

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CAMPUS DE ARAGUAÍNA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**CAMILA LUCIANA BOMFIM DA ROCHA**

**VIAJANDO NO TEMPO COM A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO GRAU**

ARAGUAÍNA

2016

**CAMILA LUCIANA BOMFIM DA ROCHA**

**VIAJANDO NO TEMPO COM A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO GRAU**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sinval de Oliveira

ARAGUAÍNA

2016

**CAMILA LUCIANA BOMFIM DA ROCHA**

**VIAJANDO NO TEMPO COM A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO GRAU**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Sinval de Oliveira (Orientador)

---

Prof. Msc. Freud Romão (Avaliador)

---

Prof. Msc. Rogério dos Santos Carneiro (Avaliador)

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha querida avó Maria da Guia do Bonfim e Sousa (*in memoriam*) por sempre acreditar na importância do estudo na vida de seus filhos e seus netos, por me ensinar a ser forte e por mostrar que a vida é difícil, mas não deixa de ser bela.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida, por ter me abençoado em toda essa jornada, por ter me dado força nos momentos em que pensei que não suportaria, pelo discernimento nas decisões que tive que tomar no meio do caminho e pela sua infinita bondade e amor direcionados a mim.

Agradeço a minha mãe Maria das Dores do Bomfim e Sousa e minha irmã Marília Bomfim da Rocha, por todo o apoio e incentivo durante essa trajetória e em minha vida, por serem minha base nos momentos mais adversos, pelo amor e carinho imensos que transmitiram desde o meu nascimento, por acreditarem em mim, pela atenção e compreensão que demonstraram com minha ausência no decorrer desses (longos) anos que passei longe de vocês, esse trabalho não seria possível sem o alicerce das duas, se eu fosse citar aqui todas as contribuições teria que preencher no mínimo metade das páginas desse trabalho então sintetizo com um muito obrigada. Eu amo vocês.

Agradeço aos meus familiares, em especial meus padrinhos/tios Ângelo do Bonfim e Sousa e Maria Cleydivan do Bonfim e Sousa, e meu avô Silvestre Batista de Sousa pelo suporte nas horas mais precisas e pelo amor demonstrado.

Agradeço às minhas amigas/irmãs Janete Moreira Pires e Mariane Araujo de Vasconcelos (descritas em ordem alfabética, para não dar privilégios), pelo companheirismo em todos os momentos de convivência, dentre eles as alegrias e tristezas compartilhadas, por me acompanharem nas etapas mais difíceis (incluindo às idas ao hospital), por me compreenderem com todas as minhas complexidades e loucuras, pela crença de que esse sonho seria possível e pelo apoio nas madrugadas e nas tardes quentes de estudo. Deixo aqui expressa minha gratidão por dividirem suas vidas comigo, com vocês aprendi que amar é acima de tudo aceitar o outro em sua totalidade e por essas razões já citadas e por tantas outras, eu amo vocês.

Agradeço aos amigos que adquiri no decorrer desse curso, em particular Ana Cláudia, Artur Cruz, Daniel Alves, Eduardo Dias, Edna Alencar, Edson Caitano, Janete Moreira, Jaílson Resplandes, João Marcos, Luan Alves, Karla Maiani, Mariane Araujo, Melquisedeque, Paulo Sérgio, Valdivino e Werley Sales, e aos meus amigos que obtive durante minha trajetória até esse momento, especificamente, Anne Caroline, Luana Sousa, Rômulo Sousa e Rosângela Silva, que contribuíram direta e indiretamente para realização desse sonho.

Agradeço ao Prof. Dr. Sinval de Oliveira por ter aceitado orientar esse trabalho e pelas diversas contribuições repassadas, obrigada por compartilhar seus conhecimentos e sua experiência comigo, que serão levados por toda minha vida.

## EPÍGRAFE

*“Certamente, a matemática é uma construção social sujeita à concepção que cada sociedade tem do saber, da ciência e da perfeição” (BORBA, 1987)*

## RESUMO

Esse trabalho tem por intuito apresentar uma proposta didática no ensino das equações do segundo grau, tendo como orientação a História da Matemática. A questão problematizadora se configura da seguinte forma: *Como ensinar equações do segundo grau utilizando a história da matemática em sala de aula?* No intuito de responder a esse questionamento, esbocei alguns objetivos referentes à construção de uma proposta didática embasadas em informações encontradas em diferentes obras. A investigação se deu como forma de pesquisas documentais em literaturas específicas, entre os dados de análises estão: livros didáticos, livros paradidáticos, livros de história da matemática e artigos de história da matemática. As informações retiradas dessas obras delinearam a construção da proposta didática que se caracteriza como uma peça teatral intitulada “Viajando no tempo com a história das equações do segundo grau”, destacando os principais matemáticos que contribuíram diretamente com a fórmula de resolução dessas equações. Essa proposta busca despertar o interesse dos alunos através do enredo histórico e seu espírito investigador, que pode proporcionar um ensino significativo das equações do segundo grau.

**Palavras-chave:** Peça Teatral. História da Matemática. Equações do segundo grau.



## ABSTRACT

This paper intends to present a didactic proposal in the teaching of the equations of the second degree, having as orientation the History of Mathematics. The problematizing question is as follows: How to teach second-degree equations using the history of mathematics in the classroom? In order to answer this question, I outlined some objectives related to the construction of a didactic proposal based on information found in different works. The research was done as a form of documentary research in specific literatures, among the data of analyzes are: textbooks, paradidactic books, books of history of mathematics and articles of history of mathematics. The information extracted from these works, outlined the construction of the didactic proposal that is configured as a play entitled "Traveling in time with the history of the equations of the second degree", highlighting the main mathematicians who contributed directly to the formula for solving these equations. This proposal seeks to arouse students' interest through the historical plot and the researcher's spirit, which can provide meaningful teaching of the equations of the second degree.

**Keywords:** Theatrical Part. History of Mathematics. Equations of the second degree.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	24
Quadro 2: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	25
Quadro 3: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	26
Quadro 4: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	28
Quadro 5: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	29
Quadro 6: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos .....	31
Quadro 7: Trechos presentes nos Livros Paradidáticos.....	33
Quadro 8: O Início das Equações do Segundo Grau .....	37
Quadro 9: O Papel de Bhaskara.....	38
Quadro 10: Dados históricos encontrados em artigos sobre História da Matemática.....	40
Quadro 11: Principais contribuições dos povos na elaboração da resolução das equações do segundo grau.....	46

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
1.1 PROBLEMATIZAÇÃO.....	12
1.2 OBJETIVOS.....	14
1.3 METODOLOGIA .....	15
<b>2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO.....</b>	<b>17</b>
2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU.....	19
<b>3. DADOS DE ANÁLISE .....</b>	<b>23</b>
3.1. LIVROS DIDÁTICOS .....	24
3.2. LIVROS PARADIDÁTICOS .....	33
3.3. LIVROS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	36
3.4. ARTIGOS.....	39
3.5. ANÁLISE GERAL.....	41
3.5.1. BHASKARA II.....	43
<b>4. PROPOSTA DIDÁTICA .....</b>	<b>44</b>
4.1. ORGANIZAÇÃO DA PROPOSTA .....	47
4.2. ALGUMAS PONDERAÇÕES ACERCA DA PROPOSTA DIDÁTICA .....	57
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>59</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>61</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho apresenta uma proposta didática para o ensino das equações do segundo grau, valendo-se da História da Matemática como orientação. A ideia inicial desse estudo surgiu numa aula da disciplina História da Matemática, na qual me interessei pela proposta da disciplina, que foi de ensinar conteúdos matemáticos com suporte nos dados históricos, para que possa ser possível uma significação mais efetiva desses conceitos.

A escolha da temática foi impulsionada por intermédio da construção de um plano de aula na disciplina Didática da Matemática, que cursei no período seguinte, com algumas das tendências na Educação Matemática, como já havia me interessado pela História da Matemática desenvolvi meu plano de aula com essa tendência apresentando uma breve história das equações do segundo grau. Com o propósito de aprofundar esse estudo, iniciei algumas pesquisas referentes à temática central sobre a história das equações do segundo grau.

Diante disso, proponho a abertura para a problemática do trabalho que gira em torno de uma indagação sobre como ensinar as equações do segundo grau com o uso da história da matemática, em que justifico por que escolhi elaborar uma proposta para que os professores da Educação Básica tenham acesso no momento que forem ensinar as equações do segundo grau.

Como uma investida inicial pesquisei obras para embasamento teórico que tratam da História da Matemática, no intuito de apresentar as considerações dos autores sobre as contribuições da utilização dessa tendência no ensino de conceitos matemáticos, dentre elas cito algumas como a explicação histórica desses conceitos, procurando mostrar desde o surgimento até sua forma atual e quais métodos foram necessários para sua formulação, dessa forma o aluno tem acesso às informações que podem despertar seu interesse no estudo de conceitos matemáticos, uma vez que a história contribui para desmistificar o pensamento de que a matemática é complicada e que seus conteúdos são difíceis, pois expõe todos os processos de construção desses conceitos. Após isso, particularizo para as contribuições referentes à temática específica da história das equações do segundo grau e como ela pode auxiliar no ensino desse conteúdo específico que gera questionamentos sobre sua fórmula de resolução e quais matemáticos contribuíram para essa descoberta.

Nessa direção, considerei relevante realizar uma análise constituída por quatro componentes, no intuito de analisar como essas obras estão apresentando a história das

equações do segundo grau, são esses: os livros didáticos, os livros paradidáticos, os livros de história da matemática e artigos sobre história da matemática, escolhidos através da temática do trabalho.

Nos livros didáticos exponho as informações sobre a história das equações do segundo grau e como os autores apresentaram essa história no capítulo. Nos livros paradidáticos procuro saber quais metodologias são apresentadas para os professores e se a abordagem é fiel à história das equações do segundo grau. Já nos livros de história da matemática exponho os dados históricos dispostos sobre o desenvolvimento das equações do segundo grau e se as informações dos autores são convergentes ou divergentes. Os artigos de história da matemática constituem o último componente da análise, que trazem informações que foram pesquisadas em diferentes obras, desse modo considere relevantes as informações sobre as equações do grau, visto que advém de fontes diferentes.

Após ter acesso aos dados de análise, busco realizar uma compilação com todas as informações sobre a história das equações do segundo grau, como forma de sustentar a proposta didática que será apresentada valendo-se de todos os dados históricos encontrados para formar uma história completa dessas equações, essa proposta tem por intuito apresentar todos os processos que foram necessários para desenvolvimento das equações do segundo grau de uma forma diferenciada, que o professor terá acesso para assim utilizar em suas aulas sobre esse conteúdo específico.

## 1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

As equações do segundo grau são comumente ensinadas de maneira tradicional em sala de aula na forma de ensino em que o professor apresenta a fórmula e sua resolução, o aluno não consegue deduzir qual a importância daquele conteúdo, isso ocorre em diversos temas matemáticos em sala, a síntese desse processo torna o ensino monótono e o educando não consegue atingir um nível de aprendizagem efetiva sobre os determinados conceitos.

Uma possibilidade para romper com os aspectos característicos da abordagem tradicional, que as equações do segundo grau são apresentadas, pode ser por meio da História da Matemática no ensino. Nos conhecimentos históricos o aluno começa a entrar em contato com as descobertas das origens das equações, como resultado, ele pode obter saberes necessários para compreender qual o objetivo dessas equações serem ensinadas e como elas se

desenvolveram, conseqüentemente descobrindo a evolução dos conceitos e da fórmula, desde o princípio quando não havia simbologia até os dias atuais.

Considero importante para o ensino das equações do segundo grau que os alunos entendam o que é estudado, a utilização da história da matemática para esse ensino proporcionaria novos elementos para o educando na busca de dirimir suas dúvidas decorrentes dos conceitos e das fórmulas. Dessa forma, creio que seja oportuno apresentar a questão problematizadora desse estudo a qual está expressa da seguinte forma:

*Como ensinar equações do segundo grau utilizando a história da matemática em sala de aula?*

Ao observar o ensino das equações do segundo grau, conjecturo que uma abordagem desse conteúdo, se realizada com aspectos relevantes de fatos históricos, poderia obter significados no que concerne à aprendizagem do aluno.

O processo de ensino e aprendizagem vale-se na forma em que o professor expõe o conteúdo e o aluno tem o dever de aprendê-lo da maneira tradicional, como já frisei anteriormente, esses episódios são comumente visto nas salas de aula, dessa forma sugiro a necessidade de diferenciar a metodologia utilizada pelo professor.

Por outro lado, o público-alvo, em geral adolescentes, é caracterizado pelas mudanças físicas, cognitivas e formação da sua identidade, estão habituados às novidades e as transformações que estão acontecendo na sociedade atual, dentro deste contexto estão inseridas algumas características significativas dos alunos, que concerne ao seu “comportamento de rebeldia”, muitas vezes, dentro da sala de aula, que reflete na sua aprendizagem de maneira generalizada.

Cumpriria ao professor o papel de se arriscar a modificar sua didática, de forma a provocar interesse no que está sendo ensinado, porém considero que possivelmente ele não tenha tempo para repensar uma proposta metodológica, já que enfrenta uma carga horária extensa. Nesse caso, proponho a discussão acerca de como ensinar equações de forma significativa utilizando a história da matemática e dessa maneira poder auxiliar simultaneamente o professor e o aluno, nesse sentido considero uma análise em duas perspectivas distintas:

*Proposta em relação ao professor* – nessa abordagem procuro evidenciar a relevância da proposta para o professor, tendo em vista que pode facilitar o ensino das equações do segundo grau através dos estudos de fatos históricos que esclarecem quais as origens das mesmas, sua importância e por quê foram utilizadas desde o seu surgimento até a atualidade,

dessa forma essa propositura poderá auxiliar o professor no processo de ensino e aprendizagem.

*Proposta em relação ao aluno* – dentro dessa perspectiva destaco a importância da utilização da história da matemática no ensino de equações do segundo grau, de modo que essa proposta possa despertar no aluno seu interesse em dar sentido ao conteúdo que está sendo apresentado, ou seja, ter acesso às informações históricas que permitam contextualizar e entender como se desenvolveram essas equações.

Realizei a análise das duas partes separadamente para expor uma reflexão sobre como essa proposta é capaz de contribuir para cada uma, contudo considero indispensável uma articulação entre elas, visto que no ambiente da sala de aula uma depende da outra. A propositura desse trabalho, caminha nessa direção, uma vez que o uso da história da matemática no estudo das equações do segundo grau se apresenta como uma possível forma de ensino satisfatória tanto para o aluno quanto para o professor.

Vislumbro uma abordagem que permite uma ideia de ensino que pode ser utilizada pelo professor no intuito de aguçar o interesse e tornar esse conteúdo mais compreensível para os alunos, uma vez que dessa forma ele poderá compreender o significado dos conceitos matemáticos. Assim, se apresenta como aporte metodológico acessível ao docente, através dos estudos históricos acerca das equações do segundo grau e sua utilização, dessa forma esse subsídio pode contribuir para o processo de ensino por apresentar uma pesquisa detalhada sobre o conteúdo em questão, de modo que a dificuldade do professor com relação ao tempo disponível para planejar possa ser minimizada por ter contato com uma proposta didática bem fundamentada teórica e metodologicamente.

Na próxima seção apresento os objetivos que fundamentaram a reflexão e a idealização da proposta metodológica a ser executada como auxiliadora no processo de ensino.

## 1.2 OBJETIVOS

Nesta seção exponho o objetivo geral e alguns específicos que permitem delinear a pergunta norteadora dessa pesquisa, a qual investiga uma possível forma de ensinar o conteúdo de equações do segundo grau em sala por meio de uma abordagem que envolve história da matemática. Dessa maneira, evidencio o objetivo geral com a seguinte propositura:

- Construir uma proposta didática para o ensino das equações do segundo grau tendo a história da matemática como orientação.

Considero oportuno apresentar os objetivos específicos no intuito de auxiliar no esclarecimento da pergunta problematizadora com uma proposta metodológica que envolve o aluno e o professor de maneira a auxiliar ambos no ensino e aprendizagem das equações do segundo grau por meio da história da matemática. Na perspectiva de tornar o ensino significativo, pretendo:

- Identificar e descrever a forma como os livros didáticos estão explorando a história da matemática para o conteúdo de equações do segundo grau;
- Justificar pedagogicamente o desenvolvimento de uma proposta didática para o ensino de equações do segundo grau.

Esses objetivos tomam significado quando articulados entre si, tendo como ingrediente catalizador a História da Matemática, uma vez que se tornam bases para estruturar a proposta dessa pesquisa. Essa articulação será apresentada no próximo subtópico com o aspecto metodológico envolvido nessa investigação.

### 1.3 METODOLOGIA

Nessa seção apresento os métodos utilizados para o desenvolvimento dessa pesquisa que terá uma abordagem qualitativa, uma vez que se constituem através de investigações em artigos, livros, livros didáticos e paradidáticos tomando como base a pesquisa documental.

De acordo com NEVES, a pesquisa documental:

(...) é constituída pelo exame de materiais que ainda não receberam um tratamento analítico ou que podem ser reexaminados com vistas a uma interpretação nova ou complementar. Pode oferecer base útil para outros tipos de estudos qualitativos e possibilita que a criatividade do pesquisador dirija a investigação por enfoques diferenciados. (NEVES, 1996, p.03)

Dessa forma, procuro pesquisar e analisar através de quatro instrumentos diferentes para estabelecer uma proposta metodológica do ensino de equações do segundo grau através da História da Matemática, dos quais são:

- Livros didáticos – investigar como o conteúdo é abordado e quais autores utilizam a história da matemática como meio auxiliar no ensino das equações do segundo grau,



os selecionados foram: (BIANCHINI, 2011), (BIGODE, 2012), (DANTE, 2012), (IMENES; LELLIS, 2012), (JUNIOR, 2009) e (PATARO; SOUSA, 2009);

- Livros paradidáticos – analisar quais metodologias são utilizadas e como são desenvolvidas para o ensino das equações do segundo grau por meio da história da matemática como: (GUELLI, 2009) e (NETO, 2009);
- Livros de História da Matemática – tendo em vista a qualidade das informações produzidas nessas obras, dentre elas destaco: (BOYER, 1996); (CONTADOR, 2008); (GARBI, 2010) e (ROQUE, 2012);
- Artigos sobre História da Matemática - leituras realizadas em pesquisas com fontes detalhadas sobre a história das equações do segundo grau e como essa metodologia pode ser útil em sala de aula; (PEDROSO, 2010); (PITOMBEIRA, 2004) e (RIBEIRO, 2009).

Conjecturo que essas pesquisas são relevantes para construção de uma proposta metodológica voltada para o ensino das equações do segundo grau, visto que apresentam estudos aprofundados sobre a história das mesmas. A partir desses estudos considero adequado propor uma estratégia de ensino, que será realizada por meio de uma peça teatral contando a história das equações do segundo grau, no intuito de esclarecer o significado, desenvolvimento e finalidade dessas equações, que podem despertar o interesse, atenção e curiosidade do aluno, uma vez que apresentará os personagens principais para construção da fórmula de resolução das equações do segundo grau.

As análises serão realizadas no intuito de expor as informações sobre a história das equações do segundo grau contidas em cada componente dessa pesquisa de forma completa, a princípio organizei todas as informações referentes à temática central por meio de fichamentos. Depois de organizados os fichamentos apresento os trechos e transcrições das obras por meio de quadro para melhor visualização no que se refere aos tipos de dados históricos das equações do segundo grau, segundo os estudos publicados de cada autor.

Nesse sentido, penso que a literatura específica, no âmbito da História da Matemática no Ensino possa ser útil para inventariar elementos didáticos-metodológicos para elaboração de uma proposta didática alternativa para o ensino de equações do segundo grau. (MIGUEL, MIORIM, 2010)

## 2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

A História da Matemática no ensino tem o intuito de atribuir significação aos conteúdos, uma vez que atualmente está inserida nas tendências da Educação Matemática, considero oportuno apresentar inicialmente uma breve explicação sobre a inserção dessa tendência e sua finalidade no ensino, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS):

A história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma condição humana, ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A história da matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1999, p.42)

A utilização da história no ensino de conceitos matemáticos, leva consigo uma abrangência de temas e metodologias que podem ser utilizadas valendo-se de dados históricos no processo de ensino e aprendizagem. A História da Matemática definida como uma tendência, pode estar introduzida num tipo de obra que é usualmente incorporada à sala de aula, o livro didático, que se define como um componente auxiliador do professor.

Nesse sentido, a História da Matemática se configura como uma das tendências na Educação Matemática, com essa compreensão, torna-se necessário uma definição do objetivo dessa tendência em específico, que segundo Siqueira (2007):

Visa a construção histórica do conhecimento matemático de forma a contribuir com uma melhor compreensão da evolução do conceito, dando ênfase às dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo desenvolvido. Conhecendo a História da Matemática é possível perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram, que foram desenvolvidas com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta. (SIQUEIRA, 2007, p. 26)

Por ser considerada uma componente no ensino de conteúdos matemáticos, a História da Matemática foi introduzida como forma de viabilizar o ensino contribuindo de forma direta no processo de ensino e aprendizagem, “assim como tem crescido o interesse pela história da matemática em relação ao seu ensino, nos últimos anos, também tem se incrementado a busca de relações entre a matemática e sua história como [...] campo de investigação” (VALDÉS, 2006, p. 24), uma vez que confere maior significação no ensino de conteúdos matemáticos.

No que tange, em particular ao aluno, conjecturo que com as contribuições da história ele possa ter motivação e ao mesmo tempo interesse em aprender sobre a origem da matemática, como citado anteriormente, ter acesso às informações que delinearão a construção de teorias prontas atualmente, mas que foram construídas por diversos matemáticos em seu desenvolvimento, “o enfoque histórico é uma proposta metodológica que atua como motivação para o aluno, já que através dele descobrirá a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá na sala de aula” (VALDÉS, 2006, p. 25). Ainda segundo esse autor:

Se queremos estabelecer um laço entre nossos alunos, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, se os alunos conheceram a evolução dos conceitos aprendidos em classe, se conheceram as motivações e as dúvidas que os sábios experimentaram [...] talvez poderiam compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo conceitual etc. (VALDÉS, 2006, p. 25)

É nesse sentido que a História da Matemática se mostra propícia para a aprendizagem visto que busca ressignificar os conceitos já estudados, esse levantamento da história no ensino solicita uma reflexão sobre as contribuições voltadas para os alunos, no que se refere aos conceitos que hoje são concebidos prontamente, mostra ao educando que esses mesmos conceitos foram desenvolvidos por diversas pessoas até chegar nas suas formas atuais, ou seja, o aluno terá a possibilidade de “descobrir a origem dos conceitos e métodos que aprenderá em sala de aula, possibilitando-lhe, dessa forma, relacionar as *ideias* matemáticas vistas em sala de aula com suas origens na sociedade” (SIQUEIRA, 2007, p. 26, *grifo nosso*).

Algumas considerações são relevantes expor nesse momento valendo-se de uma perspectiva da tese de doutorado de Miguel (1993) intitulada “Três estudos sobre História e Educação Matemática” Em sua tese, Miguel (1993) expõe em um dos tópicos algumas reflexões sobre a obra de Feliz Klein intitulada “Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint” (Matemática elementar a partir de um ponto de vista avançado) publicada em 1945 que apresenta alguns apontamentos sobre o uso da história no ensino de geometria, nessa direção descreve que o autor vale-se da história como algo novo que proporcionou um “prazer especial” ao estudar as teorias matemáticas e seu desenvolvimento histórico. Em outro tópico apresenta algumas considerações de Henri Poincaré na obra “Science et Méthode” (Ciência e Métodos) publicada em 1908 na qual constitui um questionamento inicial tentando descobrir por que as crianças não aprendiam algumas definições matemáticas, e para responder sua indagação investigou a demonstração de um teorema e descobriu que a história poderia auxiliar o professor e o aluno.

Nessa direção, as afirmações desses autores já mostravam a importância da História da Matemática no ensino de conteúdos, ou seja, já se apresentava com um pouco do papel que tem hoje na matemática. Uma conclusão pode ser emitida dessas considerações, no que se refere ao ensino que se vale de fatos históricos para sua concretização, complementado a metodologia e contextualizando os conteúdos que devem ser aprendidos.

Como o propósito desse estudo visa apresentar as contribuições da História da Matemática no ambiente da sala de aula, que abrange o professor e o aluno, exponho em seguida um trecho de uma entrevista com o professor Ubiratan D'Ambrosio quando questionado sobre as contribuições da História da Matemática para o professor e para o aluno ele respondeu da seguinte forma:

Para o professor saber e transmitir para seus alunos que a Matemática foi desenvolvida, independentemente, em todas as regiões do mundo, e que todos os povos desenvolveram, ao longo de sua história, técnicas de observação, de reflexão, de comparação, de classificação, de mensuração, de quantificação e habilidade para explicar, entender e saber responder às suas necessidades de sobrevivência e de transcendência nos mais diversos ambientes naturais, sociais e culturais. O homem primitivo [...] criou ferramentas. Para construir uma lança teve que aplicar conhecimentos matemáticos – forma, comprimento, peso e a força para lança-la e alcançar determinado alvo. (D'AMBROSIO, 2013, p. 09)

Ele expressa de forma sucinta que a História da Matemática mostra o início da matemática, assim como seu desenvolvimento, do qual é definido de acordo com a época em que está inserida. A priori o homem primitivo já usava a matemática em sua vida, muito embora não soubesse que aqueles métodos anos depois definiriam uma ciência. O professor nessa esfera tem o papel de auxiliar e organizar os dados históricos referentes ao conteúdo que irá trabalhar, não estou afirmando que ele deva utilizar em todos os conteúdos, mas ressalto que seria uma alternativa na sua metodologia durante as aulas de matemática ensinar valendo-se da História da Matemática no intuito de introduzir um significado histórico e cultural ao conteúdo específico.

## 2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Apresento nesse subtópico algumas reflexões mais específicas sobre a História da Matemática no ensino das equações do segundo grau, buscando inventariar alguns pontos que merecem destaque para o ensino desse conteúdo e apontar algumas considerações no intuito

de responder à indagação inicial do trabalho que procura saber “*Como ensinar equações de segundo grau utilizando a história da matemática em sala de aula?*”.

As equações do segundo grau surgiram como problemas em papiros há aproximadamente 4.000 anos atrás e passou por diversas mentes brilhantes para chegar à sua resolução atual, um fato curioso é que sua fórmula de resolução é denominada fórmula de Bhaskara “mas essa denominação é utilizada somente no Brasil, não recebendo esse nome em outros países” (OLIVEIRA; LOPES, 2013, p. 23), visto que seu método de resolução teve contribuições de vários matemáticos em épocas distintas.

No ensino de um conteúdo específico o professor é responsável por valer-se de ideias inovadoras, Mendes (2006) ressalta que ele deve ser:

[...] ousado e criativo, pois é dessa maneira que ele poderá criar, em sala de aula, um ambiente inovador que favoreça a concretização da imaginação e criatividade matemática dos estudantes. Caso contrário, as condições socioeconômicas dos estudantes, da escola e do professor serão apontadas como fatores de inviabilização da proposta. (MENDES, 2006, p. 114)

Diante do estabelecido, vislumbro uma abertura para justificar a proposta didática que esse trabalho tem por intuito apresentar, se formulando como um método introdutório do ensino das equações do segundo grau e sua realização deve seguir alguns procedimentos que Mendes (2006) expõe em sua obra:

As atividades devem ser bem atrativas e desafiadoras, de modo a provocar a curiosidade dos estudantes. Acreditamos que estas características podem estimulá-los à aprendizagem se forem ricamente exploradas durante a elaboração de cada desafio, *que tem como intuito*, desenvolver nos estudantes um espírito explorador, indagador e, ao mesmo tempo, de análise e síntese, pois é dessa maneira que esses estudantes alcançarão um crescimento intelectual mais significativo. (MENDES, 2006, p. 114-115, *grifo nosso*)

Mediante o exposto, percebo que as orientações para o ensino de conteúdos matemáticos com a História da Matemática são pertinentes para essa pesquisa no sentido de mostrar como devem ser ensinados, qual a posição que o professor deve apresentar diante dos dados históricos, despertando o interesse dos alunos com essas informações que explicam o surgimento dos conceitos até sua forma atual, nessa esfera o aluno se torna um investigador da história das equações do segundo grau, visto que terá acesso à informações que não são usualmente utilizadas.

O autor deixa claro que o ensino por meio de dados históricos deve despertar o interesse dos alunos, proporcionando uma proximidade com a origem dos conceitos. Contudo,

ao trabalhar com a História da Matemática o professor deve estar atento para não cometer um equívoco, uma vez que “é grave erro de metodologia da História da Matemática interpretar os resultados de outras épocas sob nossa ótica moderna” (PITOMBEIRA, 2004, p. 01), já que os pensamentos eram distintos e até mesmo a simbologia não existia, as resoluções eram feitas de forma escrita ou em forma de versos e poemas.

Essas equações surgiram por intermédio de alguma necessidade que o homem apresentou e a História da Matemática tem por objetivo contextualizar os saberes, expondo de maneira completa os conceitos, assim como algoritmos que emergiram numa época histórica, em que lhe era inerente todo um ambiente social e cultural, uma vez que todos esses conceitos foram construídos pelo homem, o educando nesse meio é um investigador que aprende o significado dos conceitos estudados através de uma metodologia diferente, e nas equações do segundo grau não seria diferente, pois carrega consigo um quantitativo de informações detalhadas e em épocas distintas, segundo as contribuições de cada matemático em sua resolução (SIQUEIRA, 2007).

Inicialmente, há 1400 anos atrás, as equações do segundo grau era algo totalmente novo, ou seja, um desafio para os matemáticos da época que teriam que se valer de seus conhecimentos prévios e pesquisas posteriores para descobrir como resolver. Os versos que continham as equações do segundo grau eram famosos e conjecturo que outros matemáticos também tiveram acesso a eles, muito embora apenas alguns nomes se destacam no processo de encontrar um método de resolução adequado e preciso.

Nessa direção, pretendo apresentar uma proposta didática que atenda a essa orientações supracitadas, essa proposta será desenvolvida com o auxílio de um teatro apresentando a história das equações do segundo grau, uma vez que a peça teatral “tem como fundamento a experiência de vida: idéias, conhecimentos e sentimento sua ação é a ordenação desses conteúdos individuais e grupais.” (BRASIL, 1997, p. 57).

Quando o aluno se depara com algo novo, uma metodologia diferente, ele terá a oportunidade de visualizar como a história da resolução das equações do segundo grau foi delineada. Desse modo, no que concerne às metodologias de ensino com essa possibilidade:

As propostas educacionais devem compreender a atividade teatral como uma combinação de atividade para o desenvolvimento global do indivíduo, um processo de socialização consciente e crítico, um exercício de convivência democrática, uma atividade artística com preocupações de organização estética e uma experiência que faz parte das culturas humanas. (BRASIL, 1997, p.57)

Por meio da peça teatral o aluno poderá visualizar os personagens de forma a compreender como eles resolviam as equações do segundo grau, sejam elas de maneira retórica (escrita) ou com notação algébrica (simbologia), sobre o processo de visualização pode gerar maior significado para o aluno, uma vez que irá observar a representação dos matemáticos em suas épocas distintas (FLORES, 2010).

Para concretizar essa proposta, no intuito de construir um enredo com a história das equações do segundo grau, considero relevante levantar alguns dados de investigação na temática do trabalho, com o objetivo de verificar por intermédio de informações históricas como as equações do segundo grau surgiram, como foi seu desenvolvimento e quais métodos são usados para inserir a história na sala de aula, e se esses métodos são significativos no que concerne ao ensino e aprendizagem desse conceito.

### 3. DADOS DE ANÁLISE

Neste capítulo exponho os dados analisados em livros didáticos, livros paradidáticos, livros de história da matemática e artigos de história da matemática, referentes à temática de história das equações do segundo grau, que utilizei para realização dessa pesquisa. Todos os dados apresentam vestígios do tema em questão em suas particularidades, uma vez que a variedade de informações e como elas são organizadas nas fontes pesquisadas são dispostas de forma diferente.

Para facilitar a compreensão, escolhi categorizar os dados por meio de subtópicos contendo as informações encontradas nas fontes consultadas. Cada uma delas foi analisada de acordo com uma perspectiva distinta. Desse modo, é conveniente apresentar uma introdução de cada dado de análise e sua relação com a história das equações do segundo grau.

A investida inicial da pesquisa foram os livros didáticos, especificamente do 9º ano, uma vez que considero primordial verificar como são ensinadas as equações do segundo grau e se a história da matemática presente neles é relevante para o ensino, ou seja, se a história está contribuindo de forma positiva para o ensino desse conteúdo e/ou se sua utilização assume um papel somente como maneira de contextualizar as equações do segundo grau.

Nessa direção, é conveniente explicitar mais um elemento constituinte da análise, os livros paradidáticos, que por sua vez trazem aspectos históricos tratados de maneira diferente como por exemplo, figuras ilustrativas e diálogos com personagens da história, na tentativa de inserir o aluno no cenário em que as equações do segundo grau foram descobertas com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos estudados.

O penúltimo dado utilizado para realização da pesquisa são os livros de história da matemática, que evidenciam os fatos históricos a partir do surgimento até a fórmula de resolução das equações do segundo grau e dispõem de um conjunto de informações pertinentes às equações do segundo grau e os acontecimentos que contribuíram para sua concretização. Os dados presentes nesse elemento de análise são essenciais no que se refere à problematização desse estudo, uma vez que auxiliam de forma significativa na construção da proposta didática.

É oportuno apresentar nesse momento o último elemento para composição do universo de fontes analisadas que aguçam a discussão acerca do uso da história das equações do segundo grau na sala como facilitador do processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, os artigos de história da matemática, que embora não sejam uma obra literária, contém uma



densidade de informações pertinentes para essa pesquisa, visto que apresenta uma síntese dos dados históricos presentes em obras sobre a história das equações do segundo grau.

Em seguida apresento cada subtópico com uma análise detalhada contendo as informações coletadas sobre as equações do segundo grau presente nas obras e como elas estão correlacionadas com a história.

### 3.1. LIVROS DIDÁTICOS

Neste subtópico exponho uma análise dos livros didáticos de Matemática do 9º ano no conteúdo específico de Equações do 2º grau. A escolha dos livros se deu de forma aleatória com critério básico de identificar a presença de elementos de história da matemática que estivessem presentes na temática de equações do segundo grau, em decorrência disso, transcrevi de cada livro essa linha específica.

Nessa direção, apresento em seguida as transcrições e abaixo de cada uma, um comentário sobre as informações apresentadas. Organizei as transcrições de acordo com a data de publicação de cada livro para verificar se houve alguma progressão ou regressão na abordagem desse conteúdo com o uso da história. Para facilitar essa tarefa é conveniente apresentar estas informações em forma de quadro com as obras e as transcrições retiradas delas. No primeiro quadro será exposto uma transcrição do livro intitulado “A conquista da Matemática, 9º ano”, ano de 2009 de José Ruy Giovanni Júnior.

Quadro 1: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos	
Obra	Transcrição
A conquista da Matemática, 9º ano	<p>A equação do 2º grau há muito, muito tempo...</p> <p>Um dos problemas mais comuns nos escritos babilônicos tratava da determinação de dois números, quando conhecidos a soma e o produto deles. A resolução desses problemas era estritamente geométrica: considera-se o produto dos dois números como a área e a soma deles como o semiperímetro de um retângulo. As medidas dos lados do retângulo correspondiam aos números dados, que eram sempre naturais.</p> <p>Esse tratamento geométrico era longo e cansativo, o que levou os gregos – e posteriormente os árabes – a buscar um procedimento simples para resolver tais problemas.</p> <p>No século IX, al-Khowarizmi, matemático árabe, desenvolveu um processo para a resolução desses problemas. Esse processo deu início à chamada Álgebra Geométrica.</p> <p>No século XII, baseado nos estudos feitos por al-Khowarizmi, o matemático hindu Bhaskara (1114-1185) apresentou um processo puramente algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau. Partindo desse processo e com uso da Álgebra Simbólica, os matemáticos puderam chegar a uma fórmula, usada até hoje, que ficou conhecido como <b>fórmula resolutiva</b> para equações do 2º grau.</p>



Nessa obra Júnior (2009) traz uma informação sobre como eram resolvidas as equações do segundo grau, através apenas da geometria, sendo, segundo o autor, um método “longo e cansativo”. Após isso, apresenta al-Khowarizmi, matemático que determinou o início da Álgebra e seu sucessor Bhaskara como um pioneiros da resolução da equação. Ao fim da breve introdução ele apresenta um quadro com a localização de algumas civilizações que foram importantes para a matemática e suas descobertas.

Já no segundo quadro apresento a transcrição do livro “Vontade de saber matemática, 9º ano”, ano de 2009 de Patricia Rosana Moreno Pataro e Joamir Roberto de Souza.

Quadro 2: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos	
Obra	Transcrição
Vontade de saber matemática, 9º ano	<p style="text-align: center;"><i>Completar quadrados</i></p> <p>Há equações do 2º grau em que o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito. Nesses casos, podemos determinar as raízes da equação utilizando o método de completar quadrados.</p> <p>Esse método foi utilizado pelo matemático árabe al-Khowarizmi por volta de 825 d.C. em seu livro <i>Al-Jabr wa'l muqabalah</i>. Ele consiste na construção de quadrados retângulos para obter as raízes da equação.</p> <p>Observe como podemos calcular as raízes de <math>x^2 + 8x + 7 = 0</math> utilizando o método de completar quadrados.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Como o 1º membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isolamos o termo independente no 2º membro da equação.             <math display="block">x^2 + 8x + 7 - 7 = 0 - 7</math> <math display="block">x^2 + 8x = -7</math> </li> <li>Escrevemos o 1º membro da equação de maneira conveniente e o representamos geometricamente, como mostra a figura.             <math display="block">x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x</math> </li> <li>Observando a figura, podemos notar que para completa-la a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado com 4 unidade de lado.</li> </ul> <p>Dessa maneira, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação,</p>



Dessa forma, devemos somar  $2^2$  ao primeiro membro para formar o trinômio quadrado perfeito. Para não alterar a equação, devemos somar  $2^2$  ao segundo membro também. Daí, temos:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, temos:

$$(x + 2)^2 = 25$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{25}$$

$$x + 2 = \pm 5$$

- Para  $x + 2 = 5$ , temos  $x_1 = 3$ .
- Para  $x + 2 = -5$ , temos  $x_2 = -7$ .

Veja os exemplos:

a) Para resolver a equação  $x^2 - 12x - 13 = 0$ , primeiro fazemos  $x^2 - 12x = 13$ . Em seguida, fazemos as representações geométricas:



Do quadrado de lado  $x$ , devemos tirar os dois retângulos de lados  $6$  e  $x$ .

Observe que, na figura 1, há um quadrado de lado  $6$  que deve ser tirado duas vezes, o que nos leva à figura 2.

O que sobra é só a parte amarela. Note, na figura 2, que, para completar o quadrado de lado  $x - 6$ , devemos acrescentar um quadrado de lado  $6$ . Isso equivale a dizer que, para obter um trinômio quadrado perfeito, devemos somar  $6^2$  no  $1^\circ$  membro.

$$x^2 - 12x + 6^2 = 13 + 6^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = 13 + 36$$

$$(x - 6)^2 = 49$$

$$x - 6 = \pm\sqrt{49}$$

$$x - 6 = \pm 7$$

- Para  $x - 6 = 7$ , temos  $x_1 = 13$
- Para  $x - 6 = -7$ , temos  $x_2 = -1$

b) Vamos resolver a equação  $6x^2 - 7x + 2 = 0$ . Nesse caso,  $a = 6$ . Por isso, dividimos todos os termos da equação por  $6$ :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x + 2 &= 0 \\ \frac{6x^2}{6} - \frac{7x}{6} + \frac{2}{6} &= \frac{0}{6} \\ x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} &= 0 \\ x^2 - \frac{7}{6}x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

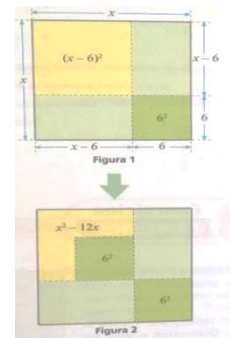
Devemos encontrar um número que, somando aos dois membros, torne a expressão do primeiro membro um trinômio quadrado perfeito.

Para determinar esse número, fazemos assim:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{7}{6}x &= -\frac{1}{3} \\ \downarrow \\ \frac{7}{2} : 2 &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Elevamos  $\frac{7}{12}$  ao quadrado para obter o trinômio quadrado perfeito. Assim, temos:


$$\begin{aligned} x^2 - \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 &= \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \frac{1}{3} \\ \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 &= \pm\sqrt{\frac{1}{144}} \\ x - \frac{7}{12} &= \pm\frac{1}{12} \end{aligned}$$



	<p>Dessa forma, obtemos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}</math></li> </ul> $x_1 = \frac{2}{3}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x - \frac{7}{12} = -\frac{1}{12}</math></li> </ul> $x_2 = \frac{1}{2}$ <p style="text-align: right;">(BIANCHINI, 2011, p.116-118)</p>
--	--

Neste livro, Bianchini (2011) apresenta a história da matemática presente na resolução das equações através de completar quadrados, uma forma alternativa que os Babilônios e matemáticos hindus usavam para conseguir resolver de forma mais simplificada. Apresenta também algumas informações sobre Brahmagupta, um importante matemático do século VI que utilizava o método de completar quadrados através de tábuas de quadrados para resolver essas equações.



Apresento nesse momento mais um livro que constitui a análise, “Projeto velear: matemática”, ano de 2012 do autor Antonio José Lopes Bigode.

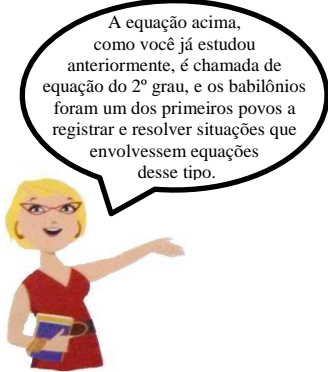

Quadro 4: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos	
Obra	Transcrição
Projeto velear: matemática	<p style="text-align: center;"><i>Um pouco da história da Matemática</i></p> <p>Vários documentos antigos mostram que as equações do 2º grau eram familiares a alguns povos.</p> <p>Na antiga Babilônia, os escribas conheciam métodos de resolução de problemas equivalentes a certos tipos de equações, como <math>x^2 - bx = c</math>. Para resolver tais problemas, seguiam regras que chegavam à fórmula:</p> $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$ <p>Os gregos resolviam problemas de 2º grau por métodos geométricos, com o auxílio de régua e compasso. Partiam dos valores dos coeficientes. Cumprindo uma sequência de passos e construções, para, enfim, encontrar um segmento. A medida do segmento encontrado era raiz da equação.</p> <p style="text-align: center;"><b>As receitas de al-Khowarizmi</b></p> <p>No século IX, Bagdá era o centro cultural e científico mais importante do planeta. Lá viviam os mais famosos sábios mundo muçulmano. Entre esses sábios encontrava-se al-Khowarizmi, autor de uma grande obra de matemática, escrita por volta do ano 825, chamada Hisab al-jabr w'al-muqabalah.</p> <p>A palavra álgebra é derivada da parte central do nome deste livro – <b>al-jabr</b>. Nessa obra, al-Khowarizmi refere-se a três casos de equações incompletas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>ax^2 = bx</math> (quadrados iguais a raízes)</li> <li>• <math>ax^2 = c</math> (quadrados iguais a números)</li> <li>• <math>bx = c</math> (raízes iguais a números)</li> </ul> <p>Al-Khowarizmi aborda três casos possíveis de equações do 2º grau:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x^2 + px = q</math> (quadrados e raízes iguais a números)</li> <li>• <math>x^2 + q = px</math> (quadrados e números iguais a raízes)</li> <li>• <math>x^2 = px + q</math> (quadrados iguais a raízes e números)</li> </ul> 

	<p>Para discutir o primeiro caso, al-Khowarizmi sempre formulava um problema numérico, por exemplo: Qual é o quadrado que somado a 10 raízes dá o número 39?</p> <p>Em seguida propunha uma receita para a solução, nesse caso:</p> <p>Deves tomar a metade do número das raízes, neste caso o 5, e multiplica-lo por si mesmo; e obtém 25, ao que somas o número 39, com o resultado 64. Toma a raiz quadrada deste número, que é 8, e subtrai a metade das raízes e obténs 3, que é o valor que se procura.</p> <p>Observe que o que chamamos de receita ou “fórmula” para a solução está apresentada na forma retórica, isto é, com palavras, sem os símbolos matemáticos que hoje utilizamos. Portanto, é um roteiro que pode ser falado.</p> <p style="text-align: right;">(BIGODE, 2012, p. 69)</p>
--	---

Nesta obra está explícita uma informação relevante sobre a história das equações do 2º grau no que se refere a sua resolução, em que o autor descreve que na época as equações eram resolvidas através de fórmulas escritas, sem símbolos. Dessa forma, ele expõe “as receitas de al-Khowarizmi” traduzidas para nossa simbologia atual das equações do segundo grau, como forma de aproximar o aluno ao método que era utilizado.

No quinto quadro o livro, de Luiz Roberto Dante é mostrado com uma transcrição do que tem de história das equações do segundo grau, intitulado “Matemática” publicado no ano de 2012.

Quadro 5: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos	
Obra	Transcrição
Matemática	<p>Você já viu que, ao longo da história da Matemática, vários povos importantes contribuíram ao desenvolvimento dessa ciência: egípcios, babilônios, gregos, romanos, hindus, árabes e muitos outros.</p> <p>Os babilônios, por exemplo, tiveram um importante papel na construção de áreas da Matemática como a Álgebra e a Geometria. Os conhecimentos matemáticos dessa civilização que habitou a antiga Mesopotâmia foram extremamente valiosos para que ela se desenvolvesse e prosperasse em campos como agricultura, arquitetura e astronomia. Esses conhecimentos eram aplicados em várias situações, desde o cálculo dos dias, meses e anos até a construção de templos e palácios.</p>  <p>Entre os vários documentos que os babilônios deixaram, há um antigo texto de problemas matemáticos, escrito em argila (veja a foto abaixo), que apresenta o seguinte problema:</p> <div style="border: 2px solid black; background-color: yellow; padding: 10px; display: inline-block; margin: 10px 0;"> <p>Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?</p> </div> 




	<p>Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação <math>x^2 - x = 870</math>, que também pode ser escrita da seguinte forma:</p> $x^2 - x - 870 = 0$ <div style="text-align: center;">  <p>A equação acima, como você já estudou anteriormente, é chamada de equação do 2º grau, e os babilônios foram um dos primeiros povos a registrar e resolver situações que envolvessem equações desse tipo.</p> </div> <p>Esse é o assunto que você vai estudar agora. Neste capítulo, você vai aprender a resolver situações em que aparecem equações ou sistemas com equações do 2º grau.</p> <div style="text-align: right;">  </div> <p><b>Placa de argila 13 901, guardada no Museu Britânico, em Londres, Inglaterra. O primeiro problema dessa placa, registrado em escrita cuneiforme, correspondente ao problema citado no texto.</b></p> <p style="text-align: right;">(DANTE, 2012, p. 30 -31)</p>
--	--

Em sua obra Dante (2012) dá a ideia de como surgiram as equações do 2º grau através dos escritos antigos, expondo um dos problemas clássicos que deram a origem a esse tipo de equação. Logo após ele explica que essa equação o aluno já devia estar familiarizado dizendo também que os Babilônios foram um dos primeiros povos a resolver esse tipo de equação. Expõe a placa de argila BM 13901 em que está presente o problema que ele apresentou ao aluno anteriormente. Em seguida explica que esse conteúdo o aluno irá aprender no desenvolvimento do capítulo.

O último livro dessa categoria de análise intitula-se “Matemática 9º ano” de Luíz Márcio Imenes e Marcelo Lellis intitulado, ano de 2012.



Quadro 6: Informações da História da Matemática presentes em Livros Didáticos

Obra	Transcrição
<p>Matemática 9º ano</p>	<p style="text-align: center;"><i>De onde veio a fórmula de Bhaskara?</i></p> <p>Os historiadores encontraram indícios de que na civilização da Babilônia, por volta de 1700 a.C., já eram resolvidas algumas equações de 2º grau. Depois dessa época remota, parece ter sido Al-Khowarizmi, matemático de língua árabe do século IX, o maior especialista no assunto. Ele viveu em Bagdá e é considerado um dos criadores da Álgebra. Em um de seus livros, Al-Khowarizmi apresentou exemplos de como resolver equações de 2º grau. O interessante é que ele não usava fórmulas nem símbolos algébricos; trabalhava apenas com palavras e figuras! Vamos mostrar um dos problemas que ele propôs, traduzido para uma linguagem moderna:</p> <p><i>Qual é o número cujo quadrado somando com seu décuplo resulta em 39?</i></p> <p>Atualmente, no lugar dessa pergunta, escreveríamos a equação <math>x^2 + 10x = 39</math>. Mas, naquela época, ninguém usava esses símbolos. Veja como Al-Khowarizmi representava a situação:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>O quadrado do número</i> seria a área de um quadrado de lado <math>x</math> (desconhecido);</li> <li>• <i>O décuplo do número</i> corresponderia à área de dois retângulos, com lados 5 e <math>x</math>, porque <math>5x + 5x = 10x</math></li> </ul> <p>A figura é esta:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; font-size: small;">       Lembra-se de que a área total dessa figura poligonal é 39.     </div>  </div> <p>Nesse ponto, ele se perguntava: o que devo acrescentar à figura para que ela se torne um quadrado?</p> <p>Observando bem, notamos que, acrescentando um quadrado de lado 5 (e área 25), a figura se torna um quadrado. A área da figura toda passa a ser 39 (área da figura inicial) mais 25 (área acrescentada), o que dá 64. Veja:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Agora, com o quadrado completado, vem a triunfante conclusão. Acompanhe: A figura toda tem área igual a 64 e é um quadrado, cujo lado é 8. Vemos ainda que o lado desse quadrado é também <math>x + 5</math>.</p> <p>Conclusão: <math>x + 5</math> vale 8 e, portanto, <math>x</math> vale 3. O número, cujo quadrado somado com seu décuplo dá 39, é 3.</p> <p>Se você resolver a equação <math>x^2 + 10x - 39 = 0</math> usando a fórmula, encontrará, além de <math>x = 3</math>, a solução <math>x = -13</math>. Al-khowarizmi, porém, nem cogitava que a equação pudesse ter uma solução negativa, uma vez que ele relacionava com quantidades positivas, isto é, áreas e medidas de lado de figuras.</p> <p>Entre os séculos XVI e XVII, quando os matemáticos já sabiam calcular com letras, somar monômios e polinômios e fatorar, eles obtiveram a fórmula de Bhaskara seguindo as ideias de Al-khowarizmi.</p> <p>Para chegar à fórmula, buscamos resolver esta equação: <math>ax^2 + bx + c = 0</math>, transformamos em <math>ax^2 + bx = -c</math>. Assim como Al-Khowarizmi tentava associar <math>ax^2 + bx</math> com um quadrado, nós tentaremos, a partir dessa expressão, obter um trinômio quadrado perfeito. Isso é feito efetuando uma mesma operação dos dois lados da equação.</p> <p style="text-align: center;"><math>ax^2 + bx = -c</math></p>



	$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ <p>Para um pouco e observe a expressão <math>4a^2x^2 + 4abx</math>. O que falta e aela para ser um trinômio quadrado perfeito?</p> $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ <p>Agora, no lado esquerdo dessa igualdade, temos um trinômio quadrado perfeito. Fatorando-o, obtemos:</p> $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ <p>Se o número <math>b^2 - 4ac</math> é negativo, não conseguimos extrair a sua raiz, e você já sabe o porquê. Supondo, então, que <math>b^2 - 4ac</math> é positivo, temos dois números (um positivo e outro negativo) que, elevados ao quadrado, dão <math>b^2 - 4ac</math>. Por isso escrevemos:</p> $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ <p>Agora, isolamos o <math>x</math> e chegamos à fórmula:</p> $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>No caso em que <math>b^2 - 4ac</math> é nulo, a fórmula nos dá um único resultado. Pode-se dizer que a equação tem uma só solução, mas o costume é dizer que são duas soluções iguais.</p> <p>No início deste capítulo, prometemos apresentar a dedução da fórmula de Bhaskara. A promessa foi cumprida.</p> <p>Repare que a fórmula leva o nome de Bhaskara, matemático indiano do século XII, e usamos apenas ideias de Al-Khowarizmi e de matemáticos europeus do século XVI. Bhaskara não poderia ter deduzido a fórmula, porque ele não trabalhava ainda com letras. Por que, então, associa-se seu nome à fórmula?</p> <p>Talvez porque, segundo se crê, ele tenha sido o primeiro a indicar que a equação deveria ter duas soluções, reconhecendo que há dois números que, elevados ao quadrado, resultam em um quadrado perfeito. Isso teria sido um passo adiante em relação a Al-Khowarizmi.</p> <p style="text-align: right;">(IMENES; LELLIS, 2012, p. 132-134)</p>
--	--

Este livro apresenta como a matemática era baseada apenas na escrita, assim como uma dedução da “fórmula de Bhaskara”. Relata de forma objetiva e clara que a matemática acontecia por base de escritos e figuras, não eram usadas fórmulas, esse fato apresentado leva o aluno a pensar sobre como era difícil utilizar apenas problemas e resoluções escritas. Sobre a dedução da “fórmula de Bhaskara”, o autor explica que Bhaskara não foi propriamente um criador da fórmula, sendo apenas um dos pioneiros em sua resolução.

Como citei anteriormente, decidi organizar as transcrições a partir das datas de publicação dos livros para analisar se houve progressão ou regressão das informações que cada obra apresentou. Considero oportuno nesse momento mencionar quais obras mostraram dados históricos convergentes, como por exemplo (JÚNIOR, 2009), (PATARO; SOUSA, 2009) e (BIGODE, 2012) com informações sobre al-Khowarizmi, matemático importante da época, considero como pai da álgebra valeu-se de formas geométricas para resolver as equações do segundo grau. Outra informação importante que os autores (BIGODE, 2012), (DANTE, 2012) e (IMENES; LELLIS, 2012) apresentaram em suas obras, foi a explicação de que as resoluções na época eram feita através da escrita e com figuras.

Os autores (DANTE, 2012) e (IMENES; LELLIS, 2012) que publicaram suas obras em 2012, mostraram dados novos de pesquisa sobre as equações, especificamente na obra de (DANTE, 2012), ele relata sobre os problemas iniciais que envolviam equações do segundo grau encontrados na tábua B 13901 e na obra de (IMENES; LELLIS, 2012) eles expõem que Bhaskara não pode ser considerado o responsável pela resolução das equações, mas um dos pioneiros dessa descoberta.

Dessa forma, é possível observar uma progressão a partir dos anos no que concerne à alguns dados relevantes na história das equações do segundo grau expostos nos livros, uma vez que é necessário atualizar as informações históricas para que aluno tenha acesso a uma história completa. Contudo percebo que os livros didáticos apresentam limitações, visto que a história das equações do segundo grau está exposta apenas como complementação do capítulo, alguns no início e outros no final do capítulo, não estando presente no desenvolvimento do conteúdo e conseqüentemente pode não ser utilizado como um instrumento de auxílio no processo de ensino.

### 3.2. LIVROS PARADIDÁTICOS

Neste subitem, exponho uma análise da abordagem de dois livros paradidáticos (GUELLI, 2009) e (NETO, 1997), com o intuito de compreender como os fatos históricos dispostos neles podem favorecer a introdução do conteúdo de equações do segundo grau em sala de aula. A primeira obra será analisada por meio de um quadro com as citações e a segunda através de comentários com a história contada, uma vez que, por ser uma história fictícia, considero relevante expor as informações da forma que o autor apresentou.

Apresento inicialmente alguns excertos do livro de (GUELLI, 2009) sobre a história das equações do segundo grau, uma vez que explicita da seguinte maneira sua fórmula de resolução, semelhantemente ao subtópico anterior, para uma melhor visualização exponho em forma de quadro com a obra e as citações correspondentes:

Quadro 7: Trechos presentes nos Livros Paradidáticos	
Obra	Excerto
	<p>Levou muito tempo para os matemáticos descobrirem uma fórmula resolutive das equações do 2º grau. Mesmo sem conhecer a fórmula, os bravos matemáticos da Antiguidade, que escreviam equações totalmente em palavras, inclusive os números conseguiam resolver a maioria delas. (GUELLI, 2009, p. 08)</p> <p>“Os antigos matemáticos da Babilônia sabiam resolver algumas equações do 2º grau, sem</p>

<p>História da equação do 2º grau</p>	<p>se preocupar em explicar o método que utilizavam. Os gregos por muito tempo preferiram a Geometria a Álgebra.” (GUELLI, 2009, p. 25)</p> <p>Foi no ano 830 d. C., com o surgimento do livro <i>Hisab al-jabr wa-al-muqabalah</i>, de al-Khowarizmi – o mais brilhante matemático de todos os tempos – que ficou mais fácil e completo o estudo da equação do 2º grau.(GUELLI, 2009, p. 25)</p> <p>Foi assim que o museu de Alexandria se converteu em prêmio de guerra ao vencedor: livros escritos em grego foram transportados de Alexandria para Bagdá e traduzidos para a língua árabe. (GUELLI, 2009, p. 28)</p> <p>Al-Khowarizmi resolvia as equações utilizando somente palavras, inclusive para expressar os números, e seu método consistia em “completar quadrados”, que significa formar o trinômio quadrado perfeito. (GUELLI, 2009, p. 29)</p>
---------------------------------------	--

Repare que nas citações acima há algumas características similares, são elas: fórmula de resolução das equações do segundo grau, método de completar quadrado de al-Khowarizmi e equações resolvidas somente com palavras. Essas características compõem um ponto relevante, considerando que contribuem para entender como a resolução das equações do segundo grau foi desenvolvida até chegar na fórmula atual.

Outro ponto relevante identificado na obra foi a presença de quadros compostos por duas colunas, na primeira dispõe de forma escrita (sem simbologia) a resolução de algumas equações do segundo grau retirada do livro intitulado *Al-jbr* de al-Khowarizmi, na segunda coluna apresenta uma tradução dos escritos antigos para a forma atual (com simbologia) referente aos trechos do livro de *Al-jabr*, entre eles apresento abaixo para facilitar a visualização:

<i>Livro Al-jabr</i>	<i>Livro atual</i>
“É preciso, em primeiro lugar, que vocês somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes.	$x \cdot (6 + 4 + 2) = 36$
Como doze raízes valem o mesmo que trinta e seis unidades,	$12x = 36$
então o valor de uma raiz é três unidades.”	$x = 3$

Fonte: Guelli (2009)

Exponho agora algumas informações da obra de Neto (2009), que se configura como uma história fictícia no século IX de três jovens amigos Kamal, Ahmed e Najla, que precisavam atravessar o deserto com uma caravana de comerciantes para vender seus produtos numa feira da cidade, contudo sua caravana foi assaltada e os ladrões prenderam os três para serem vendidos como escravos, com sorte conseguiram fugir em camelos e continuaram no deserto, vencidos pelo cansaço ficaram deitados na areia até que uma outra

caravana do emir Mustafa Al Malik os encontrou oferecendo água e comida, tratando os três como convidados.

Havia um matemático na caravana de grande reputação que fazia problemas para os viajantes e ao apresentar alguns problemas para os jovens ficava surpreso quando eles conseguiam revolver todos. Quando chegaram na cidade, se hospedaram no palácio do emir e em uma de suas caminhadas nos corredores ouviram um dos príncipes, que estava disputando a mão da filha do emir, revelar seus planos de casar e depois envenenar o rei para tomar seu lugar. A disputa pela mão da princesa estava praticamente empatada pelos dois príncipes Tarik e Khalil (que tinha planos de matar o emir depois de casado), a penúltima tarefa era uma lista com cinco problemas matemáticos da qual os dois acertaram todas as questões, a última lista continha quatro problemas representados por equações do segundo grau, como demonstrado na figura abaixo:

The image shows a scroll with four quadratic equations listed vertically. To the right of the scroll is a rectangular box containing a definition of quadratic and linear equations in Portuguese.

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$3x^2 - 30x + 27 = 0$$

*Equação do 2º grau é toda equação do tipo:  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, e c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Equação do primeiro grau é toda equação do tipo:  $ax + b = 0$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .*

Fonte: Neto (2009)

O autor expõe as listas numa figura retratando um pergaminho com as quatro equações do segundo grau que deveriam ser resolvidas pelos príncipes e ao lado uma breve explicação sobre como a equação pode ser representada pela forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . Os três jovens considerando as questões interessantes e desafiadoras se dedicaram a tentar resolvê-las, a primeira conseguiram solucionar colocando o x em evidência e em seguida descobriram que os príncipes também haviam solucionado a equação, já a segunda os jovens resolveram através de produtos notáveis e apenas o príncipe Tarik tinha resolvido até o momento, diante disso os amigos se voltaram para a terceira questão da lista, da qual solucionaram através de produto notáveis novamente, assim como na segunda somente Tarik conseguiu resolver, já na última os três jovens dividiram por três os dois membros da igualdade e após isso extraíram as raízes. Receberam a notícia de que o príncipe Tarik venceu a disputa com a resolução de apenas três equações, pois o príncipe Khalil havia abandonado a disputa, de modo conseqüente a vida do rei foi salva, uma vez que se Khalil vencesse o mataria.

Após isso, os jovens decidiram abrir uma loja de tecidos na cidade e muitos descobriram que eles conseguiram resolver os problemas propostos para os príncipes, várias pessoas procuraram os três para resolver questões matemáticas. As equações de segundo grau eram a especialidade dos três amigos, que através de muitos cálculos posteriores substituíram os números por letras para encontrar uma fórmula geral de resolução desse tipo de equação, expressa da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com essa fórmula eles conseguiam resolver todas as equações de segundo grau que lhe eram propostas. O autor finaliza o livro com um capítulo surpresa revelando que toda a história era um filme sendo gravado e que deveriam parar naquele momento, visto que, segundo dados da História da Matemática, na época as equações eram resolvidas de forma escrita sem simbologia e que a fórmula com a utilização de letras só se configurou no Renascimento por meio do advogado e matemático François Viète (1540-1603).

Nessa obra, o autor tenta aproximar o leitor com uma das fórmulas de resolução das equações do segundo grau através de um roteiro que ele criou com personagens mulçumanos do século IX, após contar toda a história e sua finalização ele revela que toda obra era um filme sobre as equações do segundo grau, mas contradizia alguns dados históricos e que deveria ser refeito atualizando o cenário para o Renascimento. Dessa forma, é possível ter acesso a uma contextualização das equações com uma história contendo a dedução da fórmula geral.

Um comparativo entre as duas obras se torna necessário, visto que as duas apresentam informações diferentes sobre as equações do segundo grau. A primeira mostra dados históricos evidenciando o método de completar quadrados criado pelo matemático al-Khowarizmi e que na época era resolvidas através da escrita, já na segunda expõe uma história com resoluções de equações do segundo grau constituindo a fórmula geral por meio de uma história fictícia. Em linhas gerais, os livros paradidáticos analisados contém registros importantes sobre as equações do segundo grau e sua resolução, por conseguinte podem ser utilizados como metodologia de ensino desse conteúdo na sala de aula.

### 3.3. LIVROS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Neste subtópico apresento algumas literaturas sobre História da Matemática que trazem a contextualização das equações do segundo grau, particularmente consultei as seguintes referências: (BOYER, 1996); (CONTADOR, 2008); (GARBI, 2010) e (ROQUE, 2012). Considero oportuno nesse momento destacar alguns pontos relevantes dessas obras consultadas que se mostram como fontes propícias para essa investigação.

Em primeira instância, disponho sobre os vestígios iniciais do surgimento das equações do segundo grau, enfatizando as citações que abordam a questão da gênese que de alguma maneira apresentam convergência. Para facilitar essa tarefa é conveniente apresentar estas informações organizadas a partir de dois quadros denominados “Início das Equações do Segundo Grau” e o “Papel de Bhaskara”. Relacionando as concepções de alguns autores consultados que caminham na mesma direção.

No quadro denominado “O início das Equações do Segundo Grau” apresento excertos das obras de (ROQUE, 2012) e (GARBI, 2010) estudadas, que me permitem expressar algumas inferências sobre a origem das equações do segundo grau, como exposto a seguir:

Quadro 8: O Início das Equações do Segundo Grau	
Obras	Citações
Romance das equações algébricas	Os mais antigos documentos escritos que se conhece tratam de dois temas básicos: a glorificação dos reis e a contabilidade de impostos, estoques e transações comerciais. Alguns especialistas chegam a conjecturar que a escrita foi inventada para fazer registros numéricos. (GARBI, 2010, p. 07)  Os mais antigos documentos contendo registros numéricos são tabletas de barros sumérios, de meados do IV milênio a. C. Se quisermos ser rigorosos, podemos dizer que tais registros ainda não eram matemáticos porque não aparecem neles operações feitas com números. (GARBI, 2010, p.08)  Os babilônios, na mesma época (papiro de Moscou 1850 a. C.), já conseguiam trabalhar com equações do 2º grau e resolviam-nas por um método baseado no mesmo raciocínio empregado pelos hindus quase 3 milênios mais tarde, o chamado “completamento do quadrado”. Embora os resultados fossem corretos, os tabletas que contêm soluções de equações do 2º grau apresentam, como todos os demais, apenas sequências do tipo “faça isso”, “faça aquilo”, “este é o resultado”, sem qualquer justificativa lógica sobre o caminho a ser seguido. (GARBI, 2010, p.13)
História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas	Se traduzirmos o método indiano para a notação algébrica atual e o aplicarmos a essa equação geral, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isso quer dizer que havia um método geral para a resolução de equações, expresso de modo retórico. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma “fórmula” para a resolução de equações, no sentido que a entendemos hoje, uma vez que não havia simbolismo para os coeficientes, o que será proposto por Viète somente no século XVI. (ROQUE, 2012, p. 242)

Conforme adiantei anteriormente, uma primeira conclusão pode ser emitida tendo em vista as informações do Quadro 08 nesse caso o pensamento dos autores revela que as

equações tiveram início através dos povos antigos como hindus e babilônios, que resolviam, na época, as equações do segundo grau em palavras.

Uma segunda conclusão relevante para essa investigação é a convergência dos autores (GARBI, 2010) e (ROQUE, 2012) que consideram importante a tradução dos métodos utilizados na antiguidade, na origem das equações do segundo grau, para nossa escrita atual, uma vez que facilita o estudo e desenvolvimentos dessas equações. Em linhas gerais, as equações do segundo grau tiveram sua origem em vários povos, dos quais cada um resolvia de forma particular, contudo ao aprofundar essa investigação percebo que estas especificidades fundamentaram a fórmula de resolução atual dessas equações.

Nesse momento, apresento o Quadro 09 intitulado “O Papel de Bhaskara” no intuito de relacionar algumas citações que discorrem sobre os matemáticos ligados a construção das equações do segundo grau, em particular Bhaskara que gerou diversos questionamentos no que concerne ao seu papel na elaboração da fórmula de resolução.

Os autores apresentam de maneira geral suas perspectivas sobre essa questão que instiga dúvidas frequentes, nesse sentido apresento uma explanação dessas concepções através de um quadro com citações das obras estudadas, objetivando trazer novas informações esclarecedoras sobre o papel atribuído ao matemático hindu amplamente conhecido na literatura por Bhaskara, organizado através de citações dispostas da seguinte forma:

Quadro 9: O Papel de Bhaskara	
Obras	Citações
Matemática, uma breve história	Quando falamos em Bhaskara, não podemos deixar de relacionar com ele a equação do segundo grau e a famosa fórmula de Bhaskara [...]. Na verdade esse feito não se deve a um único homem, pois em várias regiões do Velho mundo apareceu quase que simultaneamente esta solução. (CONTADOR, 2008, p.504)  Na realidade este feito não se deve a um único homem, pois em várias regiões do Velho mundo apareceu quase que simultaneamente esta solução... (CONTADOR, 2008, p. 504)
História da Matemática	Bhaskara (1114 a cerca de 1185), o mais importante matemático do século doze (...) Em seu livro mais conhecido o Lilavati, ele compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias novas. (BOYER, 1996, p.152)
História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas	O método de Bhaskara funciona perfeitamente para resolver o que chamamos, hoje, de “equações de segundo grau”, mas ainda assim não podemos atribuir-lhe a invenção da fórmula usada atualmente. (ROQUE, 2012, p.242)  Nem Bhaskara, nem outro matemático indiano, nem Al-Khwarizmi, nem outro árabe qualquer inventou a fórmula para resolução da equação de segundo grau, apesar de todos saberem resolver o análogo a uma equação desse tipo nos termos da matemática de seu tempo. (ROQUE, 2012, p.257)

É importante ressaltar como uma conclusão do quadro acima que trata sobre o papel de Bhaskara as concepções dos autores consultados que apresentam convergências ou divergências. Entre os autores destaco (BOYER, 1996) que em sua obra considera Bhaskara um matemático criador da fórmula de resolução ressaltando a importância do mesmo na criação de observações próprias dele.

As obras de (CONTADOR, 2008) e (ROQUE, 2012) não deixam claro esse papel de autoria atribuído a Bhaskara, uma vez que destacam que a resolução surgiu simultaneamente em vários povos denotando que não foi apenas um matemático responsável por essa fórmula, mas a junção das fórmulas encontradas que foi possível a elaboração de uma única fórmula de resolução.

Vislumbro, através das concepções dos autores em suas obras, a convergência sobre o papel de Bhaskara na resolução das equações do segundo grau, evidenciando uma ruptura em algumas concepções de que a fórmula de resolução foi descoberta por apenas matemático, uma vez que por meio dessa investigação nos registros históricos é possível obter informações significativas sobre a origem e desenvolvimento das equações do segundo grau.

Considero oportuno evidenciar essas informações expostas nos tópicos acima, que refletem diretamente com minha pesquisa que visa construir uma proposta didática através dos fatos históricos decorrentes da contextualização das equações do segundo grau. Nesse sentido pretendo apresentar desde a origem ao desenvolvimento da fórmula de resolução dessas equações, conforme as investigações nas obras consultadas com registros importantes e significativos, objetivando auxiliar no processo de ensino utilizando a História da Matemática para obter uma significação dos conceitos estudados.

### 3.4. ARTIGOS

Neste momento considero oportuno expor o último dado de análise da pesquisa constituído por três artigos sobre história da matemática. A apresentação deles se dará semelhantemente aos itens anteriores, ou seja, por meio de quadro com as citações diretas sobre a história das equações do segundo grau presentes nessas publicações.

Os artigos dos autores (PITOMBEIRA, 2004), (RIBEIRO, 2009) e (PEDROSO, 2010) se apresentam como fontes de pesquisas já realizadas com informações sintetizadas da história das equações do segundo grau, que apresento abaixo como forma de quadro, dividido com as obras e as citações retiradas delas:



Quadro 10: Dados históricos encontrados em artigos sobre História da Matemática	
Obras	Citações
Revisitando uma velha conhecida	<p>Num estudo mais profundo, a fim de tentar apreender a maneira de pensar que levou à criação desses procedimentos, seria essencial apresentá-los e estudá-los exatamente como eram descritos na época. (PITOMBEIRA, 2004, p.01)</p> <p>As equações do 2º grau surgem pela primeira vez na matemática hindu nos <i>sulvasutras</i>, sob as formas <math>ax^2 = c</math> e <math>ax^2 + b</math> <math>x = c</math>, sem que sejam apresentadas soluções. Mais tarde, no manuscrito <i>Bakshali</i>, é descrito um procedimento de solução que corresponde à fórmula moderna [...]. (PITOMBEIRA, 2004, p.22)</p> <p>Convém lembrar inicialmente que a notação algébrica simbólica manejada automaticamente por nós, hoje, é criação recente dos matemáticos, começando com François Viète (1540-1603) e colocada praticamente na forma atual por René Descartes (1596-1650). Assim, os processos (algoritmos) para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV e do início do século XVI eram formulados com palavras. (PITOMBEIRA, 2004, p. 01)</p>
A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos	<p>Brahmagupta, matemático hindu que viveu em 628 na Índia central, encontrou soluções gerais das equações quadráticas, determinando duas raízes, inclusive sendo uma delas negativa. Pode-se observar uma influência da Matemática grega em Brahmagupta. (RIBEIRO, 2009, p. 76)</p> <p>O mais importante matemático hindu do século XII foi Bráskara, que preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, e conseguiu representar, através de sua obra, um culminar das contribuições hindus anteriores. A mais conhecida, <i>Lilavati</i>, é uma compilação de problemas de Brahmagupta dentre outros, que continua muitos problemas sobre progressões aritméticas e geométricas, equações lineares e quadráticas. [...] Utilizando-se do conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Brahmagupta, Bháskara unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método de completamento de quadrados, hoje em dia conhecido por método hindu. Essa importante fórmula geral para a resolução da equação de 2º grau <math>ax^2 + bx + c = 0</math>, <math>x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math>, é conhecida nos dias atuais como fórmula de Bháskara. (RIBEIRO, 2009, p. 76)</p>
Uma breve história da equação do 2º grau	<p>São conhecidos poucos registros do tratamento da equação do 2º grau pelos egípcios, mas os historiadores suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resolução dessas equações. Um exemplo encontra-se no Papiro de Berlim e remonta aproximadamente ao ano 1950 a.C. Também foi encontrada no Papiro de Kahun uma resolução da equação, hoje escrita como <math>x^2 + y^2 = k</math>, <math>k</math> um número positivo, pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para resolver equações do 1º grau. (PEDROSO, 2010, p. 02)</p> <p>O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo a equação do 2º grau data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma “receita matemática” e fornecia somente uma raiz positiva. (PEDROSO, 2010, p. 03)</p> <p>A matemática hindu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre os quais destacam-se Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahmagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc. XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação do 2º grau ao resolver problemas. Segundo o próprio Bhaskara a regra que usava e que originou a fórmula atual era devido a Sridhara e que curiosamente é chamada, somente no Brasil, de Fórmula de Bhaskara. (PEDROSO, 2010, p. 06)</p> <p>Bhaskara (1114 - 1185), conhecido como “o sábio” floresceu cinco séculos depois de Brahmagupta. Matemático, professor, astrólogo e astrônomo, preencheu lacunas deixadas</p>

	<p>por seus antecessores, inclusive, dando a solução geral da equação <math>x^2 = 1+py^2</math> e de muitas outras equações diofantinas. (PEDROSO, 2010, p. 07)</p> <p>Dos seus seis trabalhos conhecidos os mais importantes são Lilavati (nome de sua ilha e que contém 278 versos) e Vija-Ganita, ambos com muitos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas (determinadas ou indeterminadas), mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas, regra de três, etc. (PEDROSO, 2010, p. 07)</p> <p>Em 1303, o grande matemático chinês, Chu Shih-chieh, apresentou na obra Ssu-yüan yá-chien (Precioso espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para a resolução da equação do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método fan-fan, que foi apresentado de forma retórica e encontrava uma única raiz (positiva). (PEDROSO, 2010, p. 09)</p>
--	--

No quadro acima estão expostas citações de três artigos escolhidos que continham dados sobre a temática central do trabalho, voltados para a história das equações do segundo grau. Pitombeira (2004) em sua publicação deixa claro como as equações eram resolvidas desde sua descoberta, através de escritos com as resoluções, pois na época não havia simbologia.

Já Ribeiro (2009) em sua obra evidencia o papel do matemático Brahmagupta na resolução das equações desse tipo e ainda apresenta Bhaskara como sendo um sucessor dos trabalhos de Brahmagupta, preenchendo algumas lacunas de seu trabalho por meio de um livro denominado Lilavatti contendo seus estudos sobre matemática, assim como sobre as equações de segundo grau.

O último artigo analisado de Pedroso (2010) apresenta alguns matemáticos ainda não citados em nenhuma das fontes já estudadas, como por exemplo Aryabhata, Sridhara e Chu Shih-chieh que contribuíram direta e indiretamente para construção de uma fórmula resolutive das equações do segundo grau, traz também uma nova informação relevante sobre o primeiro vestígio de uma equação desse tipo datado à 1700 a. C. numa tábua de argila que continha também uma “receita matemática” denominada dessa forma pois na época não havia simbologia.

### 3.5. ANÁLISE GERAL

Nesse momento apresento uma análise geral de todos os dados pesquisados, livros didáticos, livros paradidáticos, livros de história da matemática e artigos, correlacionando as informações apresentadas em cada obra.

Nos livros didáticos o critério de análise está ligado à presença da história das equações do segundo grau, todos os livros pesquisados explicitaram textos com dados históricos de forma que pesquisei as referências de cada um para descobrir que autores foram consultados com fundamentação da história da matemática, os autores (DANTE, 2012); (BIANCHINI, 2011); (PATARO; SOUSA, 2009); (IMENES; LELLIS, 2009) valem-se das contribuições de outras obras dos autores Carl Benjamin Boyer e Ernesto Rosa Neto no intuito de auxiliar nos fatos históricos dos conteúdos expostos, mais especificamente da história das equações do segundo grau. Um livro que merece destaque é o de (BIGODE, 2012) que mostrou como as equações eram resolvidas na época de sua descoberta de forma escrita e ao lado dos escritos uma tradução com a simbologia atual, o que pode contribuir para o aluno entender a relação das resoluções iniciais com as utilizadas atualmente.

Outro critério de análise, como mencionei no início do capítulo, é se a história das equações do segundo grau apresentada auxilia no desenvolvimento do capítulo, ou seja, se contribui no ensino desse conteúdo como forma de contextualização desse tipo de equação. Dos livros analisados não identifiquei em nenhuma das obras esse critério de investigação, mas como meio de complemento do capítulo, que pode ou não ser usada pelo professor, isto é, um mero componente para nível de informação sobre as equações do segundo grau.

Já os livros paradidáticos se apresentam como fontes propícias a serem usadas para ensinar as equações do segundo grau com aspectos históricos significativos expostos de maneira diferenciada com algumas ilustrações referentes à época estudada. As informações contidas nesse componente de análise estão ligadas com as informações de livros direcionados para a história da matemática, assim como os livros didáticos, considero oportuno fazer essa ligação uma vez que os dois tipos de obra são voltados em especial para a sala de aula, que em sua maioria usaram Boyer como referência para construção de suas obras. Cito Boyer por uma razão simples, visto que também utilizei para realização dessa pesquisa como uma das obras do componente denominado Livros de História da Matemática, e de fato percebi os dados correlacionados com Bhaskara e sua obra Lilavatti presentes nesses dois tipos de literatura, não em todas como já explicitarei anteriormente.

Vislumbro nesse momento uma abertura para a análise geral dos livros de história da matemática, cujas informações são retiradas para complementar ou fundamentar outras obras, podem ser considerados como componentes central, uma vez que traz vestígios direcionados apenas para a história da matemática. Nesses livros encontrei informações sobre o surgimento desse tipo de equação assim como matemáticos que tiveram papel fundamental em sua resolução, se mostra essencial para o objetivo central desse estudo, a construção de um

proposta didática que vale-se dos dados históricos retirados, tanto dessas obras, como dos livros didáticos, livros paradidáticos e os artigos.

Dessa forma, torna-se necessário uma conjectura sobre o último componente da análise, os artigos sobre história das equações do segundo grau, que apresentam uma quantidade de dados significativos para essa pesquisa, assim como novas informações, uma vez que seus autores consultaram diversas fontes sobre o assunto. À vista disso, esse componente se mostra pertinente também para criação da proposta didática, assim como os anteriores, contendo dados históricos consideráveis para esse estudo.

### 3.5.1. BHASKARA II

Os livros didáticos popularizaram a equação do segundo grau como a fórmula de Bhaskara, no entanto com base nas informações encontradas há na história registros de pelo menos dois Bhaskaras, percebi dessa forma uma contradição no que concerne a um dos célebres matemáticos da época, Bhaskara II. Em todos os dados de análise, exceto no artigo de Pitombeira (2004), os autores se referem à Bhaskara sem denominar qual dos dois fez descobertas consideráveis na resolução das equações do segundo grau. Desse modo, considero necessário elucidar quem foram Bhaskara I e Bhaskara II:

- Bhaskara I (c.600-c.680) foi um matemático que estudou os trabalhos de Aryabhata e publicou três obras: a Mahabhaskariya , o Laghubhāskarīya , e o Āryabhatīyabhāṣy. contudo não existe ligação com a resolução das equações do segundo grau.
- Bhaskara II (1114-1185) considerado o último matemático de destaque de sua época, se tornou famoso pelos seus estudos realizados através de uma compilação da obra de Brahmagupta, encontrando uma solução geral para equações do segundo grau.

Em linhas gerais, diante dos dados históricos obtidos compreendo que as informações apresentadas, de diferentes fontes, formam uma história completa das equações do segundo grau, visto que algumas obras não apresentavam todos os acontecimentos e quais matemáticos influenciaram para encontrar uma fórmula de resolução geral, nesse sentido apresento em seguida uma proposta didática valendo-se de uma junção das informações históricas das equações do segundo grau no ensino.

#### 4. PROPOSTA DIDÁTICA

Nesse capítulo apresento uma proposta didática que tem como princípio o ensino das equações do segundo grau por intermédio da História da Matemática. A ideia inicial dessa pesquisa surgiu durante duas disciplinas em minha formação acadêmica, a saber: História da Matemática e Didática da Matemática. Dessa forma, procuro evidenciar informações relevantes sobre a fórmula de resolução desse tipo de equação, tendo como orientação da história no ensino de conteúdos matemáticos.

No decorrer dessa pesquisa, busquei informações relevantes sobre as contribuições acerca da história no ensino de conceitos matemáticos, que são caracterizadas principalmente por ser uma forma de humanizar a matemática, ou seja, mostrar que os conteúdos estudados atualmente são derivados de diversos estudos em diferentes séculos por matemáticos que se envolveram de maneira completa na construção de uma resolução que atendesse aos diferentes tipos das equações do segundo grau.

Em vista disso, considero oportuno ressaltar que por ser um conceito construído em diferentes momentos históricos, as equações do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$  tiveram sua fórmula de resolução modificada por meio das concepções dos matemáticos responsáveis pela sua estruturação.

Nesse sentido, percebo que algumas informações devem ser modificadas em vista das análises que realizei, uma que merece destaque é a utilização do termo que denomina a resolução como a “fórmula de Bhaskara”, usado apenas no Brasil com essa nomenclatura visto que segundo os dados históricos, essa solução foi descoberta por diversos matemáticos. Outro ponto a ser modificado não só nessa expressão como em todas as obra consultadas, sejam elas livros didáticos, livros paradidáticos, livros de história da matemática e artigos, exceto o de Pitombeira (2004), é a referência a um matemático chamado Bhaskara. Quando Pitombeira apresenta Bhaskara II, também conhecido como Bhaskara Akaria, o matemático que fez estudos sobre as equações do segundo grau, despertou minha curiosidade, por meio de pesquisas identifiquei que existiram dois Bhaskaras, o primeiro viveu por volta de 600 a 680 (século VII) e o segundo de 1114 a 1185 (século XII), ou seja, seria um equívoco confundilos com essa diferença de épocas em que viveram.

Mediante o exposto, percebo a necessidade de evidenciar o incentivo da elaboração de uma proposta que apresente uma história das equações do segundo grau de forma significativa. Ao analisar os livros didáticos percebi que se retirada a história das equações do segundo grau do livro didático, não terá diferença no ensino do conteúdo, sendo uma forma

optativa para o professor querer contar ou não aquela parte da história desse tipo de equação. Em vista disso pretendo estruturar minha proposta no sentido de apresentar as informações mais relevantes para que o aluno descubra como essas equações foram desenvolvidas, no sentido de dar significado a um conteúdo comumente ensinado de forma técnica, ou seja, na forma em que o professor fala que as equações são do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$  e que serão resolvidas através da fórmula  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , esse método de ensino pode gerar dúvidas nos alunos no sentido deles apresentarem o seguinte questionamento: por quê essa fórmula é a adequada para resolver?

Este questionamento impulsiona mais ainda o uso da História da Matemática, assim sendo um método que deve valer-se da história para explicar conceitos matemáticos já formulados, fazendo um paralelo entre os conceitos do passado e os do presente.

Muitos povos estudaram esse tipo de equação e encontraram, de acordo com seus estudos específicos, resoluções para as equações do segundo grau, dos quais destaco: Egípcios, Babilônios, Gregos, Chineses, Hindus, Árabes e Europeus. Para construção dessa proposta, evidencio as contribuições dos Babilônios, Hindus, Árabes e Europeus, uma vez que a fórmula de resolução atual surgiu através dos estudos desses povos, como forma de elucidar essas informações, exponho nesse momento em forma de quadro, destacando a época, os povos, os matemáticos e as contribuições que tiveram na fórmula de resolução das equações do segundo grau, em ordem cronológica:

Quadro 11: Principais contribuições dos povos na elaboração da resolução das equações do segundo grau

Época	Povos	Matemáticos	Contribuições
Século XVII a.C.	Babilônios	Tábua de Argila (não há registos de quais matemáticos conseguiram resolver na época)	Resolução de uma equação do tipo $x^2 + x = 870$ apenas por meio de palavras, apresentado métodos escritos para descrever como conseguiram resolver.
Século VII e Século VIII d.C.	Hindus	Brahmagupta Sridhara	Os hindus apresentaram resoluções para as equações do segundo grau pelo método de completar quadrados. Sabe-se que Sridhara resolveu as equações do segundo grau, no entanto suas obras foram perdidas no decurso da história.
Século IX d. C.	Árabes	Al-Khowarizmi	Encontrou uma forma de resolver as equações do segundo grau pelo método de completar quadrados.
Século XII	Hindus	Bhaskara II	Bhaskara II compilou os trabalhos de Brahmagupta e Sridhara e resolveu as equações do segundo grau pelo método de extrair raízes, de números positivos assim como de números negativos e pelo método de completar quadrados.
Século XVI d. C.	Europeus	François Viète	Conseguiram resolver as equações através do escritos antigos, transformando as resoluções dos matemáticos antigos numa fórmula geral com simbologia para resolver qualquer tipo de equação do segundo grau.

No quadro acima, apresento uma breve introdução sobre algumas contribuições essenciais na formulação da resolução das equações do segundo grau, das quais destaco os povos que contribuíram diretamente como os Babilônios, mesmo não encontrando nenhum matemático responsável, conseguiram resolver um problema com as equações do segundo grau, assim como os Hindus com a forma completar quadrados e de extração de raízes, os árabes, em destaque al-Khowarizmi, com o método de completar quadrados e por último os Europeus que atribuíram símbolos para encontrar uma solução geral para esses tipos de equação.

Todas essas informações são fontes propícias para realização de uma proposta didática que se configura por meio de um teatro, apresentando uma compilação de todos os dados históricos encontrados em minhas pesquisas para elaborar a história das equações do segundo grau, bem como destacar os principais matemáticos que delinearam a resolução desse conceito.

#### 4.1. ORGANIZAÇÃO DA PROPOSTA

Escolhi apresentar a história das equações do segundo grau em forma de uma peça teatral, pois esse método se configura como uma maneira de despertar a atenção dos alunos, expondo um enredo com todos os matemáticos e suas contribuições em torno desse tipo de equação, que proporcione melhor visualização ao aluno de todos os fatos históricos que conceberam a construção de uma fórmula geral para as equações do segundo grau.

Seguindo os embasamentos teóricos analisados, percebo que uma metodologia para o ensino por meio da História da Matemática deve ser atrativa e desafiadora, provocar a curiosidade do aluno, em vista disso procuro evidenciar a história das equações do segundo grau de forma fiel aos seus fatos, uma vez que busco oferecer ao aluno um quantitativo de informações relevantes para compreender o desenvolvimento desse conceito.

Para construção da proposta denominada “Viajando no tempo com a história das equações do segundo grau” apresento os matemáticos que serão os personagens da história e seus feitos no que se refere às equações do segundo grau. Organizei o enredo do teatro com cenas distintas mostrando cada matemático por vez e suas contribuições na fórmula de resolução. Nesse momento, apresentarei o enredo da história das equações do segundo grau através de uma peça teatral.



**VIAJANDO NO TEMPO COM A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO GRAU**

**PEÇA EM 4 ATOS**

**Camila Luciana Bomfim da Rocha**

## VIAJANDO NO TEMPO COM A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Por Camila Luciana Bomfim da Rocha

### Personagens:

- Brahmagupta:

**Figura 01 - Brahmagupta**



Fonte: Imagem recuperada a partir do Google

- Bhaskara II:

**Figura 04 – Bhaskara II**



Fonte: Imagem recuperada a partir do Google

- Al-Khowarizmi:

**Figura 3 – Al-Khowarizmi**



Fonte: Imagem recuperada do Google

- François Viète:

**Figura 5 – François Viète**



Fonte: Imagem recuperada a partir do Google

## ATO 1

**Cena 1.** Há 400 anos atrás. França, Fontenay-le-Comte. Resolução com outras variáveis das equações do segundo grau.

**NARRADOR:** François Viète viveu entre os anos de 1540 à 1603 matemático francês criador da notação algébrica, consequentemente transformando a solução das equações do segundo grau em fórmula geral com simbologia algébrica.

**FRANÇOIS VIÈTE:** Me chamo François Viète e encontrei um método para transformar a resolução de Bhaskara II com a introdução de variáveis.

Vou resolver a seguinte equação com a mudança de variáveis:  $x^2 + 2ax = b$

1. Seja  $x + a = u$
2. Então  $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. Pela equação dada  $x^2 + 2ax = b$ , ou seja,  $u^2 = b + a^2$
4. Logo  $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$  e  $x = \sqrt{b + a^2} - a$ .

Para uma equação geral da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , o método de Viète seria:

1. Seja  $x = u + z$
2. Então substituindo em  $ax^2 + bx + c = 0$ , tem-se  $a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0$ , ou seja,  $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$ .
3. Se  $2az + b = 0$ , tem-se  $z = \frac{-b}{2a}$ .
4. Substituindo  $z = \frac{-b}{2a}$  em  $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$ , tem-se  $au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0$ , ou seja,  $au^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , ou ainda,  $u = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$
5. Finalmente substituindo os valores  $z = \frac{-b}{2a}$  e  $u = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$  em  $x = u + z$ , tem-se  $x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$ , ou seja,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Conseguí essa transformação estudando os trabalhos de Bhaskara II que será apresentado nesse momento e como ele resolvia as equações do segundo grau de forma escrita, sem a notação algébrica.

## ATO 2

**Cena 1.** Há 900 anos atrás. Índia, Ujjain. Publicação das obras Lilavati e Vija-Ganita.

**NARRADOR:** Bhaskara II viveu entre os anos 1114 à 1185 foi um dos expoentes na resolução das equações do segundo grau, ele complicou alguns trabalhos de Brahmagupta e Sridhara, fazendo uso dessas obras para conseguir uma resolução para as equações do segundo grau.

**BHASKARA II:** Me chamo Bhaskara II e peço que não me confundam com Bhaskara I que também foi um matemático, mas que viveu há 500 anos atrás. Minha obra foi baseada na compilação dos trabalhos de Brahmagupta e em especial Sridhara, pois essa resolução advém das ideias dele, deixo aqui minha contribuição para resolução dessas equações:

*A raiz quadrada do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto 8/9 do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor.  
Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas.*

Na tabela que segue, na coluna da esquerda tem-se a solução que encontrei com palavras e na da direita a tradução com simbologia:

<i>Seja <math>ya \vee 2</math> o número de abelhas do Enxame</i>	<i>Seja <math>2x^2</math> o número de abelhas do enxame</i>
<i>A raiz quadrada da metade desse número é <math>ya \vee 1</math></i>	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
<i>Oito nonos de todo o enxame é <math>ya \vee \frac{16}{9}</math></i>	<i>Oito nonos de todo o enxame é <math>\left(\frac{16}{9}\right)x^2</math></i>
<i>A soma a raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é, <math>ya \vee 2</math></i>	$x + \left(\frac{16}{9}\right)x^2 + 2 = 2x^2$

<i>Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros e eliminando o denominador, a equação transforma-se em <math>18x^2 = 16x^2 + 9x + 18</math></i>	$\frac{9x + 16x^2 + 18}{9} = \frac{18x^2}{9} \Leftrightarrow$ $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
<i>Após a subtração a equação torna-se <math>2x^2 - 9x + 18 = 0</math></i>	$18x^2 - 16x^2 - 9x =$ $16x^2 + 9x + 18 - 16x^2 - 9x$ $2x^2 - 9x = 18$
<i>Portanto <math>x = 6</math></i>	<i>Portanto <math>x = 6</math></i>
<i>Donde <math>2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 72</math></i>	<i>Donde <math>2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 72</math></i>

Meus estudos foram baseados nas obras dos matemáticos Brahmagupta e Sridhara. Brahmagupta será apresentado, depois de al-Khowarizmi que também contribuiu com estudos para resolver essas equações, com algumas das suas contribuições na resolução das equações do segundo grau.

### ATO 3

**Cena 1.** Há 1200 anos atrás. Ásia Central, região de Khowarizmi sul do mar de Aral. Foi publicada a obra *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah* (ciência da restauração e da redução ou ciência das equações).

**NARRADOR:** Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi viveu entre os anos de 780 à 850. Matemático árabe que se destacava com seus estudos. Encontrou uma fórmula de resolução para as equações do segundo grau através de completar quadrado descrita em sua obra *Al-jabr wa'l muqabala* (O livro compendioso dos cálculos com al-jabr e al-muqabala).

**AL-KHOWARIZMI:** Meu nome é Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, no âmbito das equações desse tipo deduzi um método por meio de alguns estudos sobre uma fórmula de resolução e uma classificação que apresento a seguir com a classificação das equações em seis tipos:

1. Quadrados iguais a raízes  $ax^2 = bx$ ;
2. Quadrados iguais a números  $ax^2 = c$ ;
3. Raízes iguais a números  $bx = c$ ;
4. Quadrados mais raízes iguais a números  $ax^2 + bx = c$ ;
5. Quadrados mais iguais a raízes  $ax^2 + c = bx$ ;
6. Raízes mais números iguais a quadrados  $bx + c = ax^2$ .

Fonte: SBHM (2013) (adaptado)

Por meio desses tipos de equação, irei resolver uma em específico, expressa a seguir:

*Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?*

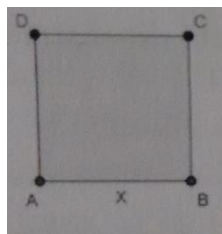
**Tome a metade do número de raízes. Esse número deve ser multiplicado por ele mesmo, some trinta e nove a este produto. Extraia a raiz quadrada do resultado, retire a metade do número de raízes. O resultado será 3.**

Traduzindo para a simbologia:

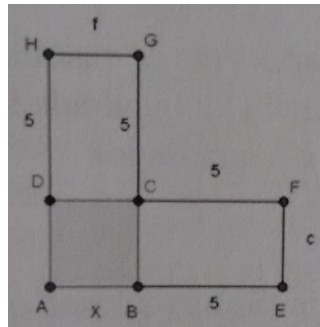
$$\begin{aligned}
 10 \div 2 &= 5 \\
 5 \times 5 &= 25 \\
 25 + 39 &= 64 \\
 \sqrt{64} &= 8 \\
 8 - 10 \div 2 &= 3 \\
 &3
 \end{aligned}$$

Agora em forma geométrica:

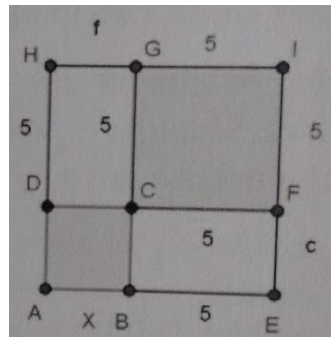
- Vou construir um quadrado ABCD de lado  $x$ ;



- Vou construir dois retângulos de área  $5x$  (que é a metade do número de raízes) nos lados não paralelos do quadrado ABCD;



- Agora, vou unir os pontos (motivo pelo qual o número anterior deveria ser multiplicado por ele mesmo);



Veja que a área do polígono AEFCGH acima é igual a 39, pois representa  $x^2 + 10x$  que é a igualdade inicial. Assim, a área do quadrado AEIH é igual a  $39 + 25 = 64$ . Por isso o quarto passo será somar 39 ao produto do número de raízes dividido por 2. Se a área do quadrado AEIH é igual a 64 então o lado do quadrado vale 8, que é raiz de 64. Temos, então, que  $AE = 8$ . Como  $AE = 8$ ,  $AB = x$  e  $BE = 5$  concluo que  $x = 8 - 5$ , logo  $x = 3$ .

Agora o matemático Brahmagupta, primeiro a resolver as equações do segundo grau, irá apresentar suas contribuições iniciais para resolução desse tipo de equação.

## ATO 4

### Cena 1.

Há 1400 anos atrás. Indicação do local: Ujjain, Índia Central. Brahmagupta publica uma obra denominada *Brahmasphutasiddhanta*.

**NARRADOR:** Brahmagupta viveu entre os anos 598 a 680 foi um dos primeiros matemáticos a resolver uma equação do segundo grau, como não havia simbologia na época, a resolução era em forma escrita, descrevendo passos que eram realizados para solucionar o problema.



**BRAHMAGUPTA:** Meu nome é Brahmagupta e irei apresentar como resolvi o seguinte problema:

$$\begin{array}{c} ya \ v \ ya \ 10 \\ ru \ 9 \end{array}$$

Esse problema pode ser transcrito para a forma com simbologia desse modo:

$$x^2 - 10x = -9$$

Temos então que:

- $-9$
- $(-9) \cdot 4 = -36$
- $-36 + (-10)^2 = 64$
- $\sqrt{64} = 8$
- $8 - (-10) = 18$
- $18 : (2 \cdot 1) = 9$

A raiz é 9.

## Cena 2.

**NARRADOR:** Vamos resolver esse problema usando a fórmula de resolução atual para conferir se o resultado obtido é pertinente:

$$\begin{array}{l} x^2 - 10x = -9 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\ \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \\ \frac{10 \pm 8}{2} \\ \frac{10 + 8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ e } \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}$$

Percebam que Brahmagupta encontrou uma das raízes da equação, sendo assim válido seu método de resolução.

#### 4.2. ALGUMAS PONDERAÇÕES ACERCA DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nesse subtópico pretendo apresentar algumas ponderações sobre a organização da proposta no intuito de auxiliar o professor no momento de realizar essa peça teatral em sala para ensinar o desenvolvimento da fórmula de resolução das equações do segundo grau.

Apresentei a proposta por meio de uma peça teatral separada das subseções no modelo em que são usualmente feitas pelos seus autores, com o objetivo de facilitar a tarefa do professor, uma vez que possui uma carga horária extensa, como comentado na problematização desse trabalho. Por meio dessa separação, o professor tem a oportunidade, por exemplo, de tirar uma xerox da proposta didática pronta e levar para ser realizada na introdução do conteúdo de equações do segundo grau, que é uma das proposituras iniciais desse trabalho. Ressalto novamente que as informações foram retiradas das obras consultadas no decorrer dessa pesquisa, assim como as resoluções escritas e as outras com simbologia.

Outro ponto relevante para o professor que pode ser destacado é a apresentação dos personagens históricos com a utilização de imagens, organizei dessa forma para que ele tenha uma visualização de quais vestimentas eram usadas de acordo com as épocas distintas e quais características tinham esses matemáticos, com a finalidade de que no momento da caracterização dos personagens seja mais fácil para montar a peça. O professor poderá definir quem serão os personagens, no sentido de convidar alguns alunos ou até mesmo outros professores para participarem do enredo.

Por ser uma compilação com dados históricos, apresentei em ordem decrescente os personagens, suas contribuições e quais trabalhos de outras épocas eles utilizavam para realizar seus estudos, uma vez que cada matemático viveu em épocas diferentes. Nessa direção, considero necessário explicar como apresentei cada personagem, no desenvolvimento dos atos e cenas: o narrador será representado pelo professor, no intuito dele descrever os personagens proporcionando a abertura para a fala do matemático e sua contribuição na resolução das equações do segundo grau; o matemático que será representado por outro professor ou aluno e explicará qual método usou para resolver esse tipo de equação e em que obra expôs esses métodos, direcionando sua fala para os expectadores da peça teatral, com a intenção de aproximar os alunos e despertar seu interesse no que está apresentado.

Procurou evidenciar as informações o mais fiel possível das originais, mostrando como os matemáticos resolviam as equações do segundo grau, seja de forma retórica ou com simbologias. Uma consideração a ser feita é direcionada à tradução do método antigo para o

método atual que apresentei no enredo, no intuito de proporcionar ao aluno um esclarecimento dessas resoluções, visto que pode surgir uma indagação sobre qual a relação dos métodos antigos com os métodos atuais, dessa forma o educando tem a oportunidade de observar o desenvolvimento desses métodos de resolução durante a história dessas equações do segundo grau.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como propositura o ensino das equações do segundo grau valendo-se da História da Matemática, para isso construí uma proposta didática envolvendo a temática central, no intuito de apresentar uma possibilidade para o professor no ensino desse conteúdo, que se configura como uma peça teatral com personagens históricos que contribuíram diretamente com a construção da fórmula de resolução das equações do segundo grau.

Inicialmente, pesquisei alguns autores que apresentam a História da Matemática como metodologia de ensino, uma vez que considero relevante mostrar as concepções acerca desse tema e quais seriam as contribuições para o ensino das equações do segundo grau. Destaco que, por meio dessas intervenções o uso dessa tendência da Educação Matemática se mostra propícia, uma vez que expõe a matemática de forma diferente, sendo construída por grandes mentes, dessa forma se torna humanizada, desenvolvida por homens. Nessa direção, procurei evidenciar a história de um conceito específico, valendo-se das orientações que essa tendência propõe.

Um ensino com informações históricas se constitui da relevância dos dados encontrados e sua pertinência com o conteúdo. Como a temática é voltada para as equações do segundo grau, procurei em quatro fontes diferentes o desenvolvimento dessas equações, a saber: livros didáticos, livros paradidáticos, livros de história da matemática e artigos de história da matemática. Essas fontes proporcionaram informações e questionamentos no que se refere ao desenvolvimento da fórmula e os matemáticos envolvidos, uma vez que apresentam novas informações relevantes do tema.

Após realizar uma compilação dos dados históricos, organizei um enredo de uma peça teatral com os matemáticos que contribuíram para realização da fórmula de resolução do segundo grau, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos. A proposta didática por meio do teatro tem o intuito de apresentar uma introdução do conteúdo de equações do segundo grau, para que o educando perceba a ressignificação de um conceito que ele acredita estar pronto e acabado e sua delimitação histórica.

A ideia de fazer um teatro surgiu ao observar a necessidade que o professor tem de diferenciar suas aulas, mas que não consegue organizar uma metodologia devido sua falta de tempo, por esse motivo organizei uma proposta didática que o professor possa ter acesso e desenvolver em suas aulas, pressuponho que os dados históricos que constituem a história das

equações segundo grau possam contribuir na significação da matemática e seu desenvolvimento.

Compreendi como relevante a História da Matemática no ensino, pois proporciona ressignificação da história real das equações do segundo grau, nesse sentido apresento a proposta didática para uso do professor e de futuros professores como forma de diferenciar suas metodologias e apresentar ao aluno uma história das equações suas diferentes implicações.

## REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: Bianchini. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Projeto velear**: matemática. São Paulo: Scipione, 2012.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental**: arte. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental**: matemática. Brasília: MEC, 1999.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve histórica**. 3ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2012.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. 4ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GUELLI, Oscar. **História da equação do 2º grau**. 10ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2009.

IMENES, Luís Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática 9º ano**. São Paulo: Moderna, 2012.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni. **A conquista da Matemática, 9º ano**. São Paulo: FTD, 2009.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre história e Educação Matemática**. 1993. 274f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1993.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela . **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

NEVES, José Luis. **Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades**. 1996. Disponível em:

<[http://www.unisc.br/portal/upload/com\\_arquivo/pesquisa\\_qualitativa\\_caracteristicas\\_usos\\_e\\_possibilidades.pdf](http://www.unisc.br/portal/upload/com_arquivo/pesquisa_qualitativa_caracteristicas_usos_e_possibilidades.pdf)>. Acesso em: 22 Dez. 2015.

NETO, Ernesto Rosa. **As mil e uma equações**. 2ªed. São Paulo: Ática, 2009.

PATARO, Patricia Rosana Moreno; SOUZA, Joamir Roberto de. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. São Paulo: FTD, 2009.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação do 2º grau**. 2010. Disponível em: <<http://www.matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/eq2grau.pdf>>. Acesso em: 26 Ago. 2015.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Revisitando uma velha conhecida**. 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>>. Acesso em: 18 Ago. 2015.

**REVISTA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES**. Natal (RN), Ano 1, n.0, Mar. 2013.

RIBEIRO, Dulcyene Maria. **A preparação de aulas usando história da matemática**. 2009. Disponível em: <[http://www.sbhmat.org/wa\\_files/C13.pdf](http://www.sbhmat.org/wa_files/C13.pdf)>. Acesso em: 25 Set. 2016.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SIQUEIRA, Regiane Aparecida Nunes de. **Tendências da educação matemática na Formação de professores**. Ponta Grossa: [s.n.], 2007. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/file/2010/artigos\\_teses/matematica/monografia\\_regiane.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/file/2010/artigos_teses/matematica/monografia_regiane.pdf)>. Acesso em: 28 Out. 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normatização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011, 52 p.