UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEE-ANDRO ALVES DOS SANTOS

O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

ARAGUAÍNA
2016

LEE-ANDRO ALVES DOS SANTOS

O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA

2016

LEE-ANDRO ALVES DOS SANTOS

O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof.segundo membro da banca

Prof. terceiro membro da banca

Ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Em 2008, ano em que meu irmão e eu concluímos o Ensino Médio, nosso pai dirigiu-se a nós respeitavelmente e, como homem inteirado do poder do conhecimento na vida de uma pessoa, nos disse: “O Ensino Médio é a educação básica que eu acho que todas as pessoas deveriam ter. Eu jamais poderia deixá-los sem essa mínima formação. Contudo, daqui pra frente, vocês tem autonomia para escolher se querem continuar estudando ou se preferem trabalhar. A decisão é de vocês! Contudo, queria que soubessem que, caso escolham estudar, eu vou dar todas as condições necessárias, de modo que a única preocupação que terão será o estudo. Não precisarão pagar aluguel e, tampouco, trabalhar. Quero dar a vocês a oportunidade que eu não tive.” Foram mais ou menos essas as palavras do meu pai. Pra mim, elas caíram como uma luva. Enquanto meu irmão saiu de casa para trabalhar, eu resolvi realizar meu sonho, estudar matemática na Universidade e, de quebra, dar esse gosto de prazer ao meu pai. Hoje, eu sou o que sou e sei o que sei graças ao meu pai (meu herói). E é a ele que eu gostaria de dar meus primeiros agradecimentos. Muito obrigado, pai! Esse trabalho é uma realização nossa. Não poderia deixar de lado, é claro, minha amada mãe, que me gracejou com a vida. Uma mulher exemplar como mãe, esposa e dona de casa. Uma vida inteira dedicada à sua família. Cada gota do seu suor derramada em prol da minha educação acha-se aqui permeando as entrelinhas desse trabalho. Obrigado, mãe!

Gostaria de agradecer também aos meus amados irmãos, Dooglas e Bruna, que participaram efetivamente e de inúmeras maneiras na minha vida acadêmica. Sempre a postos, eles ajudavam-me no que fosse preciso: dinheiro, locomoção, palavras de incentivo, etc. Esse trabalho reflete os esforços que vocês dispensaram sobre mim. Obrigado!

Não menos importante, devo minha desmedida gratidão à minha esposa, Daiane. Companheira fiel de todas as horas, sempre ao meu lado caminhando junto, de mãos dadas, a estrada da vida. Seus ombros, em muitas ocasiões, serviram e continuarão servindo de oásis em momentos de dificuldade. Fruto do nosso amor incontido e desenfreado, germinou um pequeno ser que nos liga para sempre. Tão pequeno e tão inspirador, ele transformou nossas vidas e nos fez conhecer o amor desmedido, sem forma nem tamanho, o amor incondicional. Nosso filho, Caleb. Obrigado, Daiane, por tornar minha passagem na Universidade mais fácil.

Por último, devo meus agradecimentos aos professores Roblêdo, Álvaro, André, Renata e Freud, bem como ao Pastor Hernandes que contribuíram diretamente não só com minha formação acadêmica, mas também pessoal e emocional. São mestres da vida. Em especial, meu colossal agradecimento ao meu querido e amigo professor José Carlos, que tomou a responsabilidade de orientar o meu trabalho com a carruagem em andamento. Sensíveis e, ao mesmo tempo, profundas, suas lições no âmbito acadêmico e pessoal são, agora, essência do meu eu. De forma peculiar, soube conduzir o bom andamento desse trabalho, e o produto de seus esforços vai muito além desse texto, acha-se na minha formação acadêmica, pessoal e, futuramente, profissional. Obrigado, professor!

Meus sinceros agradecimentos a todos vocês!

*O*s limites de minha linguagem significam os limites de meu mundo.

Ludwing Wittgestein

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo sobre o Teorema da Função Inversa, um dos resultados mais importantes da Análise. Para compreender este teorema, será necessária uma discussão sobre os espaços euclidianos $\mathbb{R}^N$, que contém as definições de aplicações contínuas e diferenciáveis como também conhecer o Teorema do Ponto Fixo de Banach, essencial para o entendimento e para a demonstração do Teorema da Função Inversa. Introduziremos este trabalho apresentando conceitos simples do cálculo de funções reais de uma variável, para que, no final, possamos relacionar estes conceitos com o teorema principal.

Palavras-chave: Função Inversa. Ponto Fixo de Banach. Matriz Jacobiana.

ABSTRACT

This work has as main objective the study on the Inverse Function Theorem, one of the most important results of the Analysis. To understand this theorem, it will be necessary to discuss the Euclidean spaces $\mathbb{R}^N$, which contains the definitions of continuous and differentiable applications, as well as to know the Banach Fixed-Point Theorem, essential for understanding and for The proof of the inverse function theorem. We will introduce this work presenting simple concepts of the calculation of real functions of one variable, so that, in the end, we can relate these concepts to the main theorem.

Keywords: Inverse Function. Banach Fixed Point. Jacobian Matrix.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Se uma variável dependente y está relacionada com uma variável independente x por meio da função f, isto é, se $y = f(x)$, ficamos sabendo exatamente como y varia quando x varia. Poderemos, contudo, estar interessados em saber como varia a mesma variável x quando fazemos variar y, isto é, como muda a variável x quando y varia, o que significa encontrar uma outra função g tal que y passe a ser a variável independente, e x a ser a variável dependente, ou seja, encontrar uma função g tal que $x = g(y)$. Esta função g pode existir ou não. Se existir, chama-se *função inversa* de f e denota-se por f^{-1}.

Algumas das questões de interesse deste trabalho são: quando existirá a função g? Em outras palavras, quais as condições suficientes para que a função f tenha uma inversa? E, quanto à sua inversa, o que podemos falar acerca dela? Para responder a essas perguntas e outras mais, faremos uso do *Teorema da Função Inversa*.

O Teorema da Função Inversa é um importante resultado da Análise que refere-se sobre a eventualidade de inverter uma função numa determinada região em torno de um ponto. Além disso, esse teorema estabelece propriedades em relação a diferenciabilidade desta inversa. Essencialmente, o Teorema da Função Inversa diz que, se $f'(x_0)$ é inversível, então f é inversível numa região que contém x_0. Esta regra usa o *determinante da matriz Jacobiana da função*, como veremos no capítulo 2.

Para título de ilustração, examinemos, por exemplo, a função $f(x) = \text{sen}(x)$. É possível invertê-la? Sob quais condições? Vejamos.

O teorema trata da condição de existência de um ponto x_0 tal que $f'(x_0)$ seja inversível. Nesse caso, a derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ é $f'(x) = \cos(x)$. Observe que este número é diferente de zero se, e somente se, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, para $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, por exemplo, temos que $f'(x_0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Como $f'(x_0) \neq 0$ (no caso de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto equivale a dizer que $f'(x_0)$ é inversível), o Teorema da Função Inversa garante que, para todo x suficientemente próximo de $\dfrac{\pi}{3}$, f é inversível. Isso fica ainda mais claro quando analisamos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ nos pontos em que $f'(x) = \cos(x)$

é diferente de zero. Vê-se, facilmente, a existência de um intervalo I em torno desses pontos, onde é possível inverter a função f. Note ainda que a inversa da função f (que, sabemos do Cálculo, é a função $g(y) = \text{arcsen}(y)$) possui a mesma regularidade que a própria função f (regularidade aqui significa o quão diferenciável é a função).

Neste trabalho, vamos enunciar o Teorema da Função Inversa e demonstrá-lo. Para tanto, necessitaremos de um aporte de resultados que vão elucidar este importante conceito matemático.

No capítulo 2, abordaremos os principais resultados elementares no que diz respeito à Topologia dos Espaços Euclidianos $\mathbb{R}^N$, com ênfase para os casos $N = 1, 2, 3$. Estes resultados são de fundamental importância, pois servirão de embasamento para os pincipais resultados deste trabalho, a saber: O Teorema do Ponto Fixo de Banach e, sobretudo, O Teorema da Função Inversa. Em particular, vamos explorar o conceito de norma de um vetor que induz naturalmente uma noção de distância entre dois pontos, cuja ideia será importante para definir espaços métricos na seção 2.6. Veremos também brevemente o conceito de sequência de pontos em $\mathbb{R}^N$, conjuntos abertos e fechados.

Na seção 2.3, estudaremos as funções contínuas e algumas de suas propriedades. Introduziremos a definição de função contínua, Lipschiziana e contração em espaços normados. Esses conceitos também serão vistos de forma mais breve na seção 2.6 sob o prisma de espaços métricos.

Na seção 2.4, apresentaremos a definição de diferenciabilidade de uma função e as condições necessárias e suficientes para que estas sejam diferenciáveis. Veremos também a técnica de aproximar uma função vetorial por uma função afim a qual nos permitirá estender o conceito de derivada de funções reais de uma variável real para funções vetoriais.

Na seção 2.5, abordaremos concisamente a Regra da Cadeia, que consiste num método de derivar funções compostas e que estabelece uma relação entre as derivadas das funções da composição.

O capítulo 3 é dedicado exclusivamente para a demonstração do Teorema da Função Inversa e alguns resultados preliminares. Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos os resultados complementares ao texto que darão uma compreensão melhor deste.

É importante salientar que o leitor deste trabalho já tenha uma certa familiaridade com Álgebra Linear e Cálculo. De Álgebra Linear, conceitos básicos como espaços vetoriais e transformações lineares são necessários. Do Cálculo, convém saber sobre diferenciabilidade de funções e suas propriedades. O trabalho conta com um capítulo (Capítulo 4) contendo alguns resultados da Álgebra Linear e da Análise, necessários para seu desenvolvimento. Bom proveito!

Capítulo 2

Alguns Conceitos da Análise no $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo, apresentaremos as principais definições e resultados elementares sobre a topologia dos espaços euclidianos, que possuem uma noção de norma de um vetor. Descreveremos um aparato importante que servirá como fundamentação para os principais resultados deste trabalho. Noções como conjuntos abertos, fechados, e funções contínuas serão enfatizados.

2.1 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, abordaremos os conceitos elementares do Espaço Vetorial $\mathbb{R}^N$, bem como definiremos *espaço normado* e suas propriedades e *espaço métrico*, dando destaque ao primeiro. Veremos mais sobre espaços métricos na seção 2.6.

Seja N um número natural. O espaço *euclidiano N-dimensional* é o produto cartesiano de N fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de $\mathbb{R}^N$ são, pois, todas as N-listas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cujas coordenadas $x_1, x_2 \ldots, x_N$ são números reais. É possível dar uma noção de espaço vetorial para $\mathbb{R}^N$. Isso pode ser feito da seguinte maneira: dados $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ em $\mathbb{R}^N$, tem-se $x = y$ se, e somente-se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_N = y_N$. Se α é um número real qualquer, definimos a soma $x + y$ e o produto $\alpha \cdot x$ pondo

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_N).$$

Estas operações fazem de $\mathbb{R}^N$ um *espaço vetorial* de dimensão N sobre o corpo dos reais, no qual o elemento neutro para a adição é o $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, o elemento simétrico de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_N)$ e a base canônica é formada pelos vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,. . .,$e_N = (0, 0, \ldots, 1)$. A igualdade $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$

significa que $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_N \cdot e_N$. Os elementos de $\mathbb{R}^N$ serão às vezes chamados pontos e às vezes vetores.

É interessante você relembrar as propriedades de um espaço vetorial. Veja [2], capítulo 4, página 97.

Definição 2.1. *Dado um espaço vetorial $U \subset \mathbb{R}^N$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, uma função $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}^+$ é chamada de norma se, para quaisquer $x, y \in U$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,*

1. $\|x\| \geq 0$ com $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desiguladade Triangular).*

Se o espaço vetorial U tem uma norma, ele passa a ser chamado de *espaço normado*, e denotado por $(U, \|\cdot\|)$. A norma de $\mathbb{R}^N$ que mais vamos utilizar é a norma *euclidiana*, dada por

$$\|\cdot\| : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in U \to \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}.$$

Veremos que outras normas podem ser definidas em $\mathbb{R}^N$. Sempre que não fizermos uma referência clara à norma, estaremos subentendendo que a norma usada é a norma euclidiana.

No nosso estudo, de forma geral, vamos trabalhar nos espaços $\mathbb{R}^N$ para $N = 1, 2$ e 3 . Isso nos permitirá visualizar geometricamente os conceitos que vamos explorar.

Definição 2.2. *Duas normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ sobre o mesmo espaço vetorial $U \subset \mathbb{R}^N$ são ditas equivalentes se existirem constantes reais positivas c_1 e c_2 ($c_1 \leq c_2$) tais que:*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \ \ \forall x \in U.$$

Nos espaços euclidianos, acontece algo interessante sobre normas. Elas são todas equivalentes, no sentido de que uma bola gerada por uma norma pode ser colocada dentro de outra, seja qual for a norma usada nesta última. Desse fato, decorre o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^N$ são equivalentes.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5], capítulo 1, página 19. Com este teorema em mãos, quando definirmos convergência, continuidade e diferenciabilidade mais adiante, a escolha das normas para se trabalhar não alterará o resultado final. Faremos novamente esta observação sempre em momentos oportunos.

Uma norma em $\mathbb{R}^N$ dá origem à noção de *distância* $d(x, y)$ entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^N$. Esta noção nos fornece uma forma de falar sobre proximidade e vizinhança que, por sua vez, possibilita definir conceitos essenciais para este trabalho, tais como convergência de sequências, continuidade e diferenciabilidade de funções.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$. A distância entre x e y é dada por,

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

As três condições que definem uma norma implicam que $d(x, y)$ tem as propriedades características de uma distância, a saber:

M1. $d(x,y) \geq 0$ com $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

M2. $d(x,y) = d(y,x)$;

M3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Desigualdade Triangular).*

Essas três propriedades caracterizam o que denominamos de *espaço métrico*. Intuitivamente, um espaço métrico é um conjunto no qual temos um modo de medir a distância entre seus pontos. Por exemplo, a expressão

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2},$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in M \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto qualquer, calcula o comprimento do segmento de reta que une esses dois pontos. Isso está correto! No entanto, podemos ter mais que uma maneira de medir distâncias, como vemos a seguir.

Definição 2.4. *Seja M um conjunto qualquer, com $M \neq \varnothing$, e seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função. Indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par $(x, y) \in M \times M$, através da função d. Se d satisfaz as propriedades M1, M2 e M3, então d é chamada uma métrica sobre M.*

Um par (M, d), onde d é uma métrica sobre M, é o que chamamos de *espaço métrico*. Qualquer função que satisfaz estas três propriedades pode ser usada para medir distâncias. Falaremos mais sobre espaços métricos na seção 2.6.

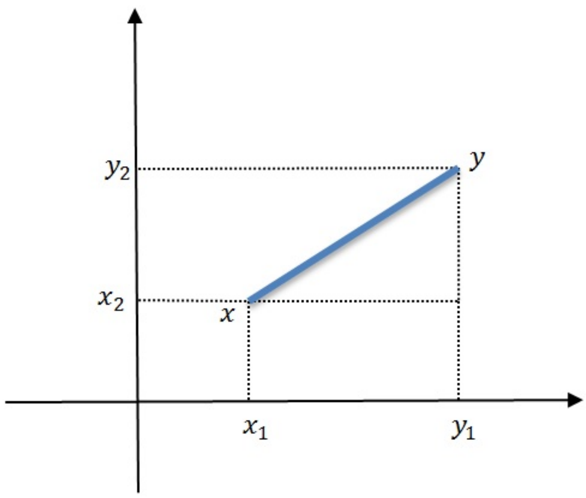
Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ pontos de $U \subset \mathbb{R}^N$, onde U é um espaço normado. Há duas outras normas que poderemos utilizar em $\mathbb{R}^N$ quando houver conveniência. Elas são

1. $\|x - y\|_M = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots, |x_N - y_N|\}$ (norma do máximo),

2. $\|x - y\|_S = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_N - y_N|$ (norma da soma).

Geometricamente, no plano $\mathbb{R}^2$, a norma $\|x - y\|$ representa a distância euclidiana entre os pontos x e y como mostra a figura abaixo.

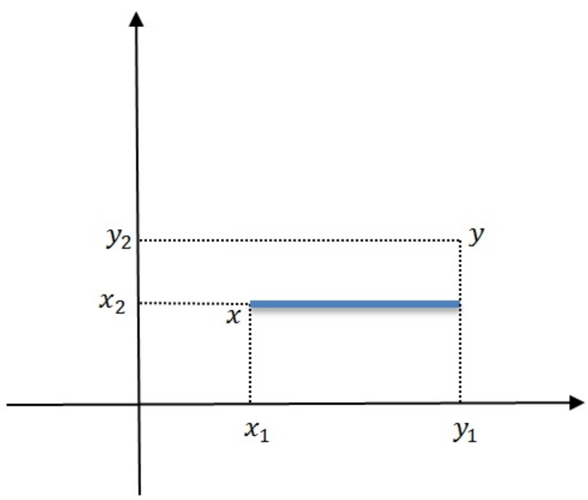
Figura 2.1: Norma Euclidiana



Fonte: Arquivo pessoal.

A norma $\|x - y\|_M$ calcula a distância entre dois pontos considerando a maior distância entre as distâncias em todas as direções. A figura abaixo mostra um exemplo geométrico em $\mathbb{R}^2$.

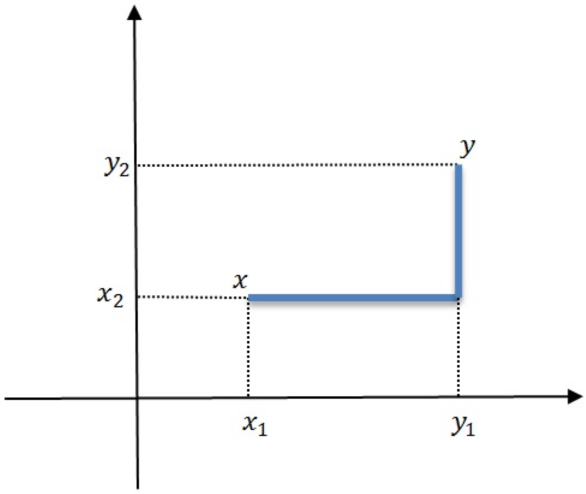
Figura 2.2: Norma do Máximo



Fonte: Arquivo pessoal.

Por fim, a norma $\|x-y\|_S$ em $\mathbb{R}^N$ é a soma das distâncias em cada direção. A figura seguinte mostra um exemplo em $\mathbb{R}^2$.

Figura 2.3: Norma da Soma



Fonte: Arquivo pessoal.

2.2 Topologia dos Espaços $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, continuaremos apresentando conceitos básicos essenciais que necessitaremos no decorrer deste trabalho. Introduziremos a noção de bola aberta e fechada que é fundamental para introduzir os conceitos de conjuntos abertos e fechados e outras noções topológicas.

Definição 2.5. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um espaço normado, $a \in U$ e $r > 0$ um número real. Definimos:*
i) A bola aberta de centro a e raio r como:

$$B(a; r) = \{x \in U;\ \|x - a\| < r\}.$$

ii) A bola fechada de centro a e raio r:

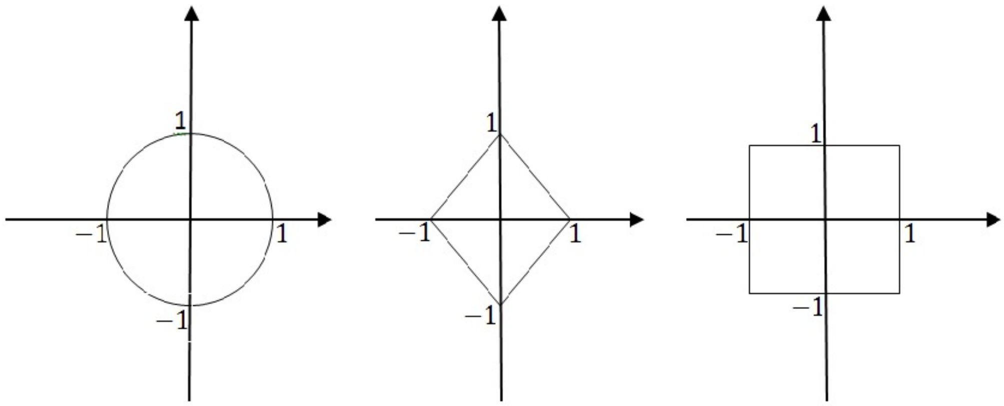
$$B[a; r] = \{x \in U;\ \|x - a\| \leq r\}.$$

(iii) A esfera de centro a e raio r:

$$S[a; r] = \{x \in U;\ \|x - a\| = r\}.$$

Exemplo 2.6. *Sejam $U = \mathbb{R}^2, a = (0, 0)$ e $r = 1$. As esferas $S[(0, 0), 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \|(x, y) - (0, 0)\| = 1\}$ relativas às normas euclidiana, da soma e do máximo, possuem respectivamente as formas dadas na figura abaixo.*

Figura 2.4: Bolas em diferentes normas: norma euclidiana, da soma e do máximo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 2.7. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um espaço normado. Diz-se que o conjunto $V \subset U$ é limitado quando, para algum $r > 0, V$ está contido em alguma bola $B[a;r]$. Equivalentemente, V é limitado se existe $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$ pra qualquer $x \in V$.*

Exemplo 2.8. *Toda bola aberta $B(a;r)$ em $\mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^N$.*

Afirmamos que a $B(a;r) \subset B[0;k]$, onde $k = r + \|a\|$. De fato, note que

$$\|x - a\| < r \Rightarrow \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\|.$$

Assim, $x \in B(a;r) \Rightarrow x \in B[a; r + \|a\|]$ $\square$

Seja V um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Um ponto $a \in V$ chama-se um *ponto interior* a V quando é centro de alguma bola aberta contida em V, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in V$. O *interior* de V é o conjunto $intV$, formado pelos pontos interiores a V.

Exemplo 2.9. *Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0$ e $y \geq 0\}$*

a) Todo (x, y), com $x > 0$ e $y > 0$, é ponto interior de V

b) Todo (x, y), com $x = 0$ ou $y = 0$, não é ponto interior de V.

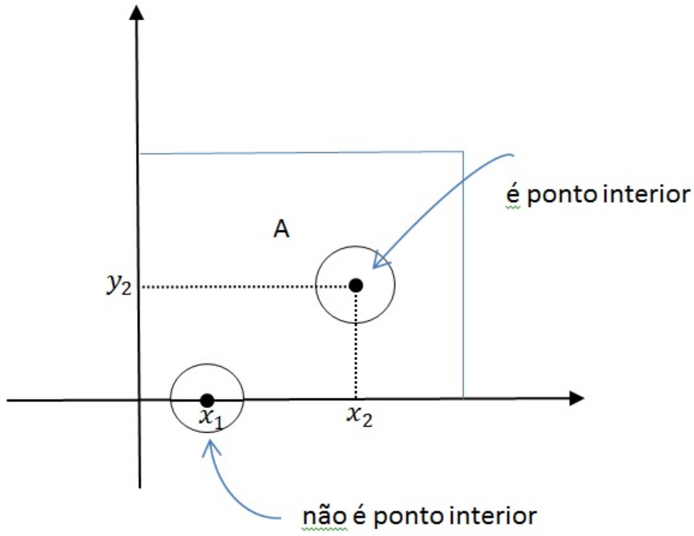
De fato,

a) se $(x_2, y_2) \in V$, com $x_2 > 0$ e $y_2 > 0$, então a bola aberta de centro (x_2, y_2) e raio $r =$mín$\{x_2, y_2\}$ está contida em V; logo, (x_2, y_2) é ponto interior de V.

b) se $(x_1, y_1) \in V$, com $x_1 \neq 0$ e $y_1 = 0$, então (x_1, y_1) não é ponto interior de V, pois V não contém nenhuma bola aberta de centro (x_1, y_1).

$\square$

Figura 2.5: Ponto interior e ponto não interior.



Fonte: Arquivo pessoal.

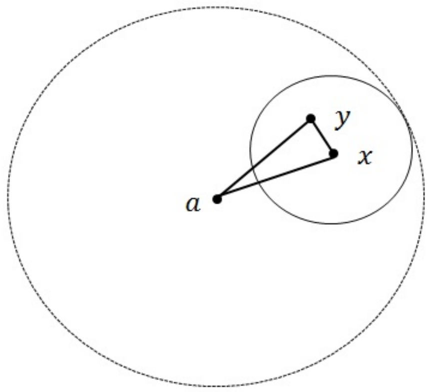
Definição 2.10. *Um conjunto $V \subset \mathbb{R}^N$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in V$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \subset V$. Assim, V é aberto $\Leftrightarrow intV = V$.*

Como veremos na seção 2.4, os conjuntos abertos são fundamentais para definir diferenciabilidade de uma função num dado ponto, pois eles permitem falar de proximidade e limite em qualquer direção tomada. Um exemplo importante de conjunto aberto que será empregado na demonstração do Teorema da Função Inversa é visto a seguir.

Exemplo 2.11. *Uma bola aberta $B(a;r) \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto.*

Com efeito, dado qualquer $x \in B(a;r)$, temos $\|x-a\| < r$, logo o número $\delta = r - \|x-a\|$ é positivo. Afirmamos que $B(x;\delta) \subset B(a;r)$. De fato, $y \in B(x;\delta) \Rightarrow \|y-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\| < \delta + \|x-a\| = r \Rightarrow y \in B(a;r)$.

Figura 2.6: A Bola aberta como conjunto aberto



Fonte: Arquivo pessoal.

□

Uma sequência em um conjunto V qualquer é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow V$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. A imagem que essa aplicação assume no número n é indicada com x_n e chama-se o n-*ésimo termo* da sequência. Usaremos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente, (x_n), para indicar a sequência cujo n-*ésimo* termo é $x_n \in V$.

Quando $V = \mathbb{R}$ são exemplos de sequências:

a) $(\sqrt{2})_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}, \ldots)$;

b) $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$;

c) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$.

Um exemplo de sequência em $V = \mathbb{R}^2$:

d) $\left(\dfrac{1}{n}, n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1,1), \left(\dfrac{1}{2}, 4\right), \left(\dfrac{1}{3}, 9\right) \ldots\right)$.

Seja V um conjunto qualquer. Diz-se que a sequência $(x_n) \in V$ é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^N$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.12. *Seja* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *com* $(x_n) = \dfrac{1}{2^n}$. *Neste caso, obtemos a sequência* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right)$.

Afirmamos que (x_n) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer. Suponha que $m > n$, então temos:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}.$$

Como $m > n$ então $2^m > 2^n$ o que implica que $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n}$. Assim, obtemos:

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Além disso, como $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ então $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$. Logo, $|x_m - x_n| \leq 1$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, ou seja, x_n é limitada. $\square$

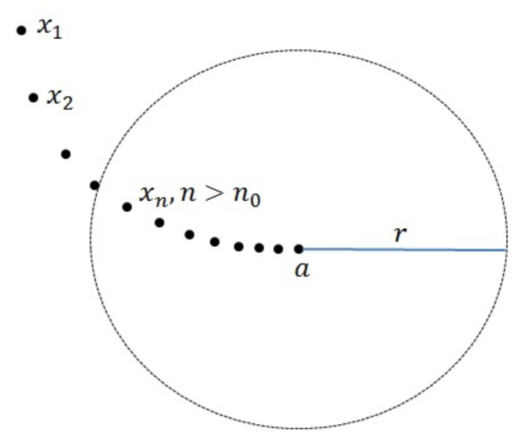
Definição 2.13. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ um espaço normado e (x_n) uma sequência em X. Diz-se que o ponto $a \in X$ é o limite da sequência de pontos x_n quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon$. Neste caso, diz-se também que (x_n) converge para a ou tende para a, e escreve-se lim $x_n = a$.*

Quando existe o limite $a = \lim x_n$, diz-se que a sequência (x_n) é *convergente*. Caso contrário, diz-se que (x_n) é *divergente*.

Tem-se $\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim \|x_n - a\| = 0$. Isto reduz a convergência em $\mathbb{R}^N$ à convergência de números reais.

Em termos de bola, tem-se $\lim x_n = a$ se, e somente se, qualquer bola aberta de centro a contém todos o termos x_n salvo, possivelmente, para um número finito de índices n. A visualização geométrica disso é ilustrada na figura abaixo.

Figura 2.7: O ponto a como limite da sequência (x_n).



Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 2.14. *A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge para o ponto $a = (1, 0, 0)$.*

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\|x_n - a\| &= \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n}{n} - 0\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Observe que $\|x_n - a\|$ é uma sequência de números reais que converge para zero, isto é, $\lim \|x_n - a\| = 0$, pois é o produto da sequência $\frac{1}{n}$ que converge para zero pela constante $\sqrt{2}$. Logo, $x_n \to a$. □

Agora, definiremos sequência de Cauchy em espaços normados e na, seção 2.6, daremos a definição em espaços métricos. Esse conceito servirá de base para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que, por sua vez, nos auxiliará na demonstração do Teorema da Função Inversa.

Definição 2.15. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ um espaço normado e $x_n \in X$. A sequência x_n chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, a partir de um certo índice n_0, a distância entre os termos da sequência diminui arbitrariamente.

Exemplo 2.16. *A sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana (ver Proposição 4.1 no Capítulo 4), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \cdot \varepsilon > 2$. Daí,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Mas, para $m > n_0$, temos $\frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$ e para $n > n_0$ temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Então,

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0}$$

de onde segue que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy. $\square$

Não menos importante que os conjuntos abertos definiremos agora conjuntos fechados. Estes constituem noções relevantes dentro dos propósitos deste trabalho por ser cada um exemplo de espaço métrico completo (veja Definição 2.47 Exemplo 2.48) e por compor diretamente a demonstração do principal resultado deste trabalho.

Definição 2.17. *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ um espaço normado. O conjunto X chama-se fechado quando seu complemento é um conjunto aberto, isto é, quando $X^c = intX^c$.*

Dizer que X é fechado significa, noutros termos, o seguinte: se $\lim x_n = a$ com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \in X$.

Exemplo 2.18. *Uma bola fechada $B[a; r] \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado.*

De fato, seja $A = \mathbb{R}^N - B[a; r]$. Mostremos que A é aberto em $\mathbb{R}^N$. Seja $b \in A$, então

$$s = \|a - b\| - r \Rightarrow s > 0.$$

Para $x \in B(b; s)$, temos $\|x - b\| < s$. Pela Desigualdade Triangular, temos

$$\|a-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| \Rightarrow \|a-x\| \geq \|a-b\| - \|x-b\| \Rightarrow \|a-x\| > \|a-b\| - s = r.$$

Assim, com $\|x-a\| > r$, temos que $x \notin B[a; r]$, o que implica que $x \in A$. Então, $B(b; s) \subset A$, mostrando que A é um conjunto aberto. Portanto, pela Definição 2.17, $B[a; r]$ é um conjunto fechado. $\square$

2.3 Aplicações Contínuas

A partir desta seção, nosso objeto principal de estudo serão as funções. Aqui, vamos estudar o conceito de continuidade antes de entrarmos no mundo das funções diferenciáveis, que formam um caso particular de funções contínuas.

Observe as definições e resultados desta seção no que diz respeito às normas. Como foi dito anteriormente, elas não se alterariam se mudássemos uma norma por outra. Isso se deve à equivalência de normas nos espaços euclidianos dada pelo Teorema 2.3.

Definição 2.19. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Diz-se que a aplicação f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que:*

$$x \in intX \text{ e } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Em termos de limites, podemos expressar a continuidade de f no ponto a da seguinte maneira:

$$f \text{ é contínua em } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Diz-se que $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é *contínua* quando ela é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Exemplo 2.20. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = k, k \in \mathbb{R}$. Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a função f é contínua.*

De fato, $\|f(x, y) - k\| = |k - k| = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ e, tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

Logo, f é contínua. □

Exemplo 2.21. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é contínua.*

Com efeito, dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon > 0$, temos

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = f(a).$$

Logo, f é contínua. □

A continuidade é um fenômeno local: se cada ponto $a \in X$ é centro de uma bola B tal que $f(B \cap X)$ é contínua, então $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é contínua.

Considerar uma função $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é o mesmo que considerar M funções reais $f_1, f_2, \ldots, f_M : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, as quais são chamadas as *coordenadas* da função f. Para todo $x \in X$, temos $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x))$. Para indicar que as $f_i, i = 1, 2, \ldots, M$ são as funções coordenadas de f, escreve-se $f : (f_1, f_2, \ldots, f_M)$.

Considere, por exemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2, x - y, 2xy)$. A função f consiste de três funções reais de duas variáveis,

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

onde $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = x - y$ e $f_3(x,y) = 2xy$.

Teorema 2.22. *Uma função* $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ *é contínua se, e somente se, cada função coordenda* $f_i : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, M$*, é contínua.*

Demonstração: Suponha que f é contínua em $a \in X$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

isto é,

$$(f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \cdots + (f_M(x) - f_M(a))^2 < \varepsilon^2,$$

e isso implica que, para cada $i = 1, 2, \ldots, M$, $\|f_i(x) - f_i(a)\| < \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \|x - a\| \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(a)\| < \varepsilon.$$

Daí, cada f_i é contínua em a. Reciprocamente, sejam $f_i, i = 1, 2, \ldots, M$, contínuas em a. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_i > 0$ tais que

$$x \in X, \|x - a\| < \delta_i \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(a)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{M}}.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_i;\ i = 1, 2, \cdots, M\}$ e seja $x \in X$ tal que $\|x - a\| < \delta$. Então

$$\begin{gathered}
(f_1(x) - f_1(a))^2 < \frac{\varepsilon^2}{M} \\
(f_2(x) - f_2(a))^2 < \frac{\varepsilon^2}{M} \\
\vdots \\
(f_M(x) - f_M(a))^2 < \frac{\varepsilon^2}{M}
\end{gathered}$$

Somando membro a membro as desigualdades,

$$(f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \cdots + (f_M(x) - f_M(a))^2 < \frac{M\varepsilon^2}{M} = \varepsilon^2,$$

e daí a continuidade de f em a. □

Uma consequência direta deste teorema é que, como $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_N$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2, \ldots, N$, é uma função contínua em $\mathbb{R}^N$, para $i = 1, 2, \ldots, M$, temos que a transformação linear $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ definida por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_M(x_1, x_2, \ldots, x_N))$$

é contínua em $\mathbb{R}^N$.

Sabemos do cálculo diferencial que as funções elementares (trigonométricas, polinomiais, racionais, logarítmicas, inversas trigonométricas) são contínuas em seus domínios.

Exemplo 2.23. *A função $f(x,y) = \left(\dfrac{senx^2}{e^{x+y}}, \dfrac{\cos xy^2}{e^{x+y}}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois cada função coordenada é contínua em $\mathbb{R}^2$.*

De fato, $f_1(x,y) = \dfrac{\text{sen}x^2}{e^{x+y}}$ e $f_2(x,y) = \dfrac{\cos xy^2}{e^{x+y}}$ são contínuas, pois são definidas como quocientes de função contínuas e $e^{x+y} > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. □

Com relação à continuidade, podemos enunciar ainda os seguintes resultados:

Teorema 2.24. *Considere $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e $g : B \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^P$ contínuas de tal modo que $g \circ f$ esteja definida. Então, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é contínua em $\mathbb{R}^N$.*

Teorema 2.25. *Considere $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

1. *$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ é contínua;*

2. *$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ é contínua.*

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser observadas num texto de cálculo avançado, por exemplo, [5], capítulo 1, páginas 25 e 26.

A próxima definição diz respeito a um tipo de função classificada como aplicação *Lipschitziana*. Sua importância aqui vem do fato de que delas oriunda-se um caso particular de aplicações denominadas de *contração*, que é uma das hipóteses que consideraremos para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach na seção 2.6.

Definição 2.26. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é dita Lipschitziana se existe $k > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.*

Toda aplicação Lipschitziana é contínua. Com efeito, sendo f uma aplicação lipschitziana, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ temos que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| < k\delta = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua. □

Definição 2.27. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^N \to Y \subset \mathbb{R}^M$. Uma contração $f : X \to Y$ é uma aplicação Lipschitziana com $0 < k < 1$, tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Dizemos que k é uma *constante de contração* de f. Quando $Y = X$, dizemos que f é uma *contração* de f.

Na seção 2.6 veremos novamente contração, sua versão definida em espaços métricos.

Exemplo 2.28. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \lambda \cos(x)$, *onde* $0 < \lambda < 1$. *Vejamos que essa função é uma contração.*

Primeiramente, relembremos a seguinte versão do Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.29. *Seja* f *uma função contínua num intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b). *Então, existe um real* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Agora, voltemos ao exemplo. Dados $x < y$, segue do Teorema do Valor Médio que $\cos(x) - \cos(y) = f'(t)(x - y)$ para algum $t \in (x, y)$. Então, $|\cos(x) - \cos(y)| = |-\text{sen}(t)| \cdot |x - y| \leq |x - y|$, pois $|-\text{sen}(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$. A partir disso, basta verificarmos que

$$|f(x) - f(y)| = |\lambda \cos(x) - \lambda \cos(y)| = \lambda |\cos(x) - \cos(y)| \leq \lambda |x - y|,$$

comprovando, de fato, que f é uma contração. $\square$

2.4 Funções Diferenciáveis

Uma das técnicas do cáculo é a noção de aproximação de uma função por uma função afim. Nesta seção, vamos introduzir brevemente a ideia de função afim para funções vetoriais, bem como apresentar uma das definições mais importantes deste trabalho, a saber: diferenciabilidade de uma função. Será propósito também desta seção mostrar que a derivada de uma função vetorial é uma matriz denominada matriz jocobiana.

Definição 2.30. *Seja* $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. *A função* g *é afim se existe uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ *e um ponto* $b \in \mathbb{R}^M$ *tal que, para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, *tem-se*

$$g(x) = T(x) + b.$$

Exemplo 2.31. *Considere* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a função definida por*

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= (x + 2y + 1, 3x - z + 4, x + 2y + 3z) \\ &= (x + 2y, 3x - z, x + 2y + 3z) + (1, 4, 0). \end{aligned}$$

Observe que g é uma função afim de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y, z) = (x+2y, 3x-z, x+2y+3z)$ é a transformação linear e $b = (1, 4, 0)$. Note também que g pode ser representada na forma matricial

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No cáculo de uma variável, a função afim tem a forma $f(x) = ax + b$ em que a parte linear é $T(x) = ax$ e $[a]_{1\times 1}$ é a matriz que representa a transformação linear.

Sabemos que, se f é uma função de uma variável e derivável (ou diferenciável) em x_0, então f pode ser aproximada numa vizinhança de x_0 por uma função afim $g(x) = ax + b$ de modo que se tenha para $x = x_0$ exatamente $f(x_0) = g(x_0)$. Como $g(x_0) = ax_0 + b$, obtemos

$$g(x) - f(x_0) = ax - ax_0 \Rightarrow g(x) = a(x - x_0) + f(x_0).$$

Note que a parte linear de $g(x)$ é a expressão ax. Nos pontos suficientemente próximos de x_0, temos

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{|E(x)|}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)|}{|x - x_0|},$$

onde $E(x) = f(x) - g(x)$ é o erro que se comete quando aproximamos $f(x)$ por $g(x)$ numa vizinhança de x_0.

A última expressão da igualdade acima é equivalente a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \tag{2.1}$$

O número real a é denotado por $f'(x_0)$ e denominado *derivada* de f em x_0. A função afim g, então, pode ser reescrita como

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

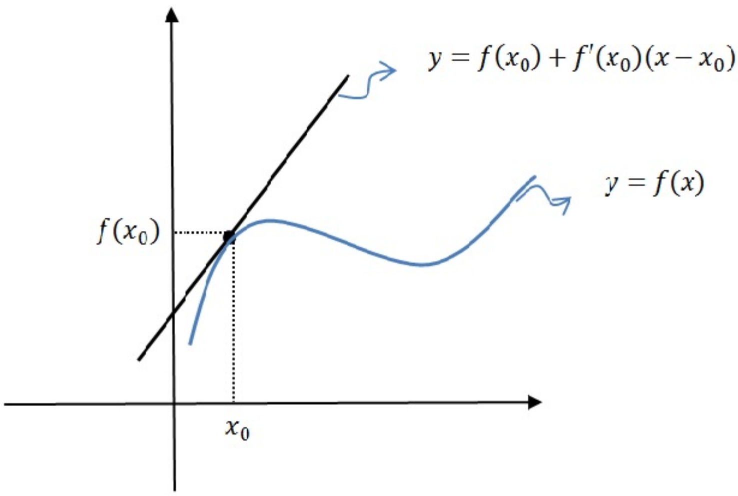
cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Assim, diferenciar uma função f de uma variável em $x = x_0$ é equivalente a achar um número $m = m(x_0)$ tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

É interessante observar que, no cálculo de uma variável de uma função real, a derivada tem sido vista como um número em vez de uma transformação linear. Isso porque a matriz $[a]_{1\times 1}$ que compõe a parte linear da função afim representa a tranformação linear e pode ser colocada

Figura 2.8: Reta tangente



Fonte: Arquivo pessoal.

em correspondência com um número real. Isto quer dizer que podemos pensar na derivada como uma aplicação linear e não como um número. É isso que vamos fazer agora.

Para estender a definição de derivada de uma função real no caso geral, são essenciais algumas adaptações. Para tanto, considere $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = x_0 \in (a, b)$, onde (a, b) é um intervalo aberto. Definimos, inicialmente, uma transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ colocando $T(x) = f'(x_0)\cdot x$, e escrevemos $E(x) = f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)$. Então,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|E(x)|}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Fazendo $x - x_0 = h$, esta relação pode ser reescrita como

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Essa igualdade é usualmente interpretada da seguinte maneira: para pequenos valores de h, o acréscimo $f(x_0 + h) - f(x_0)$ é, aproximadamente, uma aplicação linear de h.

Agora, vamos generalizar a ideia de aproximar uma função $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ numa vizinhança de um ponto x_0 de seu domínio por uma função afim $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ para formular o conceito de diferenciabilidade para funções vetoriais.

Empregando o raciocínio utilizado para conceituar diferenciabilidade de funções reais de uma variável, devemos ter, inicialmente, numa vizinhança de x_0, $f(x_0) = g(x_0)$. Como $g(x) = T(x) + b$ e $f(x_0) = g(x_0) = T(x_0) + b$, temos

$$g(x) - f(x_0) = T(x) - T(x_0) \Rightarrow g(x) = T(x) - T(x_0) + f(x_0).$$

Como $T(x)$ é linear, segue que

$$g(x) = T(x - x_0) + f(x_0).$$

Como fizemos para funções reais de variável real, é natural impormos a condição de que $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$, pois queremos aproximar f pela função g numa vizinhança de x_0. Para tanto, é necessário garantir que f é contínua no ponto x_0. De fato, como $T(x)$ é contínua (consequência do Teorema 2.22) para todo $x \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$\lim_{x\to x_0} T(x - x_0) = T(0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)).$$

Logo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

No caso de dimensão 1, exigimos que $(f(x) - g(x))$ tendesse a zero mais rápido do que x tendesse a x_0, ou seja,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0,$$

em que $a = f'(x_0)$.

É natural que façamos o mesmo para funções vetoriais. Assim, exigeremos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Noutros termos,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Podemos, então, formular a seguinte definição:

Definição 2.32. *Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, com X aberto, será denominada diferenciável em $x_0 \in X$, se existe uma função afim que aproxima f numa vizinhança de x_0, isto é, existe uma função linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tal que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.2}$$

Ou, equivalentemente

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + E(h), \tag{2.3}$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|E(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Exemplo 2.33. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$. Se $x_0 \in (a, b)$ sabemos que $f'(x_0) = 3{x_0}^2$. Se $T(h) = f'(x_0)h = 3{x_0}^2 h$, podemos verificar diretamente que a definição de derivada é satisfeita.*

Com efeito,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|(x_0 + h)^3 - {x_0}^3 - 3{x_0}^2 h|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|{x_0}^3 + 3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - {x_0}^3 - 3{x_0}^2 h|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|3x_0 h^2 + h^3|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left| \frac{h(3{x_0}^2 h + h^2)}{h} \right| = \lim_{h \to 0} 3{x_0}^2 h + h^2 = 0.$$

$\square$

A função linear T é denominada *derivada* de f e escrevemos $T = f'(x_0)$. Dizemos simplesmente que a função f é *diferenciável* se ela for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Teorema 2.34. *Sejam X um conjunto aberto e $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Se f é diferenciável em $x_0 \in X$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração: Desde que $x_0 \in X$ e como X é um conjunto aberto, existe $\delta > 0$ tal que $x_0 + h \in X$ para todo $h \in \mathbb{R}^N$ com $\|h\| < \delta$. Daí,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| = \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h + f'(x_0)h\| \leq$$

$$\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| + \|f'(x_0)h\| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| + C\|h\|$$

onde $C = \|f'(x_0)\|$.
Pela diferenciabilidade de f em x_0, dado $\varepsilon_0 > 0$, seja $\delta_0 > 0$ tal que $0 < \delta_0 < \delta$, então

$$\|h\| \leq \delta_0 \Rightarrow \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} \leq \varepsilon_0$$

Assim,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq \varepsilon_0 \|h\|$$

Somando $C\|h\|$ em ambos os lados da desigualdade temos

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| + C\|h\| \leq (\varepsilon_0 + C)\|h\|$$

Mas sabemos que,

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leq \|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\| + C\|h\|$$

Portanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\forall h, \|h\| < \delta_0 \Rightarrow \|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\| \leq (\varepsilon_0 + C)\|h\|$$

o que implica a continuidade de f em x_0. $\square$

Vamos agora caracterizar a aplicação linear T da Definição 2.32. Para tanto, é mister definir o conceito de *derivada direcional*. Como o próprio nome designa, a derivada direcional nada mais é que a derivada numa determinada direção. Com essa definição e resultados dela decorrentes, podemos estabelecer de maneira mais prática a continuidade de uma função.

Definição 2.35. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f : X \to \mathbb{R}^M$ uma função, $x_0 \in X$ e v um vetor unitário em $\mathbb{R}^N$. A derivada direcional de f no ponto x_0 e na direção v, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, é definida como:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$$

se o limite existe.

A derivada direcional é a generalização natural das derivadas parciais. De fato, se $v = e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (onde $1 \leq i \leq n$,) então, a derivada direcional de f em x_0 na direção de v é a i*-ésima* derivada parcial de f em relação a x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t},$$

quando tal limite existe.

O Teorema a seguir diz que a existência de derivada para uma função f implica a existência das derivadas direcionais de f em qualquer direção. A recíproca desse resultado nem sempre é verdadeira, como se pode ver no seguinte exemplo:

Exemplo 2.36. *A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é derivável neste ponto.*

De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{x} = 0.$$

Embora f possua derivadas parciais em $(0,0)$, f não é contínua neste ponto, pois $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$ e $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$. Como f não é contínua em $(0,0)$, então f não é diferenciável neste ponto. □

O exemplo anterior mostra que, se desejarmos garantir algo melhor, como continuidade por exemplo, devemos exigir algo mais que simplesmente a existência de derivadas parciais.

Teorema 2.37. *Se f é diferenciável em $x = x_0$, então a derivada direcional de f neste ponto existe qualquer que seja a direção tomada. Em particular, existem todas as derivadas parciais de f neste ponto.*

Demonstração: Veja [6], páginas 244 e 245. □

De modo geral, uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ diferenciável, tem como derivada uma matriz da forma $M \times N$, mesmo para funções de uma única variável, cuja matriz é do tipo 1×1. Tal matriz é denominada *matriz jocobiana*. Assim, o que precisamos fazer é determinar os coeficientes (a_{ij}) dessa matriz. Veremos a seguir que esses coeficientes podem ser determinados em termos das derivadas parciais de f.

Da Álgebra Linear (veja [2], capítulo 5), sabemos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ pode ser representada por uma matriz $M \times N$. Assim, para determinar a matriz $f'(x_0)$, que é a derivada de f em x_0, em que $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é uma função diferenciável em $x_0 \in X$ tomamos os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ do espaço $\mathbb{R}^N$. Como x_0 é um ponto interior do domínio de f, os pontos

$$x_0 + te_j, j = 1, 2, \cdots, N$$

para t suficientemente pequeno, $x_0 + te_j$ estão todos no domínio de f. Da Definição 2.32, tem-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + te_j) - f(x_0) - f'(x_0)((x_0 + te_j) - x_0)\|}{\|te_j\|} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + te_j) - f(x_0) - f'(x_0)(te_j)\|}{\|te_j\|} = 0 \tag{2.4}$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$.

Como $f'(x_0)$ é linear, tem-se

$$f'(x_0)(te_j) = tf'(x_0)(e_j).$$

Daí, o limite (2.4) fica

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + te_j) - f(x_0) - tf'(x_0)(e_j)\|}{\|te_j\|} = \lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(e_j) \right\| = 0$$

o qual resulta, finalmente, em

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} = f'(x_0)(e_j) \tag{2.5}$$

para $j = 1, 2, \cdots, N$.

Note que $f'(x_0)(e_j)$ é a j-ésima coluna da matriz $f'(x_0)$,

$$f'(x_0)(e_j) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{Mj} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}$$

Observe o primeiro membro da equação (2.5). O ponto $x_0 + te_j$ difere de x_0 apenas na j-ésima coordenada, e esta diferença é justamente o vetor te_j, de comprimento t. Portanto, esta expressão é precisamente a derivada parcial de f em relação a x_j no ponto x_0, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. De fato, se $f_1, f_2, \cdots, f_M$ são as funções coordenadas de f, então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(x_0+te_j)-f_1(x_0)}{t}, \cdots, \lim_{t\to 0} \frac{f_M(x_0+te_j)-f_M(x_0)}{t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \cdots, \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(x_0)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

Dessas considerações, obtemos a seguinte igualdade entre vetores:

$$\left[\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\ \right] = \left[f'(x_0)(e_j)\right].$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) &= a_{1j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x_0) &= a_{2j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(x_0) &= a_{Mj} \end{aligned}$$

com $j = 1, 2, \cdots, N$.

Assim, temos que a matriz de $f'(x_0)$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_M}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Esse resultado que acabamos de mostrar pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 2.38. *Sejam X um aberto, $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ uma função diferenciável e $x_0 \in X$. Então, a derivada $f'(x_0)$ é univocamente determinada, e a sua matriz é dada por $f'(x_0) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N$.*

Vejamos um exemplo onde determinaremos a matriz que representa a transformação linear da Definição 2.32 e, em seguida, mostraremos que a função é diferenciável no ponto dado usando a definição.

Exemplo 2.39. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2, 2x + 3yz)$. Pede-se para encontrar a derivada de f no ponto $x_0 = (1, 0, 2)$.*

As funções coordenadas de f são $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y, z) = 2x + 3yz$, e a matriz jocobianada em (x, y, z) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2 & 3z & 3y \end{bmatrix}.$$

Portanto, a derivada de f em $(1, 0, 2)$ é a função linear cuja matriz é

$$f'(1, 0, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A transformação linear, portanto, existe e é dada por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Usando a Definição 2.32 e tomando $h = (h_1, h_2, h_3)$, temos

$$\frac{\|f((1,0,2)+h)-f(1,0,2)-T(h)\|}{\|h\|} = \frac{\left\| f(1+h_1, h_2, 2+h_3) - (1,2) - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \right\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{1}{\|h\|} \| \left((1+h_1)^2 + h_2^2, 2(1+h_1) + 3h_2(2+h_3)\right) - (1,2) - (2h_1, 2h_1 + 6h_2) \|$$

$$= \frac{1}{\|h\|} \|(h_1^2 + h_2^2, 3h_2h_3)\| = \frac{1}{|h_1| + |h_2| + |h_3|} (h_1^2 + h_2^2 + |3h_1h_2|)$$

$$= \frac{h_1^2}{|h_1| + |h_2| + |h_3|} + \frac{h_2^2}{|h_1| + |h_2| + |h_3|} + \frac{3|h_2||h_3|}{|h_1| + |h_2| + |h_3|}$$

$$= \frac{|h_1||h_1|}{|h_1| + |h_2| + |h_3|} + \frac{|h_2||h_2|}{|h_1| + |h_2| + |h_3|} + \frac{3|h_2||h_3|}{|h_1| + |h_2| + |h_3|}$$

$$\leq |h_1| + |h_2| + 3|h_3|.$$

Logo, quando $h \to 0$, $\dfrac{\|f((1,0,2)+h) - f(1,0,2) - T(h)\|}{\|h\|} \to 0$ mostrando que f é diferenciável em $(1,0,2)$.

2.5 Regra da Cadeia

A *regra da cadeia* é um valioso resultado do cálculo que consiste num método de derivar funções compostas. Do cálculo de funções de uma variável, dados f e g duas funções, cujo conjunto imagem de f está contido no domínio de g, podemos formar a *função composta* $g \circ f$ aplicando primeiro f e depois g. Assim,

$$g \circ f = g(f(x))$$

para todo x tal que x esteja no domínio de f e $f(x)$ esteja no domínio de g. Se supormos que f é diferenciável em x e g em $f(x)$, a derivada dessa função, segundo a regra da cadeia, é dada por:

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x).$$

Vamos, agora, generalizar tal resultado para funções onde o domínio e a imagem extendem-se para qualquer dimensão. Para determinar a derivada de $g \circ f$ em termos das derivadas parciais de f e g, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ diferenciável em x_0 e $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^P$ diferenciável em $f(x_0)$. Então, $f'(x_0)$ é uma matriz do tipo $M \times N$ e $g'(f(x_0))$ é uma matriz do tipo $P \times M$. O produto $g'(f(x_0))f'(x_0)$ está definido e consiste numa matriz $P \times N$. A regra da cadeia estabelece que a derivada de $g \circ f$ é a matriz proveniente desse produto.

Teorema 2.40. *(Regra da Cadeia) Sejam $f : X \to \mathbb{R}^M$ uma aplicação diferenciável no ponto $x \in X$ e $g : Y \to \mathbb{R}^P$ uma aplicação diferenciável no ponto $f(x) \in Y$, onde supomos que $X \subset \mathbb{R}^N$ e $Y \subset \mathbb{R}^M$ são abertos, com $f(X) \subset Y$. Então, a composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}^P$ é diferenciável no ponto x_0 e vale a regra:*

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

onde o produto acima é o produto das matrizes g' e f' nos pontos $f(x)$ e x, respectivamente.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [5], capítulo 5, página 265.

Exemplo 2.41. *Sejam $f(x,y) = (\frac{2}{3}xy + x^3, x^2 + y^2)$ e $g(u,v) = (uv, u - v)$. Calcular $[g(f(1,3))]'$.*

Pela regra da cadeia,

$$[g(f(1,3))]' = g'(f(1,3))f'(1,3).$$

Temos que

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } f'(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3}y + 3x^2 & \dfrac{2}{3}x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

Como $f(1,3) = (3,10)$, segue que

$$g'(3,10) = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } f'(1,3) = \begin{bmatrix} 5 & \dfrac{2}{3} \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[g(f(1,3))]' = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & \dfrac{2}{3} \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & \dfrac{74}{3} \\ & \\ 3 & \dfrac{-16}{3} \end{bmatrix}.$$

2.6 Teorema do Ponto Fixo de Banach

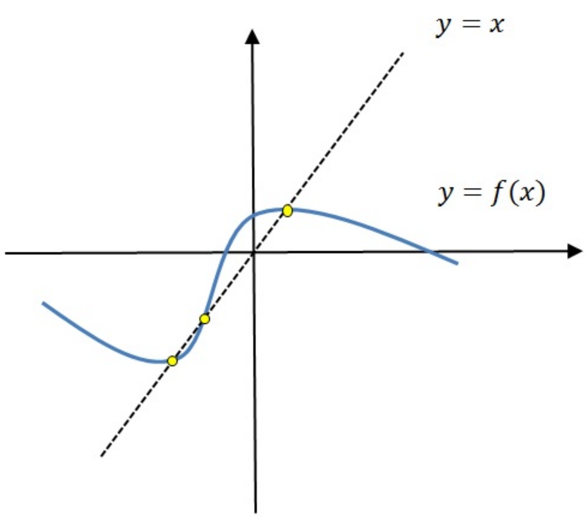
Existem vários teoremas sobre o ponto fixo. O que vamos precisar aqui é o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Mas o que é um ponto fixo? Um ponto fixo é um ponto que não é alterado por uma aplicação. Por exemplo, a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ possui exatamente dois pontos fixos, a saber $x = 0$ e $x = 1$. De fato,

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

É fácil ver que na aplicação identidade $Id(x) = x$ todos os pontos do domínio são pontos fixos. Antes de enunciarmos o teorema para o caso geral, vejamos o significado geométrico do ponto fixo.

Como observamos antes, a aplicação identidade possui pontos fixos em toda reta, se considerarmos no mesmo gráfico a aplicação identidade e uma outra aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por exemplo, obtemos a seguinte figura:

Figura 2.9: Ponto fixo



Fonte: Arquivo pessoal.

Assim, geometricamente falando, os pontos fixos de uma função f são os pontos do seu gráfico que interceptam o gráfico da aplicação identidade.

Podemos pensar nos pontos fixos como um ponto de equilíbrio em uma certa situação. Por exemplo, em Economia, um Equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde não há perda e nem ganhos.

Definição 2.42. *Seja V um conjunto qualquer. Um ponto fixo de uma aplicação $f : V \to V$ é um ponto $x \in V$ tal que $f(x) = x$.*

Nesse momento, será útil falar um pouco mais sobre espaços métricos, cuja definição foi dada na seção 2.1 (veja Definição 2.4). Vamos apresentar algumas de suas características que serão importantes para introduzir o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Como veremos, um espaço métrico pode provir de um espaço vetorial normado, ou seja, qualquer espaço vetorial normado é um espaço métrico, bastando, para isso, definir a norma

$$\|x - y\| = d(x, y).$$

Do ponto de vista da exposição do conteúdo, isso é ótimo, porquanto já vimos espaços normados, bem como suas propriedades nas seções 2.1 e 2.2, respectivamente. Daí, será mais fácil para o leitor compreender os novos conceitos explanados aqui. Podemos, então, ser mais breves e diretos não necessitando muitas vezes de exemplo.

No exemplo que segue, mostramos que a reta dos números reais é um espaço métrico. Mais adiante, faremos alusão a ele.

Exemplo 2.43. *Considere $M = \mathbb{R}$ o conjuntos dos números reais e a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Usando as propriedades de módulo de um número real, segue que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer. Se $x = y$, é imediato que $|x - y| = 0$, o que implica em $d(x, y) = 0$. Além disso, se $x \neq y$, temos $x - y \neq 0$ o que implica em $|x - y| > 0$, ou seja, que $d(x, y) > 0$. Também, temos que

$$d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$$

Por fim, temos que

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$$

Logo, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Portanto, d é uma métrica a qual é chamada de métrica usal de $\mathbb{R}$. □

Considere (M,d) e (N,d) espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in M, d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Seja também (M,d) um espaço métrico. Diz-se que a função $f : M \to M$ é uma *contração* se existir uma constante $0 \leq k < 1$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in M, \ d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1, x_2).$$

Uma sequência num conjunto M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto M. O valor $x(n)$, para $n \in \mathbb{N}$, será denotado por (x_n) e a notação $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ usaremos para representar o conjunto dos termos da sequência.

Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ a um subconjunto infinito $k = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots \backslash n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$ a qual denotamos por (x_{n_k}).

Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se *limitada* quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $k > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq k$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é o *limite* da sequência (x_n), denotado por $a = \lim x_n$, quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obeter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Quando existe $a = \lim x_n, a \in M$, dizemos que a sequência x_n é convergente em M e converge para $a \in M$.

Proposição 2.44. *Seja (M,d) um espaço métrico. Se uma sequência (x_n) de pontos de M converge para a, então toda subsequência de (x_n) também converge para a.*

Demonstração: Sejam (x_{n_k}) uma subsequência de x_n e $\varepsilon > 0$ dado. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Como o conjunto de indíces da subsequência $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ é infinito, existe k_0 tal que $n_{k_0} > n_0$. Para $k > k_0$ temos $n_k > n_{k_0} > n_0$ e, assim, $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Logo, x_{n_k} converge para a. □

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando qualquer que seja $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, escolhidos quaisquer dois índices a partir de n_0, digamos n e m, teremos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Uma forma equivalente de mostrar que uma sequência, nas mesmas condições acima, é de Cauchy é escrevermos o índice $m = n + p, p \in \mathbb{N}$ e mostrarmos que $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$. Isso significa que quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, necessariamente aproximam-se uns dos outros.

Proposição 2.45. *Num espaço métrico* (M, d) *toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Tome $\varepsilon = 1$. Para este ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1, \forall n, m > n_0$. Assim, o conjunto $A = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$ é limitado e tem seu diâmetro menor do que 1. Seja $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}\}$. Como B é finito, B é limitado. Logo, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = A \cup B$ é limitado. $\square$

Proposição 2.46. *(Unicidade do limite) Uma sequência num espaço métrico* (M, d) *não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência convergente em M. Suponhamos que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, com $a \neq b$. Como $\lim x_n = a$ então dado $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Como $\lim x_n = b$ então dado $\varepsilon > 0$ existe n_2 tal que $n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$. Em particular, para $\varepsilon = \dfrac{d(a, b)}{2}$, tomando $n_0 =$máx$\{n_1, n_2\}$ temos que $\forall n > n_0, d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a, b)$. O que é absurdo. Portanto, $a = b$, ou seja, $\lim x_n$ é único. $\square$

Definição 2.47. *Diz-se que um espaço métrico* M *é completo quando toda sequência de Cauchy em* M *é convergente.*

Exemplo 2.48. *A reta é um espaço métrico completo.*

De fato, já mostramos no Exemplo 2.43 que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico. Mostremos agora que $\mathbb{R}$ é completo. Para isto, considere (x_k) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere

$$X_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\}.$$

Note que $X_1 \supset X_2 \ldots \supset X_k \supset \ldots$ e, como toda sequência de Cauchy é limitada, temos que os conjuntos X_k são limitados e, assim, possuem ínfimo e supremo. Definamos $a_k = \inf X_k, k = 1, 2, \ldots$. Como $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots$, segue das propriedades de ínfimo (ver Lema 4.2 no Capítulo 4) que

$$\inf X_1 \leq \inf X_2 \leq \ldots \leq \inf X_k \leq \ldots,$$

ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots$. Sendo X_k limitado por $b = \sup X_1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos que $\inf X_k \leq b$. Portanto, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots \leq b = \sup X_1$. Isto mostra que (a_k) é uma sequência monótona e limitada de números reais e, assim, (a_k) é convergente (ver Proposição 4.3 no Capítulo 4). Portanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim a_k = a$. A partir deste ponto, deixamos ao leitor a tarefa de mostrar que a existe uma subsequência de (x_k) que converge para a. Invocamos o Teorema 4.4 no Capítulo 4 para concluir que, de fato, a sequência (x_k) é convergente. Isso mostra que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. $\square$

O exemplo a seguir é, provavelmente, o exemplo mais importante para este trabalho, tendo em vista o seu elo na formação da corrente de argumentos lógicos que provam a veracidade do Teorema da Função Inversa.

Exemplo 2.49. *A bola fechada no espaço* $\mathbb{R}^N$ *é um espaço métrico completo.*

Com efeito, seja a bola fechada $B[a;r] \subset \mathbb{R}^N$ com centro em a raio $r > 0$. Pelo Exemplo 2.18, a $B[a;r]$ é um conjunto fechado. Tomemos em $B[a;r]$ uma sequência de Cauchy (x_n). Para mostrar que $B[a;r]$ é um espaço métrico completo, devemos mostrar que $\lim x_n = b \in B[a;r]$ para algum b. Note que (x_n) é uma sequência de Cauchy contida em $\mathbb{R}^N$. Ora, $\mathbb{R}^N$ é um espaço métrico completo, pois é o produto cartesiano de N fatores iguais a $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo (veja Exemplo 2.48). Assim, existe $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $\lim x_n = b$. Pela observação após a Definição 2.17, segue que $b \in B[a;r]$. □

Teorema 2.50. *(Teorema do ponto fixo de Banach) Considere* (M,d) *um espaço métrico completo e uma contração* $f : M \to M$*. Então,* f *possui um único ponto fixo.*

Demonstração: Sejam $x_0 \in M$ e a sequência (x_n) em M definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, ou seja, $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Como f é uma contração,

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq kd(x_0,x_1) \Rightarrow d(x_1,x_2) \leq kd(x_0,x_1)$$

e

$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1,x_2) \leq k^2 d(x_0,x_1) \Rightarrow d(x_2,x_3) \leq k^2 d(x_0,x_1).$$

Continuando o processo, usando um argumento indutivo, chegamos à conclusão que $d(x_n,x_{n+1}) \leq k^n d(x_0,x_1)$. Queremos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Da Desigualdade Triangular, tem-se

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}). \tag{2.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_{n+1}) & \leq & k^n d(x_0,x_1) \\ d(x_{n+1},x_{n+2}) & \leq & k^{n+1} d(x_0,x_1) \\ & \vdots & \\ d(x_{n+p-1},x_{n+p}) & = & k^{n+p-1} d(x_0,x_1). \end{array}$$

Somando membro a membro as desigualdades e usando a distributividade da multiplicação, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$
$$(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1})d(x_0, x_1) = k^n(1 + k + \cdots + k^{p-1})d(x_0, x_1).$$

Mas, observe que, $(1 + k + \cdots + k^{p-1})$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão k e, lembrando que essa soma é dada pela expressão $\dfrac{1}{1-R}$, onde R é razão da progressão, temos que $(1 + k + \cdots + k^{p-1}) = \dfrac{1}{1-k}$ e, assim,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, chegamos a

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = d(x_0, x_1) \lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k}.$$

Como $0 < k < 1$, $k^n \to 0$. Portanto, vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0,$$

donde concluímos que, de fato, a sequência (x_n) é de Cauchy em M. Como M é um espaço métrico completo, (x_n) converge em M. Admitamos que (x_n) convirja para o ponto $a \in M$. Assim, tomando o limite na equação $x_{n+1} = f(x_n)$, teremos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, e, como a aplicação f é contínua, usando propriedade de limites em espaços métricos (ver Proposição 4.5 no Capítulo 4), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, temos a igualdade desejada

$$f(a) = a.$$

Assim, provamos a existência do ponto fixo. Agora, provemos a unicidade. Sejam a e b em V tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Tem-se

$$d(a, b) = (f(a), f(b)) \leq kd(a, b).$$

Isso leva à desigualdade

$$d(a,b) \leq kd(a,b) \Rightarrow d(a,b) - kd(a,b) \leq 0 \Rightarrow (1-k)d(a,b) \leq 0.$$

Como $k < 1$, então $1 - k > 0$, donde concluímos que $d(a,b) \leq 0$. Como $d(a,b)$ é um número real não negativo, segue que $d(a,b) = 0$, e isso só ocorre se, e somente se, $a = b$. Assim, f só possui um único ponto fixo, o que completa a demonstração do teorema. $\square$

Exemplo 2.51. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \lambda \cos(x)$*, onde* $0 < \lambda < 1$ *dada pelo Exemplo 2.28. Como* f *é uma contração e* $\mathbb{R}$ *é um espaço métrico completo (veja Exemplo 2.48), segue que* f *tem um único ponto fixo, isto é, existe um único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lambda \cos(x) = x$.

Capítulo 3

Teorema da Função Inversa

Neste tópico, estudaremos um dos teoremas mais importantes do cálculo, o Teorema da Função Inversa. Abordaremos o caso geral deste teorema, isto é, para funções de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$. Começaremos relambrando o que é uma função inversa e exporemos mais alguns resultados preliminares necessários.

3.1 Regularidade e Função Inversa

Se pensarmos numa função que associa a cada vetor x um vetor y da imagem de f, podemos começar tomando y e perguntar que vetor ou vetores x são levados por f em y. Para ser mais exato, podemos perguntar se existe uma função que inverte a ação de f. Se existir uma função f^{-1} com a propriedade

$$f^{-1}(y) = x \text{ se, e somente se, } f(x) = y$$

então f^{-1} é denominada *função inversa* de f. Decorre-se que o domínio de f^{-1} é a imagem de f, e que a imagem de f^{-1} é o domínio de f.

Dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, podemos perguntar: (1) Ela tem uma inversa? e (2) Se tiver, quais são as suas propriedades? Em geral, não é fácil responder a estas perguntas. Por outro lado, se f é diferenciável num ponto x_0 ela pode ser aproximada numa vizinhança deste ponto por uma tranformação afim A. Por esta razão, poder-se-ia conjecturar que, se o domínio de f for restrito aos pontos próximos de x_0, então f terá uma inversa se A tiver. Além disso, poder-se-ia pensar que A^{-1} é a transformação afim que aproxima f^{-1} numa vizinhança de $f(x_0)$. Exceto pelos detalhes, estas afirmações estão corretas e constituem o teorema da função inversa.

Definição 3.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Dizemos que $f : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é de classe C^1 em U se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, M$ e $j = 1, 2, \ldots, N$ existem e são contínuas em U.*

Exemplo 3.2. *As funções definidas por polinômios de várias variáveis são de classe C^1.*

Note que a matriz jacobiana ou derivada de uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vista na seção 2.4 é uma matriz quadrada e, portanto, tem determinante. Este determinante, denotado por $\det f'(x)$, é uma função real de x denominada *determinante jocobiano de f.* Uma das hipóteses que consideraremos para a demonstração do Teorema da Função Inversa é que o determinante jacobiano em um determinado ponto seja diferente de zero.

Vamos precisar também das seguintes proposições:

Proposição 3.3. *Desigualdade do valor médio: Seja U uma bola aberta do $\mathbb{R}^N$ e $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável tal que $\|f'(x)\| \leq M$, $\forall x \in U$, então*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|, \forall a, b \in U.$$

Proposição 3.4. *(Continuidade da aplicação matriz inversa) Se $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é inversível e $B \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|B - A\|\|A^{-1}\| < 1$, então B é inversível. Além disso, a aplicação $A \to A^{-1}$ é contínua.*

A demonstração da Desigualdade do Valor Médio pode ser observada, por exemplo, em [5], capítulo 5, página 263, e a prova da continuidade da aplicação matriz inversa acha-se no Capítulo 4.

Veja também a Definição 4.6 de norma de uma transformação linear, que aparece na Proposição 3.4, e suas propriedades no Teorema 4.7.

3.2 O Teorema da Função Inversa e sua Demonstração

Até aqui, construímos o corpo teórico suficiente para demonstrar o Teorema da Função Inversa. O leitor deve ficar ciente de que não existe um único modo de prová-lo. O caminho que escolhemos para isso nos permite usar uma linguagem matemática menos rebuscada. Para ser mais didático, optamos por dividir a demonstração em duas partes. Eis seu enunciado e sua demonstração.

Teorema 3.5. *(Função Inversa) Sejam $W \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $f : W \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação de classe C^1 e $a \in W$. Se $\det f'(a) \neq 0$ e $b = f(a)$, então*

a) existem abertos $U \ni a$ e $V \ni b$ do $\mathbb{R}^N$ tal que $f : U \to V$ é bijetora.

b) $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1.

Demonstração: Seja $f'(a) = A$ e $\lambda > 0$ tal que

$$2\lambda\|A^{-1}\| = 1. \tag{3.1}$$

Como f é de classe C^1, $f' : U \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é contínua e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - A\| < \lambda. \tag{3.2}$$

Isso é o mesmo que dizer que existe uma bola aberta U de centro a e raio $\delta > 0$, que denotaremos U_δ, tal que

$$\|f'(x) - A\| < \lambda \ \ \forall x \in U_\delta. \tag{3.3}$$

Seja $y \in \mathbb{R}^N$ um vetor qualquer e considere $\phi : U \to \mathbb{R}^N$ a função definida por

$$\phi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)), \forall x \in U.$$

Note que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \phi(x) = x.$$

De fato, se $f(x) = y$, temos que

$$\phi(x) = x + A^{-1}(y - y) = x + A^{-1}(0) \Rightarrow \phi(x) = x.$$

Reciprocamente, se $\phi(x) = x$, então

$$x = x + A^{-1}(y - f(x)) \Rightarrow 0 = A^{-1}(y - f(x)) \Rightarrow A(0) = AA^{-1}(y - f(x)) \Rightarrow y = f(x).$$

Neste ponto, transformamos nosso problema de inverter a função f em um problema de encontrar pontos fixos da função ϕ. Por definição, ϕ é diferenciável e

$$\phi'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}[A - f'(x)]$$

Usando o Teorema 4.7 do Capítulo 4 e tomando a norma em ambos os lados da igualdade, tem-se por (3.1)

$$\|\phi'(x)\| = \|A^{-1}[A - f'(x)]\| = \|A^{-1}\|\|A - f'(x)\| = \frac{1}{2\lambda}\|A - f'(x)\| < \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}.$$

Ou seja,

$$\|\phi'(x)\| < \frac{1}{2}, \text{ para todo } x \in U.$$

Agora, usando a desigualdade do valor médio, concluímos que para todos $x_1, x_2 \in U$

$$\|\phi(x_2) - \phi(x_1)\| < \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|. \tag{3.4}$$

Assim, para mostrar que ϕ é uma contração, basta provar que o domínio e o contradomínio de ϕ são o mesmo conjunto.

Temos também que, pela continuidade de f, para $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2\|A^{-1}\|} > 0$, existe $\overline{\delta} > 0$ (que vamos supor sem perda de generalidade $\overline{\delta} < \delta$) tal que

$$\|x - a\| < \overline{\delta} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|}.$$

Feito isso, seja $U_{\overline{\delta}}$ a bola aberta de centro em a e raio $\overline{\delta} > 0$. Note que a bola $U_{\overline{\delta}}$ está contida em U_δ, pois $\overline{\delta} < \delta$, e, para $x \in U_\delta$ e $y \in f(U_{\overline{\delta}})$, isto é, $y = f(x_0)$ para algum $x_0 \in U_{\overline{\delta}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - a\| &= \|\phi(x) - \phi(a) + \phi(a) - a\| \\
&\leq \|\phi(x) - \phi(a)\| + \|\phi(a) - a\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - a\| + \|A^{-1}\| \cdot \|y - f(a)\| \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ou seja, $\phi(x) \in U_\delta$ sempre que $x \in U_\delta$. Assim, $\phi : U_\delta \to U_\delta$ é uma contração. Ainda sem perder a generalidade, podemos considerar $\overline{U}_\delta$ a bola fechada de centro a e raio $\delta > 0$, para a qual $\phi : \overline{U}_\delta \to \overline{U}_\delta$ é uma contração definida em um espaço métrico completo $\overline{U}_\delta$ (veja Exemplo 2.49). Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $x \in \overline{U}_\delta$ tal que $\phi(x) = x$ para cada $y \in f(U_{\overline{\delta}})$. Isto é o mesmo que dizer que, se $y \in f(U_{\overline{\delta}})$, existe um único elemento $x \in \overline{U}_\delta$ tal que $f(x) = y$. Com isso, necessariamente, $x \in U_{\overline{\delta}}$. Noutras palavras, $f : U_{\overline{\delta}} \to f(U_{\overline{\delta}})$ é bijeção. Agora, mostraremos que $V = f(U_{\overline{\delta}})$ é um conjunto aberto. Seja $y_0 \in V$. Temos que mostrar que $\exists r > 0$ tal que $B(y_0; r) \subset V$. Temos que $y_0 = f(x_0)$, para algum $x_0 \in U_{\overline{\delta}}$. Como $U_{\overline{\delta}}$ é um conjunto aberto (veja Exemplo 2.11), existe $\rho > 0$ tal que a bola aberta de centro x_0 e raio $\rho > 0$, que denotaremos $B_1(x_0; \rho)$, está contida inteiramente em $U_{\overline{\delta}}$. Seja $r := \lambda\rho > 0$, onde $\lambda > 0$ está definida em (3.1). Se $\|y - y_0\| < r$, vamos mostrar que $y \in V$. Temos que

$$\|\phi(x_0) - x_0\| = \|A^{-1}(y - y_0)\| \leq \|A^{-1}\|\|y - y_0\| < \|A^{-1}\|r = \|A^{-1}\|\lambda\rho = \frac{\rho}{2}.$$

Assim, como fizemos em (3.5), se $x \in \overline{B}_1$ temos

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - x_0\| &= \|\phi(x) - \phi(x_0) + \phi(x_o) - x_0\| \\
&\leq \|\phi(x) - \phi(x_0)\| + \|\phi(x_0) - x_0\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{\rho}{2} \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ou seja, $\phi : \overline{B}_1 \to \overline{B}_1$ também é uma contração definida em $\overline{B}_1$ que é um espaço métrico completo. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único ponto fixo de ϕ, digamos x. Então, $\phi(x) = x$, o que implica que existe um único $x \in \overline{B}_1$ tal que $f(x) = y$, ou seja, $y \in f(\overline{B}_1) \subset f(U_{\overline{\delta}})$. Isto mostra que V é um conjunto aberto, como havíamos afirmado. Vamos, agora, mostrar a segunda parte do teorema, isto é, que $g = f^{-1} : V \to U_{\overline{\delta}}$ é de classe C^1. Para isso, seja $y \in V$. Como V é aberto, vamos supor que $y + k \in V$ (onde k é um vetor com norma suficientemente pequena). Assim, existem $x \in U_{\overline{\delta}}$ e $\overline{x}_k \in U_{\overline{\delta}}$ tais que

$$f(x) = y \text{ e } f(\overline{x}_k) = y + k.$$

Escrevemos $\overline{x}_k = x + h$, onde $h := \overline{x}_k - x$. Vamos mostrar que $h \to 0$ quando $k \to 0$. Com efeito, pela definição ϕ em $y = f(x)$, temos

$$\begin{aligned} \phi(x+h) - \phi(x) &= (x+h) - x + A^{-1}[f(x) - f(x+h)] \\ &= h - A^{-1}[y - (y+k)] = h - A^{-1}[k]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pela desigualdade (3.4), segue que

$$\|h - A^{-1}k\| = \|\phi(x+h) - \phi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

que pela desigualdade triangular, implica em

$$\|h\| - \|A^{-1}k\| \leq \|h - A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

ou seja,

$$\|A^{-1}k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|,$$

assim,

$$\frac{\|h\|}{2} \leq \|A^{-1}k\| \leq \|A^{-1}\|\|k\|, \tag{3.8}$$

e isto mostra que $h \to 0$ quando $k \to 0$. Por (3.1) e (3.2), segue que

$$\|f'(x) - A\|\|A^{-1}\| < \lambda\|A^{-1}\| = \frac{1}{2} < 1.$$

Pela Proposição 3.4, temos que $f'(x)$ é inversível, com inversa T. Como $2\lambda\|A^{-1}\| = 1$, por (3.8) vale que

$$\frac{1}{\|k\|} \leq \frac{1}{\lambda\|h\|}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(y+k)-g(y)-Tk &= g(f(x+h))-g(f(x))-Tk \\ &= x+h-x-Tk \\ &= h-Tk \\ &= h-T(f(x+h)-f(x)) \\ &= -T(-T^{-1}h+f(x+h)-f(x)) \\ &= -T(f(x+h)-f(x)-f'(x)h). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, segue de (3.9) que

$$\frac{\|g(y+k)-g(y)-Tk\|}{\|k\|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda}\frac{\|f(x+h)-f(x)-f'(x)h\|}{\|h\|}.$$

Quando $k \to 0$, $h \to 0$ e, portanto, o lado direito da desiguldade acima vai a zero, mostrando que

$$\frac{\|g(y+k)-g(y)-Tk\|}{\|k\|} \to 0$$

quando $k \to 0$. Segue da Regra da Cadeia (veja Teorema 2.40) que

$$f(g(y)) = y \Rightarrow g'(y) = T = [f'(x)]^{-1}.$$

A continuidade da função g' segue da igualdade

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1},$$

e da Proposição 3.4 que diz que $A \mapsto A^{-1}$ é contínua e do fato de que f e g são contínuas. Isso conclui a demonstração do Teorema. □

Exemplo 3.6. *Muitas vezes, em modelagem matemática, deseja-se encontrar solução de um sistema de equações não lineares. O Teorema da Função Inversa pode ser uma pode ser uma boa ferramenta para isso. Considere, por exemplo, o seguinte sitema*

$$\begin{cases} 3x^2+yz^3=3 \\ -x^4+y^2+\ln(x)=-1 \\ x+y+z^2=5 \end{cases}, \tag{3.10}$$

e note que o ponto $(x,y,z)=(1,0,2)$ *é solução de (3.10). Vamos mostrar que esta é a única solução de (3.10) localmente, isto é, existe um aberto* $U \subset \mathbb{R}^3$ *que contém* $(1,0,2)$ *que, em* U*, a única solução é* $(1,0,2)$.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (3x^2 + yz^3, -x^4 + y^2 + \ln(x), x + y + z^2)$. Temos que $f(1, 0, 2) = (3, -1, 5)$. É possível mostrar que f é diferenciável. Além disso, $f \in C^1$ e

$$f'(1, 0, 2) = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\det f'(1, 0, 2) = 96 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem dois abertos $U \ni (1, 0, 2)$ e $V \ni (3, -1, 5)$ tais que $f : U \to V$ é uma bijeção. Portanto, em U, o único ponto cuja imagem é $(3, -1, 5)$ é o ponto $(1, 0, 2)$.

Capítulo 4

Resultados Complementares

Neste capítulo, apresentamos os resultados complementares ao texto que darão uma melhor compreensão dele. São algumas proposições e resultados que entremearam algumas demonstrações e constituem passos imprescindíveis para a conclusão dos mesmos. Ao nosso entender, um capítulo à parte para esses conceitos foi necessário para encurtar o texto dessas demonstrações, a fim de que não se estendessem tanto.

Para mostrar que a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ no Exemplo 2.16, usamos a Propriedade Arquimediana.

Proposição 4.1. *(Propriedade Arquimediana) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e sendo $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Demonstração: Primeiro, mostra-se que o conjunto $\mathbb{N}$ é ilimitado. De fato, se $\mathbb{N}$ for limitado, então, como o conjunto $\mathbb{R}$ é completo pelo Exemplo 2.48, existe $s = \sup \mathbb{N}$. Pela definição de supremo, $s - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$, existindo, assim, um natural m tal que $m > s - 1$. Isto implica que o número natural $m + 1$ satisfaz $m + 1 > s$, contrariamente ao fato de que $s = \sup \mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{N}$ é ilimitado e, desta forma, existe um $n > \dfrac{b}{a}$, levando a que $na > b$. □

Para mostrar que a reta é um espaço métrico completo no Exemplo 2.48, usamos os três seguintes resultados.

Lema 4.2. *Sejam A e B subconjuntos da reta limitados inferiormente. Se $A \subset B$, então $\inf A \geq \inf B$.*

Demonstração: Deixaremos a cargo do leitor. Para sugestão, veja [5], capítulo III, exercício 33, página 92. □

Proposição 4.3. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Antes de demonstrar a Proposição 4.3, relembremos o que é uma sequência monótona. Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é crescente se

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots,$$

isto é, se $x_n < x_{n+1}$ para todo n. Se, por outro lado,

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots,$$

isto é, se $x_n > x_{n+1}$ para todo n, dizemos que a sequência é decrescente.
A sequência (x_n) é não-crescente se

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$$

e não-decrescente se

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$$

Se uma sequência satisfaz qualquer uma dessas propriedades é dita monótona.
Demonstração da Proposição 4.3: Seja, sem perda de generalidade, $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ uma sequência não decrescente limitada, com $x_n \in \mathbb{R}$. Do fato da sequência ser limitada, $\sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Seja $a = \sup\{x_n\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos termos de x_n, pois é menor do que a. Logo, existe n_0 tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Como $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$, temos que $a - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq a \leq a + \varepsilon$, ou seja, $a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon, \forall n > n_0$. Portanto, $a = \lim x_n$. Analogamente, prova-se a proposição para os outros tipos de sequências monótonas. □

Teorema 4.4. *Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência que converge para $a \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge para a.*

Demonstração: Deixaremos a cargo do leitor. Como sugestão, veja [5], capítulo IV, Lema 2, página 127. □

Para provar a existência do ponto fixo do Teorema 2.50 (Ponto Fixo de Banach), foi mister a seguinte proposição:

Proposição 4.5. *Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos, $f : M \to N$ e $a \in M$. A função f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência (x_n) em M que converge para a, a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(a)$ (em símbolos, f é contínua em $a \Leftrightarrow \forall (x_n) : \lim x_n = a$, temos $\lim f(x_n) = f(a)$).*

Demonstração: Primeiro, vamos supor que f é contínua em a. Seja (x_n) uma sequência em M tal que $\lim x_n = a$. Vamos mostrar que $\lim f(x_n) = f(a)$. Dê $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Uma vez que $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então $d(x_n, a) < \delta$. Logo, se $n \geq n_0$, então $d(x_n, a) < \delta$ e $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Portanto, $\lim f(x_n) = f(a)$. Reciprocamente, vamos assumir que $\forall (x_n)$

tal que $\lim x_n = a$, temos $\lim f(x_n) = f(a)$ e provar que f é contínua em a. Para isso, vamos supor que ela não é contínua em a e chegar a uma contradição. Supor que f não é contínua em a significa dizer que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ mas $d(f(x_i), f(a)) \geq \varepsilon$. Tomando $\delta = 1/n$ com n natural, temos que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$ com $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Mas, então, $\lim x_n = a$, porém $\lim f(x_n) \neq f(a)$, o que contradiz nossa hipótese. Logo, necessariamente, f é contínua em a. $\square$

Na seção 3.2, usamos a propriedade da continuidade da aplicação matriz inversa. Antes de demonstrar essa proposição, vejamos o que é a norma de uma transformação linear.

Definição 4.6. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Definimos*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T \cdot x\|.$$

A definição mostra que $\|T \cdot x\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in X$. É possível mostrar que

$$\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T \cdot x\|.$$

O próximo resultado garante que $\|\cdot\|$ é realmente uma norma no espaço vetorial $L(X, Y)$ de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y.

Teorema 4.7. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Então,*
(i) $\|\cdot\|$ é uma norma;
(ii) $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Demonstração: Claramente $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se, e somente se, $T \cdot x = 0$ para todo $x \neq 0$. Vale também

$$\|\lambda T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda T \cdot x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda|\|T \cdot x\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|T \cdot x\|}{\|x\|} = |\lambda|\|T\|.$$

Além disso,

$$\|S + T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(S+T)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|S \cdot x\| + \|T \cdot x\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|S \cdot x\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|T \cdot x\|}{\|x\|} = \|S\| + \|T\|.$$

(ii) $\|(ST)x\| = \|S(T \cdot x)\| \leq \|S\|\|T \cdot x\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|.$ $\square$

Lema 4.8. *Sejam X e A matrizes quadradas inversíveis. Então, sempre que o termo da direita existir e for positivo,*

$$\|X^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|X - A\|\|A^{-1}\|}.$$

Demonstração: Observe que a desigualdade requerida é equivalente à desigualdade

$$\|X^{-1}\| - \|X^{-1}\|\|X - A\|\|A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|.$$

Segue do Teorema 4.7 e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \|X^{-1}\| - \|X^{-1}\|\|X - A\|\|A^{-1}\| &\leq \|X^{-1}\| - \|X^{-1}(X - A)A^{-1}\| \\ &= \|X^{-1}\| - \|A^{-1} - X^{-1}\| \\ &\leq \|X^{-1}\| - (\|X^{-1}\| - \|A^{-1}\|) \\ &= \|A^{-1}\|. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4. *(Continuidade da aplicação matriz inversa)* Se $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é inversível e $B \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|B - A\|\|A^{-1}\| < 1$, então B é inversível. Além disso, a aplicação $A \mapsto A^{-1}$ é contínua.

Demonstração: Afirmamos que B é injetiva. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $Bx = 0$. Vamos mostrar que $x = 0$. Sendo A uma bijeção, existe um único $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $A^{-1}y = x$. Assim,

$$BA^{-1}y = Bx = 0 \Rightarrow BA^{-1}y - y = -y \Rightarrow (BA^{-1} - I)y = -y \Rightarrow (B - A)A^{-1}y = -y.$$

Se $y \neq 0$, desta última igualdade, vem que

$$\|(B - A)A^{-1}y\| = \|y\| \Rightarrow \|(B - A)A^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\| = 1.$$

Assim, segundo a Definição 4.6 e o Teorema 4.7, segue do fato de $\left\|\dfrac{y}{\|y\|}\right\| = 1$ que

$$\|B - A\|\|A^{-1}\| \geq \|(B - A)A^{-1}\| \geq 1,$$

o que contradiz a hipótese. Logo, necessariamente, $y = 0$. Isso implica que $x = A^{-1}y = 0$, mostrando que B é injetiva. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que B é bijeção, como queríamos demonstrar. Para mostrar que $A \mapsto A^{-1}$ é contínua, considere $I \subseteq L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ o conjunto das aplicações inversíveis e $F : I \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dada por $F(A) = A^{-1}$. Vamos mostrar que F é contínua. Para isso, seja $A \in I$. Antes disso, observe que, se $r = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$ e $\|x - A\| < r$, segue do resultado anterior que $x \in I$, isto é, I é um conjunto aberto. Agora, seja $\varepsilon > 0$ dado. Devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - A\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(A)\| < \varepsilon.$$

O que é o mesmo que

$$\|x - A\| < \delta \Rightarrow \|x^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon.$$

Temos que

$$\|x^{-1} - A^{-1}\| = \|x^{-1}(x - A)A^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|x - A\|\|A^{-1}\|. \tag{4.1}$$

Ora, pelo Lema 4.8, tem-se

$$\|x^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|x - A\|\|A^{-1}\|}$$

sempre que o lado direito for positivo. Como $\|x - A\| < \delta$, segue que $1 - \|x - A\|\|A^{-1}\| > 1 - \delta\|A^{-1}\| > 0$ quando escolhemos $0 < \delta < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Dessa maneira,

$$\|x^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|x - A\|\|A^{-1}\|} < \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \delta\|A^{-1}\|}.$$

Aplicando esta última desigualdade em (4.1), obtemos

$$\|x^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \delta\|A^{-1}\|}\delta\|A^{-1}\|.$$

Precisamos que o lado direito da desigualdade acima seja menor que ε. Ora, isolando δ para este fim, basta escolhermos $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}, \dfrac{\varepsilon}{\|A^{-1}\|^2 + \varepsilon\|A^{-1}\|}\right\} > 0$, segue que

$$\|x - A\| < \delta \Rightarrow \|x^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon.$$

Ou seja, F é contínua em A. $\square$

Capítulo 5

Considerações Finais

O Teorema da Função Inversa é um dos mais importantes resultados da Análise. Ele admite várias versões desde funções reais de uma variável até funções vetoriais, e todas referem-se basicamente sobre a eventualidade de inverter uma função numa determinada região em torno de um ponto. Essencialmente, o Teorema da Função Inversa diz que, se $f'(x_0)$ é inversível, então f é inversível numa região que contém x_0. Noutras palavras, existe uma bola aberta U de centro x_0 tal que a restrição de f a U é inversível. Além disso, o Teorema garante também que a função f^{-1} possui a mesma regularidade (ser diferenciável) da função f. Esta regra usa o determinante da matriz jacobiana da função. Na linguagem da Análise, sempre que isso acontece, dizemos que f é um difeomorfismo local. Para a demonstração do Teorema aqui apresentada, uma das hipóteses que admitimos é f ser de classe C^1. Isso nos garante a diferenciabilidade da função no ponto x_0.

O Teorema da Função Inversa é muito útil no que diz respeito a fornecer informações sobre uma função que, no sentido prático, seria muito complicado de efetuar manipulações algébricas, a fim de verificar se ela possui inversa ou não.

Existem inúmeras aplicações do Teorema da Função Inversa, dentre elas, designar soluções únicas para sistemas de equações não lineares. Ela também serve de base para demonstrar o Teorema da Função Implícita, um dos teoremas centrais da Análise, que, por sua vez, pode ser aplicado para estabelecer um conjunto infinito de soluções para sistemas de equações não lineares.

Uma das utilidades do Teorema, foi, pra mim, no campo pessoal. Através dele, revelou-se um mundo de novidades que, até então, eu desconhecia e que me deixaram fascinado. Isso despertou em mim o desejo de aprofundar meus conhecimentos na matemática e, em particular, na Análise. Acredito que esse trabalho me deixou mais preparado para um eventual mestrado. Como efeito prático, também espero que esse trabalho sirva de fundamentação teórica para outras monografias que seguirão essa linha de pesquisa no Câmpus da UFT de Araguaína, Tocantins.

Referências

[1] ANDRADE, Doherty. **O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita**. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/inversa.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2016.

[2] BOLDRINI, José Luís [et all]. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Textos Universitários)

[4] DUARTE, Isabella Silva. **Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach**. Campina Grande, UEPB, 2014, 54f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba - Campina Grande, 2014.

[5] ELON, Lages Lima. **Curso de análise** 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1. (Projeto Euclides)

[6] ELON, Lages Lima. **Curso de análise** 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 2. (Projeto Euclides)

[7] GONÇALVES, Mirian Buss; GONÇALVES, Daniel. **Elementos da Análise**. 2. ed. Florianópolis, SC: UFSC, 2012.

[8] GONÇALVES, Natália de Barros. **Topologia do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos**. São Carlos, UFSCar, 2006. 39f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos - São Carlos, 2006.

[9] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Curso de Cálculo Vol. I e II** ; Editora LTC, 2001.

[10] SILVA, Jaime Carvalho. **Princípios de Análise Matemática Aplicada - Suplemento**. Universidade de Coimbra, 2002. 41f.

[11] SILVA, Mario Olivero. **Cálculo III**. / Mario Olivero da Silva, Nancy de Souza Cardim. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010,v.2.

[12] STEWART, James. **Cálculo Vol. I e II** ; Editora Cengage, 2009.

[13] TEZOTO, Leandro. **Sobre O Teorema da Função Inversa**. Rio Claro, UNESP, 2014. 35f. Dissertação (mestrado em matemática). Universidade Estadual Paulista - Rio Claro, 2014.

[14] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normalização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Câmpus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.

[15] VIEIRA, Cícero Demétrio. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. João Pessoa, UFPB, 2013. 45f. Dissertação Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa, 2013.

[16] WILBERSTAEDT, Jeison Marion. **Diferenciabilidade e o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach**. Santa Catarina, UFST, 2000. 47f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina - Santa Catarina, 2010.