



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIEL DE JESUS PEREIRA LESSAS

**DESVENDANDO A MATEMÁTICA NO ORIGAMI EM TORNO
DE EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS**

Araguaína/TO
2019

DANIEL DE JESUS PEREIRA LESSAS

**DESVENDANDO A MATEMÁTICA NO ORIGAMI EM TORNO
DE EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS**

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína, Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Dr Jamur Andre Venturin

Araguaína/TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L638d Lessas, Daniel de Jesus Pereira.
Desvendando a Matemática no origami em torno de experiências vivenciadas. / Daniel de Jesus Pereira Lessas. – Araguaína, TO, 2019.
84 f.
Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2019.
Orientador: Jamur Andre Venturin
1. Origami. 2. Matemática. 3. Experiências vivenciadas. 4. Inkscape. I.
Titulo

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

FOLHA DE APROVAÇÃO

DANIEL DE JESUS PEREIRA LESSAS

DESVENDANDO A MATEMÁTICA NO ORIGAMI EM TORNO DE EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína, Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: ____ / ____ / ____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jamur Andre Venturin, UFT

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco, UFT

Prof. Ma. Yukiko Massago, UFT

Araguaína, 2019

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me guiado em toda a minha trajetória acadêmica no âmbito espiritual.

Aos meu pai Jaguineiros Lopes Lessas e à minha mãe Corina de Jesus Pereira Lessas, por terem me apoiado e me motivado a continuar a minha graduação.

Ao meu irmão André de Jesus Pereira Lessas, por ceder-me o seu notebook para eu escrever esse trabalho.

Aos meus colegas de turma Thiago Lima, Amilson, Mário Rodrigues, João Marcos, Evanilde e Mailson por terem disposição em me conduzir à universidade usando seus meios de transporte.

Às minhas colegas Kelly Oliveira, por me ajudar bastante na escrita do meu TCC na parte da fenomenologia, e a Juliana Cardoso, por ter me motivado a ficar no curso.

Aos demais colegas da universidade, por terem me ajudado direta e indiretamente no meu TCC.

Ao professor Jamur Andre Venturin, por ter a paciência e disposição em me orientar e me motivar nesse trabalho.

A todos os professores da minha graduação, por fazerem parte da minha vida profissional e transmitir conhecimento.

À Universidade Federal do Tocantins, por ter me mantido e apoiado financeiramente.

RESUMO

O presente trabalho busca destacar, descrever e relacionar de modo geral alguns dos aspectos matemáticos ao origami, mediante as minhas experiências vivenciadas, o que responde a interrogação da minha pesquisa. Na metodologia, serão descritas as ferramentas necessárias para a composição do trabalho, tais como as experiências vivenciadas, o processo de descrição no âmbito da fenomenologia e o software Inkscape para construção de diagramas de origami. Na descrição, constituição e análise dos dados, apresentamos aspectos da história do origami no contexto literário, tais como o surgimento do origami e a expansão do mesmo para outros países, como Japão, Espanha e Brasil. Dentro deste mesmo tópico, explanamos o origami no contexto da minha trajetória de vida, trazendo as minhas vivências em relação ao origami e a Matemática, tais como as construções das potências de base 2, do triângulo equilátero, do Teorema de Haga, dos poliedros convexos e dos problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. Eles foram relatados utilizando o processo de descrição fenomenológica exposto na metodologia. Em seguida, desvendamos, de forma teórica, a Matemática por trás das construções dos origamis. Os resultados da pesquisa, que fazem parte do sentido do descrito e analisado, apontam que o origami foi importante para aprender matemática de uma forma lúdica e contextualizada, podendo colocar em prática essa metodologia nas salas de aula.

Palavras-chave: Origami. Matemática. Experiências vivenciadas. Inkscape.

ABSTRACT

The present study intends describe and relate in general some mathematical aspects of origami, based on my life experiences, justifying my study. In the methodology, the methods used for the composition of the study will be described, as well as the experiences, the process of description in the field of phenomenology and the Inkscape software for the construction of origami diagrams. In the description, constitution and analysis of the data, the aspects of the origami history in the literary context, the origami origination and the expansion of the origami to other countries, such as Japan, Spain and Brazil, will be demonstrated. In the same topic, origami was explained in the context of my life trajectory, bringing my experiences in relation to origami and Mathematics, as well as the constructions of the base powers 2, the equilateral triangle, the Haga Theorem, the polyhedra convex and problems of cube duplication and angle trisection. Based on the process of phenomenological description exposed in the methodology, it was uncovered in a theoretical way, the Mathematics behind the origami constructions. The results of the study, reports that origami was important to learn mathematics in a playful and contextualized way, and can apply this methodology in classrooms.

Keywords: Origami. Mathematics. Lived Experiences. Inkscape.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Passo 1 para construção de um triângulo equilátero	22
Figura 2 – Passo 2 para construção do triângulo equilátero	22
Figura 3 – Passo 3 para construção do triângulo equilátero	23
Figura 4 – Passo 4 para construção do triângulo equilátero	23
Figura 5 – Dobra reversa interna	27
Figura 6 – Dobra reversa externa	27
Figura 7 – Origami Electra	28
Figura 8 – Origami Tsuru	29
Figura 9 – 1º ciclo de dobras	30
Figura 10 – 2º ciclo de dobras	30
Figura 11 – 3º ciclo de dobras	31
Figura 12 – 4º ciclo de dobras	31
Figura 13 – 5º ciclo de dobras	32
Figura 14 – Passo 1 para construção do triângulo equilátero	35
Figura 15 – Passo 2 para construção do triângulo equilátero	35
Figura 16 – Passo 3 para construção do triângulo equilátero	36
Figura 17 – Passo 4 para construção do triângulo equilátero	36
Figura 18 – Passo 5 para construção do triângulo equilátero	36
Figura 19 – Plissado da folha quadrada	40
Figura 20 – Teorema de Haga numa folha quadrada	40
Figura 21 – Nomenclatura dos ângulos	41
Figura 22 – Passo 1 para divisão do quadrado em 3 partes	44
Figura 23 – Passos 2 e 3 para divisão do quadrado em três partes	45
Figura 24 – Representação geométrica do Teorema de Haga	46
Figura 25 – Passo 1 para duplicação do cubo via origami	51
Figura 26 – Passo 2 para duplicação do cubo via origami	51
Figura 27 – Passo 1 para trissecção do ângulo	56
Figura 28 – Passo 2 para trissecção do ângulo	56
Figura 29 – Passo 3 para trissecção do ângulo	57
Figura 30 – Designação dos objetos geométricos	58
Figura 31 – Representação geométrica da congruência entre triângulos	58
Figura 32 – Corte do segmento IC	59
Figura 33 – Redobragem de CJ	60
Figura 34 – Obtenção de CP	60
Figura 35 – Resultado final	61
Figura 36 – Origami e os ângulos vistos em perspectiva oblíqua	61
Figura 37 – Representação da semelhança entre os triângulos ABC e DEF	62
Figura 38 – Teorema Fundamental	63
Figura 39 – Representação da prova do Teorema Fundamental	64
Figura 40 – Representação do 1º caso de semelhança	65
Figura 41 – Representação geométrica da demonstração do 1º caso	66
Figura 42 – Representação do 2º caso de Semelhança	67
Figura 43 – Representação geométrica da demonstração do 3º caso	68
Figura 44 – Representação geométrica de Euler	72
Figura 45 – Polígono convexo dividido em triângulos	73

Figura 46 – Pentágono	73
Figura 47 – Poliedro A	75
Figura 48 – Faces do poliedro A	75
Figura 49 – Poliedro B.....	76
Figura 50 – Faces do poliedro B.....	77
Figura 51 – Projeção da parte iluminada de P, simulada em 3D	78
Figura 52 – Projeção da parte sombria de P, simulada em 3D	79
Figura 53 – Vista de cima da parte iluminada e sombria de P, respectivamente	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre o número de ciclos e o número de partes iguais	33
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ALA	Ângulo-lado-ângulo
LAL	Lado-ângulo-lado
LLL	Lado-lado-lado
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

\in	Pertence a
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
$^\circ$	Grau
\Rightarrow	Implica
Δ	Triângulo
\equiv	Congruente a
\sim	Semelhante a
θ	Teta
//	Paralelo a
=	Igual a
>	Maior que
<	Menor que
π	Pi

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO I.....	15
2	INTRODUÇÃO II.....	17
3	PROBLEMA E INTERROGAÇÃO.....	18
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	19
4.1	Sobre as experiências vivenciadas com origami	19
4.2	Sobre o processo de descrição	19
4.3	Sobre o inkscape: software para diagramar origami.....	21
4.4	Sobre a Geometria euclidiana: 2 problemas clássicos	23
5	DESCREVENDO, CONSTITUINDO E ANALISANDO OS DADOS	25
5.1	A origem do Origami do ponto de vista literário	25
5.2	A origem e o sentido do origami de acordo com as minhas experiências vivenciadas	
	26	
5.2.1	Origami e as potências de base 2.....	29
5.2.2	Origami e o triângulo equilátero.....	34
5.2.3	Origami e o Teorema de Haga.....	39
5.2.4	Origami e os poliedros convexos	48
5.2.5	Origami e os problemas clássicos gregos: duplicação do cubo e trissecção do ângulo	50
6	DESVENDANDO A MATEMÁTICA NOS ORIGAMIS	62
6.1	Semelhança de triângulos	62
6.1.1	Casos de semelhança	65
6.1.1.1	1º caso.....	65
6.1.1.2	2º caso.....	66
6.1.1.3	3º caso.....	67
6.2	Potência	69
6.3	Teorema de Euler	70
6.3.1	Soma dos ângulos internos de um polígono convexo	72
6.3.2	Contagem das arestas de um poliedro convexo.....	74
6.3.3	Projeções das partes iluminadas e sombrias e o contorno aparente	78
7	O SENTIDO DO DESCRITO E ANALISADO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO I

O primeiro tema do projeto de pesquisa, cujo título era “A possibilidade de duplicar um cubo e trissectar um ângulo com o origami”, visava enfatizar as demonstrações dos problemas da duplicação do cubo e a trissecção do ângulo – ambos problemas clássicos gregos impossíveis, além da *quadratura do círculo*, de serem resolvidos apenas com régua e compasso – via origami.

O primeiro projeto tinha como objetivo estabelecer uma correlação entre o origami e as demonstrações referentes a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo e a interrogação era: de que forma o origami estaria correlacionado com as demonstrações matemáticas? Ou seja, a ideia inicial consistia em um diagrama de origami com uma sequência de passos de dobraduras, onde em cada um desses passos haveria uma justificativa ou uma demonstração matemática para fundamentar tal passo. Todavia, o que eu faria já estava realizado. Esse trabalho é uma dissertação, cujo título é *Origami: História de uma Geometria Axiomática*, escrita por Liliana Cristina Nogueira Monteiro.

O primeiro projeto partiria de diversas pesquisas de artigos e outras fontes acadêmicas que retratavam o problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo.

Em um determinado encontro de orientação de TCC, apresentei ao professor Jamur¹ a dissertação da Liliana Cristina, a qual apresentava tudo o que estava realizado e exatamente aquilo que iria pesquisar. Isso gerou uma situação de difícil resolução, uma vez que se eu continuasse seguindo com esse tema, o meu projeto ficaria com ausência de “novidades” e continuaria sendo uma “reprodução” daquilo que já foi feito. Depois de um diálogo entre o Jamur e eu a respeito desse problema, decidimos entrar em contato e convidar a professora Yukiko Massago², pois ela tem ampla experiência em origami, de acordo com o currículo lattes (2012), a fim de trocar ideias sobre o TCC. Ao chegar à data do encontro, a Yukiko trouxe um acervo de livros, em sua maioria de origem estrangeira, os quais continham informações e tutoriais envolvendo a prática do origami,

¹ De acordo com o currículo lattes (2019), Jamur Andre Venturin possui graduação em matemática pelo CEFET (Centro Federal de Educação Tecnológica), mestrado e doutorado em Educação Matemática pela UNESP. Atualmente é professor da Universidade Federal do Tocantins – Câmpus de Araguaína. Segue o endereço eletrônico para mais informações: <<http://lattes.cnpq.br/4396579574707841>>

² O currículo lattes (2012) aponta que Yukiko Massago possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá e é mestre em Matemática pela Universidade de Brasília. Atualmente é professora da Universidade Federal do Tocantins – Câmpus de Araguaína. Segue o endereço eletrônico para mais informações: <<http://lattes.cnpq.br/6918827263605795>>.

assim como algumas aplicações matemáticas dentro das dobraduras, sendo importante para o enriquecimento bibliográfico.

No primeiro momento, a professora Yukiko orientou a levar o origami à escola, realizando uma oficina ensinando os alunos a construir os sólidos de Platão de diferentes maneiras e logo após escrever as vantagens e as desvantagens de cada tipo em relação à exploração de alguns conceitos geométricos, tais como vértice, aresta, face, etc. Todavia, esse tipo de pesquisa demandaria tempo, pois iríamos em uma unidade escolar aplicar esse projeto aos alunos e obter os dados necessários para a suposta escrita, o que não daria tempo, uma vez que estava perto de terminar o período da faculdade.

Diante disto, o professor Jamur sugeriu expandir e demonstrar algumas propriedades matemáticas envolvidas no origami que estavam contidas em um dos livros³ apresentados por Yukiko, como por exemplo, o *Teorema de Haga* ou divisão de um quadrado em uma quantidade qualquer de partes iguais. No entanto, essa ideia foi descartada, visto que no decorrer da minha revisão bibliográfica para elaboração desse projeto, constatei que alguns autores já produziram dissertações sobre o tema em questão.

Muitas sugestões e opiniões surgiram nessa reunião, tanto por parte da Yukiko quanto do Jamur. No entanto estava difícil definir um novo rumo para o meu trabalho, mas eu sabia que haveria “uma luz no fim do túnel” mesmo havendo complexidade nessa situação. Diante dessas condições, haveria uma nova proposta de tal forma que o tema principal – o origami – não pudesse ser abandonado?

³ KASAHARA, Kunihiko. **Amazing Origami**. New York: Sterling Publishing Co., 2002. 64 p.

2 INTRODUÇÃO II

Como visto na introdução I, ocorreu um grande problema durante a minha escrita do antigo projeto, que foi uma repetição literal das ideias que já foram reproduzidas anteriormente em diversos outros trabalhos como, por exemplo, a dissertação da Liliana Cristina Nogueira Monteiro. Levando isso em conta, infelizmente, tive que abandonar parcialmente a proposta do primeiro trabalho e determinar um novo rumo para ele. Uma saída para esse problema, sugerida pelo Jamur e que a Yukiko achou prudente, foi registrar a Matemática aprendida por mim no decorrer das minhas experiências vivenciadas com a prática do origami até os dias de hoje.

Esse seria um novo caminho? Um novo rumo ao meu projeto? Quais conteúdos ou experiências matemáticas poderia extrair das minhas vivências do meu exercício com o origami? Poderia assim inspirar outras pessoas a aprender Matemática usando origami?

A sugestão atribuída pelo professor Jamur foi certa, uma vez que tenho um bom tempo de prática com origami (10 anos) e estava casando a Matemática com a dobradura, ou até mesmo vendo uma Matemática com outros olhos, pois, a título de exemplo, poderia visualizar melhor as figuras geométricas espaciais com as minhas construções feitas em dobraduras e entenderia melhor o formato das mesmas e extrairia conceitos matemáticos, ao contrário das aulas de Matemática que tive durante a minha educação básica, que, por serem expositivas, tive certas dificuldades em imaginar sólidos geométricos em 3D.

Isto posto, apresento nesse presente trabalho as descrições históricas envolvendo minhas vivências com o origami de tal forma que a Matemática esteja presente nelas. Assim sendo, o propósito desta monografia é: *explorar e identificar as ideias e conceitos matemáticos existentes no origami dentro do contexto histórico da minha carreira de “origamista”*.

Vale ressaltar que alguns tópicos, bem como as figuras e diagramas, que constituem o corpo do meu antigo projeto serão aproveitados neste trabalho, pois eles são apreensões matemáticas provenientes de minhas experiências com a dobradura. A título de exemplo, nós comentaremos os dois problemas clássicos, ampliando os comentários para além do que já foi realizado por outros autores.

3 PROBLEMA E INTERROGAÇÃO

No decorrer da minha vida, a partir da minha adolescência, tive a oportunidade de conhecer o origami, assim como fazer construções envolvendo esse gênero artístico. A Matemática está envolvida em muitas dessas construções e estas compõem a estrutura das minhas experiências vivenciadas. Levando em conta essas vivências, a partir da prática do origami e com foco na Matemática, quais aspectos matemáticos podem ser destacados afim de descrevê-los e relacioná-los ao origami?

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 Sobre as experiências vivenciadas com origami

As experiências matemáticas serão expostas de forma descritiva de acordo com a ordem cronológica da minha vida e distribuídas da seguinte forma: 4 dessas experiências referentes à minha vida fora do ambiente escolar ou acadêmico e uma referente à oficina de origami da Semana Acadêmica de Matemática ministrada pela professora Yukiko. As descrições dessas vivências se darão de acordo com a perspectiva fenomenológica.

4.2 Sobre o processo de descrição

Entendo que a descrição é a ação de relatar de forma minuciosa as características que um determinado objeto apresenta ou de nossas experiências vivenciadas. Essas características podem ser físicas ou psíquicas, sendo que estas são desvendadas através do convívio e aquelas apenas com processo de percepção⁴. Por exemplo, o ser humano pode apresentar características físicas como a cor do cabelo ou da pele, o formato do rosto, a altura, os gestos corporais, e as psíquicas como alegria, raiva, tristeza, medo. Vale lembrar que os cinco sentidos são necessários para a percepção das características físicas.

Não só podemos descrever as coisas concretas como dito no parágrafo anterior, mas também as abstratas, ou seja, aquelas que não apresentam uma fisicalidade e que não se consegue usar os sentidos para obter acesso aos dados. Para descrever o abstrato, devemos nos dar conta de que a interpretação e a imaginação são elementos cruciais. Um exemplo disso são os espaços vetoriais⁵, que são conjuntos com elementos munidos de duas operações: soma e multiplicação por escalar. De fato, não podemos visualizar o objeto, mas podemos imaginar, interpretar ou ainda simbolizá-lo matematicamente.

⁴ “[...] A percepção é uma porta, uma forma de ingresso, uma passagem para entrar no sujeito, ou seja, para compreender como é que o ser humano é feito.” (BELLO, 2006, p. 30)

“[...]A percepção, de um certo ponto de vista é um ato sempre novo, porque eu me coloco diretamente em contato com o objeto percebido. Mas frequentemente eu reconheço que já conheço este objeto: intervém a lembrança. [...]” (BELLO, 2017, p. 176)

⁵ Para saber mais sobre Espaços Vetoriais, consultar o capítulo 4 do livro Álgebra Linear, de José Luiz Boldrini et al.

Os aspectos condicionais do objeto podem aparecer por intermédio das diversas formas de comunicação, como a escrita, o colóquio, as figuras ou o som. Bicudo (2011) define esses modos de exposição como modalidades de linguagem.

Bicudo (2011, p. 45) comenta que a descrição “[...] descreve o movimento dos atos de consciência. Ela se limita a relatar o visto, o sentido, ou seja, a experiência como vivida pelo sujeito. Não admite avaliações e interpretações, apenas exposição do vivido como sentido ou percebido.” Ou seja, tem-se uma importância acentuada dos sentidos por parte da autora para a descrição das ações, as quais ela as chama de experiências vivenciadas.

Em resumo, a descrição detalha as experiências vivenciadas do sujeito. Experiências essas que se manifestam por meio da memória, lembranças ou até mesmo por elementos disparadores, que são entidades do mundo físico ou não-físico que de certa forma trazem ou provocam recordações daquela vivência que é selada dentro do ambiente histórico do sujeito. Essas vivências são únicas e fazem parte do sujeito. Somente ele presenciou aquela vivência, ou seja, é próprio do sujeito. A partir daí, vemos que o conjunto dessas vivências fazem parte da *estrutura transcendental*⁶. Tudo aquilo que não é subjetivo, estará contido no *transcendente*.

Segundo Bicudo (2011), a descrição do vivido é expresso por meio da linguagem, cujo processo dessa expressão se dá por meio de veículos de comunicação tais como a fala, os gestos, as figuras, a dança, o teatro entre outros. Vale destacar que o uso dessas modalidades de linguagem também funciona como uma ponte entre o passado e o presente e entre um espaço e o outro, pois as vivências, que aconteceram num passado e num espaço, estão sendo contadas pelo sujeito no presente, o que se pode concluir que as experiências vivenciadas estão cristalizadas no sujeito, diferentemente dos atos, que permanecem no pretérito.

Com base no que foi teorizado acima, o meu projeto de pesquisa se dará de forma descritiva sobre minhas experiências vivenciadas, recordando-as e destacando momentos que se focalizam na relação binária Origami-Matemática. Os vividos serão expressos por meio da linguagem escrita e pictográfica, ou seja, através de figuras.

⁶ Alles Bello (2017, p. 49-50, grifos do autor) comenta que “[...] O *transcendental* é aquilo que faz parte da subjetividade, é próprio do sujeito, não deriva de fora; ao passo que *transcendente* é o que está além do sujeito [...]. O conceito husserliano de estrutura transcendental é o ponto fundamentalmente novo da fenomenologia. Para Husserl, a estrutura transcendental é a estrutura dos atos entendidos como vivências, de modo que a estrutura transcendental é composta por vivências das quais nós temos consciência.”

Um elemento disparador primário que me faz recordar dessas experiências é simplesmente uma folha de papel sulfite que, ao ser olhada por mim, faz-me lembrar de processos de construção realizados por mim anteriormente, como a construção do “tsuru”.

Um outro elemento disparador, que surgiu no decorrer da minha graduação, é o conjunto de poliedros platônicos em acrílico encontrados nos armários do Laboratório de Ensino de Matemática dentro da Universidade. Quando vejo esses poliedros, lembro-me das construções desse gênero feitas por mim a anos atrás, como o dodecaedro, o icosaedro e o cubo. Daí a influência geométrica no origami.

4.3 Sobre o inkscape: software para diagramar origami

Para construir os diagramas de origami, usaremos o software *inkscape*⁷ como ferramenta auxiliar, pois o mesmo trabalhará com *gráficos vetoriais*⁸. Paralelamente usaremos os conceitos de Geometria Euclidiana. Nos parágrafos seguintes, destrincharemos as etapas metodológicas de acordo com esses assuntos.

A simbologia usada nos diagramas criados no *inkscape* será a mesma usada tradicionalmente pelos origamistas. Ou seja, as dobras à sua direção (dobra vale) serão representadas por linhas tracejadas e as dobras à direção oposta (dobra montanha), por linhas contendo traços e pontos distribuídos de forma alternada. O sentido das dobras será simbolizado por uma seta curva que apontará somente para um lado. A sinalização para a dobra e desdobra, ou seja, a marca de uma dobra ou um vinco, será uma seta dupla curva.

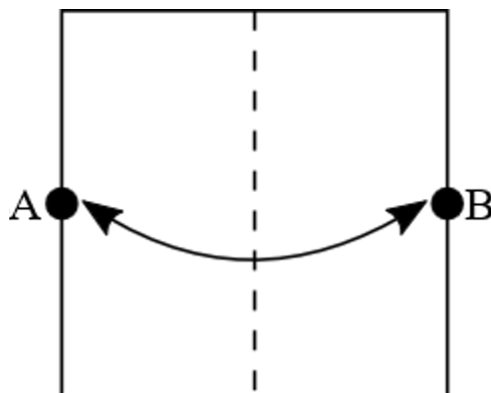
Quanto a cor, representaremos pela cor branca a parte frontal do papel, e a parte traseira, pela cor cinza.

O diagrama a seguir mostra o processo de construção de um triângulo equilátero utilizando o *inkscape*:

⁷ “O Inkscape é um programa de gráficos vetoriais de qualidade profissional que roda em Windows, Mac OS X e GNU/Linux. É usado por entusiastas e profissionais de design em todo o mundo, para a criação de uma grande variedade de gráficos, tais como ilustrações, ícones, logotipos, diagramas, mapas e gráficos da web.” Segundo os *Contribuidores do Inkscape* (2007) disponível em: <<https://inkscape.org/pt-br/sobre/>>

⁸ Gráficos vetoriais, ou imagens vetoriais são figuras criadas através de vetores ou polígonos que têm a sua localização mediada por funções matemáticas. As imagens vetoriais têm como vantagem a perpetuação da qualidade mesmo alterando o zoom ou o seu tamanho.

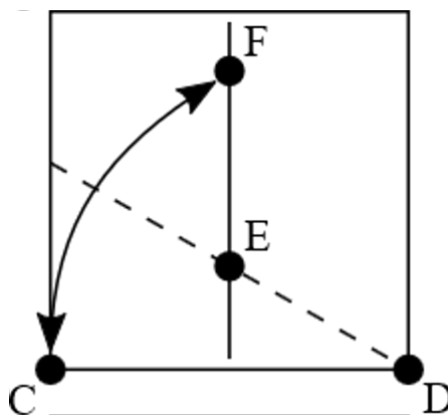
Figura 1 – Passo 1 para construção de um triângulo equilátero



Fonte: Autor

A partindo de uma folha quadrada, faça um vinco dobrando do ponto A ao ponto B. Com isso, formar-se-á uma única linha reta (Figura 1).

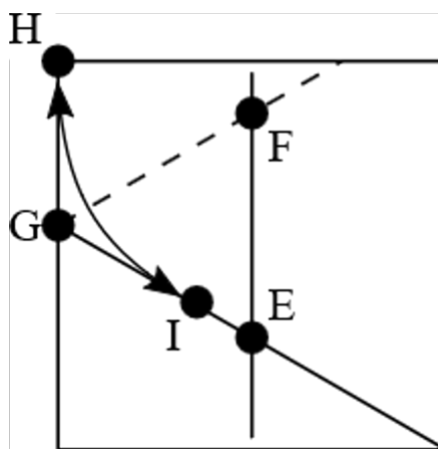
Figura 2 – Passo 2 para construção do triângulo equilátero



Fonte: Autor

Dobre o canto C em direção ao ponto F de forma que o vinco começa do ponto D e, C coincida com o vinco feito no passo 1. Em seguida, desdobre (Figura 2).

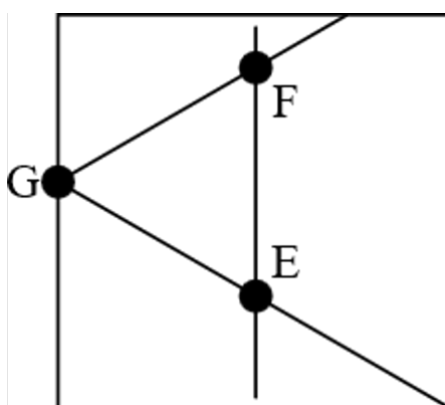
Figura 3 – Passo 3 para construção do triângulo equilátero



Fonte: Autor

Dobre o canto H rumo ao ponto I de maneira que o vinco a ser formado possa interceptar nos pontos G e F (aparição do Postulado da determinação da reta). Logo após, desdobre (Figura 3).

Figura 4 – Passo 4 para construção do triângulo equilátero



Fonte: Autor

O polígono formado pelos segmentos \overline{FE} , \overline{EG} e \overline{GF} será um triângulo equilátero (Figura 4).

4.4 Sobre a Geometria euclidiana: 2 problemas clássicos

Dentro do corpo da monografia, serão listados os diagramas contendo as resoluções da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo pelo método geométrico. Em seguida, haverá as

demonstrações algébricas, em torno das quais incluirão-se como alicerce a semelhança de triângulos.

Em cada etapa do diagrama da demonstração geométrica dos tais problemas, serão descritos detalhadamente as instruções para realizar aquele passo e em seguida justificados com o uso das ferramentas necessárias.

5 DESCRREVENDO, CONSTITUINDO E ANALISANDO OS DADOS

5.1 A origem do Origami do ponto de vista literário

“A origem do origami é desconhecida, mas acredita-se que tenha começado na China, assim que o papel foi inventado e tenha sido levado juntamente com ele para o Japão” (UENO, 2003, p.16)

Inicialmente o origami foi praticado pelas classes mais privilegiadas, principalmente adultos, pois o papel naquela época era um artigo de luxo com alto custo monetário. Devido a isso, o origami foi usado em rituais e cerimônias religiosas xintoístas, assim como também em trocas de presentes entre os samurais, ou ainda, para a confecção de diplomas que, ao serem desdobrados, não seriam restaurados sem o conhecimento das técnicas (BARRETO, 2013).

Barreto (2013) comenta que foi no final do século XIII que o origami começou a ter popularidade. No entanto, com as distinções entre as classes, neste caso, as mais privilegiadas utilizavam enfeites de origami para se diferenciarem das menos privilegiadas. Finalmente, a partir do século XVII, o origami se tornou passatempo para todos devido ao fato do papel já ter sido barateado.

Barreto (2013) afirma que a temática do origami japonês era os animais e as plantas e o tsuru, ou grou, é o origami simbólico do Japão. O trecho seguinte enfatiza uma homenagem que relaciona o tsuru e a garota Sadako Sasaki⁹:

No Japão, inclusive, todos os anos no dia 06 de agosto, desde 1958, milhares de tsurus são depositados no mausoléu erguido em homenagem aos que morreram na tragédia atômica de Hiroshima, durante a segunda guerra mundial, para que isso nunca volte a acontecer. E tudo isso teve seu início em função do desejo de paz e da vontade de viver da garota Sadako Sasaki, uma sobrevivente desta guerra (BARRETO, 2013, p. 16-17)

Não foi somente no território japonês que o origami se instalou. A Espanha também foi voluntária desse passatempo. O país nessa época era governado pelos Mouros, que são de religião islâmica. Em virtude disso, as dobraduras, em sua maioria, eram formas geométricas que foram usadas para estudos astronômicos e matemáticos (BARRETO, 2013).

⁹ Segue o endereço eletrônico para acompanhar a sua biografia:
<https://www.japaoemfoco.com/historia-e-significado-do-monumento-da-paz-das-criancas/>

Segundo Ueno (2003), com a expulsão dos mouros da Espanha, os espanhóis popularizaram a papiroflexia, um “apelido” dado ao origami japonês. Um dos que ajudaram a progredir a papiroflexia foi Miguel de Unamuno que, como aponta Barreto (2013), conheceu o origami quando viajou para França. “Um de seus modelos mais populares é “pajarita”, ou “pequeno pássaro”, baseado do folclore espanhol [...]” (UENO, 2003, p. 20)

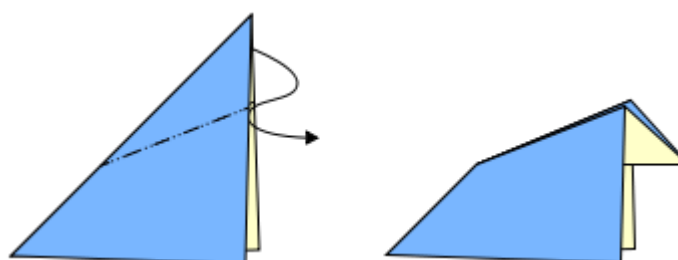
O origami chegou ao Brasil por intermédio dos japoneses e argentinos. Esses tiveram a influência da comunidade espanhola. Ainda no Brasil, foi realizada a Aliança Cultural Brasil-Japão, coordenada pela professora Yachiyo Koda, uma das contribuintes da expansão do origami no território nacional, afirma Barreto (2013).

5.2 A origem e o sentido do origami de acordo com as minhas experiências vivenciadas

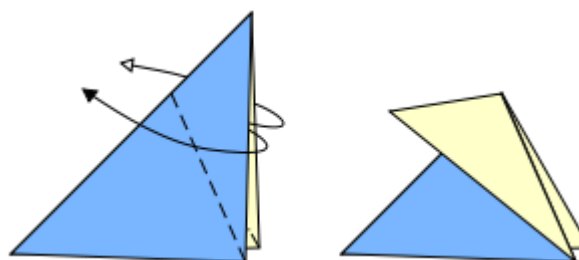
O meu gosto pela dobradura começou quando estudava na Escola Estadual Modelo, localizada na cidade de Araguaína, na Rua 25 de Dezembro. Quando estava no 7º ano do Ensino Fundamental, eu ficava na biblioteca lendo alguns livros didáticos que em sua maioria eram de Matemática. Em um certo dia na biblioteca, avistei um livro que na sua capa tinha alguns animais feitos em origami que achei bonito. Então, peguei o livro e fiquei folheando até que destaquei uma folha do meu caderno e comecei a tentar fazer um *coelho* de papel, o qual tive êxito pela facilidade das dobras. A partir daí procurei outros livros nesta biblioteca que ensinavam dobraduras e encontrei um¹⁰, cujo título era Origami & Artesanato em Papel dos autores Paul Jackson e Angela A’Court. Esse livro, que além de ensinar origami, ensinava a fazer artesanato em papel. Na parte do origami, o livro divide em três subtópicos: projetos simples, onde contém diagramas a nível fácil; projetos intermediários, com diagramas de dificuldade média; projetos avançados, com origamis complexos. O primeiro origami do projeto simples foi um *quepe de soldado*, o qual tive êxito na primeira tentativa de construção. O segundo foi um *cachorro* que, no entanto, tive dificuldades, visto que ainda não sabia fazer dobras reversas internas (Figura 5¹¹) ou externas (Figura 6). Então tentei fazer outros origamis que estavam nessa classificação e aos poucos eu estava tendo sucesso nas dobraduras e seguro de avançar aos projetos intermediários.

¹⁰ JACKSON, Paul; A’COURT, Angela. **Origami & Artesanato em Papel**. [S.l.]: Edelbra, 1996. 255 p.

¹¹ DOBRAS básicas do origami. 2019. Disponível em: <<http://www.chine-culture.com/pt/origami/dobras-b%C3%A1sicas.php>>. Acesso em: 19 abr. 2019.

Figura 5 – Dobra reversa interna

Fonte: chine-culture (2019)

Figura 6 – Dobra reversa externa

Fonte: chine-culture (2019)

O primeiro origami desse projeto feito por mim foi uma *cesta estrelada*, o qual foi fácil devido ao número reduzido de passos. O segundo foi um pássaro ao qual tive dificuldade em dobrar o detalhe do pescoço devido a mesma ser complicada. Com isso, deixei esse pássaro para fazer posteriormente e foquei nos outros origamis medianos, tais como o *porco*, o *avião a jato*, e outros tipos de pássaros apresentados naquele livro. Entrando nos projetos avançados, o *camelo* foi o primeiro origami a ser construído por mim. Nessa dobradura, observei que o animal tinha somente três patas, o que me gerou a dúvida de que seria possível, a partir de um papel quadrado, dobrar algum animal com quatro patas? O segundo origami foi um *vaso chinês* que aparentemente seria difícil, mas na verdade foi simples de fazer. Para construí-lo, utiliza-se uma folha quadrada com seis divisões geradas a partir dos vincos.

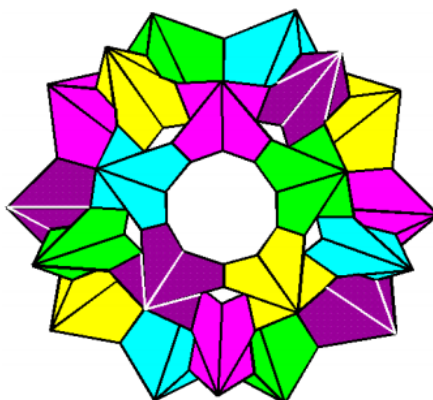
O terceiro origami dessa categoria foi o *Electra*¹² (Figura 7¹³), um origami formado por 30 peças a partir de quadrados. Essa dobradura faz parte do gênero dos *Kusudamas*, que são dobraduras em formatos esféricos feitas por união de várias unidades de papel que continham as abas e bolsos de encaixe. O *electra* foi um origami simples de fazer e ao mesmo tempo demorado

¹² Conferir em: <https://www.youtube.com/watch?v=Xdv0XwINi6M>

¹³ Figura obtida por meio de captura de tela.

devido ao fato da construção das peças e do encaixe dos mesmos. O quarto origami, de nível mediano para mim, foi uma *tigela* cuja sua base ou fundo se assemelha a um octógono regular, um polígono de oito lados e ângulos iguais. O quinto foi um *elefante*, que foi complexo de se fazer, pois em um dado momento, tive que “afundar” uma ponta para construir as costas desse animal e para tal, deve-se abrir um pouco o origami. Para essa dobradura sair “perfeita”, passei por 5 tentativas errôneas.

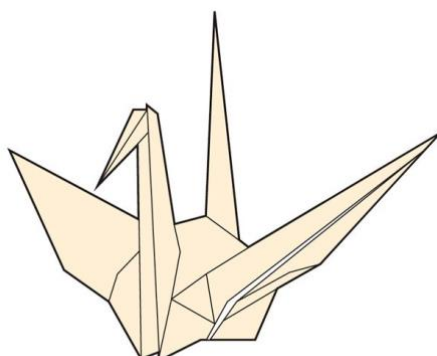
Figura 7 – Origami Electra



Fonte: David Mitchell (2017)

De forma paralela ao uso do livro para fazer Origami, tive a oportunidade de usar a internet a fim de procurar mais tutoriais. Em um certo dia, estava no laboratório de informática desta unidade escolar fazendo um trabalho; após esse trabalho tive a curiosidade de pesquisar na internet, em alguns sites, animais feitos em papel. Um deles chamou a minha atenção devido a sua beleza. Esse era um pássaro japonês chamado *Tsuru* (Figura 8), que foi o primeiro animal em dobradura que consegui fazer com ajuda das instruções disponibilizada na internet. No entanto, ao invés de fazer esse pássaro olhando diretamente para o monitor do computador, tive que fazer o esboço do diagrama, pois o tempo de permanência dentro do laboratório era curto.

Figura 8 – Origami Tsuru



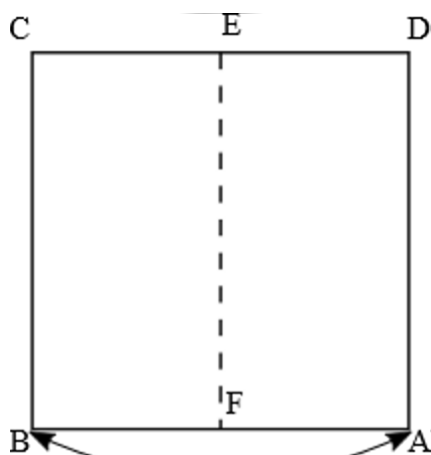
Fonte: Keila Bis (2013)

5.2.1 Origami e as potências de base 2

Pouco tempo depois aprendi a técnica do *Box Pleating*, que consiste em uma série de dobras ortogonais entre si ou que contenham ângulos de 45 graus. A vantagem dessa técnica é a sua facilidade em formar objetos tridimensionais. O origami que aprendi a fazer desse gênero foi o *Magic ball*¹⁴, uma bola que pode ser transformada em uma elipsóide ao ser comprimida. Esse origami é formado a partir de um retângulo contendo uma área equivalente a dois quadrados. Aprendi e compreendi no oitavo ano com esse origami que nos ciclos de dobras – conjuntos de dobras que dividem um quadrado ou seções dele em duas partes iguais –, as divisões formadas pelos vincos durante o processo de construção são potências de base 2, como descrito no diagrama¹⁵ abaixo:

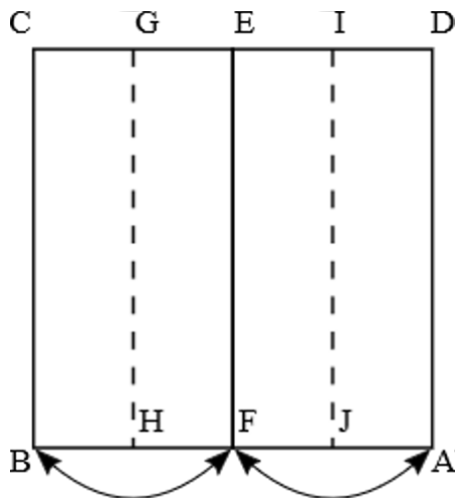
¹⁴ Segue o link para instrução: <https://www.youtube.com/watch?v=VgXwSdJNks8>

¹⁵ Os diagramas foram feitos por mim no software Inkscape.

Figura 9 – 1º ciclo de dobras

Fonte: autor

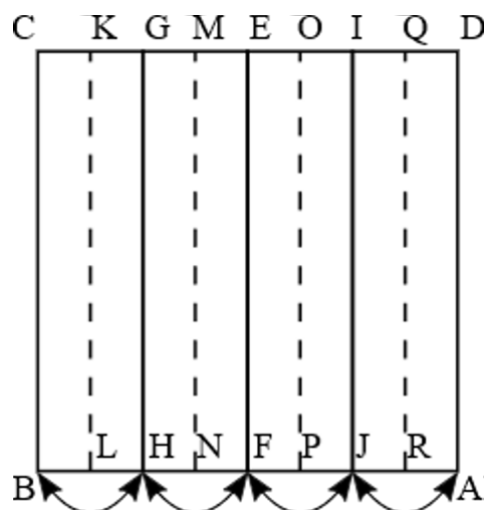
Comece, a partir de um quadrado, dobrando de forma a coincidir ambos os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} , formando assim o segmento médio \overline{EF} (Figura 9).

Figura 10 – 2º ciclo de dobras

Fonte: autor

Em seguida, dobre novamente ao meio, mas desta vez levando os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} até \overline{EF} , obtendo \overline{GH} e \overline{IJ} (Figura 10).

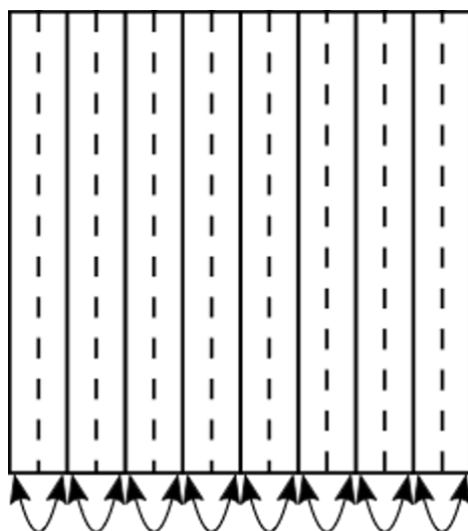
Figura 11 – 3º ciclo de dobras



Fonte: autor

Logo após, dobre de forma a coincidir os seguintes pares de segmentos: \overline{CB} e \overline{GH} ; \overline{GH} e \overline{EF} ; \overline{EF} e \overline{IJ} ; \overline{IJ} e \overline{DA} . Obteremos \overline{KL} , \overline{MN} , \overline{OP} e \overline{QR} (Figura 11).

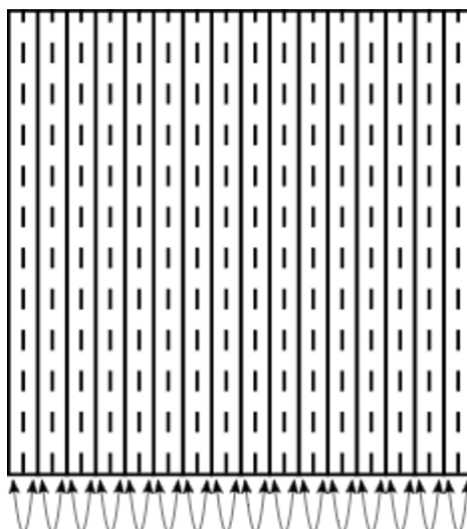
Figura 12 – 4º ciclo de dobras



Fonte: autor

Procedendo da mesma forma teremos a figura acima (Figura 12).

Figura 13 – 5º ciclo de dobras



Fonte: autor

Repetindo os mesmos passos, obteremos a figura acima (Figura 13).

Observe que na Figura 9, o quadrado foi dividido em 2 partes iguais ao executar o primeiro ciclo de dobras, o que corresponde a $2^1 = 2$. Na Figura 10, executando o segundo ciclo de dobras, obteremos 4 partes iguais, o que corresponde a $2^2 = 4$. Ao realizar o terceiro ciclo, na Figura 11, obtemos 8 partes iguais, que é resultado de $2^3 = 8$. Na Figura 12, obtemos 16 partes iguais, realizando o quarto ciclo de dobras. Isso equivale a $2^4 = 16$. Na Figura 13, teremos um quadrado com 32 partes iguais, executando o quinto ciclo de dobras. Esse número equivale a sentença $2^5 = 32$. Procedendo do mesmo modo obteríamos quadrados com número de partes iguais correspondentes a 64, 128, 256, e assim sucessivamente. Ou seja, a partir de um quadrado, executamos n ciclos de dobras, obtemos 2^n partes iguais (Tabela 1):

Tabela 1 – Relação entre o número de ciclos e o número de partes iguais

Número de ciclos de dobras	Número de partes iguais
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
...	...
n	2^n

Fonte: autor

Para demonstrar, observe que $2 = 2^1 = 2 \cdot 2^{1-1}$; $4 = 2^2 = 2 \cdot 2^{2-1}$; $8 = 2^3 = 2 \cdot 2^{3-1}$; $16 = 2^4 = 2 \cdot 2^{4-1}$. Ou seja, os números que compõem a segunda coluna da Tabela 1 estão dispostos em *progressão geométrica* (PG) de razão 2. Logo, teremos a seguinte fórmula para calcular o termo geral da PG em questão:

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Agora teremos que demonstrar a equação acima. Para tal, utilizaremos o primeiro princípio da indução finita. Seja $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$. Calculando a_1 , teremos que $a_1 = 2 \cdot 2^{1-1} = 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 1 = 2$. Logo, a_1 é verdadeiro. Vamos supor que para um certo número $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 2 \cdot 2^{k-1}$ seja verdadeiro, que será a nossa hipótese de indução. Provaremos que a_{k+1} é verdadeiro a partir da tal hipótese. Note que

$$a_{k+1} = a_k \cdot 2,$$

pois segundo a definição de PG, o termo posterior é igual ao produto entre o termo anterior e a razão que, nesse caso, é 2. Partindo da hipótese de indução, teremos que

$$a_{k+1} = a_k \cdot 2 = (2 \cdot 2^{k-1}) \cdot 2 = 2 \cdot 2^{k-1+1} = 2 \cdot 2^{(k+1)-1} = a_{k+1}.$$

Assim, a_{k+1} é verdadeira, para $n = k + 1$, o que prova a validade da equação $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$.

Na minha visão, o que foi descrito acima sobre as dobras em potências de base 2 auxiliou-me nas construções de vários outros origamis, pois os seus primeiros passos para construção exigem que a folha seja dobrada em 2, 4, 8, 16, 32 e, em casos extremos, 64 partes. Observo que essas numerações ficam cada vez maiores ao serem duplicadas. Então com base nesse aspecto, compreendo que as potências de base 2, assim como as de quaisquer outras bases, são grupos de multiplicações em que se vão aumentando as quantidades, como ocorreu na minha experiência vivenciada em questão. A maioria dos origamis que construía iniciavam-se com a divisão do papel em 2 partes iguais, que por coincidência, é uma potência de base 2. Construí alguns desses origamis, no laboratório de informática da escola quase todas as vezes em que tinha oportunidades de entrar no local.

5.2.2 Origami e o triângulo equilátero

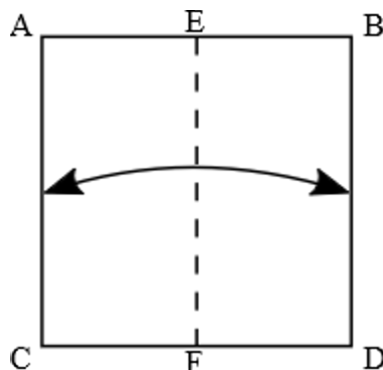
Quando não tinha como ir ao laboratório da escola, eu ia nas *Lan Houses*, ou na casa do meu vizinho, que tinha computador, para construir as dobraduras que haviam sido percebidas por mim. Uma dessas dobraduras que ficou como recordação foi o *Bucky Ball*¹⁶, um origami do gênero *Kusudama* de estilo floral que tem 60 peças e em cada qual há três bolsos e abas de encaixe de mesmo tamanho. Essas peças são confeccionadas a partir de triângulos equiláteros que, até então, não sabia fazê-los e muito menos o que eles eram. Na primeira vez que construí uma peça, utilizei a metade de um quadrado que nesse caso tornar-se-ia um triângulo retângulo. No entanto, peça saiu com uma aparência nada agradável à minha vista, visto que uma das abas de encaixe estava menor que as outras duas. Numa outra tentativa, utilizei um triângulo diferente, com dois lados de mesma medida, assim como os ângulos formados por esses lados e pela base, ou seja, um triângulo equilátero.

No entanto, não obtive um resultado satisfatório, pois uma das abas de encaixe estava menor que as outras duas. Em uma outra tentativa, usei triângulos com todos os seus lados de mesma medida e obtive o resultado esperado, que era uma peça com as três abas de encaixe de mesmo tamanho. No entanto, para construir esses triângulos demandava muito tempo e era muito cansativo, pois utilizava instrumentos, tais como tesoura, transferidor e régua para sua confecção. Depois de muito tempo de prática do origami, descobri, através de outras construções que incluíam

¹⁶ Segue o endereço eletrônico para acompanhar a sua construção: <https://www.youtube.com/watch?v=kHJSd1Huhg4>

triângulos equiláteros a partir de quadrados, uma sequência padrão de passos para a construção desse polígono será destacado no diagrama a seguir¹⁷.

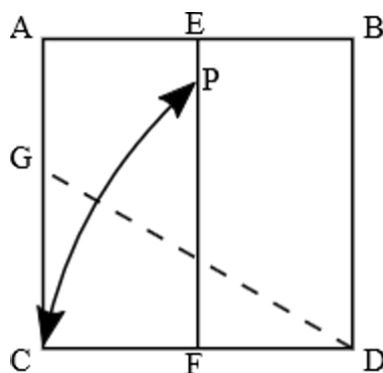
Figura 14 – Passo 1 para construção do triângulo equilátero



Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 56)

Dobre o quadrado ao meio, levando o lado AC ao lado BD, obtendo assim o segmento EF.

Figura 15 – Passo 2 para construção do triângulo equilátero

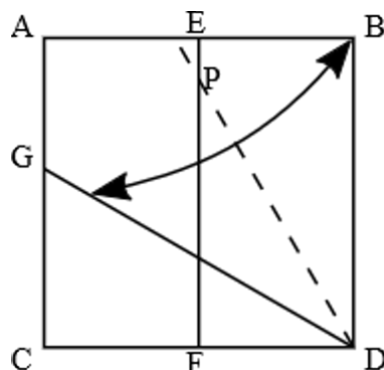


Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 56)

Dobre do ponto C de forma que o vinco obtido passe pelo ponto D e que C coincida com o segmento EF, obtendo assim o ponto P. Em seguida desdobre-o.

¹⁷ O diagrama em questão foi adaptado da de Liliana com algumas modificações tais como a inserção de novos passos a fim de detalhar, omissão dos pontos e alterações nas letras.

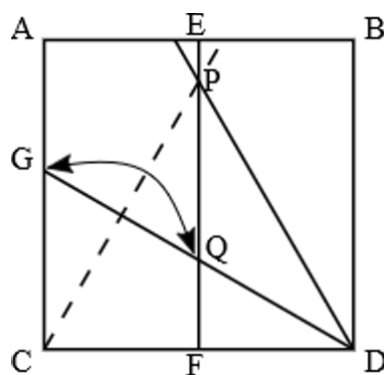
Figura 16 – Passo 3 para construção do triângulo equilátero



Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 56)

Dobre o lado BD, coincidindo com o segmento GD. Em seguida desdobre-o.

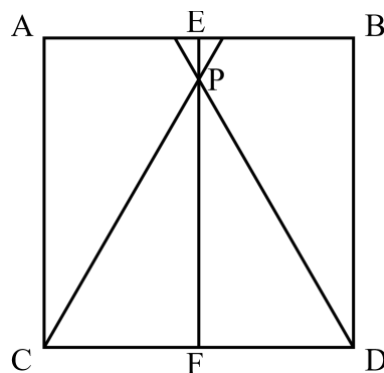
Figura 17 – Passo 4 para construção do triângulo equilátero



Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 56)

Faça um vinco que parte do ponto C e que G coincida com Q.

Figura 18 – Passo 5 para construção do triângulo equilátero



Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 56)

O triângulo CDP é equilátero.

Para provar que o triângulo acima é equilátero, basearemos na demonstração feita por Liliana Cristina Nogueira Monteiro (2008) na página 56 da sua dissertação. A demonstração se dará de forma comentada com algumas alterações, como por exemplo nas letras usadas para nomear segmentos e pontos.

Para demonstrar¹⁸, a autora considerou o lado do quadrado como 1 unidade de medida. Ela concluiu que $\overline{CD} = 1$ e que $\overline{CF} = \overline{FD} = \frac{1}{2}$, pois na Figura 14, F é o ponto médio do segmento CD. Em seguida, Monteiro(2008) notou que \overline{PD} é o segmento gerado pela reflexão de \overline{CD} em torno do segmento DG obtido no passo 3 (Figura 16). Assim ela concluiu que $\overline{CD} = \overline{PD} = 1$. Em seguida foi utilizado o Teorema de Pitágoras no triângulo PFD (Figura 18), retângulo em F. Assim:

$\overline{PD}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{PF}^2 \Rightarrow$	Substituindo os segmentos pelos valores encontrados anteriormente $\left(\overline{PD} = 1 \text{ e } \overline{FD} = \frac{1}{2}\right)$
$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{PF}^2 \Rightarrow$	Resolvendo as potenciações
$1 = \frac{1}{4} + \overline{PF}^2 \Rightarrow$	Aplicando o princípio aditivo
$\overline{PF}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$	Reduzindo os termos semelhantes
$\Rightarrow \overline{PF}^2 = \frac{3}{4}$	Elevando ambos os membros à $\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \overline{PF} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$	Aplicando o inverso da potenciação com expoente racional ($a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$)
$\Rightarrow \overline{PF} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$	Aplicando a propriedade do quociente de radicais $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right)$

¹⁸ A demonstração a seguir foi retirada da dissertação de Liliana Cristina Nogueira Monteiro (2008), que começa a partir da página 56. Contudo, acrescentamos que a demonstração da autora será comentada, pois Monteiro não comentou as passagens matemáticas; ainda, quando possível, ampliaremos as sentenças matemáticas para entender a demonstração.

$$\Rightarrow \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

Calculando os radicais exatos

$$\Rightarrow \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A autora, notando a presença do triângulo PFC, retângulo em F, novamente aplicou o Teorema de Pitágoras nesse triângulo. Desse modo:

$$\overline{PC}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{PF}^2 \Rightarrow$$

Substituindo pelos valores encontrados $\left(\overline{CF} = \frac{1}{2} \text{ e } \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\overline{PC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

Resolvendo as potências do 2º membro

$$\overline{PC}^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow$$

Resolvendo a adição com denominadores iguais

$$\overline{PC}^2 = \frac{4}{4} \Rightarrow$$

Simplificando o número racional

$$\overline{PC}^2 = 1 \Rightarrow$$

Elevando ambos os membros à $\frac{1}{2}$

$$\overline{PC} = 1^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando o inverso da potenciação com expoente racional

$$(a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m})$$

$$\overline{PC} = \sqrt{1} \Rightarrow$$

Calculando o radical

$$\overline{PC} = 1.$$

Assim, ficou provado que o triângulo CDP é equilátero, pois $\overline{CD} = \overline{PD} = \overline{PC} = 1$.

Compreendia nessa época que triângulos eram formas geométricas que têm três lados. No caso específico dos triângulos equiláteros, entendia que bastava somente o fato dos seus três lados serem iguais. Minha atenção ainda não estava voltada ao fato dos seus ângulos poderem ter a mesma medida.

Mais tarde, compreendi também que o triângulo equilátero é um polígono regular que, ao se juntar com os seus outros semelhantes, origina alguns *poliedros convexos*. Nesse momento, estava fazendo sólidos geométricos em origami, aos quais destaco os de Platão. Primeiro construí um *cubo* feito com seis peças, em seguida um *dodecaedro*, formado por doze pentágonos e, finalmente, um *icosaedro*, formado por dez peças em formato de losango com área equivalente a dois triângulos equiláteros. Esse último origami foi complicado no momento da montagem, pois as peças se desencaixavam com muita frequência.

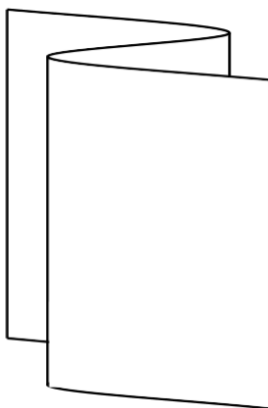
Posteriormente, deixei de lado as construções de origamis geométricos e foquei em outros gêneros, como os animais e objetos. Com bastante prática, fui aprendendo a fazer animais em origami mais avançados, como diversos animais mitológicos e dragões. O primeiro deles foi o *Dragon in flight*¹⁹, formado a partir de uma folha quadrada com uma área de 900 cm². Uma folha normal em formato A4 não era suficiente para fazer esse origami devido ao seu tamanho reduzido, além de poder rasgar o papel em virtude da sua quantidade extensa de dobras. Então para contornar essas dificuldades, tive que usar um jornal velho. Para aprender e chegar ao estado desejado desse origami, demorei cerca de 15 dias.

5.2.3 Origami e o Teorema de Haga

Quando estava no nono ano do ensino fundamental, aprendi a fazer o origami *Jack in a box*, uma dobradura que tinha como visual um palhaço dentro de uma caixa. Vale a pena destacar nessa dobradura que aprendi a dividir uma folha quadrada em três partes, de mesma área, usando uma técnica que mais tarde descobri que era o *Teorema de Haga*. Antes dessa técnica, para eu trisseccionar um quadrado, fazia um plissado em forma de um S (conforme a figura 19) a fim de acertar as distâncias entre as fronteiras.

¹⁹ Segue o endereço eletrônico para acompanhar a sua construção:
https://www.youtube.com/watch?v=RCqCT_QZYIo

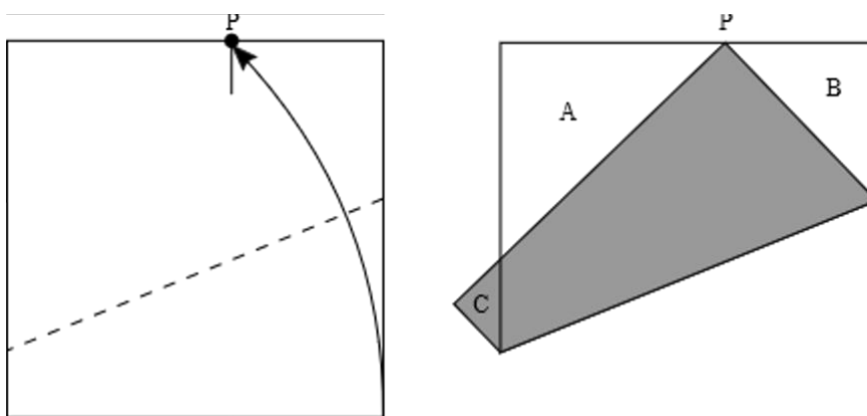
Figura 19 – Plissado da folha quadrada



Fonte: autor

Para explicação do *Teorema de Haga*, Monteiro (2008, p. 48) diz que “Num quadrado de papel, consideremos um ponto P qualquer do bordo superior. Dobra-se o papel de forma ao vértice inferior direito do quadrado fique sobreposto ao ponto P . Os triângulos A , B e C são semelhantes.” (Figura 20). Escrita na condição se ... então, se em um quadrado de papel, considerar um ponto P qualquer da borda superior e dobrar o papel de forma que o vértice inferior direito do quadrado esteja sobreposto ao ponto P , então os triângulos formados são semelhantes.

Figura 20 – Teorema de Haga numa folha quadrada

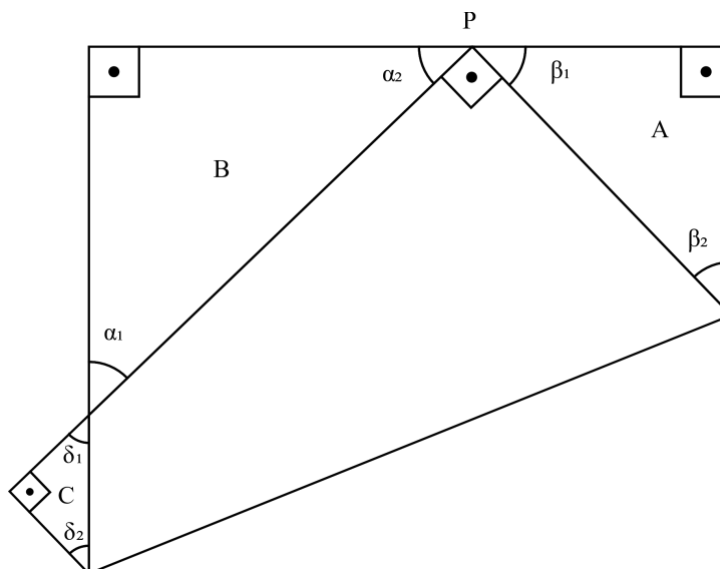


Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 48)

Para demonstrar²⁰ o teorema, Monteiro (2008) identificou os ângulos constituídos dentro dos triângulos A e B obtidos e os chamou de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ (Figura 21). A autora não etiquetou os ângulos agudos que compõem o triângulo C , mas os chamaremos de δ_1 e δ_2 .

²⁰ A demonstração a seguir foi retirada da dissertação de Líliliana Cristina Nogueiro Monteiro (2008), que começa a partir da página 48. Contudo, acrescentamos que a demonstração da autora será comentada, pois Monteiro não

Figura 21 – Nomenclatura dos ângulos



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 48)

Monteiro (2008) observou que

$$\alpha_2 + 90^\circ + \beta_1 = 180^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \quad \text{Reduzindo os termos semelhantes}$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ \quad (1)$$

e no triângulo A, $\beta_1 + \beta_2 + 90^\circ = 180^\circ$, o que implica em $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$, ou seja,

$$-\beta_1 - \beta_2 = -90^\circ \quad (2)$$

A partir de (1) e (2), teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ \\ -\beta_1 - \beta_2 = -90^\circ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Aplicando o método da adição}$$

comentou as passagens matemáticas; ainda, quando possível, ampliaremos as sentenças matemáticas para entender a demonstração.

$$\alpha_2 - \beta_1 + \beta_1 - \beta_2 = 90^\circ - 90^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 \quad (3)$$

Em seguida, a autora observou no triângulo B que

$$\alpha_1 + 90^\circ + \alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \quad \text{Reduzindo os termos semelhantes}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio multiplicativo}$$

$$-\alpha_1 - \alpha_2 = -90^\circ \quad (4)$$

De (1) e (4), obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -90^\circ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Aplicando o método da adição}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 = 90^\circ - 90^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$-\alpha_1 + \beta_1 = 0^\circ \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad (5)$$

Se $\alpha_2 = \beta_2$ e $\alpha_1 = \beta_1$, então, pelo primeiro caso de semelhança de triângulos,

$$\Delta A \sim \Delta B \quad (6)$$

Monteiro (2008) não demonstrou que os triângulos B e C são semelhantes, mas ela afirmou que para tal, procederíamos com a mesmo raciocínio empregado nos triângulos A e B. Contudo, iremos provar que $\Delta B \sim \Delta C$. Para isso, considere os ângulos agudos δ_1 e δ_2 . Observe no triângulo C que

$$\alpha_1 \equiv \delta_1 \quad (7)$$

pois ambos os ângulos são opostos pelo vértice. Note que

$$\delta_1 + 90^\circ + \delta_2 = 180 \Rightarrow$$

Aplicando o princípio aditivo

$$\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow$$

Reduzindo os termos semelhantes

$$\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ \Rightarrow$$

Substituindo δ_1 por α_1 (ângulos opostos pelo vértice de acordo com a figura 21)

$$\alpha_1 + \delta_2 = 90^\circ \quad (8)$$

De (4) e (8), obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 = -90^\circ \\ \alpha_1 + \delta_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

Aplicando o método da adição

$$-\alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \delta_2 = -90^\circ + 90^\circ \Rightarrow$$

Aplicando o princípio aditivo

$$-\alpha_2 + \delta_2 = 0^\circ \Rightarrow$$

Aplicando o princípio aditivo

$$\delta_2 = \alpha_2 \quad (8)$$

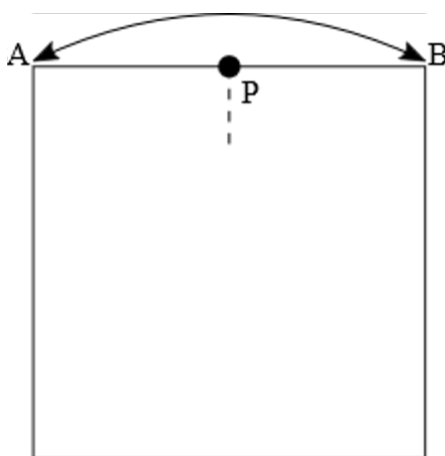
Logo, se $\alpha_1 \equiv \delta_1$ e $\alpha_2 \equiv \delta_2$, então, pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo),

$$\Delta B \sim \Delta C \quad (9)$$

A partir de (6) e (9), temos que $(\Delta A \sim \Delta B, \Delta B \sim \Delta C) \Rightarrow \Delta A \sim \Delta C$. Portanto, Monteiro (2008, p. 48) conclui que “[...] os três triângulos do enunciado do teorema são semelhantes, como queríamos mostrar.”

A partir do Teorema de Haga, conseguimos dividir uma folha quadrada em 3 partes iguais, como mostra o diagrama²¹ abaixo:

Figura 22 – Passo 1 para divisão do quadrado em 3 partes

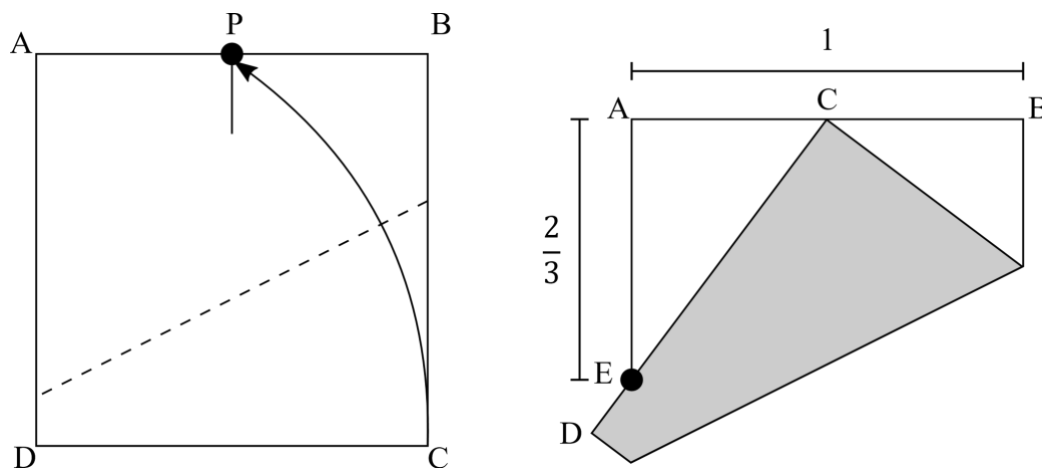


Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 48)

A partir de uma folha quadrada, dobre do ponto A ao B e desdobre, criando um vinco, cuja sua interseção com o segmento \overline{AB} será dado por P, que será o ponto médio desse segmento.

²¹ Diagrama adaptado de Liliana (2008, p. 49)

Figura 23 – Passos 2 e 3 para divisão do quadrado em três partes



Fonte: adaptado de Monteiro (2008, p. 49)

Dobre o canto C de forma a coincidir o mesmo com o ponto P. Observe que na segunda figura o segmento \overline{AE} corresponde a $\frac{2}{3}$ do lado AB , considerando este com 1 unidade de medida. Para demonstrar o que foi feito acima, faremos uma adaptação da demonstração feita por Monteiro (2008), que está na página 49 na sua dissertação. Comentaremos de forma estendida cada uma das proposições que compõe essa demonstração.

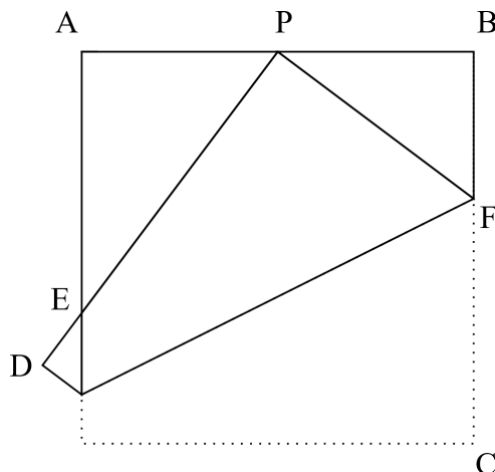
Consideremos que o quadrado representado na Figura 24 tem 1 unidade de comprimento de lado. Logo temos que $BC = 1$. Observe que $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FP}$. Logo,

$$\overline{BF} + \overline{FP} = 1 \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$\overline{FP} = 1 - \overline{BF} \quad (1)$$

Note que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AP} = \overline{PB} = \frac{1}{2}$, pois consideramos anteriormente que o ponto P é o ponto médio de \overline{AB} . A representação geométrica está representada abaixo (Figura 24):

Figura 24 – Representação geométrica do Teorema de Haga



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 49)

O triângulo BPF é retângulo em B, logo podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$\overline{FP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BF}^2 \Rightarrow$$

Substituindo os segmentos pelos valores encontrados

$$\left(\overline{FP} = 1 - \overline{BF} \text{ e } \overline{PB} = \frac{1}{2}\right)$$

$$(1 - \overline{BF})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{BF}^2 \Rightarrow$$

Resolvendo as potenciações

$$1 - 2\overline{BF} + \overline{BF}^2 = \frac{1}{4} + \overline{BF}^2 \Rightarrow$$

Aplicando o princípio aditivo

$$-2\overline{BF} = \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow$$

Reduzindo os termos semelhantes

$$-2\overline{BF} = -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

Aplicando o princípio multiplicativo

$$2\overline{BF} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

Aplicando o princípio multiplicativo

$$\overline{BF} = \frac{3}{8}$$

Pelo Teorema de Haga, os triângulos AEP e BPF são semelhantes, logo podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AE}}.$$

Com isso, tem-se que

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\overline{AE}} \Rightarrow \text{Aplicando a propriedade fundamental das proporções } \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \right)$$

$$\frac{3}{8} \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Multiplicando os números racionais do 2º membro}$$

$$\frac{3}{8} \overline{AE} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Aplicando o princípio multiplicativo}$$

$$3\overline{AE} = \frac{8}{4} \Rightarrow \text{Simplificando o número racional do 2º membro}$$

$$3\overline{AE} = 2 \Rightarrow \text{Aplicando o princípio multiplicativo}$$

$$\overline{AE} = \frac{2}{3}.$$

Como queríamos demonstrar.

Esses teoremas foram compreendidos por mim como métodos eficazes para divisão de uma folha em várias partes que até então a maneira tradicional não conseguia (dobras em potências de base 2). O teorema em questão foi de extrema ajuda, visto que em geral ele permite também dividir a folha quadrada em 5, 7, 9, 11 partes iguais. Observe que esses números são ímpares. Compreendo a palavra “teorema”, nesse caso (Teorema de Haga), como um método ou propriedade válida para qualquer situação, desde que a mesma atenda aos requisitos ou enunciados desse teorema. No caso do Teorema de Haga, o requisito básico para aplicá-lo foi que a folha esteja em um formato quadrado.

No início do Ensino Médio, comecei a construir origamis do gênero *Tessellation*. Semelhante ao *Box Pleating*, essas dobraduras inicialmente são formadas por um conjunto de formas geométricas padronizadas ou idênticas e sem separações, chamados de Crease Patterns, que são conjuntos de todos os vincos necessários para obter aquele origami (pense num origami

construído e depois desdobre-o totalmente e verás todas as dobras usadas). O meu primeiro origami dessa classificação foi o *Water Bomb Tessellation*²², o qual tinha vários cubos agrupados. Até eu iniciar a minha graduação em licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Tocantins (UFT), a maioria das minhas dobraduras eram de gênero tessellation.

5.2.4 Origami e os poliedros convexos

No segundo semestre de 2016, na UFT, tive a oportunidade de me inscrever na XIII Semana Acadêmica de Matemática. Nesse evento, participei da Oficina de Origami, ministrada pela professora e mestre Yukiko Massago. A minha experiência com o origami foi de extrema importância nesse momento, pois eu já estava habilidoso em construir dobraduras, interpretar os seus diagramas de construção, formar vincos e fazer dobraduras reversas. A oficina ocorreu no período matinal, dividiu-se em dois dias e, em cada um deles, o tempo de execução foi de 4 horas. Nessa oficina, construí alguns dos sólidos geométricos de Platão em papel, como o cubo, o tetraedro e o dodecaedro. Durante a construção do dodecaedro de origami, a professora perguntou-me e aos demais participantes quantas peças precisaria para a construção desse sólido, sendo que cada um desses seria uma aresta do dodecaedro. Não consegui responder, assim como também os outros participantes. Então a professora falou que para construir esse poliedro, precisaria de 30 peças, que corresponderiam as suas 30 arestas. Nesse momento, passei a indagar-me se teria algum jeito de chegar a esse número sem a necessidade da contagem. A Yukiko explicou como chegaria àquele valor. Para isso ela utilizou a fórmula de Euler, que diz que se tivermos um poliedro convexo, valeria a seguinte relação:

$$F - A + V = 2$$

onde F é o número de faces, A é o número de arestas e V , o número de vértices. Sabendo que o dodecaedro contém 12 faces e 20 vértices, faria sentido em chegar a 30 arestas, pois

$$F - A + V = 2 \Rightarrow \quad \text{Substituindo } F \text{ e } V \text{ por } 12 \text{ e } 20, \text{ respectivamente}$$

$$12 - A + 20 = 2 \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

²² Segue o endereço eletrônico para acompanhar a sua construção: <https://www.youtube.com/watch?v=VXIVHjws15U>

$$-A = 2 - 20 - 12 \Rightarrow \quad \text{Reduzindo os termos semelhantes}$$

$$-A = -30 \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio multiplicativo}$$

$$A = 30$$

Notei nesse momento que a tal fórmula também funcionava para a construção do *electra*, pois mais tarde percebi que ele tem o formato de um *icosidodecaedro*, *poliedro arquimediano* composto por 12 faces pentagonais e 20 triangulares, totalizando 32 faces, e 60 arestas. Percebi que as 30 peças corresponderiam aos seus 30 vértices, pois utilizando a relação de Euler teremos:

$$F - A + V = 2 \Rightarrow \quad \text{Substituindo F e A por 32 e 60, respectivamente}$$

$$32 - 60 + V = 2 \Rightarrow \quad \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$V = 2 - 32 + 60 \Rightarrow \quad \text{Reduzindo os termos semelhantes}$$

$$V = 30$$

Para demonstrar a relação de Euler, basearemos nas demonstrações feitas pelo professor Zoroastro Azambuja Filho conforme tópico 5.1

No segundo semestre de 2017, na UFT, ocorreu a XIV Semana Acadêmica de Matemática. Nesse evento, houve a mesma oficina, mas dessa vez tive a oportunidade de ser voluntário, ajudando os demais participantes. Nessa mesma oficina, a Yukiko Massago sugeriu que os alunos construíssem um *Swan* formado por cerca de 120 peças em formato de triângulos retângulos encaixados umas às outras. A oficina possibilitou-me aprender a técnica do origami em *3d*. Percebi nesta oficina que não era tão simples auxiliar os participantes, pois eles tiveram dificuldade em interpretar os diagramas de origami e proceder com as construções das peças. Essas adversidades foram aos poucos sendo solucionadas, pois os participantes construía as peças várias vezes e eles foram “pegando a prática”. Após terminarem com a construção de todas as 120 peças, os participantes enfrentaram outro obstáculo, que era o encaixe dessas peças umas com as outras. Os

participantes estavam confusos com o esquema da distribuição de peças oferecido pela professora, visto que algumas dessas peças estavam viradas à esquerda e outras à direita. Então me dispus a ajudá-los nesse momento com a interpretação desse esquema. Após eles entenderem, começaram a encaixar as peças. Houve momentos em que, acidentalmente, as peças se desencaixavam e assim desmanchava o cisne, mas com a prática, paciência e perseverança os participantes tiveram êxito na construção do cisne. Aprendi nessa oficina que devemos ter paciência e saber ensinar os outros, assim como entender que o processo de aprendizagem demanda tempo. A prática é uma ferramenta necessária para o aprendizado das coisas.

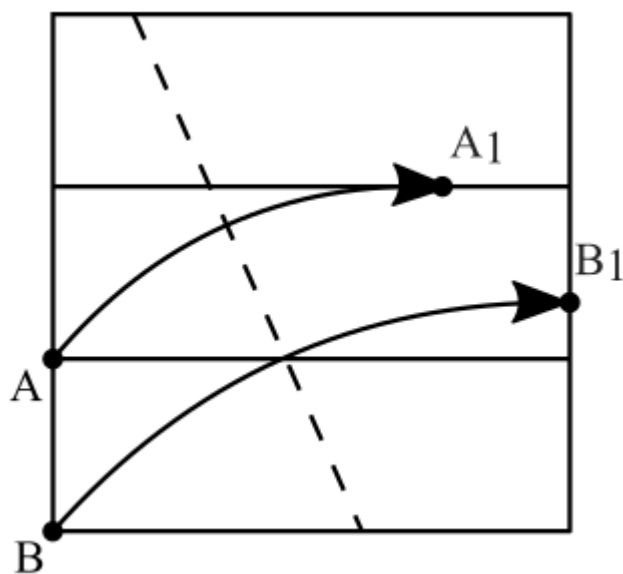
5.2.5 Origami e os problemas clássicos gregos: duplicação do cubo e trissecção do ângulo

Quando estava no sétimo período da minha graduação, na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 1, comecei a fazer o meu pré-projeto de pesquisa, pautando no tema da *duplicação do cubo e trissecção do ângulo* via origami. Esses assuntos foram superficialmente vistos por mim a anos atrás antes de eu me graduar na UFT. No entanto, não me aprofundei, deixando como curiosidade que, posteriormente, foi retornada dentro do período da minha graduação, precisamente no quinto período, na disciplina de Geometria Plana, ministrada pelo professor Jamur Andre Venturin. O elemento disparador para o retorno dessa curiosidade foi a afirmação, do professor da disciplina, de que era impossível a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo usando régua e compasso. Logo nesse momento tive a ideia de escrever o meu pré-projeto de pesquisa com base nessa curiosidade, que era a demonstração da possibilidade desses problemas serem resolvidos com origami, tendo como orientador o professor da disciplina de Geometria Plana.

Para expressar o problema da duplicação do cubo por meio do origami, basearemos no diagrama da Liliana Nogueiro Monteiro²³ abaixo:

²³ O diagrama em questão está localizado na página 32 da dissertação.

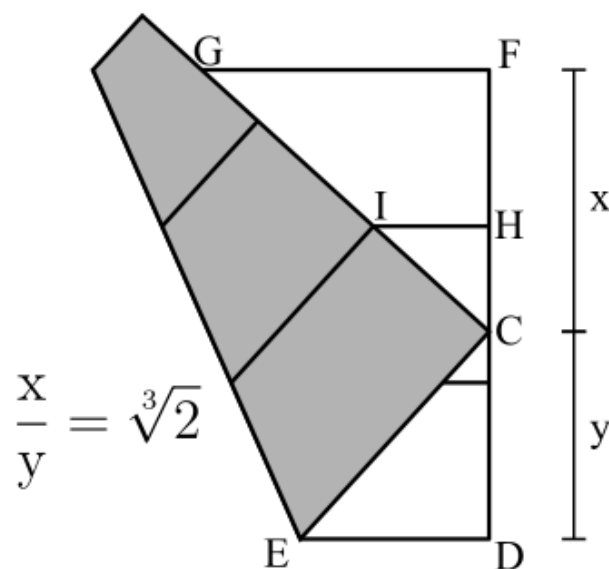
Figura 25 – Passo 1 para duplicação do cubo via origami



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 32)

Comece dividindo o quadrado em três partes iguais usando o Teorema de Haga. Em seguida, dobre o lado esquerdo do quadrado de forma que haja coincidência simultânea entre os pares A e A_1 e B e B_1 (Figura 25).

Figura 26 – Passo 2 para duplicação do cubo via origami



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 32)

O Ponto C, que é o ponto de coincidência entre B e B_1 , divide o lado direito do quadrado em dois segmentos, \overline{CF} e \overline{CD} , com medidas x e y , respectivamente, em que a razão entre elas resulta em $\sqrt[3]{2}$ (Figura 26).

Para demonstrar o valor dessa razão, Monteiro (2008) considera o comprimento y como 1 unidade de medida, ou seja, $y = 1$. Com isso, ela notou que o lado direito do quadrado terá uma medida de $1 + x$. Em seguida, a autora atribui ao segmento \overline{DE} uma medida d . Como todos os lados do quadrado são iguais, eles terão o comprimento $1 + x$. A partir daí, o segmento EC mede $1 + x - d$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CDE , ela obteve o seguinte cálculo²⁴:

$$\overline{EC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 \Rightarrow$$

Substituindo os segmentos pelos valores encontrados $(\overline{EC} = 1 + x - d; \overline{CD} = 1 \text{ e } \overline{DE} = d$

$$(1 + x - d)^2 = 1^2 + d^2 \Rightarrow$$

Resolvendo as potências e os produtos notáveis

$$1^2 + x^2 + d^2 + 2x - 2d - 2xd = 1 + d^2 \Rightarrow$$

Aplicando o princípio aditivo

$$d^2 - d^2 - 2d - 2xd = 1 - 1 - x^2 - 2x \Rightarrow$$

Reduzindo os termos semelhantes

$$-2d - 2xd = -x^2 - 2x \Rightarrow$$

Colocando $-d$ em evidência no 1º membro, assim como o -1 do 2º membro

$$-d(2x + 2) = -(x^2 + 2x) \Rightarrow$$

Aplicando o princípio multiplicativo

$$d(2x + 2) = (x^2 + 2x) \Rightarrow$$

Aplicando o princípio multiplicativo

$$d = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}.$$

Em seguida, Monteiro (2008) notou que $\overline{CH} = x - \overline{FH} = x - \frac{\overline{DF}}{3} = x - \frac{x+1}{3}$.

²⁴ Essa demonstração foi realizada por Monteiro (2008), assim nós também aplicamos o Teorema de Pitágoras resultando os mesmos cálculos, porém, apresentamos outros detalhes dos cálculos não presentes no que a autora realizou. Por isso, não fazemos uma citação direta, pois introduzimos passagens e comentários que não correspondem diretamente ao efetuado pela autora.

A autora reparou que os triângulos CDE e CFG são semelhantes como afirma o Teorema de Haga. Também podemos notar a semelhança entre os triângulos CFG e CHI pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos. Assim, se $\Delta CDE \sim \Delta CFG \sim \Delta CHI$, então os triângulos CDE e CHI são semelhantes. Dada a semelhança, Monteiro estabeleceu a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CI}}.$$

Daí, como $\overline{DE} = d$, $\overline{EC} = 1 + x - d$, $\overline{CH} = x - \frac{x+1}{3}$ e $\overline{CI} = \frac{x+1}{3}$, teremos o seguinte cálculo:

$$\frac{d}{1+x-d} = \frac{x - \frac{x+1}{3}}{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow$$

Reduzindo a expressão algébrica $x - \frac{x+1}{3}$ ao mesmo denominador

$$\frac{d}{1+x-d} = \frac{\frac{3x - x - 1}{3}}{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow$$

Reduzindo os termos semelhantes

$$\frac{d}{1+x-d} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow$$

Dividindo os números racionais do 2º membro

$$\frac{d}{1+x-d} = \frac{2x-1}{3} \cdot \frac{3}{x+1} \Rightarrow$$

Efetuada a multiplicação entre os números racionais do 2º membro

$$\frac{d}{1+x-d} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Como $d = \frac{x^2+2x}{2x+2}$, segue que

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{1+x-\frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow$$

Reduzindo a expressão $1 + x - \frac{x^2+2x}{2x+2}$ ao mesmo denominador

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{(2x+2)(1+x) - (x^2+2x)} = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow$$

Efetuada as multiplicações dos binômios

$$\frac{\frac{x^2 + 2x}{2x + 2}}{\frac{(2x + 2x^2 + 2 + 2x) - x^2 - 2x}{2x + 2}} = \frac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{x^2 + 2x}{2x + 2}}{\frac{x^2 + 2x + 2}{2x + 2}} = \frac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow$$

$$(x^2 + 2x)(x + 1) = (x^2 + 2x + 2)(2x - 1) \Rightarrow$$

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x = 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2x + 4x - 2 \Rightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 \Rightarrow$$

$$x^3 - 2x^3 + 3x^2 - 3x^2 + 2x - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$-x^3 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$-x^3 = -2 \Rightarrow$$

$$x^3 = 2 \Rightarrow$$

Reduzindo os termos semelhantes

Efetuada a divisão de números racionais no 1º membro

Efetuada a multiplicação de números racionais no 1º membro

Aplicando a propriedade fundamental da proporção

Efetuada as multiplicações

Reduzindo os termos semelhantes

Aplicando o princípio aditivo

Reduzindo os termos semelhantes

Aplicando o princípio aditivo

Efetuada o princípio multiplicativo

Elevando ambos os membros à $\frac{1}{3}$

$$x = 2^{\frac{1}{3}}$$

Aplicando o inverso da potência com expoente racional

$$x = \sqrt[3]{2}$$

Como queríamos demonstrar.

Essa demonstração está relacionada ao problema da duplicação do cubo – um dos problemas gregos impossíveis de serem resolvidos somente com régua e compasso, mas resolvido com o auxílio do origami – pois dado um cubo cuja aresta mede x , tem-se que o volume V_1 desse é dado por $V_1 = x^3$. A partir daí, o volume V_2 desse cubo duplicado será dado por $V_2 = 2x^3$. Considerando a medida y da aresta do cubo duplicado, tem-se que $V_2 = y^3 = 2x^3$. Com base nisso,

$$y^3 = 2x^3 \Rightarrow$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{3}$

$$y = (2x^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

Aplicando a propriedade da potência de um produto $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

$$y = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (x^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

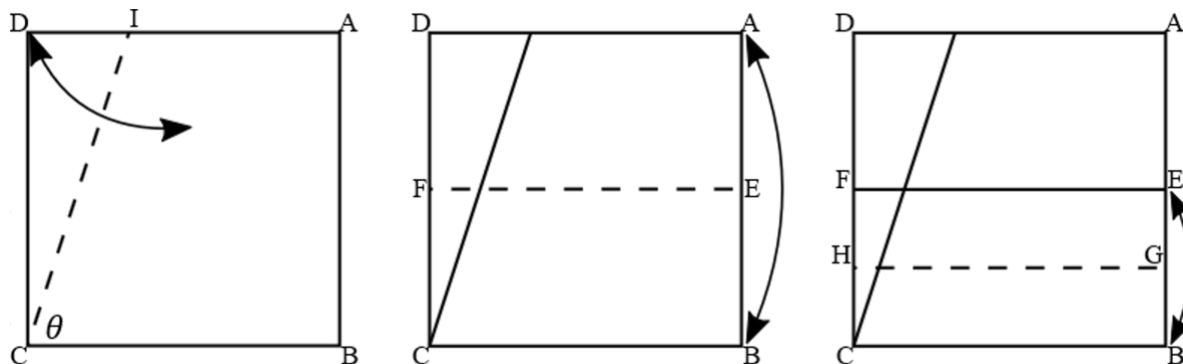
Aplicando o inverso da potenciação com expoente racional $(a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m})$ e a potenciação de potência $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$$y = x\sqrt[3]{2}.$$

Com isso, observando o resultado anterior e a Figura 26, tem-se que y é a medida da aresta do cubo duplicado a partir da medida x da aresta do cubo antes da duplicação.

O problema da duplicação do cubo, como dito anteriormente, foi um dos temas da criação do pré-projeto de pesquisa, junto com o da trissecção do ângulo, que pode ser resolvido via origami. Para tal, seguiremos o diagrama abaixo baseado no da dissertação de Monteiro (2008, p. 29):

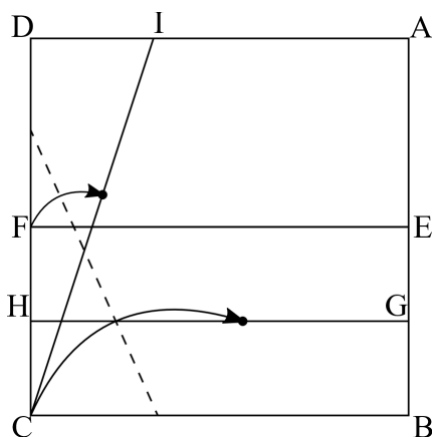
Figura 27 – Passo 1 para trissecção do ângulo



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 29)

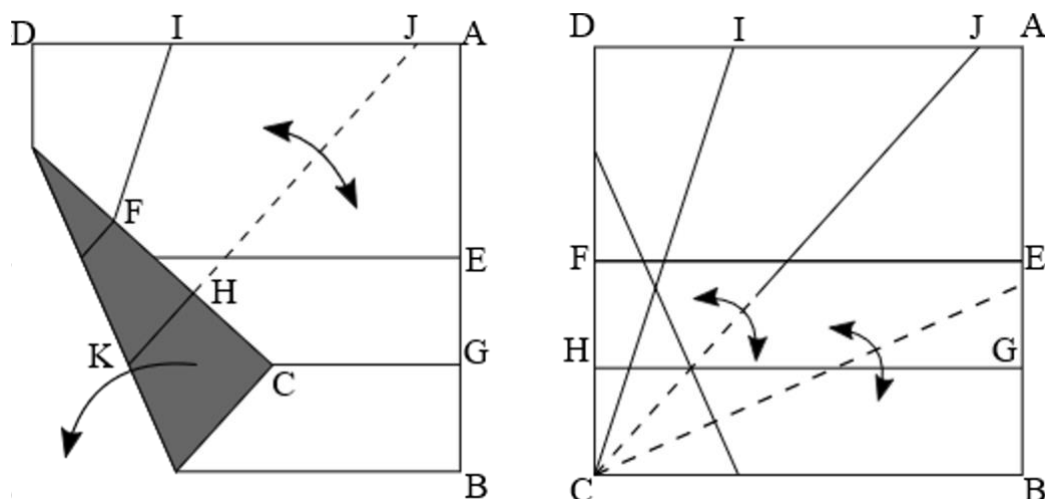
Na Figura 27, Monteiro supôs que o ângulo θ a ser dividido em três partes fosse um ângulo formado pelo segmento CB, lado inferior do quadrado, e um outro segmento, o qual chamaremos de \overline{CI} , que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado. Em seguida, a autora fez um vinco, que chamaremos de \overline{EF} , no meio do quadrado e logo após, a mesma fez um outro vinco, que denotaremos por \overline{GH} , ao dobrar o lado inferior do quadrado até o segmento EF, obtendo assim dois segmentos paralelos e equidistantes, ou seja, $\overline{EF} // \overline{GH}$.

Figura 28 – Passo 2 para trissecção do ângulo



Monteiro (2008) dobrou o canto inferior esquerdo do papel, de forma que C coincida com um ponto interior do segmento HG e, simultaneamente, o ponto F coincida com um ponto de \overline{CI} (Figura 28).

Figura 29 – Passo 3 para trisseção do ângulo

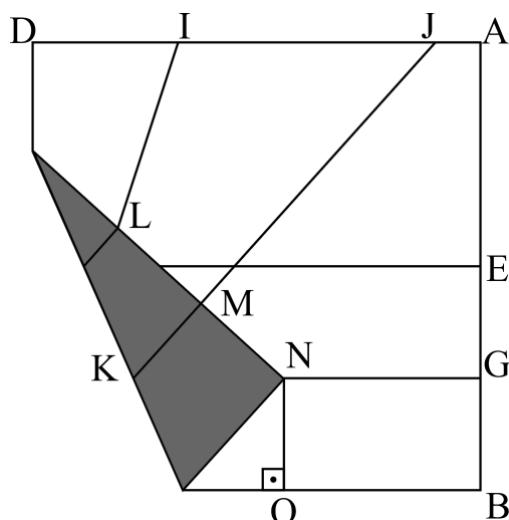


Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 29)

A autora fez um vinco, que nesse caso será o segmento HJ , prolongamento de \overline{HK} , e em seguida, desdobrou o canto C e terminou o vinco, passando a ser \overline{CJ} . Monteiro concluiu que o ângulo compreendido entre \overline{CJ} e o segmento CB corresponde a $\frac{2}{3}\theta$. Para dividir o ângulo θ em três partes iguais, a autora dobrou o lado CB até o vinco \overline{CJ} e assim o ângulo se divide em 3 partes iguais (Figura 29).

Para demonstrar, com base nas escritas de Monteiro (2008), denotaremos como L , M e N os pontos de intersecção entre o lado esquerdo do quadrado e os segmentos IC , JC e GH , respectivamente, provenientes da dobra feita na Figura 29 (Figura 32).

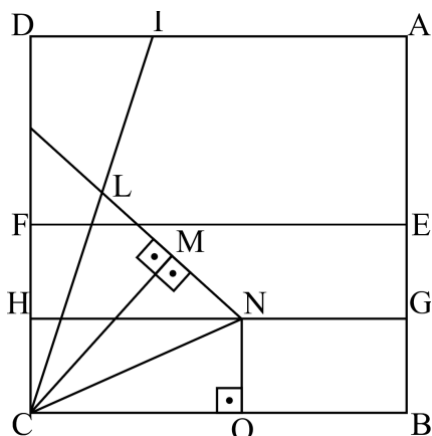
Figura 30 – Designação dos objetos geométricos



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 30)

Além dessas designações, com base nas escritas de Monteiro (2008), chamaremos de \overline{NO} um segmento perpendicular à \overline{BC} e \overline{GH} , sendo que aquele passará por N. O ponto de intersecção do lado inferior do quadrado e esse segmento será denotado de O. Em seguida, a autora notou que $\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NO}$, pois o segmento LM tem a mesma medida de \overline{FH} ; \overline{MN} corresponde à medida de \overline{HC} e \overline{NO} é a medida de \overline{HC} (Figura 33). Ainda nota-se que \overline{CM} é perpendicular a \overline{LN} pelo fato de \overline{GH} ser perpendicular a \overline{FC} .

Figura 31 – Representação geométrica da congruência entre triângulos



Fonte: Adaptado de Monteiro (2008, p. 30)

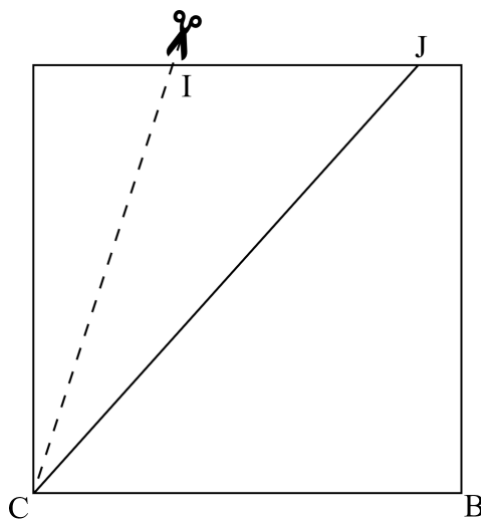
Sendo assim, com base na autora Monteiro (2008), concluímos que os triângulos LMC e NMC são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado, pois $\overline{LM} \equiv \overline{MN}$, $\widehat{LMC} = \widehat{NMC} = 90^\circ$, e \overline{CM} é um lado comum a esses dois triângulos. Levando em conta a escrita de Monteiro (2008) notamos também que os triângulos NMC e NOC são congruentes pelo caso especial de triângulo retângulo, pois $\widehat{O} = \widehat{M} = 90^\circ$, $\overline{MN} \equiv \overline{NO}$ e \overline{NC} é a hipotenusa desses dois triângulos.

Daí, de forma convergente aos dizeres de Monteiro (2008) concluímos que os triângulos LMC , NMC e NOC são congruentes e assim,

$$O\hat{C}N = N\hat{C}M = M\hat{C}L = \frac{\theta}{3}$$

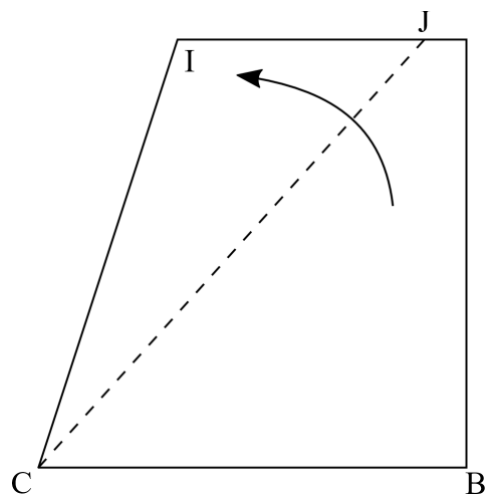
Podemos mostrar a congruência dos ângulos fazendo como descrito no diagrama abaixo:

Figura 32 – Corte do segmento IC



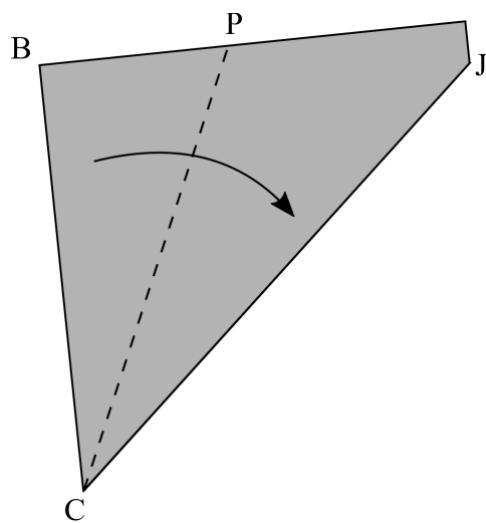
Fonte: Autor

Com uma tesoura, corte o vinco indicado pelo segmento IC.

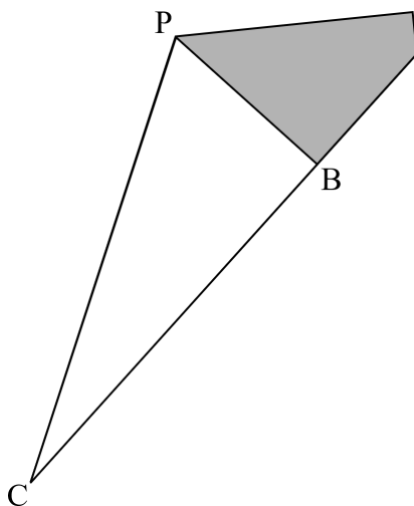
Figura 33 – Redobragem de \overline{CJ} 

Fonte: Autor

Dobre novamente o segmento CJ.

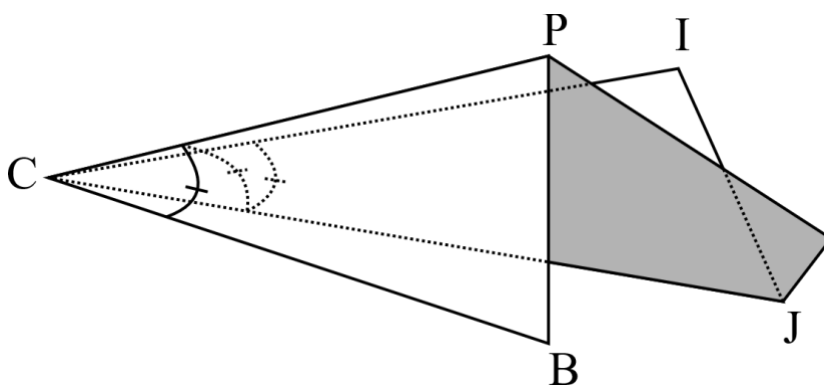
Figura 34 – Obtenção de \overline{CP} 

Fonte: Autor

Figura 35 – Resultado final

Fonte: Autor

Dobre o canto B de forma que o lado CB coincida com o percurso de \overline{CJ} , obtendo assim o segmento CP (Figura 35). Observe que os ângulos $B\hat{C}P$, $P\hat{C}J$ e $J\hat{C}I$ coincidem-se, logo eles têm a mesma medida e consequentemente serão congruentes. A figura 36 mostra a congruência desses ângulos e o origami visto em perspectiva oblíqua.

Figura 36 – Origami e os ângulos vistos em perspectiva oblíqua

Fonte: Autor

6 DESVENDANDO A MATEMÁTICA NOS ORIGAMIS

6.1 Semelhança de triângulos

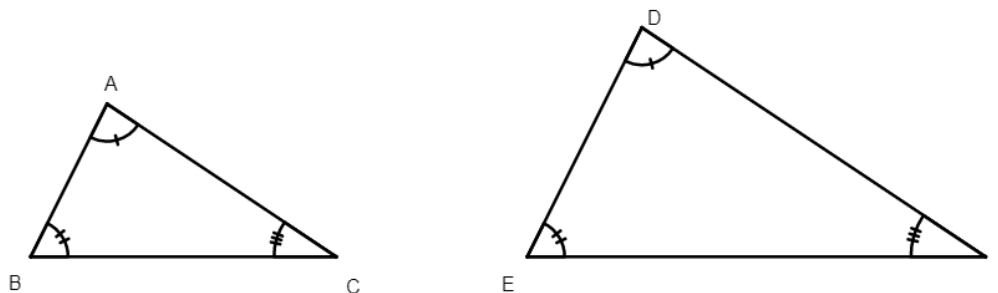
Neste tópico, apresentaremos o conteúdo semelhança de triângulos baseado na obra Fundamentos de Matemática Elementar 9, em particular, tratando de Geometria Euclidiana Plana dos autores Dolce e Pompeo (2013). As demonstrações que são apresentadas ao longo deste subtópico, já foram realizadas e estão disponíveis nessa mesma obra. Para enriquecimento desse trabalho, faremos comentários das inferências realizadas²⁵.

A definição de semelhança de triângulos segundo Dolce e Pompeo (2013) nos diz: “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos **ordenadamente congruentes** e os lados **homólogos** proporcionais.” (p. 192, grifos do autor)

Em outras palavras, dados dois triângulos semelhantes, indicados por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (conforme Figura 37, abaixo), teremos que os pares de ângulos \hat{A} e \hat{D} , \hat{B} e \hat{E} , \hat{C} e \hat{F} , ordenadamente congruentes e, ainda, ocorre o seguinte resultado:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k. \quad (1)$$

Figura 37 – Representação da semelhança entre os triângulos ABC e DEF



Fonte: Autor

²⁵ A escrita simbólica é a mesma empregada na obra Fundamentos de Matemática elementar, volume 9, escrito por Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo no ano de 2013. Porém acrescentamos comentários e do mesmo modo, foi realizada para as outras demonstrações. As figuras que aparecerão são reproduções advindas das obras mencionadas.

Em nossa análise: se efetuarmos em (1) todas as divisões entre as medidas dos lados que estão entre os mesmos ângulos, encontraremos o mesmo valor, o qual é chamado, segundo Dolce e Pompeo (2013), de razão de semelhança, que designaremos pela letra k .

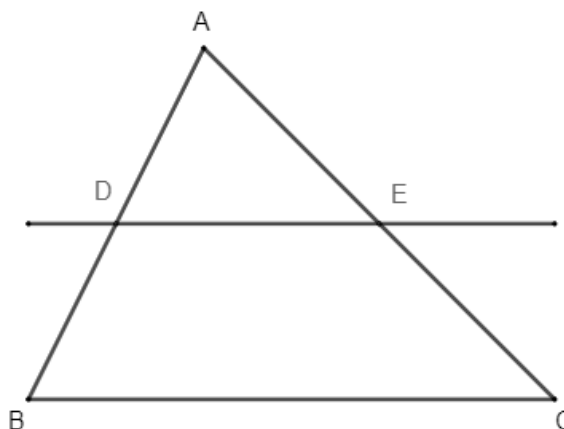
Dolce e Pompeo (2013) apresentam em seu livro o Teorema Fundamental, retratado na seguinte proposição:

“Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 194).

Em nossa análise: dado um triângulo ABC e sendo a reta \overline{DE} paralela ao lado \overline{BC} que cruza simultaneamente os lados \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos D e E , respectivamente, (conforme a Figura 38 abaixo), os triângulos ADE e ABC serão semelhantes (indica-se por \sim), logo

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = k.$$

Figura 38 – Teorema Fundamental



Fonte: Autor

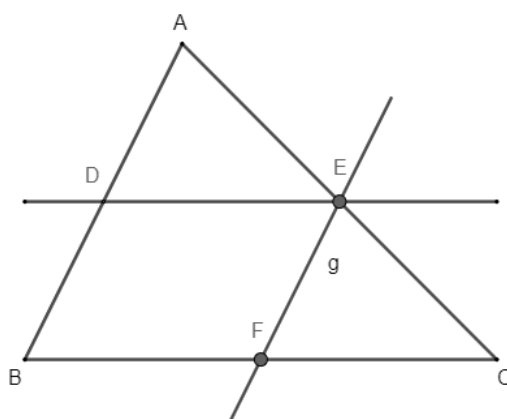
Demonstração:

Para demonstrar a semelhança entre esses triângulos, Dolce e Pompeo (2013) precisaram provar que: os ângulos teriam que ser ordenadamente congruentes; e ainda os seus lados homólogos serem proporcionais.

Para provar que os ângulos são ordenadamente congruentes, façamos o seguinte: nos valemos da hipótese de as retas \overline{DE} e \overline{BC} serem paralelas e \overline{AB} e \overline{AC} transversais. Com isso, levando em conta a teoria das paralelas, concluiu que $\hat{D} \equiv \hat{B}$ pelo fato de ambos serem correspondentes, o mesmo motivo se aplica aos ângulos \hat{E} e \hat{C} . Como \hat{A} é comum aos dois triângulos, ficou provado a congruência entre os ângulos.

Para provar a proporcionalidade entre os lados homólogos, Dolce e Pompeo (2013) traçaram uma reta \overline{EF} paralela ao lado \overline{AB} interceptando no ponto E, como mostrado na Figura 39:

Figura 39 – Representação da prova do Teorema Fundamental



Fonte: Autor

Com isso, Dolce e Pompeo (2013) aplicaram o Teorema de Tales, a fim de encontrar a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}. \quad (2)$$

De acordo com a Figura 39, observa-se que há o paralelogramo BDEF. Partindo disso, temos que $\overline{BF} \equiv \overline{DE}$. Levando isso em conta, substituímos \overline{BF} por \overline{DE} na equação (2). Portanto, provamos o Teorema Fundamental, quer dizer:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

6.1.1 Casos de semelhança

Os casos a seguir servem para facilitar a identificação da semelhança entre dois ou mais triângulos, dispensando a utilidade total dos dados necessários, que são as medidas de todos os ângulos e dos lados envolvidos nesses polígonos. De acordo com Dolce e Pompeo (2013), podemos listar três casos de semelhança, os quais serão destrinchados a seguir.

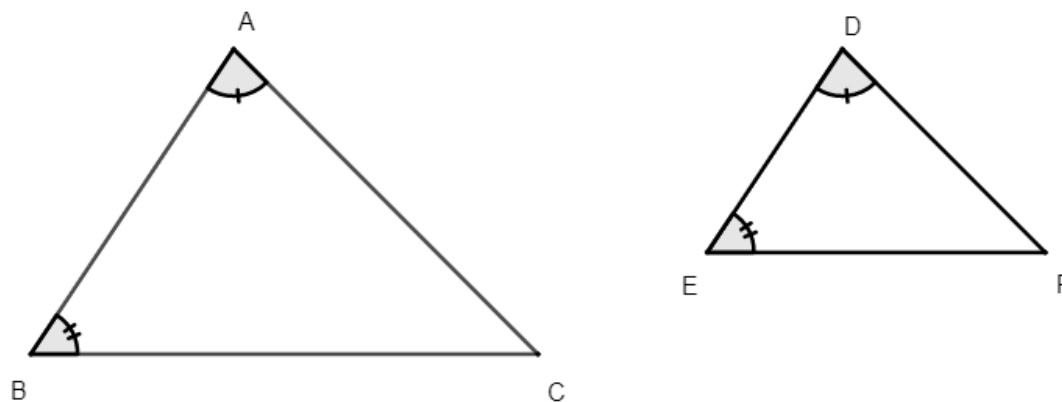
6.1.1.1 1º caso

“Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 198)

Isto é, dados dois triângulos ABC e DEF por exemplo, e ambos os ângulos \hat{A} e \hat{D} forem congruentes, e de forma análoga aos ângulos \hat{B} e \hat{E} (exposto na Figura 40, abaixo), veremos que ficará determinado automaticamente que os ângulos \hat{C} e \hat{F} , os quais seriam congruentes. Por fim, os lados homólogos seriam proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

Figura 40 – Representação do 1º caso de semelhança

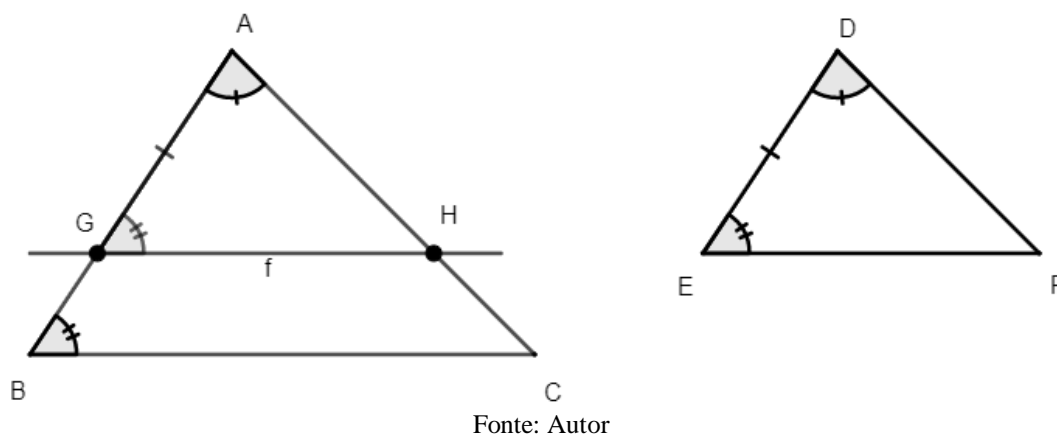


Fonte: Autor

Demonstração:

Para demonstrar esse caso, Dolce e Pompeo (2013) consideraram a **negação** do fato de os dois triângulos serem congruentes, ou seja, conjecturou que os triângulos não fossem congruentes. Seja os dois triângulos da Figura 40 e partindo da ideia anterior, Dolce e Pompeo (2013) supuseram que $AB > DE$. Então, tracemos uma reta \overleftrightarrow{GH} interceptando em \overline{AB} , num ponto G de maneira que \overline{AG} fosse congruente a \overline{DE} , e em AC. E por fim, $\hat{G} \equiv \hat{E}$ (Figura 41).

Figura 41 – Representação geométrica da demonstração do 1º caso



Como $\hat{A} \equiv \hat{D}$, da mesma forma que $\hat{G} \equiv \hat{E}$, e sendo $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$, aplicando o caso de congruência de triângulos ângulo-lado-ângulo (ALA), conclui-se que os triângulos AGH e DEF são congruentes. Assim, $\hat{H} \equiv \hat{F}$. Analisando os ângulos \hat{B} , \hat{E} e \hat{G} , temos por hipótese que $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e que $\hat{E} \equiv \hat{G}$. Logo, $\hat{B} \equiv \hat{G}$ e, por conseguinte, as retas \overleftrightarrow{GH} e \overleftrightarrow{BC} são paralelas. Pelo Teorema Fundamental, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo AGH, que por sua vez é congruente ao triângulo DEF. Sendo assim, fica provado que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

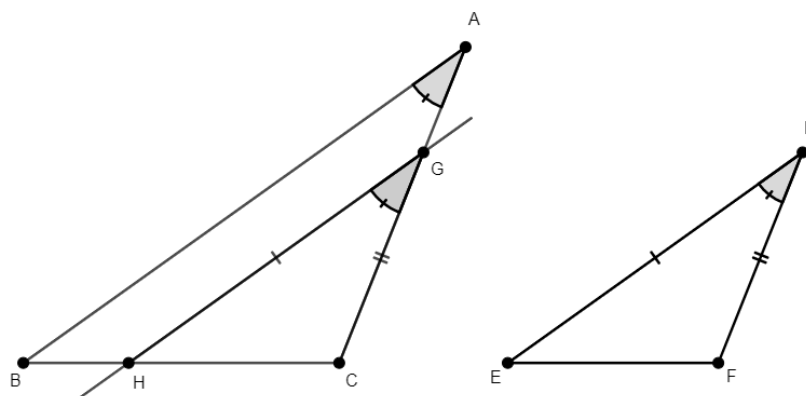
6.1.1.2 2º caso

“Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 198)

Demonstração:

“A demonstração é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 200). Para demonstrar, usaremos os triângulos ABC e DEF, com os pares de lados \overline{AB} e \overline{DE} , \overline{AC} e \overline{DF} homólogos e $\hat{A} \equiv \hat{D}$. Supondo que eles não são semelhantes, vamos conjecturar que $\overline{AC} > \overline{DF}$. Vamos traçar a reta \overleftrightarrow{GH} , cujo o ponto G é a intercessão da mesma com o lado \overline{AC} de tal forma que $\overline{GC} \equiv \overline{DF}$, e o ponto H, a intercessão de \overleftrightarrow{GH} com o lado \overline{BC} tal que $\overline{GH} \equiv \overline{DE}$ e também $\hat{G} \equiv \hat{D}$ (Figura 42).

Figura 42 – Representação do 2º caso de Semelhança



Fonte: Autor

De acordo com as hipóteses acima, podemos concluir, pelo caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado (LAL), que os triângulos CGH e FDE são congruentes. Esse resultado nos mostra que se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{D} \equiv \hat{G}$, então $\hat{A} \equiv \hat{G}$ e conseqüentemente as retas \overline{AB} e \overline{GH} são paralelas. Pelo Teorema Fundamental, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo CGH, que por sua vez é congruente ao triângulo DEF. Portanto, fica provado que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

6.1.1.3 3º caso

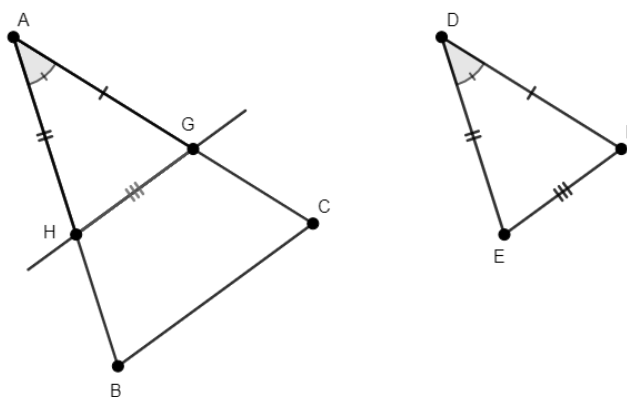
Como propõe Dolce e Pompeo (2013), “Se dois triângulos têm lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes”

Demonstração:

“A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LLL (em lugar de ALA [...])” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 200). Além disso, essa demonstração será uma adaptação da demonstração original, que se encontra no livro Geometria Euclidiana Plana, escrito por Barbosa (2012).

Dados dois triângulos, os quais chamaremos de ABC e DEF, vamos supor que os mesmos não sejam semelhantes e considerar que $\overline{AB} > \overline{DE}$. Traçando uma reta \overleftrightarrow{GH} no triângulo ABC interceptando os lados \overline{AB} e \overline{AC} , de modo que $\overline{AG} \equiv \overline{DF}$, $\overline{AH} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{HG} \equiv \overline{EF}$, constatamos que os triângulos AGH e DEF são congruentes pelo caso de congruência lado-lado-lado (LLL). Logo, $\hat{A} \equiv \hat{D}$. Essas construções geométricas se apresentam na Figura 43 abaixo.

Figura 43 – Representação geométrica da demonstração do 3º caso



Fonte: Autor

Como foi descrito na hipótese, os lados homólogos dos dois triângulos são proporcionais, ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Levando em conta a proporção acima e o fato de que $\overline{AG} \equiv \overline{DF}$, $\overline{AH} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{HG} \equiv \overline{EF}$ estabelecemos que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}.$$

Como $\hat{A} \equiv \hat{D}$, e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$, temos que, de acordo com o 2º caso, os triângulos ABC e AGH são semelhantes. Partindo disso e agregando o fato de os triângulos AGH e DEF serem congruentes, ficará demonstrado o 3º caso, pois

$$\Delta ABC \sim \Delta AGH \equiv \Delta DEF \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Conclusão: O triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF.

6.2 Potência

Iezzi (2016) define potenciação como sendo um número real a e um número natural n tal que

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \end{cases}$$

com $n \geq 1$.

Para demonstrarmos que $a^0 = 1$ e $a^n = a^{n-1} \cdot a$, provaremos primeiro que

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (n \in \mathbb{N}). (1)$$

com base nos escritos do autor Abramo Hefez (2009), porém, de forma comentada e com adaptações. A igualdade (1) é chamada de Propriedade Fundamental segundo Lima (1996). Para demonstrá-la, utilizaremos o primeiro princípio de indução finita. Fixando o número a e o m , vamos utilizar a indução em n . Para $n = 1$, temos que $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$ por definição. Supondo que para $n = k$, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ (hipótese de indução) seja verdadeira, vamos mostrar que para $n = k + 1$, a igualdade (1) seja verdadeira a partir da hipótese de indução. Sendo assim,

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot a^k \cdot a = (a^m \cdot a^k) \cdot a$$

Utilizando a hipótese de indução, temos que

$$(a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1} (2)$$

Assim, (2) é verdadeira para $n = k + 1$, o que prova a validade de $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Vamos agora provar que $a^0 = 1$ e $a^n = a \cdot a^{n-1}$ a partir da Propriedade Fundamental. Para tal, basearemos nos escritos de Elon Lages Lima (1996), fazendo adaptações e comentários das inferências realizadas.

Observe que $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$. Para que $a^n = a^n \cdot a^0$, devemos ter, obrigatoriamente, que $a^0 = 1$, em acordo com Lima (1996).

Para provar que $a^n = a \cdot a^{n-1}$, observe que $a^n = a^{0+n} = a^{1-1+n} = a^{1+n-1} = a \cdot a^{n-1}$. Portanto, $a^n = a \cdot a^{n-1}$.

O número a é chamado de base, n o expoente e a^n a potência.

Exemplos:

1. $2^3 = 2^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (2 é a base, o 3 é o expoente e 2^3 é a potência)
2. $5^4 = 5^3 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ (5 é a base, o 4 é o expoente e 5^4 é a potência)
3. $8^0 = 1$
4. $10^1 = 10$
5. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ (-3 é a base, o 3 é o expoente e $(-3)^3$ é a potência)
6. $(-4)^6 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 4096$ (-4 é a base, o 6 é o expoente e $(-4)^6$ é a potência).

6.3 Teorema de Euler

A demonstração do Teorema de Euler é baseada em minhas anotações realizadas durante a visualização de uma aula online²⁶, cujo título é Poliedros e o Teorema de Euler, ministrada pelo professor Eduardo Wagner do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O professor afirma que a demonstração feita por ele foi uma inspiração da demonstração original realizada por Zoroastro Azambuja Filho. Antes de provar a relação, o professor inicialmente escreve o teorema:

“Em todo poliedro convexo com F faces, V vértices e A arestas, $V-A+F=2$ ”
(POLIEDROS... 2015, grifos do autor)

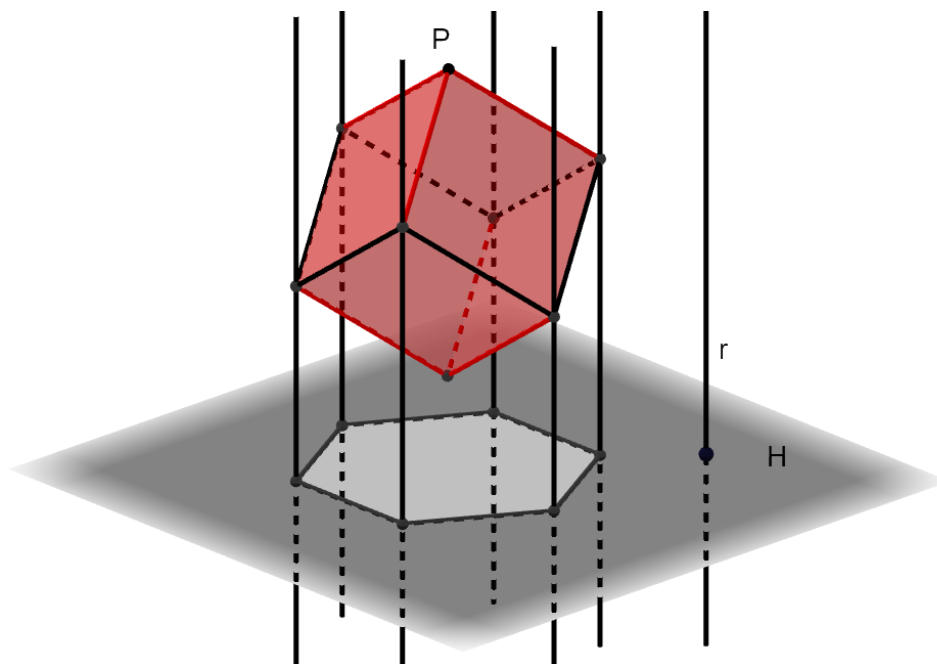
²⁶ Aula online e demonstração disponíveis em <<https://www.youtube.com/watch?v=ZP6X36LObr0>>

Para demonstrar o teorema, Poliedros... (2015) utilizou como exemplo um dodecaedro desenhado na lousa para fazer as considerações iniciais e assim demonstrar o teorema. Na demonstração que iremos reproduzir e comentar a partir das minhas anotações, utilizaremos um cubo, por ele ser um poliedro simples de se desenhar e visualizar suas propriedades (faces, vértices e arestas), construídas com o software Geogebra,

No vídeo em questão, o professor Eduardo Wagner estabelece algumas considerações iniciais a respeito de poliedros, tais como o conceito de poliedro, poliedro convexo, a contagem das arestas etc. No entanto, o vídeo não está na mesma ordem que as minhas anotações, como por exemplo, o professor, antes de demonstrar o teorema de Euler, aborda a fórmula para a contagem das arestas. Nas minhas anotações, abordaremos essa parte durante a demonstração.

Para demonstrar o teorema de Euler, considere um plano horizontal, designado por H , e uma reta r , perpendicular a esse plano (ver Figura 44). Seja um poliedro P , nesse caso um cubo, disposto no semiespaço acima do plano H e posicionado de tal forma que nenhuma de suas faces esteja paralela à reta r nem intercepte o plano H . Considere, no semiespaço contendo P , o conjunto de todas as retas paralelas a r e perpendiculares a H . Para proceder a demonstração com uma melhor compreensão, “imaginaremos o sol brilhando à pino”(AZAMBUJA, 2010, p. 2) sobre o semiespaço que contém o poliedro P . Ao incidir os raios solares sobre o poliedro, que nesse caso são as retas paralelas, notaremos que haverá uma sombra abaixo do mesmo. O contorno que forma essa sombra é proveniente de todas essas retas que interceptam P em um único ponto. Para compreender o dito, observe a Figura 44.

Figura 44 – Representação geométrica de Euler

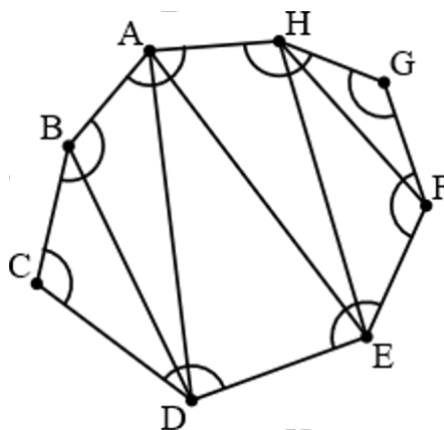


Fonte: Adaptado de Wagner (2015)

O conjunto das arestas de P (coloridas em preto) que formam o contorno da sombra será designado por *contorno aparente*, dado por k , e o contorno da sombra será designado como k' . Há retas que interceptarão o poliedro em dois pontos. A parte do poliedro formada por todos os pontos de intersecção superiores será chamada de parte iluminada de P; a parte formada pelos pontos de intersecção inferiores do poliedro será chamada de parte sombria de P. Vamos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro P.

6.3.1 Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Antes de prosseguir com a demonstração da relação de Euler, vamos estudar o comportamento de um polígono convexo em relação a soma dos seus ângulos internos. Para tal, considere um polígono qualquer com n lados. Ao retalharmos esse polígono em vários triângulos, como mostrado na Figura 45, obteremos sempre uma quantidade dos mesmos referente a $n - 2$.

Figura 45 – Polígono convexo dividido em triângulos

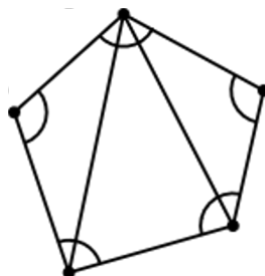
Fonte: Autor

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° , ou π radianos, obteremos que a soma dos ângulos internos desse polígono será dada por

$$S = \pi \cdot (n - 2)$$

onde S é a soma dos ângulos internos de um dado polígono convexo e n é o número de lados do referido polígono.

Tenhamos como exemplo um pentágono. Dividindo o mesmo em triângulos, como mostrado na Figura 46, teremos que a quantidade de triângulos corresponde a $5 - 2 = 3$.

Figura 46 – Pentágono

Fonte: Autor

A partir daí, se somarmos todos os ângulos de cada triângulo, chegaremos à soma dos ângulos internos desse pentágono, ou seja, se temos 3 triângulos, então a referida soma será $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Utilizando a fórmula, encontraremos que

$$S = 180^\circ(n - 2) \Rightarrow$$

$$S = 180^\circ(5 - 2) \Rightarrow$$

$$S = 180^\circ \cdot 3 \Rightarrow$$

$$S = 540^\circ.$$

Vamos agora prosseguir com a demonstração do Teorema de Euler utilizando a ideia da soma dos ângulos internos de polígonos convexos.

Seja n_i o número de lados da face i , com $1 \leq i \leq F$, pois o número de faces está entre 1 e F , a soma S dos ângulos internos de P será dada por:

$$S = \sum_{i=1}^F \pi(n_i - 2).$$

Se a primeira face do poliedro P é um polígono convexo com n_1 lados, teremos que a soma dos seus ângulos internos é $\pi(n_1 - 2)$. Se a segunda face de P é um polígono convexo com n_2 lados, a soma dos seus ângulos internos será dada por $\pi(n_2 - 2)$. Se a F -ésima face de P é um polígono convexo com n_F lados, a soma dos seus ângulos internos é $\pi(n_F - 2)$. Sendo assim, a soma de todos os ângulos internos do polígono P corresponde a soma dos ângulos internos de cada face individualmente, ou seja,

$$S = \underbrace{\pi(n_1 - 2)}_{1^{\text{a}} \text{ face}} + \underbrace{\pi(n_2 - 2)}_{2^{\text{a}} \text{ face}} + \cdots + \underbrace{\pi(n_F - 2)}_{F\text{-ésima face}}$$

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2) \Rightarrow \text{Colocando } \pi \text{ em evidência}$$

$$S = \pi[(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + \cdots + (n_F - 2)] \Rightarrow \text{Reagrupando os termos}$$

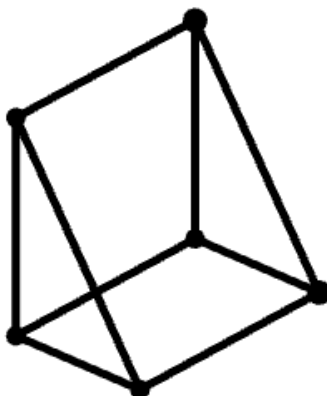
$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)]$$

Agora vamos fazer a contagem das arestas de P .

6.3.2 Contagem das arestas de um poliedro convexo

Antes de dar prosseguimento com a demonstração do Teorema de Euler, vamos analisar um comportamento que os poliedros convexos apresentam ao fazer a contagem das suas arestas. Para tal, observe o poliedro abaixo (Figura 47).

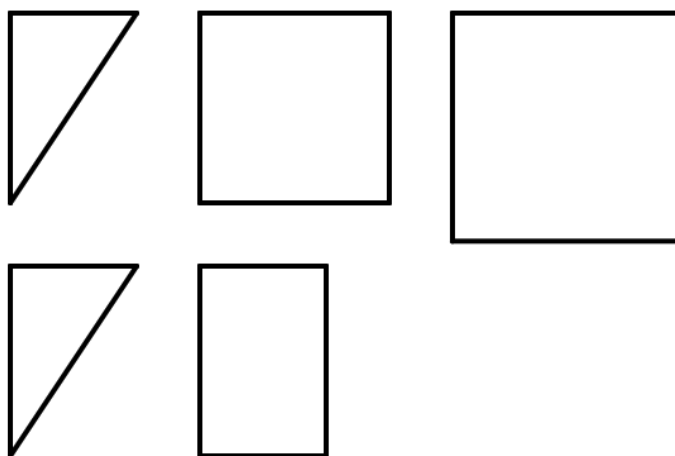
Figura 47 – Poliedro A



Fonte: Autor

Vamos contar as arestas do poliedro, que será chamado de poliedro A. Logo, teremos um total de 9 arestas. Imaginemos agora esse poliedro planificado e com suas faces separadas umas às outras, como mostrado na Figura 48.

Figura 48 – Faces do poliedro A



Fonte: Autor

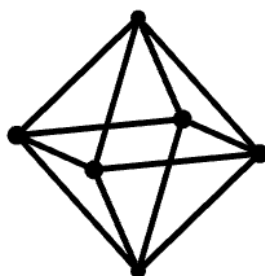
Vamos achar o número total de lados dos polígonos provenientes das faces do poliedro A. Para tal, vamos contar quantos triângulos existentes e em seguida, multiplicar por 3, que é a quantidade de lados de um triângulo e, em seguida, contar quantos retângulos existentes e multiplicar por 4, que é a quantidade de lados de um retângulo. No caso acima, se temos 2 triângulos e 3 retângulos, o número total de lados será

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18$$

Observe que o número total de lados é 18, e o número de arestas do poliedro é 9.

Seja agora um poliedro convexo B (Figura 49). Vamos agora fazer a contagem das suas arestas.

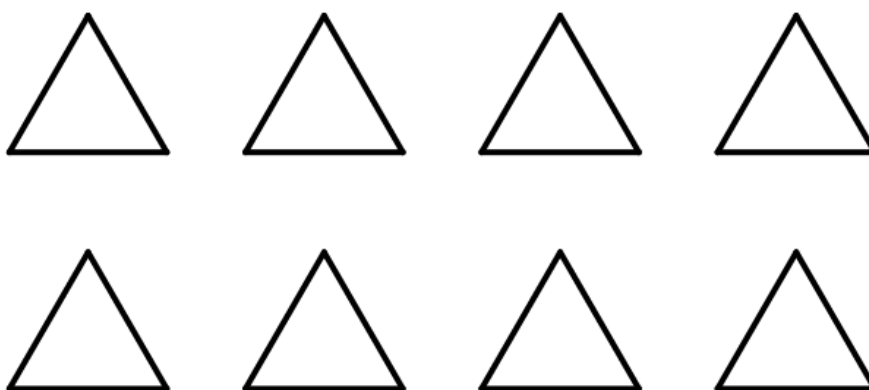
Figura 49 – Poliedro B



Fonte: Autor

Fazendo a contagem das suas arestas, teremos que o poliedro B apresentará um total de 12 arestas.

Planificando o poliedro B e separando as suas faces umas às outras, obteremos 8 faces triangulares (Figura 50).

Figura 50 – Faces do poliedro B

Fonte: Autor

Fazendo a contagem total dos lados, a partir do raciocínio feito para o poliedro A, teremos que $8 \cdot 3 = 24$.

Nesse exemplo temos que o poliedro B apresenta 12 arestas, com um total de 24 lados.

No poliedro A, encontramos um total de 18 lados ao separar as suas faces e 9 arestas. No poliedro B, encontramos um total de 24 lados ao separar as suas faces e 12 arestas. A partir desses exemplos, observamos que ao somar todos os seus lados das faces separadas, obteremos sempre o dobro do número de arestas do poliedro em questão. Ou seja, temos que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n,$$

onde F_n é o número de faces com n lados e A é o número total de arestas do poliedro.

Voltando à demonstração do Teorema de Euler e levando em conta que a soma total das faces separadas de um poliedro é igual ao dobro do número de arestas, temos que

$$n_1 + n_2 + \dots + n_F = 2A,$$

pois a somatória do primeiro membro da igualdade refere-se ao número total de lados do poliedro P. Com base nisso, teremos que

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)] \Rightarrow \text{Substituindo } (n_1 + n_2 + \dots + n_F) \text{ por } 2A \text{ e}$$

$2 + 2 + \dots + 2 = 2F$, pois o 2 aparece F vezes.

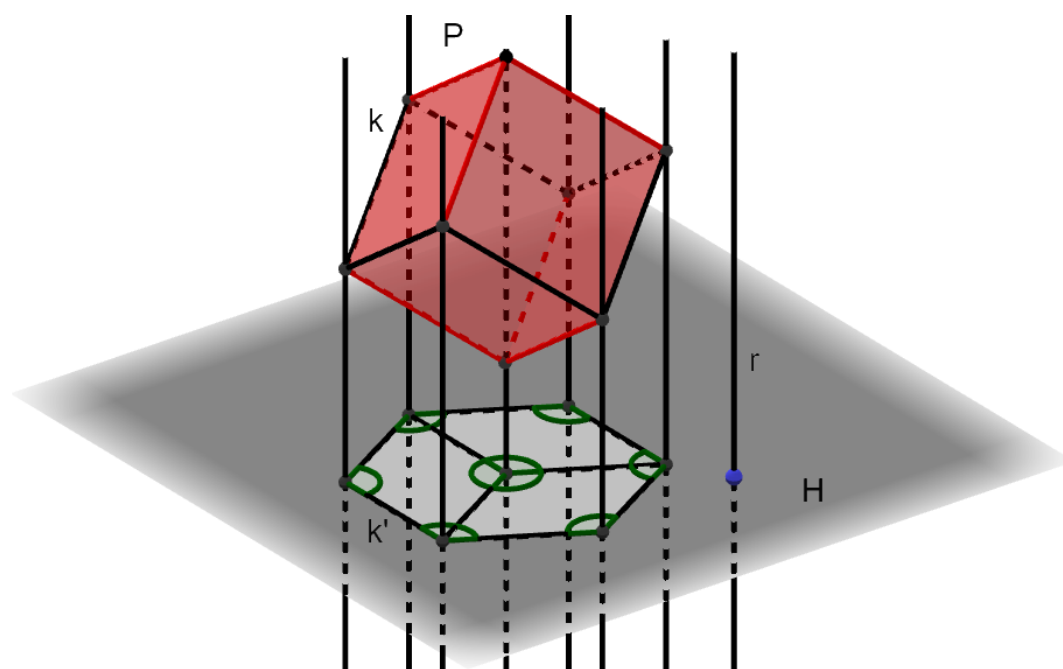
$$S = \pi[2A - 2F] \Rightarrow \text{Colocando 2 em evidência}$$

$$S = 2\pi(A - F). \quad (1)$$

6.3.3 Projeções das partes iluminadas e sombrias e o contorno aparente

Vamos agora observar a projeção da parte iluminada do poliedro P e o contorno aparente do mesmo. Visualizando a sua projeção (Figura 51), vemos o contorno aparente k e a projeção das faces iluminadas de P . Dentro de toda essa projeção, a soma dos ângulos internos não se altera. Observando a projeção da parte sombria de P (Figura 52) e o contorno aparente k' , a soma dos ângulos internos também não se altera.

Figura 51 – Projeção da parte iluminada de P , simulada em 3D



Fonte: Autor

Figura 52 – Projeção da parte sombria de P, simulada em 3D

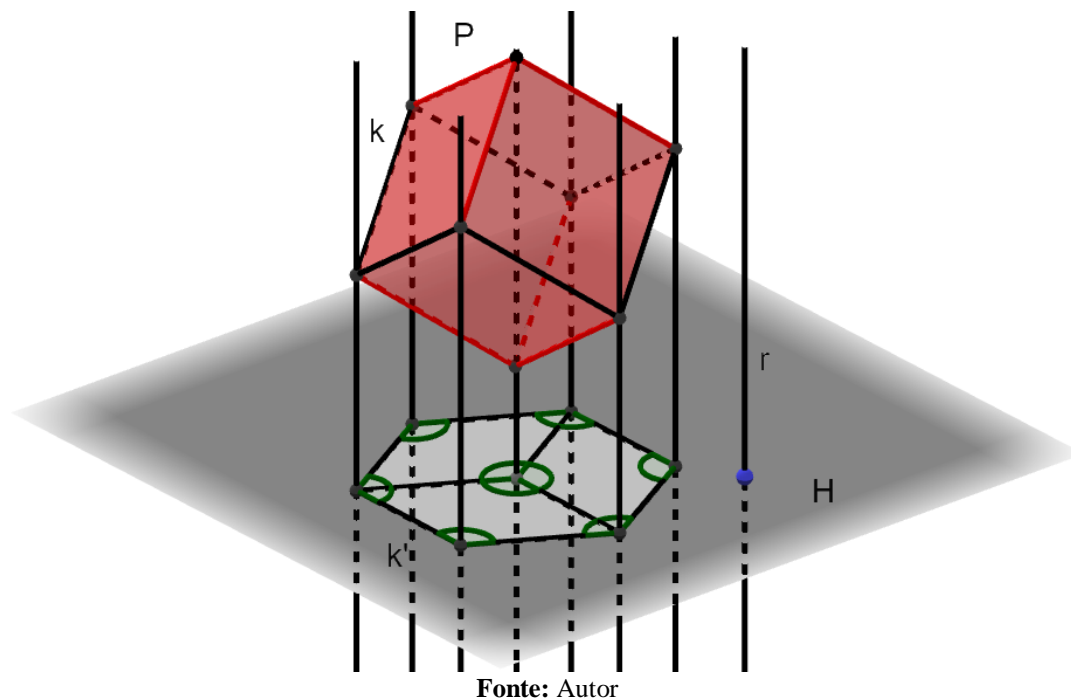
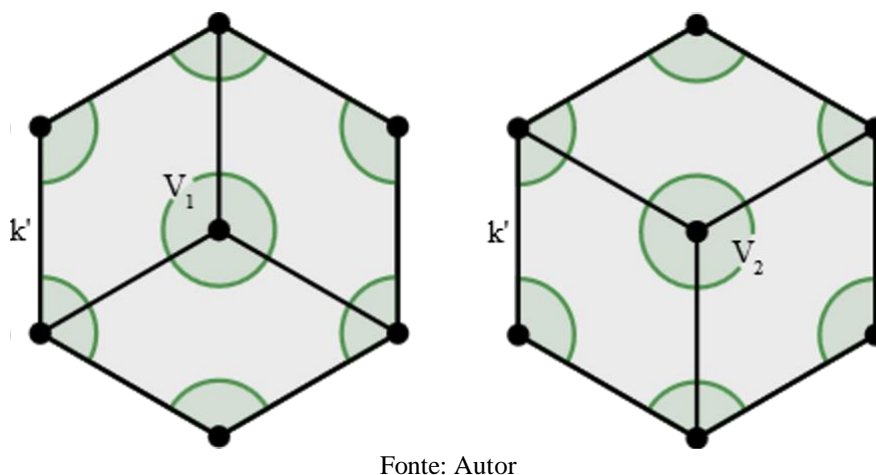


Figura 53 – Vista de cima da parte iluminada e sombria de P, respectivamente



Sejam V_0 o número de vértices de k' , V_1 o número de vértices iluminados (Figura 53) e V_2 o número de vértices sombrios (Figura 53). Vamos somar os ângulos internos da parte iluminada, sendo essa soma indicada por S_1 . Para efetuar essa soma, adicionaremos o valor da soma dos ângulos internos do contorno ($\pi(V_0 - 2)$) com a soma dos ângulos em volta dos vértices iluminados, para este poliedro, teremos 1 vértice iluminado, ou seja, $(2\pi V_1)$ obtendo assim:

$$S_1 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1.$$

Vamos somar os ângulos internos da parte sombria, que será indicada por S_2 . Utilizando o mesmo raciocínio para encontrar S_1 encontraremos:

$$S_2 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2.$$

Assim:

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow \text{Substituindo } S_1 \text{ e } S_2 \text{ pelas expressões encontradas}$$

$$S = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2 \Rightarrow \text{Agrupando os termos semelhantes}$$

$$S = \pi(V_0 - 2) + \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1 + 2\pi V_2 \Rightarrow \text{Reduzindo os termos semelhantes}$$

$$S = 2\pi(V_0 - 2) + 2\pi(V_1 + V_2) \Rightarrow \text{Evidenciando } 2\pi$$

$$S = 2\pi[V_0 - 2 + V_1 + V_2].$$

Como $V_0 + V_1 + V_2 = V$, pois a soma dos vértices do contorno com os iluminados e com os sombrios é o número total de vértices de P. Assim:

$$S = 2\pi[V - 2] \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) teremos que

$$V - 2 = A - F \Rightarrow \text{Aplicando o princípio aditivo}$$

$$V - A + F = 2.$$

Como queríamos demonstrar.

7 O SENTIDO DO DESCRITO E ANALISADO

O sentido que se fez até o presente foi que o fazer origami e a Matemática se relacionam, de maneira geral, como sendo uma das compreensões da Matemática em torno do contexto artístico, visto que o origami como arte foi uma ferramenta auxiliar para eu entender o mundo da Matemática. A relação origami-Matemática também abriu portas para que eu pudesse compreender os conteúdos escolares de Matemática que até então eram difíceis, tais como polígonos convexos, algumas relações nos triângulos, noções de espaço, etc.

Nos parágrafos seguintes, destacarei o sentido individual de cada experiência vivida enfatizada ao longo desse trabalho. O sentido delas, como mencionado anteriormente, têm algo a ver, de certa forma, com o entendimento da Matemática.

Na primeira experiência, as potências de base 2 me ajudaram a compreender que se pode ensinar a noção de potenciação apenas com uma folha de papel e com dobras simples, além de progressões geométricas.

Na experiência do triângulo equilátero, aprendi que podemos construir o mesmo sem o uso de régua e transferidor, assim como também posso encontrar a altura, e os pontos notáveis, tais como o ortocentro, o baricentro e o circuncentro, simplesmente a partir de dobras no triângulo equilátero. Isso seria uma das possibilidades para se trabalhar dentro do ambiente educacional.

O teorema de Haga proporcionou-me a esclarecer que seria possível dividir um quadrado de papel em partes com numeração ímpar. Isso poderia ser uma ferramenta necessária para se construir um panfleto, pois o mesmo é dividido em três partes iguais. Uma outra aplicação é a resolução do problema da duplicação do cubo via origami.

Os poliedros em origami foram instrumentos importantes para que eu pudesse compreender outras nomenclaturas de sólidos geométricos como, por exemplo, não sabia o que era um dodecaedro e muito menos do fato de ele ter 12 faces pentagonais. O mesmo se aplicaria ao octaedro, o tetraedro, o icosaedro etc. O único sólido que lembrava era o cubo, também chamado de hexaedro.

Os problemas gregos foram de certa forma uma ponte de comunicação entre mim e a História da Matemática que até então não tinha conhecimento, somente durante a minha graduação. A possibilidade da duplicação do cubo e a trissecção do cubo via origami foi uma resposta da minha inquietação originada a partir do começo da minha graduação.

Essas experiências com o origami foram importantes devido ao fato de eu poder aplicá-las no ambiente educacional, pois elas envolvem Matemática, com a presença dos aspectos da Geometria. Com isso poderia elaborar oficinas ou minicursos com origami como porta de entrada para o saber matemático. Para exemplificar, podemos construir sólidos geométricos que são complicados de se desenharem no quadro, ou que os alunos não saberiam interpretar a noção espacial ao olhar uma figura de um poliedro no livro didático. Ou então poderíamos estudar progressões aritméticas de razão 2 utilizando a minha primeira experiência, que nesse caso estaria enfatizando a matemática no contexto social. Também poderíamos estudar o triângulo equilátero de acordo com a minha segunda experiência apenas com o origami como, por exemplo, encontrar a altura, a bissetriz ou a mediana e consequentemente os pontos notáveis (ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro) apenas dobrando o triângulo.

Analisando as experiências vivenciadas e me valendo do processo de percepção, posso notar uma relação de dependência entre o origami e a Matemática, pois no contexto das vivências, o origami ajudou a abrir uma outra perspectiva para a matemática, que é a possibilidade de entender e praticar essa ciência envolvendo alguns dos aspectos da realidade, que nesse caso são os processos de construção em origami, tornando-se assim um artifício lúdico de aprendizagem. Para o origami se constituir como tal, houve a necessidade de uma presença física e um contato com a folha de papel através da percepção e dos órgãos sensoriais.

REFERÊNCIAS

- ALES BELLO, Angela. **Introdução à Fenomenologia**. Belo Horizonte: Spes Editora, 2017.
- ALES BELLO, Angela. **Introdução à fenomenologia**. Bauru: Edusc, 2006. 108 p. Tradução Ir. Jacinta Turolo Garcia e Miguel Mahfoud. Disponível em: <https://geisamoterani.files.wordpress.com/2014/05/introduc3a7c3a3o_a_fenomenologia_angela_ales_bello-31.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2019.
- AZAMBUJA, Zoroastro. **Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos**. 2010. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/elon/rpm3.pdf>>. Acesso em: 21 jun. 2019.
- BARBOSA, João Lucas Marques. Semelhanças de Triângulos. In: BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. Cap. 7. p. 127-146.
- BARRETO, Carlos Alberto. **A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica**. 2013. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/6503/1/CARLOS_ALBERTO_BARRETO.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2018.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análises**. 2011. Disponível em: <http://www.mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/Pesquisa%20qualitativa%20fenomenologia.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2019.
- BIS, Keila. **Tsuru: conheça esta figura do origami e aprenda como fazer um**. 2013. Disponível em: <<https://casa.abril.com.br/bem-estar/tsuru-conheca-esta-figura-do-origami-e-aprenda-como-fazer-um/>>. Acesso em: 19 abr. 2019.
- DOBTRAS básicas do origami. 2019. Disponível em: <<http://www.chine-culture.com/pt/origami/dobras-b%C3%A1sicas.php>>. Acesso em: 19 abr. 2019.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Semelhança de Triângulos e potência de ponto. In: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. Cap. 13. p. 192-207.
- HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>>. Acesso em: 17 jun. 2019.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Potências e raízes. In: IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar 2: logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013. Cap. 1.
- LIMA, Elon Lages. Revisão. In: LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1996. Cap. 2, p. 6.

MITCHELL, David. **Electra**. 2017. Disponível em:

<<http://www.origamiheaven.com/pdfs/electra.pdf>>. Acesso em: 19 abr. 2019.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami: História de uma Geometria Axiomática**.

2008. Disponível em:

<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_de_uma_Geometria_Axiomatica.pdf>. Acesso em: 21 jun. 20.

POLIEDROS e o Teorema de Euler. PROFMAT. **Youtube**. 28 abr. 2015. 77min53s. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ZP6X36LObr0>>. Acesso em: 21 jun. 2019.

UENO, Thaís Regina. **Do origami tradicional ao origami arquitetônico: uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo**.

2003. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Desenho Industrial, Universidade Estadual

Paulista, Bauru, 2003. Disponível em: <[https://www.faac.unesp.br/Home/Pos-](https://www.faac.unesp.br/Home/Pos-Graduacao/Design/Dissertacoes/thaisueno.pdf)

[Graduacao/Design/Dissertacoes/thaisueno.pdf](https://www.faac.unesp.br/Home/Pos-Graduacao/Design/Dissertacoes/thaisueno.pdf)>. Acesso em: 16 nov. 2018.