UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO MARCOS GOMES DA CONCEIÇÃO

O TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

ARAGUAÍNA
2016

JOÃO MARCOS GOMES DA CONCEIÇÃO

O TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2016

JOÃO MARCOS GOMES DA CONCEIÇÃO

O TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

____
Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva

____
Profa. Msc. Renata Alves da Silva

À minha família. Em especial, à minha mãe, Neli Gomes Alencar, ao meu pai, Evangelista Francisco da Conceição, e ao meu irmão, Mario Júnior Gomes da Conceição.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida maravilhosa que me proporciona, pela saúde, força, coragem e persistência para vencer os obstáculos enfrentados até hoje, que, mesmo passando por dificuldades, não permitiu que eu desistisse. Por me conceder o início e o término desse curso.

À minha família, pelo grande apoio e incentivo. Em especial, ao meu pai, Evangelista, pela preocupação e entendimento nos momentos que tive que me ausentar das obrigações devido aos estudos, pelo investimento e fé que depositou em mim; à minha mãe, Neli, pelo carinho e amor, por sempre estar ao meu lado nos momentos bons e ruins; ao meu irmão, Mario Júnior, que, de certa forma, sempre me ajudou como pôde. Esses foram essenciais pela permanência e o término desse curso.

À minha tia Maria Gomes e à sua família, pela estadia em sua casa e, também, à minha vó Virginha, pelo amor, carinho e preocupação. Agradeço também às minhas primas Lucilede e Mayanne pelo apoio e confiança.

Aos amigos e colegas Camila Bomfim, Cintya Vaqueiro, Edna Alencar, Jailson Resplandes, Janete Moreira, Lee-Andro, Karla Maiani, Mariane Araújo, Melquisedeque dos Anjos e Werley Sales, pelos vários momentos que convivemos juntos, as brincadeiras e ensinamentos. Agradeço também ao meu amigo Cícero Junior, pelas alegrias e aventuras compartilhadas, e também pelas grandes ajudas durante o curso, em especial, no manuseio do programa Latex.

Aos professores com os quais tive a oportunidade de estudar e absorver conhecimentos e técnicas fundamentais tanto na vida acadêmica quanto para uma futura profissão. Entre eles, Álvaro Júlio Yucra Hancco, André Luiz Ortiz da Silva, Fernanda Vital de Paula, Renata Alves da Silva, Roblêdo Maks Miranda Sette, Sinval de Oliveira, e aos demais que, de certa forma, contribuíram para minha formação.

Agradeço também aos programas PADI e PIBID e aos coordenadores dos mesmos, pela oportunidade de participar e pelos conhecimentos obtidos durante esse tempo, propiciando-me uma postura mais favorável.

Agradeço em especial ao meu orientador professor Dr. José Carlos de Oliveira Junior, por me aceitar como seu orientando, pela paciência, pela partilha de conhecimento, por sempre estar disponível nas horas que precisei, pelos ensinamentos que não foram poucos, me promovendo desenvolvimento como acadêmico e como pessoa.

A todos, minha eterna gratidão!

E o que a si mesmo se exaltar será humilhado, e o que a si mesmo se humilhar será exaltado.

Mateus 23:12

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal construir a integral de Lebesgue e enunciar e demonstrar o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue. Faremos, para isso, um estudo categórico sobre $\sigma-$álgebras, funções mensuráveis, medidas e funções integráveis. Introduziremos este trabalho fazendo uma singela apresentação sobre hipóteses existentes na teoria clássica de integração (devido a Riemann) com o intuito de relacionar no final deste trabalho com as hipóteses mais fracas na teoria de integração devido a Lebesgue.

Palavras-chave: Medida e Integração. Integral de Lebesgue. Integral de Riemann.

ABSTRACT

The main objective of this work is to construct the Lebesgue integral and to expose and demonstrate the Lebesgue dominated convergence theorem. For this, we will make a categorical study of $\sigma-$algebras, measurable functions, measures and integrable functions. We will introduce this work by giving a hypotheses presentation in classical integration theory (due to Riemann) in order to relate, at the end of this work, as weaker hypotheses in the theory of integration due to Lebesgue.

Keywords: Measure and Integration. Integral of Lebesgue. Integral of Riemann.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria clássica de integração foi estabelecida a partir dos trabalhos de Riemann, tornando-se um instrumento valioso para a resolução de incontáveis problemas. Todavia, esta teoria nem sempre é suficiente quando se trata de questões puramente analíticas, como equações diferenciais e probabilidade. Deste modo, surge a necessidade de uma revisão da integral de Riemann, com o objetivo de encontrar uma integral que cessasse, ou pelo menos diminuísse, os problemas pertinentes à primeira, de modo a estender os resultados já existentes na teoria clássica de integração.

Nesta direção, desejava-se que os resultados de convergência fossem mais "fracos" em relação às hipóteses necessárias. Por exemplo, na teoria de integração de Riemann, encontramos um resultado que diz que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

sob a hipótese de convergência uniforme da sequência de funções (f_n) para a função f, todas definidas em $[a,b]$ com contra-domínio $\mathbb{R}$. Uma pergunta que aparece naturalmente é: se retirarmos esta hipótese, o resultado ainda será válido? Em geral, a resposta é negativa. Para ver isto, basta considerar $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. No capítulo 4, será mostrado que, embora $f_n(x) \to f(x) = 0$ pontualmente (mas não uniformemente), tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Um exemplo ainda mais simples é considerarmos a sequência constante $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = 1$ quando x é irracional e $f_n(x) = 0$ quando x é racional, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, (f_n) converge (pontual e uniformemente) para $f := f_1$, que, por sua vez, não é integrável a Riemann, pois é descontínua em todos os pontos. Logo, também não vale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1.2}$$

A teoria clássica de integração, que culmina na integral de Riemann, vem sendo substituída pela Teoria da Integração desenvolvida por Henri Lebesgue no início do século passado.

A integral de Lesbegue foi uma das criações mais importantes da Análise do século passado, pois estendeu notavelmente a Integral de Riemann e deu um impulso relevante à Análise Funcional, à Teoria das Equações Diferenciais e Integrais e à Teoria da Probabilidade. O ponto básico dessa nova teoria foi a introdução do conceito de medida.

O conceito de medida de um conjunto estende as definições de comprimento de intervalos (quando estamos em $\mathbb{R}$), área de figuras planas (quando estamos em $\mathbb{R}^2$) e volume de sólidos (quando estamos em $\mathbb{R}^3$), e está na base da construção dos espaços de funções e da teoria da integração de Lebesgue.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar o Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue, que nos fornece condições suficientes para que possamos passar o limite para dentro da integral, como em (1.1). Seu enunciado é o seguinte:

Teorema Principal: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável f de valor real. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x), \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e vale que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Este resultado, diferente de quando se trata da integral de Riemann, garante sob hipóteses "simples" que ainda é possível passar o limite para dentro das integrais, e responde que a equação (1.2) é verdadeira para as integrais a Lebesgue.

Para apresentar este teorema, vamos estruturar o trabalho da maneira que se segue.

No segundo capítulo, nos preocuparemos em definir o conceito de funções mensuráveis. Para isso, definiremos os conceitos de reta estendida e σ-álgebras.

No capítulo três, trataremos do conceito de medida, que foi fundamental para a construção da Integral de Lebesgue.

No quarto capítulo, provavelmente, o mais importante do trabalho, faremos uma introdução à Integral de Lebesgue e apresentaremos o principal resultado deste trabalho: o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Já o quinto capítulo, exibirá resultados complementares ao texto. Por fim, apresentaremos as considerações acerca dos resultados que foram obtidos.

Para a leitura deste trabalho, será necessária uma certa familiaridade com alguns conceitos da Análise Real. Tentaremos, sempre que possível, fornecer ao leitor referências destas noções e apresentar as definições e demonstrações quando for o caso.

Capítulo 2

Funções Mensuráveis

Quando um conjunto ou um objeto qualquer é dito mensurável, é de costume pensarmos que, dele, podemos determinar uma certa medida: comprimento, área, volume, quantidade, tamanho, capacidade, dimensão, grandeza, entre outras. Neste capítulo, todavia, quando for mencionado que um conjunto é mensurável, isso vai significar apenas que este conjunto pertence a uma σ-álgebra, que, basicamente, é uma família de subconjuntos que satisfazem certas condições. Estas noções nos darão suporte para definirmos o conceito de medida e de função mensurável.

2.1 A Reta Estendida

Os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ são chamados de menos infinito e mais infinito, respectivamente. A Reta Real Estendida, $\overline{\mathbb{R}}$, cujos elementos são chamados de valores reais estendidos, é definida da seguinte maneira.

Definição 2.1. *Representaremos a reta estendida como $\overline{\mathbb{R}}$ que é a junção da reta real com os elementos menos infinito e mais infinito e, pode também ser escrita da forma simbólica $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.*

Há apenas uma razão para a qual definimos a reta estendida: é conveniente dizer que o comprimento da reta real é $+\infty$ ou que a área do plano $\mathbb{R}^2$ é $+\infty$.

Definição 2.2. *Sejam $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Temos*

- *$x + y = y + x$, dado que $x, y \in \mathbb{R}$.*
- *$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$, dado que $x \neq -\infty$.*
- *$-\infty + x = x + (-\infty) = -\infty$, dado que $x \neq +\infty$.*
- *$x + 0 = 0 + x = x$, para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Caso aconteça de nos depararmos com somas do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ ou $(-\infty) + (+\infty)$, consideraremos como somas indefinidas.

Já o produto é definido da seguinte forma:

Definição 2.3. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos*

- $x \times y = y \times x$ *ou exclusivamente* xy.
- $x \times 0 = 0 \times x = 0$, *se* $x \in \mathbb{R}$.
- $x \times 1 = 1 \times x = x$, *se* $x \in \mathbb{R}$.
- $x \times y = 0$, *quando* x *ou* y *for igual a 0.*
- $x \times (+\infty) = +\infty \times x = +\infty$, *se* $x > 0$.
- $x \times (+\infty) = -\infty$, *se* $x < 0$.
- $x \times (-\infty) = +\infty$, *se* $x < 0$

Definição 2.4. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, *tem-se* $x < +\infty$ *e* $x > -\infty$.

2.2 σ-Álgebras

Os conceitos de funções e conjuntos mensuráveis estão inteiramente ligados aos de σ-álgebra. Nesta seção, nos preocuparemos em defini-la e em compreender as propriedades de seus elementos.

Definição 2.5. *Seja X um conjunto qualquer e considere $\wp(X)$ o conjunto das partes de X. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{A}$ (também chamado de família) de $\wp(X)$ é uma σ-álgebra de X se as seguintes condições forem satisfeitas:*

a) $\emptyset$, $X \in \mathcal{A}$;

b) Dado um conjunto $B \in \mathcal{A}$, o complementar $B^{\complement} = X \setminus B \in \mathcal{A}$;

c) Qualquer que seja a sequência (B_n) de elementos de A, a união $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Exemplo 2.1. *Seja X um conjunto qualquer. A partir dele, podemos construir duas σ-álgebras simples.*

a) A σ-álgebra $\wp(X)$, em que $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X, é considerada a maior σ-álgebra de X, pois ela contém todas as σ-álgebras de X.

b) A σ-álgebra formada por $\emptyset$, X, sendo esta considerada a menor σ-álgebra de subconjuntos de X, pois está contida em qualquer σ-álgebra de X.

Exemplo 2.2. *Seja X um conjunto não-enumerável. Então,*

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ é enumerável ou } E^{\complement} \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra de X, chamada a σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis ou coenumeráveis.

Para obter maiores esclarecimentos deste exemplo, veja a Definição 5.1 e o Lema 5.1 no Capítulo 5.

Exemplo 2.3. *Sejam* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *o conjunto dos números naturais e* $\mathcal{A}$ *o conjunto formado por*

$$\emptyset,\ \{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\},\ \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\},\ \mathbb{N}.$$

Então, $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra de* X*.*

Exemplo 2.4. *Sejam* $\mathcal{A}_1$ *e* $\mathcal{A}_2$ σ*-álgebras de um conjunto* X*, e tomemos* $\mathcal{A}_3$ *como a interseção de* $\mathcal{A}_1$ *com* $\mathcal{A}_2$*, ou seja,* $\mathcal{A}_3$ *é a interseção de todos os subconjuntos de* X *que pertecem a* $\mathcal{A}_1$ *e também a* $\mathcal{A}_2$*. Então,* $\mathcal{A}_3$ *é uma* σ*-álgebra de* X*. De fato, observe os seguintes itens:*

a) Como $\mathcal{A}_1$ *é uma* σ*-álgebra, temos que* $\emptyset, X \in \mathcal{A}_1$*. Do mesmo modo, temos que* $\emptyset, X \in \mathcal{A}_2$*. Logo,* $\emptyset, X \in \mathcal{A}_3$*.*

b) Suponha um conjunto $A \in \mathcal{A}_3$*. Temos que* $A \in \mathcal{A}_1$ *e como* $\mathcal{A}_1$ *é uma* σ*-álgebra, tem-se* $A^{\complement} \in \mathcal{A}_1$*. De modo análogo, obtém-se que* $A^{\complement} \in \mathcal{A}_2$*, e assim,* $A^{\complement} \in \mathcal{A}_3$*.*

c) Agora, Vamos tomar $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos pertencentes a* $\mathcal{A}_3$*. Temos que* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_1$ *e como já sabemos que* $\mathcal{A}_1$ *é uma* σ*-álgebra, segue que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_1.\ \textit{Analogamente,}\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_2\ \textit{e, então,}\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_3.$$

Portanto, mostramos que realmente $\mathcal{A}_3$ *é uma* σ*-álgebra.*

Exemplo 2.5. *Sejam* $X = \{\alpha, \lambda, \gamma\}$ *e* $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\lambda\}, \{\gamma\}, X\}$*, então* $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra de* X*.*

Este é um exemplo parecido com o Exemplo 2.3.

Lema 2.1. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra de um conjunto* X*. Quaisquer que sejam* A*,* $B \in \mathcal{A}$*, tem-se* $A \cap B \in \mathcal{A}$*.*

Demonstração: Como A e B pertencem a $\mathcal{A}$, temos que $A^{\complement}$ e $B^{\complement}$ também pertencem a $\mathcal{A}$. Segue que a união $(A^{\complement}) \cup (B^{\complement})$ pertence a $\mathcal{A}$. Mas esta união é exatamente igual ao complementar da interseção de A e B, isto é, $(A^{\complement}) \cup (B^{\complement}) = (A \cap B)^{\complement}$. Se o complementar da interseção está em A, então a própria interseção também está. Segue o resultado. □

O Lema acima é ainda mais geral: Se (A_n) é uma sequência numa σ-álgebra, então a interseção $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ pertence a σ-álgebra. Para maiores informações consulte no Capítulo 5 o Lema 5.3.

Ainda sobre σ-álgebras, há um exemplo que devemos mencionar. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X, é possível expressar a "menor"σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$.

Exemplo 2.6. *Seja $\mathcal{A} \subset \wp(X)$, não necessariamente uma σ-álgebra. Considere agora o conjunto $\sigma(\mathcal{A})$ definido como a interseção de todas as σ-álgebras que contém $\mathcal{A}$. É possível mostrar que $\sigma(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra de X que contém $\mathcal{A}$. Ela é muitas vezes chamada de a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$ ou, ainda, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.*

Introduziremos agora a noção de espaço mensurável.

Definição 2.6. *Chamaremos de espaço mensurável o par $(X, \mathcal{A})$, dado que X é um conjunto não vazio e a $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X.*

Com a noção de σ-álgebra em mãos, podemos começar a falar sobre funções que serão, posteriormente, suporte para se definir a ideia de medida.

Definição 2.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ não constante é uma função aditiva se, dados quaisquer dois conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{A}$, tem-se*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

As funções aditivas possuem propriedades básicas que são de fácil compreensão. Mostraremos essas propriedades na seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Sejam X um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Se $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma função aditiva, então, para $A, B, A_1, A_2, \cdots, A_j \in \mathcal{A}$, tem-se:*

a) $\mu(B) \leq \mu(A)$, *se* $B \subset A$;

b) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, *se* $B \subset A$ *e* $\mu(B) < +\infty$;

c) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$, *se* $\mu(A_1 \cap A_2) < +\infty$;

d) $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_j) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_j)$, *se* $A_i \cap A_k = \emptyset$ *para* $i \neq k$.

Demonstração:

a) Se $B \subset A$, então $A = B \cup (A \setminus B)$ e $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Segue do fato de μ ser aditiva que

$$\mu(A) = \mu[B \cup (A \setminus B)] = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \mu(B), \tag{2.1}$$

já que $\mu(A \setminus B) \geq 0$.

b) Segue diretamente da equação expressa em (2.1).

c) Tem-se que

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Agora, vamos aplicar μ e também a aditividade. Segue que

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1). \tag{2.2}$$

Como $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2)$, aplicando μ e a aditividade, tem-se

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2).$$

Da mesma forma, obtemos

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 \cap A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1).$$

Agora, podemos substituir estas igualdades em (2.2) e usar o fato de $\mu(A_1 \cap A_2) < +\infty$ para obter

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

d) A demonstração deste item segue de um processo indutivo, tomando como base o item c). □

Definição 2.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Uma função aditiva $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ será σ-aditiva se, para $(A_n) \subset \mathcal{A}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, valer*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$

Uma propriedade importante que podemos mencionar aqui das funções σ-aditivas é a de podermos calculá-las por aproximação, no sentido de que são funções calculadas por limites. No entanto, não iremos nos aprofundar neste assunto. Para o leitor interessado, veja [7], páginas 5 e 6, que trata de um teorema voltado a esta questão.

Exemplo 2.7. *Sejam X um conjunto não-vazio e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X. Vamos definir uma função aditiva nesta σ-álgebra da seguinte maneira. Dado $E \in \mathcal{A}$,*

$\mu(E) =$ o número de elementos de E, se E tem um número finito de elementos,

$\mu(E) = +\infty$, se E tem infinitos elementos.

Afirmamos que μ é aditiva. De fato, dados A e B conjuntos finitos, com $A \cap B = \emptyset$, sejam n o número de elementos de A e m o número de elementos de B. Assim, $A \cup B$ terá finitos elementos, e vale que

$$\mu(A \cup B) = n + m = \mu(A) + \mu(B).$$

Se um dos conjuntos A e B for infinito, então a união $A \cup B$ terá, claramente, infinitos elementos e, pela definição da medida μ, tem-se

$$\mu(A \cup B) = +\infty, \text{ e } \mu(A) + \mu(B) = +\infty + m = +\infty.$$

2.2.1 A σ-álgebra de Borel

Decidimos colocar este exemplo de σ-álgebra como uma seção própria devido à sua importância. A respeito das σ-álgebras geradas, temos uma em especial, que é a σ-álgebra gerada por intervalos abertos e fechados de $\mathbb{R}$. A mesma será significativa para o próximo capítulo do nosso trabalho.

Relembre que, dado uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X (não necessariamente uma σ-álgebra), existe a "menor"σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$, chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

Definição 2.9. *A σ-álgebra gerada pela família de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ é conhecida como a σ-álgebra de Borel, e seus elementos são chamados de borelianos. Denotaremos a σ-álgebra de Borel por $\mathcal{B}$.*

Conseguimos mostrar que a σ-álgebra de Borel é gerada por intervalos fechados de $\mathbb{R}$. Este resultado se encontra no próximo lema.

Lema 2.2. *A σ-álgebra de Borel pode também ser gerada por todos os intervalos fechados do tipo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração: De fato, considere o conjunto $\{(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$. Sabemos da observação seguinte ao Lema 2.1 que a $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})$ pertence a σ-álgebra $\mathcal{B}$. Afirmamos que $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) = [a, b]$. Com efeito, como

$$[a, b] \subset (a - \tfrac{1}{n}, b + \tfrac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tem-se $[a, b] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Reciprocamente, tomemos dois números positivos λ_1 e λ_2 e definamos $\lambda = min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$. Mostraremos que $a - \lambda_1$ e $b + \lambda_2$ não pertecem à $\cap_{n=1}^{+\infty}$ $(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Para qualquer $n_0 > \frac{1}{\lambda}$, temos

a) $n_0 > \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda > \frac{1}{n_0} \Rightarrow b + \lambda > b + \frac{1}{n_0} \Rightarrow b + \lambda_2 \geq b + \lambda > b + \frac{1}{n_0} \Rightarrow b + \lambda_2 \notin (a - \frac{1}{n_0}, b + \frac{1}{n_0}) \Rightarrow b + \lambda_2 \notin \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$.

b) $n_0 > \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda > \frac{1}{n_0} \Rightarrow -\lambda < -\frac{1}{n_0} \Rightarrow a - \lambda < a - \frac{1}{n_0} \Rightarrow a - \lambda_1 \leq a - \lambda < a - \frac{1}{n_0} \Rightarrow a - \lambda_1 \notin (a - \frac{1}{n_0}, b + \frac{1}{n0}) \Rightarrow a - \lambda_1 \notin \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$.

Logo, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \subset [a, b]$, o que conclui que $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) = [a, b]$. □

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que a σ-álgebra de Borel também pode ser gerada por intervalos semi-abertos (ou semi-fechados) de $\mathbb{R}$.

2.3 Funções Mensuráveis

Nas seções anteriores, a mensurabilidade de um subconjunto de X está ligada à σ-álgebra em questão. Nesta seção, veremos que o conceito de função mensurável também está, e nos preocuparemos em definir e em trazer à tona as propriedades importantes para o progresso deste trabalho no que diz respeito às funções mensuráveis.

Definição 2.10. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, ou simplesmente mensurável, se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$[f > \alpha] = \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty])$$

pertence a $\mathcal{A}$.

Em outras palavras, uma função f é mensurável se a imagem inversa de todo intervalo da forma $]\alpha, +\infty]$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ for $\mathcal{A}$-mensurável.

A partir de agora, quando dissermos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, ficará subentendido que existe uma σ-álgebra do conjunto X em que vale a Definição 2.10 para f.

Proposição 2.2. *As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \to \mathbb{R}$:*

a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ é mensurável;

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ é mensurável;

c) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ é mensurável;

d) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$ é mensurável.

Demonstração: Temos que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ e $\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$ são complementares um do outro, isto é,

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\},$$

como também

$$\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Assim, *a)* e *d)* são equivalentes.

Da mesma forma, $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ e $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ são complementares entre eles e, portanto, *b)* e *c)* são equivalentes. O fato de *a)* implicar em *b*) vem da igualdade

$$\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n}\}.$$

Analogamente, *b)* implica em *a*), já que

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\}.$$

Portanto, todas as afirmações são equivalentes. □

Observamos que, ao invés de usarmos o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ para definir uma função mensurável, podíamos optar por qualquer um dos conjuntos apresentados na proposição acima, pois, caso um deles seja mensurável, o outro também será.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções mensuráveis.

Definição 2.11. *Sejam X um conjunto e $E \subset X$. Denomina-se por função característica de E a função $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ dada por $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$ e $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$.*

Exemplo 2.8. *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e $E \subseteq X$ um conjunto mensurável. Então, χ_E é uma função $\mathcal{A}$-mensurável.*

De fato, vamos designar para este caso que f é a função característica do conjunto E. Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$. Logo, $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ é mensurável. Se $0 \leq \alpha < 1$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{A}$. Logo, $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ é mensurável para $0 \leq \alpha < 1$. Se $\alpha \geq 1$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$. Logo, $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ é mensurável para $\alpha \geq 1$. Portanto, a função característica de um conjunto $E \subseteq X$ é mensurável.

Exemplo 2.9. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Qualquer que seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante é mensurável.*

Com efeito, temos que $f(x) = k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$. Assim, temos que considerar os seguintes casos:

$\forall \alpha \geq k \Rightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $\forall \alpha < k \Rightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$.

Logo, f é mensurável.

Exemplo 2.10. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é mensurável. Aqui, estamos considerando em $\mathbb{R}$ a σ-álgebra de Borel, aquela gerada por intervalos abertos de $\mathbb{R}$ (veja Definição 2.9).*

De fato, temos que o conjunto $]\alpha, +\infty[$ é aberto e f é contínua. Sabemos que $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ é aberto, o que implica que f é mensurável, pois qualquer aberto em $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos abertos (veja o Capítulo 5, Teorema 5.1).

Exemplo 2.11. *Pelo Exemplo 2.10, as funções que associam cada $x \in \mathbb{R}$ ao número*

$$sen(x), \quad cos(x), \quad x^2, \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \text{ou} \quad e^x$$

são exemplos de funções mensuráveis.

Outro exemplo que podemos apresentar de função mensurável é a função de Dirichlet, no qual o mesmo acaba se tornando um caso particular do Exemplo 2.8.

Exemplo 2.12. *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que f é uma função mensurável. Para ver isto, basta considerar $X = [0,1]$ e E o complementar do conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, no exemplo 2.8.

Proposição 2.3. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então*

a) cf é mensurável, sendo $c \in \mathbb{R}$ uma constante;

b) f^2 é mensurável;

c) $f + g$ é mensurável;

d) fg é mensurável;

e) $|f|$ é mensurável.

Demonstração:

a) De fato, para $c > 0$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \tfrac{\alpha}{c}\},$$

sendo que este último conjunto é mensurável, pois, por hipótese, f é mensurável. Para $c < 0$, a demonstração é análoga, bastando utilizar a Proposição 2.2. Para $c = 0$, segue que a função cf é constante e, pelo Exemplo 2.9, é mensurável.

b) Para $\alpha \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \{x \in X : f^2(x) > \alpha\} &= \{x \in X : |f(x)| > \sqrt{\alpha}\} \\ &= \{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}. \end{aligned}$$

Agora, para $\alpha < 0$, temos que $\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = X$ é mensurável. Portanto, a função f^2 é mensurável.

c) Realmente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\{x \in X : f(x) + g(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha - g(x)\}.$$

Afirmamos que a seguinte igualdade é verdadeira.

$$\{x \in X : f(x) > \alpha - g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\}.$$

Com efeito, seja $x \in \{x \in X : f(x) > \alpha - g(x)\}$. Tome um número racional r entre $\alpha - g(x)$ e $f(x)$. Desse modo, tem-se $\alpha - g(x) < r$ e $r < f(x)$, isto é, $g(x) > \alpha - r$ e $f(x) > r$. Logo

$$\{x \in X : f(x) > \alpha - g(x)\} \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\}.$$

A união contrária é clara, pois

$$f(x) > r \text{ e } g(x) > \alpha - r \Rightarrow f(x) + g(x) > \alpha - r + r = \alpha.$$

Isso mostra que $f + g$ é uma função mensurável.

d) Como $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, segue dos itens *a)*, *b)* e *c)* que fg é uma função mensurável.

e) Para $\alpha < 0$, segue que $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X$ que é um conjunto mensurável. Agora, para $\alpha \geq 0$, tem-se

$$\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : f(x) < -\alpha\}.$$

Portanto, a função $|f|$ é mensurável. □

Faremos agora um estudo sobre mensurabilidade de limite de uma sequência de funções. Isto está totalmente relacionado ao teorema principal deste trabalho. Como nosso intuito é tomar limites, supremos, ínfimos, etc., é plausível permitir que uma função f assuma valores da reta estendida, podendo ser $+\infty$ e $-\infty$. Por isso, precisaremos de uma definição de uma função mensurável de valores reais estendidos.

Definição 2.12. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Dizemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, ou simplesmente mensurável, se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.*

Para esta nova definição, vale o mesmo resultado obtido na Proposição 2.3, que apenas enunciaremos aqui e daremos a referência para sua demonstração.

Proposição 2.4. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Então,*

a) cf é mensurável, sendo $c \in \mathbb{R}$ uma constante;

b) f^2 é mensurável;

c) $f + g$ *é mensurável;*

d) fg *é mensurável;*

e) $|f|$ *é mensurável.*

Demonstração: Veja [3], a consequência do Lema 2.8. □

Lema 2.3. *Seja* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma sequência de funções mensuráveis. Então,*

a) $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *é mensurável;*

b) $g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *é mensurável.*

Demonstração:

a) Temos que
$\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
De fato, se x é tal que $c = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha$, então, pela definição de supremo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $f_{n_0}(x) \geq \frac{c+\alpha}{2} > \alpha$. Logo, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$. A recíproca é clara. Assim, a função f é mensurável.

b) Para mostrar que a função g é mensurável, seguimos os mesmos passos feitos na letra *a)* agora adaptados para ínfimo. □

Observemos que, se o conjunto $\{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots\}$ for finito, então $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \max_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e o $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \min_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Conforme mostramos que o $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e o $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ são mensuráveis, então, neste caso, $\max_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e o $\min_{n\in\mathbb{N}} f_n$ também são mensuráveis.

Definição 2.13. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções. Define-se por*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf f_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{m\geq n} f_m) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \sup f_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{m\geq n} f_m).$$

Aqui, ressaltamos que o supremo e ínfimo acima definidos sempre existem na reta estendida, posto que as sequências entre parênteses são monótonas.

Definição 2.14. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções com contradomínio* $\overline{\mathbb{R}}$. *Diz-se que* (f_n) *tem limite, ou é convergente, se, e somente se, para cada* $x \in X$, *existe* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup f_n(x) = L.$$

Neste caso, escrevemos apenas $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = L$.

Corolário 2.1. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis de valores reais estendidos. Então, as seguintes sentenças são satisfeitas:*

a) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup f_n(x)$ *é mensurável;*

b) $g(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf f_n(x)$ *é mensurável;*

c) $h(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *é mensurável se* f_n *tiver limite.*

Demonstração:

a) Por definição, $\lim_{n\to+\infty} \sup f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{\sup_{m\geq n} f_n(x)\}$. Já temos pelo Lema 2.3 que o supremo e o ínfimo de uma sequência de funções mensuráveis são mensuráveis. Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \sup f_n(x)$ é mensurável.

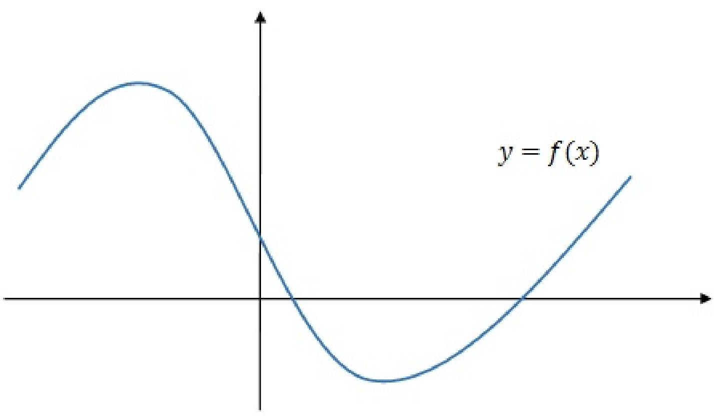
O item *b)* segue de maneira análoga ao item *a)*. O caso do item *c)* vem da Definição 2.14 e do item *a)*. □

Definição 2.15. *Seja* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma função. Definimos a parte positiva* f^+ *e a parte negativa* f^- *de* f *por*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad e \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Para ilustrar geometricamente a definição acima, considere f uma função real como abaixo.

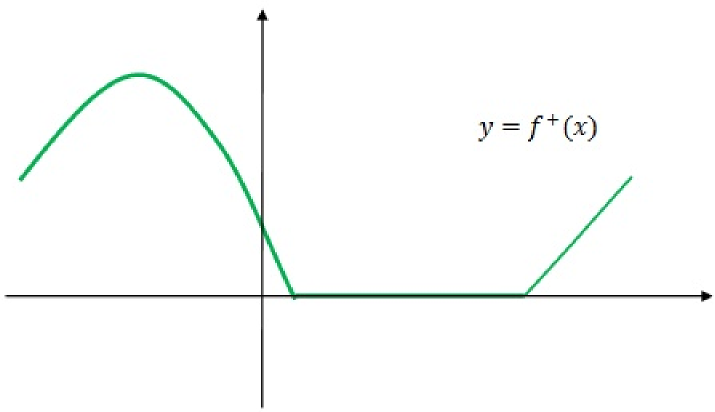
Figura 2.1: Gráfico da Função f.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Para esta função, a parte positiva $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ é a seguinte.

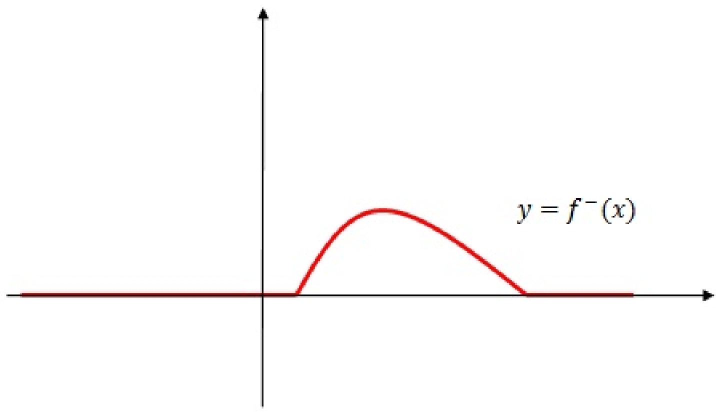
Figura 2.2: Parte Positiva da Função f.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Já a parte negativa $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ pode ser vista no gráfico adiante.

Figura 2.3: Parte Negativa da Função f.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Lema 2.4. *Para toda função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, vale*

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-.$$

Demonstração: Vamos provar primeiro que $f = f^+ - f^-$. Com efeito, suponha que $f(x) \geq 0$. Então, $f^+(x) = f(x)$ e $f^-(x) = 0$. Assim, vale a igualdade referida. Agora, se $f(x) < 0$, tem-se $f^+(x) = 0$ e $f^-(x) = -f(x)$. Com isso, fica provado que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. A outra igualdade segue de maneira análoga. $\square$

Corolário 2.2. *Se f é uma função mensurável, então f^+ e f^- são funções mensuráveis.*

Demonstração: A demonstração deste resultado é obtida a partir da Proposição 2.3 e do Lema anterior. □

Chamamos a atenção do leitor para o próximo resultado. Quando estudamos a integral de Riemann, o intuito inicial é calcular a área sob o gráfico de uma função contínua positiva em um intervalo fechado. Para isso, constroem-se retângulos sob este gráfico e estima-se a área desta região por meio da soma das áreas destes retângulos. À medida que o número de retângulos aumenta, espera-se que esta soma se aproxime da área desejada. Ora, a construção desses retângulos sob o gráfico da função é sempre possível, porque a função é contínua sobre um intervalo fechado. O resultado seguinte diz algo semelhante, agora, para conjuntos e funções mais gerais. Veja a semelhança do próximo resultado com a definição de integral de Riemann.

Lema 2.5. *Se f é uma função não-negativa e $\mathcal{A}$-mensurável, então existe uma sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-mensurável tal que*

a) $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\forall x \in X$.

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ *para cada* $x \in X$.

c) Cada g_n tem um número finito de elementos na sua imagem.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3], Lema 2.11. □

Capítulo 3

Medidas

No capítulo anterior, apresentamos os conceitos de espaço mensurável e funções mensuráveis. Para este capítulo, iremos introduzir outro tipo de espaço e de funções, chamados, respectivamente, de espaço de medida e de medidas. Relembre da definição de σ-álgebra de um conjunto X (veja a Definição 2.5) e da definição de σ-álgebra de Borel (veja a Definição 2.9).

Definição 3.1. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Chama-se medida em $\mathcal{A}$ uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ que satisfaz*

a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

b) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Observamos ainda que uma medida pode assumir o valor $+\infty$.

É de praxe chamar a propriedade *b)* da Definição 3.1 como aditividade. Isso ocorre, porque, se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \cap B = \emptyset$, então $\mu(A \cup B \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\} \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(B) + 0 + 0 + \cdots = \mu(A) + \mu(B)$ (veja Definição 2.7).

Outra observação importante é que $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$, pela definição de μ.

3.1 Resultados e Exemplos de Medidas

Em seguida, daremos alguns exemplos interessantes de medidas.

Exemplo 3.1. *Sejam X um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Para $\rho \in X$ fixo, considere a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida por*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \textit{se } \rho \notin A; \\ 1, & \textit{se } \rho \in A. \end{cases}$$

Este exemplo pode ser considerado como a definição da medida delta de Dirac concentrada em ρ, e denotada por δ_ρ.

Exemplo 3.2. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Considere a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por*

$$\mu(A) = \begin{cases} \textit{número de elementos de } A, & \textit{se } A \textit{ é finito;} \\ +\infty, & \textit{se } A \textit{ é infinito.} \end{cases}$$

*Temos que μ é uma medida caracterizada como **medida de contagem** (veja o Exemplo 2.7).*

Exemplo 3.3. *Sejam $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ uma σ-álgebra de X. E seja a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 0$, $\mu(\{b\}) = 2$, $\mu(\{c\}) = 7$, $\mu(\{a, b\}) = 2$, $\mu(\{a, c\}) = 7$, $\mu(\{b, c\}) = 9$, $\mu(\{a, b, c\}) = 9$. Neste caso, a função μ é uma medida em $\mathcal{A}$.*

Exemplo 3.4. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X . Tome μ_1 definida em $\mathcal{A}$ como $\mu_1(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, e seja μ_2 definida em $\mathcal{A}$ como $\mu_2(\emptyset) = 0$ e $\mu(E) = +\infty$ se $E \neq \emptyset$. Ambas as funções μ_1 e μ_2 são medidas.*

Exemplo 3.5. *Este talvez seja o exemplo mais importante deste capítulo. Considere $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel. No capítulo 9 de [3], é demonstrado que existe uma única medida μ definida em $\mathcal{B}$ que coincide com o comprimento de intervalos abertos, chamada de medida de Lebesgue. Ou seja, existe uma única medida μ definida em $\mathcal{B}$ tal que $\mu(a, b) = b - a$, para todo intervalo aberto (a,b). Esta medida recebe o nome de medida de Lebesgue (ou medida de Borel).*

Lema 3.1. *Sejam X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida. Tem-se*

a) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$ e, além disso, se $\mu(A) < +\infty$, segue que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração: Para demonstrar *a)*, basta seguir os mesmos passos feitos na Proposição 2.1. Agora, para demonstrar *b)*, consideremos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se $B_n = A_n \setminus \cup_{k<n} A_k$. Note que os conjuntos da forma B_n com $n \in \mathbb{N}$ são disjuntos dois a dois e a sua reunião é igual a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Assim, pela propriedade aditiva da medida μ, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

onde, na última desigualdade, usamos a letra *a)*, ou seja, $B_n \subset A_n$ implica que $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$.

$\square$

Proposição 3.1. *Dadas uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, uma medida μ definida em $\mathcal{A}$ e uma sequência monótona $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$, tem-se*

a) Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

b) Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, e se A_1 tem medida finita, então $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Demonstração: Vamos provar apenas a letra *a)* e deixar a letra *b)* como exercício para o leitor. Se $\mu(A_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = +\infty.$$

Tomemos $B_1 = A_1$ e definamos indutivamente $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. Note que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência com elementos em $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois. Tem-se também $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Segue que $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$. Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

$\square$

Exemplo 3.6. *Considere $X = \mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mu : \wp(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ dada por*

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad e \quad \mu(E) = 1 \text{ para todo } E \in \wp(\mathbb{N}).$$

Temos que μ não define uma medida, uma vez que

$$1 = \mu(\{1\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}) \neq \mu(\{1\}) + \mu(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = 1 + 1 = 2.$$

Definição 3.2. *Sejam X um conjunto qualquer, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida. Chamamos o terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de espaço de medida.*

Definição 3.3. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Quando uma propriedade vale em X exceto possivelmente num conjunto de medida nula, dizemos que tal propriedade vale em quase todo ponto de X. Com efeito de simplificação, escreveremos que tal propriedade vale q.t.p. em X.*

Exemplo 3.7. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ o espaço de medida do Exemplo 3.3. Considere as funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ dadas por $f(a) = 1$, $f(b) = 10$ e $f(c) = -3$ e $g(a) = 15$, $g(b) = 10$ e $g(c) = -3$. Temos que f e g são iguais em quase todo ponto de X, pois o conjunto onde elas diferem (no caso, o conjunto $\{a\}$) tem medida nula. Escrevemos neste caso $f = g$ q.t.p. em X, ou ainda, μ-q.t.p. em X.*

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(E) = 0$ para algum $E \in \mathcal{A}$, dizemos que E tem medida nula. Esta noção será de grande valia no que segue. Entre outras propriedades, é ela que faz com que a integral de Lebesgue se difira da integral de Riemann. A grosso modo falando, Lebesgue não se preocupou com os conjuntos de medida nula no desenvolvimento de sua integral, tornando-a nula sobre estes conjuntos. Já Riemann considerou uma gama muito maior de conjuntos para construir sua integral (veja [12], capítulo 10, página 133 a recíproca do Teorema 7, que diz que, para uma função ser Riemann integrável, é necessário que ela não seja "muito" descontínua).

Capítulo 4

A Integral de Lebesgue

Neste capítulo, vamos definir a Integral de Lebesgue para funções simples em relação a uma medida μ e, em seguida, definiremos esta integral para funções mensuráveis arbitrárias.

Ainda nesta seção, serão apresentados os teoremas fundamentais da Integral de Lebesgue: o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, sendo este último o principal teorema do nosso trabalho.

4.1 A Integral de Funções Simples Positivas

As funções simples fazem o papel dos retângulos construídos sob o gráfico de uma função contínua positiva, quando se deseja calcular a área desta região.

4.1.1 Funções Simples

Definição 4.1. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é simples quando é formada por uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos mensuráveis $E_1, E_2, \cdots, E_k$ contidos em $\mathcal{A}$ e pode ser representada como*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{Ei}, \tag{4.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e χ_{E_i} é a função característica do conjunto E_i.

Reparamos que, por definção, uma função simples nunca assumirá o valor $+\infty$. Observamos também que possivelmente a representação dada para funções simples pode variar, mas, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ forem distintos e os E_i subconjuntos dois a dois disjuntos tais que $X = \cup_{i=1}^{n} E_i$, então essa representação será única e normalmente chamamos de forma canônica. Note também que toda função simples é mensurável por ser soma de funções mensuráveis.

Outra observação importante é que o conjunto das funções simples $f : X \to \mathbb{R}$ é um espaço vetorial, já que a soma de funções simples e o produto por um escalar retornam a funções simples.

A seguir, definiremos a integral dessa classe de funções.

Definição 4.2. *Se f é uma função simples com representação canônica (4.1), definimos a integral de f em relação a medida μ como sendo*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i). \tag{4.2}$$

Na definição de integral em (4.2), vamos aderir à convenção de que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Esta converção será usada para os resultados que se seguem.

O seguinte lema nos auxiliará em várias demonstrações que envolvem a integral da função constante 1.

Lema 4.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{A}$. Então,*

$$\int \chi_E d\mu = \mu(E).$$

Demonstração: Basta aplicar a definição de integral para funções simples. □

Definição 4.3. *Chama-se $M = M(X, \mathcal{A})$ o conjunto de todas as funções $\mathcal{A}$-mensuráveis e, $M^+ = M^+(X, \mathcal{A})$ o conjunto de todas as funções $\mathcal{A}$- mensuráveis não negativas.*

Exemplo 4.1. *A integral da função identicamente nula, $0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, é*

$$\int 0 d\mu = 0.$$

Este é um exemplo trivial de função simples.

Em seguida, vamos mostrar que as propriedades elementares de integral são válidas.

Lema 4.2. *Se f e g são funções simples $\mathcal{A}$-mensuráveis não-negativas e $c \geq 0$, então*

a)
$$\int cf d\mu = c \int f d\mu;$$

b)
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

c) Se h é definida em $\mathcal{A}$ como sendo

$$h(E) = \int f \chi_E d\mu,$$

então h é uma medida sobre $\mathcal{A}$.

Demonstração: Vamos provar a letra *a)*. para $c = 0$, tem-se $c \cdot f = 0$. Logo, a igualdade se verifica conforme Exemplo 4.1.

Para $c > 0$, tem-se que $c \cdot f$ está em M^+ com representação

$$cf(x) = \sum_{i=1}^{n} ca_i \chi_{Ei},$$

onde os $a_{i's}$ e os $E_{i's}$ fazem parte da representação canônica de f como na Definição 4.1. Segue da definição de integral que

$$\int cf d\mu = \sum_{i=1}^{n} ca_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = c \int f d\mu.$$

A demonstração dos itens *b)* e *c)* podem ser encontradas em ([3] nas páginas 29 e 30). □

Vamos agora introduzir a integral para funções arbitrárias não-negativas e mensuráveis.

Definição 4.4. *Sejam $f \in M^+$ e λ o conjunto de todas as funções simples de M^+ tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.*

a) Define-se a integral de f com a relação a medida μ como sendo

$$\int f d\mu = \sup_{g \in \lambda} \int g d\mu.$$

Note que o conjunto λ não é vazio, pois vale o Lema 2.5.

b) Se $f \in M^+$ e $E \in \mathcal{A}$, então $f\chi_E \in M^+$ e a integral de f sobre E com relação a μ é definida como:

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu.$$

A seguir, mostraremos que a integral é monótona com relação ao integrando, como também em relação ao conjunto no qual está se integrando.

Lema 4.3. *Sejam f e g duas funções mensuráveis.*

a) Se f e g pertencem a M^+ e $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu; \tag{4.3}$$

b) Se $f \in M^+$ e E, F mensuráveis, com $E \subseteq F$, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Demonstração: Vamos provar a letra *a)*. Para toda função simples h de M^+ tal que $0 \leq h \leq f$, tem-se também $0 \leq h \leq g$ e, com isso, a desigualdade (4.3) realmente ocorre. Para provar a letra *b)*, como $E \subseteq F$, segue que $f\chi_E \leq f\chi_F$, e o resultado se dá pelo item *a)*. □

Diante de todos os resultados obtidos até aqui, estamos aptos para enunciar e demonstrar um dos principais resultados deste trabalho: O Teorema da Convergência Monótona. Este nos possibilita obter as propriedades fundamentais de convergência da Integral de Lebesgue. Apesar de sua grande importância, foge ao escopo deste trabalho sua demonstração detalhada. Para o leitor interessado, veja [3] páginas 31 e 32.

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente, isto é, $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e (f_n) converge pontualmente para a função f, então $f \in M^+$ e vale que*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu. \tag{4.4}$$

Note que, não estamos assumindo que ambos os lados da equação (4.4) são finitos. De fato, a sequência $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente com números reais estendidos e, assim, terá um limite em $\overline{\mathbb{R}}$, não necessariamente em $\mathbb{R}$.

A seguir, apresentaremos alguns resultados consequentes do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 4.1. *Sejam f e g duas funções mensuráveis.*

a) Se $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

b) Se $f, g \in M^+$, então $(f+g) \in M^+$ e

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração:

a) Para $c = 0$, o resultado é imediato. Se $c > 0$, usamos o Lema 2.5 e tomamos $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de funções simples em M^+ que converge para uma função f e (ch_n) é uma sequência monótona que converge para cf. Aplicando o Lema (4.2) e o Teorema da Convergência Monótona, tem-se

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int ch_n d\mu = c \lim_{n\to+\infty} \int h_n d\mu = c \int f d\mu.$$

b) A demonstração é análoga ao item *a)*. □

O próximo resultado também é consequência do Teorema da Convergência Monótona. Ele tem uma importância significativa, pois nos permite trabalhar com sequências de funções que não são monótonas, além de ser utilizado na demonstração do teorema principal deste trabalho.

Lema 4.4. *(Lema de Fatou). Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^+$, então*

$$\int \left(\lim_{n\to+\infty} \inf f_n \right) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $g_m(x) = \inf\{f_m(x), f_{m+1}(x), \cdots\} \forall x \in X$. Com isso, temos que g_m é uma função em M^+ e, se $m \leq n$, então $g_m(x) \leq f_n(x), \forall x \in X$. Logo,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \text{ com } m \leq n,$$

e isso implica em

$$\int g_m d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Sendo a sequência $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monótona e crescente, isto é, $g_m(x) \leq g_{m+1}(x), \forall x \in X$, e $\forall m \in \mathbb{N}$, ela converge e seu limite é $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf f_m, f_{m+1}, \cdots) = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf f_n$. Segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int \left(\lim_{n\to+\infty} \inf f_n \right) d\mu = \lim_{m\to+\infty} \int g_m d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

□

Corolário 4.2. *Suponha que $f \in M^+$. Então, $f(x) = 0$ μ-q.t.p. se, e somente se,*

$$\int f d\mu = 0. \tag{4.5}$$

Demonstração: Se a equação (4.5) é válida, vamos definir para $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X : f(x) > \tfrac{1}{n} \right\}.$$

Como f é mensurável, segue que E_n é mensurável e $f(x) \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}(x)$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Lema 4.1, segue que

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0,$$

ou seja, $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que o conjunto

$$\left\{ x \in X : f(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

também tem medida igual a 0, posto que, pelo Lema 3.1 parte *b)* vale

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Por outro lado, se $f(x) = 0$ μ-q.t.p. considere $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Então, $\mu(E) = 0$ e, definindo para cada $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = n\chi_E(x)$, obtemos que $f \leq \lim_{n\to+\infty} \inf f_n$. De fato, se $x \notin E$, então o lado direito desta desigualdade é 0, tornando $f(x) \leq 0$, que é verdade para $x \notin E$. Se $x \in E$, tem-se

$$\liminf_{n\to+\infty}(n\chi_E(x)) = \liminf_{n\to+\infty}(n) = +\infty \geq f(x).$$

Pelo Lema de Fatou, segue que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \int n\chi_E(x) d\mu = 0.$$

□

O resultado anterior nos permite dizer que, se $f, g \in M^+$ com $f = g$ q.t.p. em X, então

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Exemplo 4.2. *Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \wp(X)$ a σ-álgebra das partes de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida de contagem, isto é, $\mu(E) = \#E$. Considere também $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(n) = n^2$. Observe que*

$$f(n) = 1^2\chi_{\{1\}}(n) + 2^2\chi_{\{2\}}(n) + 3^2\chi_{\{3\}}(n) + 4^2\chi_{\{4\}}(n) = \sum_{i=1}^{4} i^2\chi_{\{i\}}(n),$$

e, portanto, f é uma função positiva, mensurável por ser soma de funções mensuráveis e simples, pois vale a união disjunta $\bigcup_{i=1}^{4}\{i\} = \{1, 2, 3, 4\} = X$. Logo, por definição de integral, tem-se

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{4} i^2\mu(\{i\}) = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30,$$

onde usamos que $\mu(\{i\}) = 1$ para $i = 1, 2, 3$ e 4.

4.2 Funções Integráveis

Vimos na seção anterior a Integral de Lebesgue definida para funções pertencentes a M^+. Já nesta seção, vamos estender essa definição para funções de M, ou seja, funções mensuráveis com valores positivos e negativos possivelmente. Para isso, decompomos f em duas partes: uma positiva e outra negativa (conforme a Definição 2.15), em que ambas possuem a definição de integral.

Definição 4.5. *Seja f definida em X tal que as partes positiva e negativa f^+ e f^- de f tem integrais finitas com relação a μ.*

a) Define-se a integral de f em relação a μ como

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

b) Se E pertence $\mathcal{A}$, define-se

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Definição 4.6. *Chamamos de $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$ o conjunto das funções em M que possuem integral finita. Estas funções recebem o nome de funções integráveis.*

A título de curiosidade, apresentamos o lema abaixo. Ele diz que a integral de Lebesgue estende, de fato, a integral de Riemann, bastando considerar $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e μ a medida de Lebesgue (aquela única que estende o comprimento de um intervalo; veja Exemplo 3.5).

Lema 4.5. *Sejam $X = [a, b]$ um intervalo finito fechado em $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ a coleção dos conjuntos de Borel em X e μ a medida de Lebesgue em $\mathcal{A}$. Se f é uma função contínua não negativa definida em X, então*

$$\int f d\mu = \int_a^b f(x)dx,$$

onde o lado direito denota a integral de Riemann.

Demonstração: Veja [3] capítulo 4, página 38. □

4.3 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

O objetivo principal desta seção é enunciar e demonstrar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Para isso, veremos antes alguns resultados importantes, assim conseguiremos obter as propriedades fundamentais que nos auxiliarão na sua demonstração.

É de costume denotar o resultado a seguir como a propriedade da integrabilidade absoluta da integral de Lebesgue.

Lema 4.6. *Seja $f \in M$. Então $f \in L$ se, e somente se, $|f|$ é integrável. Nesse caso, segue que*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Demonstração: Por definição, temos que $f \in L$ se, e somente se, f^+ e f^- pertencem a M^+ e

$$\int f d\mu < +\infty.$$

Pela Definição 2.15, temos $|f| = f^+ + f^-$ e, portanto, f é integrável se, e somente se, $|f|$ for integrável. Tem-se

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| = \int |f| d\mu.$$

□

Corolário 4.3. *Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável, e*

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

Demonstração: Para obter a desigualdade, aplicamos o Lema 4.3. Agora, para mostrar que $|f|$ é integrável basta aplicar os Lemas 4.3 e 4.6 e, consequentemente, f é integrável. □

O próximo resultado mostra que o conjunto $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$, dotado das operações de soma e produto por escalar efetuadas em funções, é um espaço vetorial.

Lema 4.7. *Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f + g \in L$ e $\alpha f \in L$. Além disso, vale que*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \ \text{ e } \ \int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

Demonstração: Como $f, g \in L$, então $|f|$ e $|g|$ pertencem a L pelo Lema 4.6. Como $|f+g| \leq |f| + |g|$, então segue imediatamente dos Corolários 4.1 e 4.3 que $f + g$ pertence a L. Agora, para chegarmos na equação pretendida, fazemos

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Sabendo-se que $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não-negativas, segue do item *a)* da Definição 4.5 que

$$\int (f+g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu.$$

Aplicando agora o item *b)* do Corolário 4.1, obtemos

$$\int (f+g) d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

□

Finalmente, temos as ferramentas suficientes para apresentar, o principal teorema deste trabalho. Ele responde a pergunta introdutória sobre passar o limite para dentro das integrais. Observe as hipóteses e note a diferença entre elas e as referentes à integral de Riemann.

Teorema 4.2. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável f de valor real. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x), \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e vale que*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Denotemos por N o conjunto de medida nula tal que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \forall x \in M = X \setminus N.$$

Agora, vamos redefinir as funções f_n e f em N como sendo nulas e, assim, obteremos que a convergência se dá pontualmente em todo o conjunto X e não irá alterar o valor das integrais, pois o conjunto N tem medida nula (veja corolário 4.2). Passando o limite na desigualdade $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$, vemos que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Segue do Corolário 4.3 que f é integrável. Afirmamos que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

De fato, como $g + f_n \geq 0$, podemos aplicar as propriedades de $\liminf$ (veja Lema 5.2 no Capítulo 5), o Lema 4.4 de Fatou e o Lema 4.7 e, assim, obter

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int (g+f_n) d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu. \tag{4.6}$$

Por outro lado, fazendo com $g - f_n \geq 0$ e aplicando o Lema 4.4 de Fatou e o Lema 4.7, concluímos que

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int (g-f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu - \lim_{n\to+\infty} \sup \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

onde, agora, usamos as propriedades de $\limsup$. Portanto, segue-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{4.7}$$

Finalizamos a demonstração, fazendo a combinação das desigualdades (4.6) e (4.7) e, assim,

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

$\square$

Exemplo 4.3. *Vamos voltar ao exemplo dado na Introdução deste trabalho. Considere a sequência constante $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = 1$ quando x é irracional e $f_n(x) = 0$ quando x é racional, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, (f_n) converge pontualmente para $f := f_1$, já que a sequência é constante. Vamos considerar aqui o espaço de medida como no Lema 4.5. Neste espaço, as integrais de Riemann coincidem com as integrais de Lebesgue. Como cada $f_n = 1$ q.t.p. em $[0,1]$ (veja Lema 5.4, que diz que $\mathbb{Q}$ tem medida nula), segue da observação após o Corolário 4.2 e do Lema 4.5 que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int 1 d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 1dx = 1 = \int_0^1 1dx = \int 1d\mu = \int f d\mu.$$

O exemplo anterior mostra que, mesmo não podendo passar o limite para dentro da integral de Riemann, em certas ocasiões, na integral de Lebesgue, podemos assim fazer. Perceba que a sequência do exemplo anterior está sob a hipótese de dominação que o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue requer.

Capítulo 5

Resultados Complementares

Definição 5.1. *Um conjunto X é dito enumerável quando*

a) X for finito;

b) Existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. E neste caso o conjunto X é infinito e enumerável.

Lema 5.1. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração: Deixaremos para o leitor o detalhamento desta demonstração. Se a sequência (A_n) é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos e enumeráveis, vamos mostrar que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)$ é um conjunto enumerável. Para isso, escrevemos $(A_n) = \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\}$. Definindo a função $F : U \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por

$$F(a_{ij}) = (i, j).$$

Segue que F é uma bijeção e como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável, temos que U também o é. O caso em que a sequência (A_n) não é formada de conjuntos dois a dois disjuntos, fica como exercício. □

Teorema 5.1. *Em $\mathbb{R}$, todo aberto se escreve como união enumerável de intervalos abertos disjuntos*

Demonstração: Veja [8] página 65. □

Definição 5.2 (Convergência Pontual e Uniforme)**.** *Seja f_n, $f_n : X \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções. Dizemos que (f_n) converge pontualmente para $f : X \to \mathbb{R}$ se, dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Dizemos também que (f_n) converge uniformemente para f se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$ e $n > n_0$.*

Lema 5.2. *Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números reais, então vale as seguintes afirmações:*

a) $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$.

b) $\liminf\limits_{n\to+\infty} -A_n = -\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$.

c) $\limsup\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} B_n$.

d) $\liminf\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} B_n$.

e) $\liminf\limits_{n\to+\infty}(A + B_n) = A + \liminf\limits_{n\to+\infty} B_n$.

Demonstração: Deixaremos a cargo do leitor. Como sugestão, veja [12], capítulo IV, página 155. □

Lema 5.3. *(De Morgan) O complementar da interseção enumerável de conjuntos é igual à união enumerável dos complementares desses conjuntos, ou seja,*

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\complement} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\complement}.$$

Demonstração: Seja $x \in \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\complement}$, isto é, x não pertence a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Isso é equivalente a dizer que $x \notin A_{n_0}$ para algum n_0. Ou seja, $x \in A_{n_0}^{\complement}$ e, portanto, à união $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\complement}$. Todos os passos feitos aqui são equivalentes. Logo, a igualdade em questão é verdadeira. □

Lema 5.4. *Todo conjunto enumerável possui medida de Lebesgue nula. Em particular, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração: Consideremos $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ uma enumeração de X. Vamos fixar um $\varepsilon > 0$ qualquer. Note que, se $I_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{3(2^n)}, a_n + \frac{\varepsilon}{3(2^n)})$, tem-se $X \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Logo, se x_n e y_n forem os limites inferiores e superiores de I_n, respectivamente, vale que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(y_n - x_n) = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Isso mostra que $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$ é menor que qualquer número positivo, ou seja, $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = 0$. Como $X \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, segue que $\mu(X) = 0$. □

Capítulo 6

Considerações Finais

O Teorema da Convergência Dominada de Lesbesgue, objetivo principal deste trabalho, garante sob hipóteses adequadas que podemos passar o limite para dentro da integral. A teoria clássica de Riemann também possui um resultado análogo, porém com hipóteses um pouco mais fortes. Para se compreender e definir as integrais de Lebesgue, é necessário compreender os conceitos de $\sigma-$álgebra, que fornecem uma maneira de medir conjuntos; conceitos de funções mensuráveis e funções integráveis, objetos principais no estudo de integrais; e noções de medida, uma forma de associar um conjunto mensurável a uma quantidade positiva.

Um dos grandes avanços da integral de Lebesgue foi o de generalizar a integral de Riemann. Basta construir uma medida que estenda o comprimento de um intervalo (que existe e é única em $\mathbb{R}$) e compreender bem as definições de integral de Lebesgue.

Este trabalho me proporcionou grande aprendizado e ensinamentos, suscitando a oportunidade de trabalhar com uma teoria nova, que, até então, nunca tinha ouvido falar de sua existência. Fez-me ainda abrir a mente, enxergar com uma amplitude maior, tornando a minha habilidade de percepção do novo mais eficaz. Me mostrou também que nem tudo está pronto e acabado, pois sempre existirá uma forma ou meio para você ampliar aquilo que parece não ter mais evolução.

Diante de tudo isso, vejo que obtive uma base sólida e favorável, permitindo-me a dar continuidade nos meus estudos em uma pós-graduação, mestrado e, talvez, doutorado, um sonho que carrego desde quando iniciei este curso de Licenciatura em Matemática. Todos estes são valores importantes que irei aplicar na minha vida pessoal e profissional. Espero que toda esta pesquisa também traga aos leitores o que trouxe pra mim e contribua significativamente para o avanço da aprendizagem em nível Superior.

Referências

[1] ÁVILA, G. S. de S. **Introdução à Análise Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1999.

[2] ÁVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3 ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2006.

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

[5] CABRAL, M. A. P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. 3. ed. Rio de Janeiro: [s.n], 2016. Disponível em: <http://www.dma.im.ufrj.br/∼mcabral/textos/medida-a4.pdf>. Acesso em: 09 de ago. 2016.

[6] FERNANDEZ, P. **Medida e Integração**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção Projeto Euclides).

[7] FERNANDES, R. L. **A Integral de Lebesgue**. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/∼acannas/AMIII/Materiais/loja_fernandes.pdf>. Acesso em: 12 de ago. 2016.

[8] GONÇALVES, M. B.; GONÇALVES, D. **Elementos da Análise**. 2. ed. Florianópolis: [s.n], 2012.

[9] MACHADO, A. **Medida e Integração**. Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências Departamento de Matemática. Lisboa, 2011. Disponível em: <https://ciencias.ulisboa.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/TeoMed.pdf>. Acesso em: 19 de ago. 2016.

[10] MEDEIROS, L. A. da J.; MELLO, E. A. de. **A Integral de Lebesgue**. 6. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. Disponível em:

<http://www.im.ufrj.br/∼medeiros/LinkedDocuments/livrolebesgue.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2016.

[11] LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de uma Variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Coleção Matemática Universitária).

[12] LIMA, E. L. **Curso de Análise Real**. 12 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides. IMPA, v. 1, 2006.

[13] LIMA, L. J. G. **Da Integral de Riemann para a Integral de Lebesgue**. 2012. 62f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Programa de Pós–graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/∼espec/monografiasPdf/Monografia_Leidyanna.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2016.

[14] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. **Real Analysis** 4. ed. [S. l: s. n.], 2010. Disponível em: <http://math.harvard.edu/∼ctm/home/text/books/royden-fitzpatrick/royden-fitzpatrick.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2016.

[15] SANTOS, J. C. S. O. **Introdução à Análise Funcional**. Porto, 2010. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/notas.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2016.

[16] TAUSK, D. V. **Notas Para o Curso de Medida e Integração**. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/∼tausk/texts/NotasMedida.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2016.

[17] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normalização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.