente alcançado.

Desta forma mostramos algumas aplicações simples e práticas da interação da matemática com as situações concretas a partir de três aplicações distintas, sendo elas: Circuitos elétricos, tráfego de veículos e balanceamento de reações Químicas.

Portanto, mostrar algumas das aplicações de Sistemas Lineares permite uma aproximação da matemática abstrata com a realidade, possibilitando o entendimento da importância desse estudo e a compreessão de como ultilizá-lo para resolver problemas do cotidiano. Desse modo, fazendo com que o ensino da matemática cumpra o seu papel, contribuindo assim para a formação integral do indivíduo.

Dada a importância da pesquisa acreditamos ter contribuído com o ensino da álgebra linear, tanto para o curso superior quanto à educação básica, e esperamos que esse trabalho possibilite e inspire a elaboração de outros, onde o autor poderá se aprofundar mais no tema, por exemplo: apresentar situações que envolvam aplicações com números complexos, exemplos com o número maior de incógnitas e de equações, na qual poderia fazer uso de software como recurso para auxiliar na resolução.

Referências

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra linear contemporânea**. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOLDRINI, J. L., *et al.* **Álgebra Linear**.3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

[3] BOYER, Carl B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[4] BRASIL,Alex N.**Geometria Analítica e Álgebra Linear**. [S.l]. 2010. Disponível em:<http://alexbrasil.com.br/_upload/8ef698359eec6a3a586ce408ff93be8e.pdf>. Acesso em: 04 Dez. 2016.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações, Manual do Professor. 2. ed. Volume 2. São Paulo, Ática 2013.

[6] CAMPUS, Edson Marcos Silvestre.**A HISTÓRIA DOS SISTEMAS LINEARES**. Afogados da Ingazeira. 2010. Disponível em:<http://ferinhasdafafopai.blogspot.com.br/2010/05/historia-dos-sistemas-lineares-antes-de.html>. Acesso em: 10 Jul. 2015.

[7] IEZZI, G. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**. 7 ed. São Paulo, Atual 2004.

[8] KURAKAWA, Sérgio.**Eletricidade Análise de Circuitos alimentados por fontes constantes**. Ilha Solteira. 2013. Disponível em:<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/apostila_eletricidade.pdf>. Acesso em 20 Jul. 2015.

[9] LAMIN, Maria Regina Nunes. **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**. Florianópolis. 2000. Disponível em:<http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Maria_Regina_Nunes_Lamin.PDF>. Acesso em 16 Nov. 2015.

[10] LAY, David C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2. ed. Tradução Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

[11] LEON, Steven J., **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Tradução Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[12] PESCADOR, A.; POSSAMAI, J. P.; POSSAMAI, C. R. **APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA ENGENHARIA.** In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 39., 2011. Santa Catarina. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2011/sessoestec/art2127.pdf>. Acesso em: 16 Nov. 2015.

[13] RANGEL, Walter Sérvulo Araújo. **PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA E SISTEMAS LINEARES PARA OS ENSINOS SUPERIOR E MÉDIO**. 2011. 45f. Dissertação(Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade Federal de Ouro Preto Instituto de Ciências Exatas e Biológicas Departamento de Matemática, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2448> Acesso em: 23 Nov. 2015.

[14] RUFATO, Sônia Aparecida Carreira. **SISTEMAS LINEARES, APLICAÇÃO EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**. 2014. 55f. Dissertação(Mestre-Programa de Mestrado Profissional em Matemática) Instituto de Ciências Matemática e de Computação - ICMC-USP, São Carlos, 2014.Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-19032014-102209/pt-br.php>. Acesso em: 17 Nov. 2015.

[15] SILVA, L. C.; FEITOZA, S. A. C., **APLICAÇÕES PRÁTICAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**, 2011. Disponível em: <http://www.fiar.com.br/revista/pdf/1347464542APLICAES_PRTICAS_DE_SISTEMAS_DE_EQUAES_LINEARES5050ad5e9dc99.pdf>. Acesso em 16 Nov. 2015.

[16] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normatização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.

[17] VIEIRA, Flaviana Tavares. **Estequimetria**, 2013. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/flavianatavares/files/2013/04/

4-Estequiometria-e-Metodos-de-Balanceamento.pdf>. Acesso em: 21 Ago. 2016.