UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CURSO DE MATEMÁTICA CÂMPUS ARAGUAÍNA

THIAGO LIMA DE MORAIS

NOVES FORA

Araguaína-To

2019

THIAGO LIMA DE MORAIS

NOVES FORA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Raimundo Cavalcante Maranhão Neto

Araguaína-To
2019

THIAGO LIMA DE MORAIS

NOVES FORA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Campus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

DATA DA APROVAÇÃO _/_/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. RAIMUNDO CAVALCANTE MARANHÃO NETO - Orientador
UFT

Prof. Dr. ALVARO JULIO YUCRA HANCCO
UFT

Prof. Me. ROGÉRIO DOS SANTOS CARNEIRO
UFT

ARAGUAÍNA-TO

2019

Dedico este trabalho à toda minha família e amigos, principalmetes aqueles que sempre me perguntaram: Thiago e o TCC?

Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer à Deus pelo dom da vida e da sabedoria. Agradecer pela bela família que me concedeu, por nascer de uma mãe guerreira, de um pai trabalhador, e ser criado numa cidade pacata do interior do Tocantins. Há Deus toda honra e glória.

Agradeço ao Professor Dr. Jamur Andre Venturin, que me orientou neste trabalho como coorientador, além de um grande profissional é um grande amigo, obrigado.

Agradeço a Deus mais uma vez por todos os amigos que tenho ao longo de vida, alguns que partiram outros ficaram, e muitos estão comigo. Especialmente a meu grande amigo e parceiro de aluguel João Marcos que me ajudou a ser uma pessoa mais humana, aos meus amigos de sala, Kelly, Juliana, Mario, Daniel, Evanilde, Mailson, Joyce, entre outros que não puderam concluir o curso, quero dizer que jamais esquecerei vocês, principalmente da união e das piadas e sorrisos que sempre nós uniram muito.

Agradeço aos meus amigos de natação, pelas viagens competindo especialmente: Matheus Pimentel (camboja), Hebert (rapadura), Hudson (hubas), Iuri (Nariz). Ao meu grande e especial treinador Romadson, vulgo malhação, que me ensinou além de nadar a ser uma pessoa melhor, e é sempre dele os melhores conselhos de vida. Ensinou-me a superer meus limites , suas frases ecoam na minha mente cada vez que entro em uma piscina para competir; “quando não tiver mais forças para nadar, nade com a alma”, “limites são feitos para ser superados”, “para ser o melhor, precisa vencer você mesmo”.

Agradeço aos meus professores, especialmente ao Raimundo Cavalcante, que tive o prazer de assistir suas aulas e dividir seus conhecimentos, principalmente aqueles que mostraram como a educação é algo valioso e preciso em todo lugar.

Quero agradecer ao meu grande amigo Emaycon Maia, pela nossa amizade há mais de 15 anos, foi meu irmão mais velho que nunca tive, aprendi a ser honesto, respeitoso espelhado nele e sua família, como sua mãe Oreste, seus irmãos Emerson, Ercules, Emanuel Jr, e seu falecido pai, Emanuel Maia.

"A Matemática possui uma força maravilhosamente capaz de nos fazer compreender muitos mistérios de nossa fé". (SÃO JERÔNIMO)

Resumo

A prova dos noves ou mais conhecida popularmente como noves fora é um método que foi bastante utilizado no século passado, sendo encontrado em livros didáticos e tabuadas. Pessoas que trabalhavam frequentemente com matemática exercia deste método para verificação rápida de seus cálculos. Ao final do século XX com a evolução da tecnologia e o surgimento de outros métodos de verificação, o noves fora não foi mais apresentado nos livros didáticos, e assim aos poucos deixado de ser apresentado em sala de aula, ficando apenas como um contexto social. Os primeiros registros sobre o noves fora foi no século IX na aritmética árabe, sendo percorrida por toda Europa, até chegar nos livros didáticos brasileiros. Entender a matemática que está envolvida neste método ajuda-nos a ter compreensão do motivo de não ser mais utilizado nos livros didáticos e assim na escola. O noves fora é o resto da divisão de um número por 9, ficando no intervalo de $\{0, \ldots, 8\}$, outra forma de encontrar o noves fora é somando todos seus algarismos de um número e dividi-lo por 9. Neste método há falhas, por isso é um dos motivos que deixou de ser visto em livros didáticos e consequentemente nas escolas, ficando apenas no contexto social.

Palavras-chave: Livro didático, Cálculos, Matemática, Escola.

Abstract

The nines test or better known popularly as nines away is a method that was widely used in the last century, being found in didactic books and multiplication tables. People who often worked with math used this method to quickly check their calculations. The nines test or better known popularly as nines away is a method that was widely used in the last century, being found in didactic books and multiplication tables. People who often worked with math used this method to quickly check their calculations. At the end of the twentieth century with the evolution of technology and the emergence of other methods of verification, the nines out was no longer presented in textbooks, and thus gradually ceased to be presented in the classroom, but only as a social context. The first records about nines abroad were in the ninth century in Arabic arithmetic, being traversed throughout Europe, until reaching the Brazilian textbooks. Understanding the math that is involved in this method helps us understand why it is no longer used in textbooks and so at school. Nines out is the rest of dividing a number by 9, being in the range of 0, ..., 8, another way to find nines out of a number is by adding all its digits and dividing it by 9. This method has flaws, so it is one of the reasons that is no longer seen in textbooks and consequently in schools, being only in the social context.

Keywords: Didactic books, Calculations, Math, School.

Lista de Figuras

5.1 Prova da Adição 48
5.2 Prova da Subtração 51
5.3 Prova da Multiplicação 52
5.4 Prova da Divisão 53

Sumário

1 Introdução **13**

2 Um pouco de história **14**

2.1 Um pouco de Educação Matemática 14

2.2 Livro Didático 15

2.3 A prova dos Nove 19

3 Definições e resultados básicos **22**

3.1 Divisibilidade nos Números Naturais $\mathbb{N}$ 22

3.1.1 Algoritmo da divisão euclidiana 24

3.2 Sistemas de Numeração e Base 10 26

4 Divisibilidade nos Números Natuais $\mathbb{N}$ **29**

4.1 Introdução 29

4.2 Critérios de Divisibilidade 32

4.2.1 Divisibilidade por 2 32

4.2.2 Divisibilidade por 3 33

4.2.3 Divisibilidade por 4 34

4.2.4 Divisibilidade por 5 35

4.2.5 Divisibilidade por 6 35

4.2.6 Divisibilidade por 7 37

4.2.7 Divisibilidade por 8 38

4.2.8 Divisibilidade por 9 39
4.2.9 Divisibilidade por 10 40
4.2.10 Resumo de Tabela 40

5 A prova dos nove ou Noves fora **42**

5.1 Introdução 42
5.2 Noves fora 43
5.3 Como e por que funciona? 44
5.3.1 Prova dos Nove na Adição 46
5.3.2 Prova dos Nove na Subtração 48
5.3.3 Prova dos Nove na Multiplicação 51
5.3.4 Prova dos Nove na Divisão 52
5.4 Encontrando falhas na prova 53
5.5 Pode existir outro número que forme uma prova? 56
5.6 O desaparecimento do noves fora 57

6 Principais Inferências **59**

Capítulo 1

Introdução

A prova dos nove, ou noves fora como é mais conhecido popularmente, foi um método utilizado no século XX pelos professores de Matemática para verificação de cálculos, podendo ser encontrados em conteúdos dos livros didáticos e tabuadas (LACAVA, 2016).

O noves fora não foi apenas utilizado em sala de aula, também era comum aplicar este método no comércio, para não obter erros em seus cálculos. Em 1986 o comércio da borracha crescia exponencialmente e os comerciantes utilizavam o noves fora como forma rápida de concluir as verificações de cálculo das vendas realizadas (BEZERRA, 2013).

No início do século XX utilizavam-se a prova real, ou prova dos nove, para conferir alguns cálculos. Com o passar dos anos o conteúdo prova dos nove deixou de ser ensinada nas escolas e o conteúdo foi retirado dos livros didáticos atuais, por causa do avanço da tecnólogia e de outros métodos (LACAVA, 2016).

Segundo Bezerra (2013), mesmo a prova dos nove não sendo mais usada em sala de aula no seculo XXI, é um método que ainda é utilizado por alguns comerciantes para verificar se existem erros realizados nas quatro operações. Com base nessa afirmação, o seguinte trabalho tem como objetivo investigar a retirada da prova dos nove do livro didático.

Capítulo 2

Um pouco de história

2.1 Um pouco de Educação Matemática

Conhecer como surgiram os primeiros livros didáticos e as primeiras aulas de Matemática no Brasil, ajudá-nos a compreender como avançaram até dias atuais. Valente (2007) fala que os apontamentos da história da matemática são fundamentais para a história da educação matemática e estão interligadas uma na outra. Por isso é importante saber sobre o rigor que a historicidade possui. "[...] a história, de que ela é feita de fatos, e que saber história é conhecer os fatos históricos. Serão também os fatos históricos o divisor de águas entre o ensino de história e a pesquisa histórica.". (VALENTE, 2007, p. 30)

Entende-se de história da educação matemática "[...] a produção de uma representação sobre o passado da educação matemática, não qualquer representação, mas aquela construída pelo ofício do historiador" (VALENTE, 2013, p.25). Os fatos históricos são, atualmente peculiaridades deixadas no passado, assim o historiador trabalha com elas para encontrar fatos deixados no século passado, como afirma Valente(2007). Sendo que um fato distinguisse de um resultado na construção de um raciocínio a partir de marcas do passado.

Ser historiador não é apenas partir de algo que está relacionado ao presente e investigar o seu passado, precisa conhecer os fatos históricos e depois explicá-lo envolvendo no discurso coerente, sendo que a importância do historiador não está preso a um fato específico, mas olhando os diversos comportamentos daquela época.

> Esses historiadores não consideravam que os fatos históricos estivessem prontos desde o início. Ao contrário, dedicaram seu trabalho, em grande parte, à explicação de como eles deveriam ser construídos. No entanto, uma vez construído, permaneceriam fato definitivamente. Essa é a origem da ideia do trabalho histórico pesquisador. Os primeiros utilizam os fatos construídos pelos segundos. (VALENTE, 2007, p. 30)

Para Lacava (2015) o historiador não pode-se prender a fatos que são dados como verdadeiros sem investigar o que ocorre na verdadeira história, compreendendo as relações sociais da época existente.

> [...] a prática histórica é prática científica na medida em que incluem a construção de objetos de pesquisa, o uso de uma operação específica de trabalho e um processo de validação dos resultados obtidos, por uma comunidade. (CERTEAU 1982, apud VALENTE, 2007, p. 35)

Para utilizar a história como fonte de pesquisa, deve-se consolidar critérios rigorosos para que a história no passado tenha consistência na investigação. Para Valente (2008) o historiador deve procurar métodos para a construção de sua base no passado, tendo ele como objeto para sua investigação.

> O uso de uma operação específica de trabalho na construção de objetos históricos significa, dentre outras coisas, que o trabalho do historiador não se limita à construção de uma simples narração. Ele inclui um trabalho de identificação e construção de fontes, dos mais diversos modos (estatístico, micro histórico, etc.) que sofrerão processos interpretativos, e que darão consistência ao objeto histórico em construção (VALENTE, 2007, p.36).

2.2 Livro Didático

Segundo Valente (2008), a Matemática é umas das disciplinas que está mais ligada ao passado com o livro didático, pois grande parte dos profissionais da educação utiliza-o como guia para preparação das aulas.

> Em realidade, o que mais comumente se tem feito, nas pesquisas com livros didáticos de matemática, é o seu uso para estudo de uma temática particular: um determinado tema, assunto ou item de conteúdo matemático torna-se objeto de estudo histórico, através de livros didáticos de outros tempos escolares (VALENTE 2008, p. 144).

Para Valente (2008) os livros didáticos começaram a ser utilizados com o propósito de ajudar o exército brasileiro no século XVIII, pois grande parte não tinha capacidade de identificar a quantidade de munição que continha em um canhão de guerra, pois as munições ficavam alojadas em forma geometrica de pirâmide. Por isso, foi instituído curso chamado de Artilharia, qualificando os soldados para ter noções de geometria, e com esse novo curso surgiu as primeiras aulas de matematica e com essas aulas o primeiro livros didáticos.

> As intenções portuguesas relativamente à formação de militares, construtores de fortificações e adestrados na artilharia foram finalmente realizadas quando no deslocamento de um militar português, José Fernandes Pinto Alpoim, ao Brasil. Foi justamente graças à Ordem Régia de 19 de agosto de 1738 que o ensino militar conheceu uma nova fase: tornou-se obrigatório a todo oficial. Em outros termos, nenhum militar poderia ser promovido ou nomeado se não tivesse aprovação na Aula de Artilharia e Fortificações (VALENTE, 2008, p.140).

Valente (1999). relata que Alpoim escreveu duas obras intitulas: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, dois livros que foram fundamentais para seu curso de artilharia, e assim sendo usados como os primeiros livros de matemática no Brasil.

> Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (VALENTE 2008, p.142).

Para Valente (2008) depois da independência do Brasil os filhos dos barões, que antes estudavam nas universidades em Portugal começaram a sugerir a Câmara e Senado para a criação de universidades nacionais, no que gerou uma discursão para essa criação, pois não tinham uma forma clara de ingresso, forma de acesso para as universidade seria passar por um teste de algumas matérias, dentre elas a geometria.

> Terminadas as discussões, ficou estabelecido que os candidatos deveriam prestar exames de língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e geometria. Com a entrada da geometria como um dos exames parcelados aos Cursos Jurídicos, a matemática muda oficialmente de status (VALENTE, 2008a, p. 15).

A matemática se eleva de ensino técnico para ensino instrumental e torna-se uma disciplina a ser estudada com mais rigor. Ainda para Valente (2008) constitui-se a importância das novas escolas e universidades, que possuem esse modelo de ensino a rigor, uma das escolas principais que se teve naquela época foi o Colégio Dom Pedro II, que ajudaria na formação do que atualmente é o ensino médio. Com todo esse avanço na educação, começaram a ser feitas apostilas que ajudariam à ingressar nas universidades.

> A preparação lançava mão das apostilas elaboradas a partir dos pontos. Saber cada um deles de cor era o modo de ser bem-sucedido no ingresso ao ensino superior. Essa era a tarefa maior de nosso parente profissional dos tempos de preparatórios. Cada faculdade selecionava os pontos a serem estudados pelos candidatos dentro do conjunto das disciplinas. Um a um, os exames deveriam ser eliminados. A cada um deles, um certificado. De posse do conjunto de certificados, que atestavam a conclusão das disciplinas, o candidato ganhava o direito de matrícula no ensino superior (VALENTE, 2008a, p. 18).

Com a criação da escola Dom Pedro II, que se tornou um marco de uma das melhores escolas do país naquela época. O professor Euclides Roxo que logo após ser eleito como diretor da escola, mudou a forma de elaborar os livros didáticos de Matemática. Com esses novos livros didáticos, Roxo ajudou a escola ser uma das melhores para o ingresso nas universidades. Valente (2008) ressalta que no ano de 1929 Roxo foi um dos pioneiros no Brasil na forma de ensinar geometria com álgebra sendo que o conteúdo de geometria ficou como algo inovador, escrevendo em seus livros métodos e caminhos para poder resolver determinada questões, por meio do método dedutivo, que pode ajudar os alunos que hoje são do fundamental I a aprender uma nova forma de geometria. Com esse novo avanço de compreender a Matemática surgiram novos autores de livros didáticos que ajudaram a estudar matemática mais de uma forma.

> Concluiu também que, apesar do novo programa de ensino de Matemática preceder o lançamento da obra Curso de Mathematica Elementar, ambos – programa e livro – foram feitos concomitantemente, pelo mesmo autor. Assim, o primeiro programa de ensino para a nova disciplina seguiu a organização da obra de Roxo (VALENTE, 2008, p.150).

O livro de Euclides Roxo foi lançado na segunda quinzena do mês de setembro de 1929. Com esse novo método de Roxo de ensinar começou a questionar uma nova forma de ensino de Matématica. Para Valente (2003) o colégio Dom Pedro II recebe dois ofícios, o primeiro do Departamento Nacional de Ensino, o segundo Associação Brasileira de Educação, ambos apoiando as modificações do ensino Matemática, aprovando a iniciativa de Roxo com bases nos seus livros. Isso abriu portas para outros professores escrever livros com outras formas de ensinar Matemática, um desses professores foi Osvaldo Sangiorgi.

> Um dos principais livros que revolucionaram a Matemática dando a ela um novo status, foi o livro de Osvaldo Sangiorgi, segundo Valente (2008) uma das formas teóricos -metodológicos com mais rigor "Trata-se do volume 1 de Matemática – curso moderno". (VALENTE, 2008, p. 149)

Roxo e Sangiorgi tomaram lugar de destaque na época, pois produziram livros de forma única, ou seja, diferentes das formas padrões de livros escritos de matemática. De acordo com Valente (2007) no século XX eram escritos muitos livros conhecidos como "vulgatas", ou seja, quando um livro é escrito com conteúdo e exercícios similares aos outros livros já escritos, o que realmente diferenciavam eram alguns exemplos. Os livros de Sangiorgi e de Roxo trouxeram métodos e compreensões que ajudariam as diversas formas de como lidar com a matemática.

> Importante fazer análise de como os livros didáticos mostram os conteúdos e estabelecem uma sequências de aprendizagem, precisamente para o professor, pois sabemos que muitas vezes o livro é o único auxílio no preparo de suas aulas. "exercem enorme influência tanto na construção de conhecimentos e práticas docentes, como na construção dos conhecimentos discentes (COUTINHO, 2016, p. 258).

É de total sabedoria que os livros didáticos são uma ferramenta bastante utilizada em dias atuais nas instituições de ensino básico, e são a partir deles que os professores seguem um planejamento para suas aulas.

> [...] o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente. Ele é que indicava a amplitude, a sequência e, até mesmo, o ritmo de desenvolvimento do programa de matemática. Isso tudo, além de sua função básica como um importante instrumento auxiliar de aprendizagem e de ensino na sala de aula (DANTE, 1996, p.83).

2.3 A prova dos Nove

Para Eves (2004) o noves fora foi apresentado em obras muitas antigas da aritmética árabe nos trabalhos de Al-Khowarismi, que viveu no século IX, este método foi bastante utilizado na Europa. O Brasil já sendo um país independente, precisava de seus primeiros livros didáticos, e começaram a buscar os mesmos traduzidos da Europa.

> Essa regra apareceu inicialmente em obras de aritméticas árabes. Depois seu uso foi difundido por meio das aritméticas que circularam na Europa. O uso dessa regra chegou aos livros didáticos. No Brasil, nos livros no início do século XX (RIBEIRO 2014, p. 05).

Para Miguel (2010) esta prova tem o propósito de verificar uma forma de fazer correção de algum cálculo realizada por escrita, teria sido inclusiva como conteúdo escolar e ao longo do decorrer do desenvolvimento da Matemática foi sendo trocado por novos métodos.

> Partimos do pressuposto inicial de que, para esclarecer a nossa questão de investigação, melhor seria conceber a "prova" dos nove como uma prática sociocultural de verificação da correção de um cálculo escrito, e não como um conteúdo escolar autônomo e interno que, tal como se postula na perspectiva de Chervel (1990), teria sido criado "na escola, pela escola e para a escola", ou então, como um suposto saber a ensinar que, tal como se postula na perspectiva de Chevallard (1991), teria sido transposto didaticamente da esfera sábia para o contexto escolar (MIGUEL, 2010, p.05).

Desta forma, a prova dos noves é uma regra de verificação de cálculo nas operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão) sendo um coteúdo extraescolar, ou seja, não está apenas ligada a sala de aula, e sim a uma prática soaciocultural, além disso, em toda prova há de existir um rigor. Ribeiro (2014), caracteriza a prova dos nove como uma prova que pode ser trabalhada nas operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, e também para correção de algum destes cálculos.

> Eram inicialmente “apresentadas as chamadas “propriedades elementares do resto”, que nada mais são do que as propriedades que fornecem a base para a aplicação da prova dos noves. Nos livros desta época os autores chamavam a prova dos nove simplesmente pelo nome de provas por um divisor, já que as propriedades elementares do resto são válidas para qualquer divisor (CRUZ, 2009, p. 39).

Para Oliveira e Lutosa (1998) o noves fora trata-se de uma regra técnica onde se usa para verificação de resultados de cálculos fundamentais.

> Cabe mencionar também que a primeira obra de matemática impressa em língua portuguesa foi o livro Tratado de Pratica dArismetyca, escrito por Gaspar Nicolas e publicado no ano de 1519 na cidade de Lisboa. A obra destinava-se a um público adulto envolvido com a prática comercial. Esta obra já apresentava a prova dos nove como verificação para as operações aritméticas, desse modo, em todas elas o autor explicava brevemente o modo de se proceder, apresentava um exemplo numérico e propunha a confirmação do resultado através da prova dos nove ou dos sete, ou através da operação inversa (LACAVA, 2016, p.05).

Segundo Ribeiro (2014) o noves fora não está apenas ligado a correção de verificação de cálculos escritos, está ligada também a uma metodologia motivadora para a disciplina de divisibilidade, observando a compreender a respeito de números naturais e inteiros.

Mas observando Rodrigues (1998) chamar um número de noves foras quer dizer, tirar um número múltiplo de 9 nele contido, pois podemos encontrar um número n e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto.

> Tirar o noves-fora de um número natural qualquer n, significa subtrair deste número o maior múltiplo de 9(nove) nele contido, o que é equivalente a encontrar o resto da divisão deste número “n” por 9. Por exemplo, para tirar o noves-fora do número 50, deve-se subtrair de 50 o maior múltiplo de 9 nele contido, ou seja, o maior múltiplo de nove menor que 50 é o 45 (que equivale a 9 multiplicado por 5). Logo, fazemos $50 - 45 = 5$. Desse modo, dizemos que 50 noves-fora é igual a 5. Porém, existe uma maneira mais simples de se obter o noves-fora de um dado número natural. Soma-se os algarismos deste dado número que se deseja obter o noves-fora obtendo outro valor. A partir deste novo valor, soma-se novamente os algarismos e assim por diante até restar um número de um único algarismo. Desse modo, para tirar o noves-fora de 452 usando este modo mais simples, devemos somarmos os algarismos do número dado, ou seja, $4 + 5 + 2 = 11$, em seguida continuar somando os algarismos do valor obtido até restar um único algarismo, que nesse caso é o 2, isto é, $1 + 1 = 2$. Desse modo, 452 noves-fora é igual a 2, ou ainda, o resto da divisão de 452 por 9 resulta em 2 (LACAVA; COSTA, 2016, pg.58).

Miguel (2010) relata que um dos motivos dessa prova não ser mais utilizada nos livros didáticos nas escolas, ocorreu justamente por não ser uma prova, pois nela contém falhas. A prova dos nove não detecta o erro quando o noves fora do resultado de um cálculo feito corretamente é igual ao noves fora de um resultado que conteve erro no mesmo cálculo, sendo assim o noves fora não poderia ser uma prova, pois contém falhas.

Ao longo deste trabalho mostraremos onde há falhas e assim um dos principais motivos dela não pertencer mais as salas de aula.

Capítulo 3

Definições e resultados básicos

3.1 Divisibilidade nos Números Naturais $\mathbb{N}$

Neste capítulo usaremos alguns resultados que ajudarão entender melhor sobre o noves fora. Começamos com algumas definições e resultados. As definições foram estudadas a pártir do livro de Algebra Moderna Domingues e Hygino, e Teorias dos Números de Salahoddin Shokranian.

Definição 1. *Dados os números a, $b \in \mathbb{N}$, diz-se que b divide a e escreve-se $b|a$ quando existir um outro número $q \in \mathbb{N}$ tal que, $a = b \cdot q$*

Observações: Na definição acima dizemos também que a é múltiplo de b, que b é fator de a e ainda que b é divisor de a. Caso b não seja divisor de a escrevemos $b \nmid a$

Exemplo 1. $2|6$, *pois* $6 = 2 \cdot 3$

Neste caso na definição $b = 2$ *e* $a = 6$ *e existe um* q *que será* $q = 3$, *satisfazendo* $a = bq$, *ou seja, substituíndo* $6 = 2 \cdot 3$.

Exemplo 2. $4|12$, *pois* $12 = 4 \cdot 3$

Exemplo 3. $5|10$, *pois* $10 = 5 \cdot 2$

Exemplo 4. $4 \nmid 9$, *pois não existe um número* $\mathbb{N}$ q *que* $9 = 4 \cdot q$

Proposição 1. *(Reflexibilidade) Dado* $a \in \mathbb{N}$ *temos que* $a|a$

Demonstração. Como $a = a \cdot 1$, pela definição segue que $a|a$. □

Exemplo 5. $245|245$ *pois* $245 = 245 \cdot 1$

Proposição 2. *(Transitividade) Se* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *então* $a|b$ *e* $b|c \Rightarrow a|c$

Demonstração. De $a|b$ e $b|c$ existem dois números q e q_1 ambos naturais que são fatores sequencialmente de $b = a \cdot q$ e $c = b \cdot q_1$

Podemos fazer a substituição na equação $c = b \cdot q_1$ sendo que já possuímos o valor de b, $b = a \cdot q$. Assim, obtemos o valor de c :

$$c = (a \cdot q) \cdot q_1,$$

usando a associatividade da multiplicação, segue:

$$c = a(q \cdot q_1).$$

Sendo que $q \cdot q_1$ uma multiplicação de dois números naturais, o resultado será outro número natural, que denotaremos como q_2. Ou seja:

$$c = a \cdot q_2.$$

Pela Definição 1 resulta que $a|c$.

□

Exemplo 6. *Como* $4|8$ *e* $8|16$ *pela Proposição 2 segue que* $4|16$. *Seguindo os passos da demostração como* $8 = 4 \cdot 2$ *e* $16 = 8 \cdot 2$ *temos:*

$$16 = (4 \cdot 2) \cdot 2 = 4 \cdot 4.$$

Ou seja , $16 = 4 \cdot 4$ *, de onde* $4|16$

Proposição 3. *Se a, b, c, t e p são números naturais tais que $c|a$ e $c|b$ então $c|(t\cdot a+p\cdot b)$*

Demonstração. Pela Definição 1 temos:

(i) se $c|a$ então $a = c \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$

(ii) se $c|b$ então $b = c \cdot q_1$, $q_1 \in \mathbb{N}$

Multiplicando (i) por t, sendo que $t \in \mathbb{N}$, teremos um resultado que denotaremos como (i_1);

(i_1) $t \cdot a = c \cdot q \cdot t$.

Multiplicando p por (ii), $p \in \mathbb{N}$ teremos um resultado que chamaremos de (i_2)

(i_2) $p \cdot b = c \cdot q_1 \cdot p$

Efetuando a soma de $(i_1) + (i_2)$ teremos que;

$$t \cdot a + p \cdot b = c \cdot q \cdot t + c \cdot q_1 \cdot p$$

Fazendo uma obervação nesta equação podemos notar que no segundo membro da igualdade podemos colocar o número c em evidência. Ficando assim;

$$t \cdot a + p \cdot b = c(q \cdot t + q_1 \cdot p)$$

Usando a Definição 1 concluímos que;

$$c|(t \cdot a + p \cdot a)$$

.

□

3.1.1 Algoritmo da divisão euclidiana

Sejam dois números $a, b \in \mathbb{N}$, onde $a > 0$. Podemos relacioná-los em duas possibilidades:

(i) b é múltiplo de a o que pela Definição 1 significa $b = qa$, $q \in \mathbb{N}$

(ii) b está entre dois múltiplos de a. De onde tiramos a inequação

$$aq \leq b < a(q+1).$$

Daí,

$$0 \leq b - aq < a.$$

Então fazendo $b - qa = r$, obtemos $b = aq + r$, em que $0 \leq r < a$, r será chamada resto da divisão.

Observações importantes:

(o_1) Quando $r = 0$ pela Definição 1 que nos afirma que $b = a \cdot q$, ou seja, a divisão é exata, possui resto igual a 0

(o_2) Quando $r > 0$ teremos que $b = aq + r$, que nos afirma que a divisão não é exata e possui resto positivo.

(o_3) q e r são números naturais chamados respectivamente de quociente e resto.

Teorema 1. *Dados dois números naturais b e a, $a > 0$, existe um único par de naturais q e r tais que:*

$$b = a \cdot q + r,$$

com $r < a$.

Demonstração. A existência é garantida pelos intens (i) e (ii), falta a prova da unicidade que faremos a seguir.

Suponhamos que $b = aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$, onde $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Digamos que $r_1 > r_2$ então:

$$0 < r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)a.$$

Como r_1 e r_2 são menores que a então

$$0 < r_1 - r_2 < a.$$

Ou seja,

$$0 < (q_2 - q_1)a < a.$$

Mais isso é um absurdo, pois $(q_2 - q_1)a$ é um múltiplo positivo de a, e não pode ser menor que a. De maneira análogo mostra-se que $r_1 < r_2$ também conduz ao um absurdo. Portanto $r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$. $\square$

Exemplo 7. *A divisão* 230 *por* 10 *é exata.*

Exemplo 8. *A divisão de* 58 *por* 6 *contém resto positivo pois,* $58 = 6 \cdot 9 + 5$ *onde o número* 5 *é o nosso resto,* $r = 5$

3.2 Sistemas de Numeração e Base 10

Atualmente é natural obervarmos crianças aprendendo a ler, escrever e calcular, sendo uma qualidade do ser humano.

Para Contador(2008) a capacidade de contar diversos objetos, calcular, faz parte da evolução do ser humano. Há milhares de anos atrás, o homem começou a ter posse dos bens materiais, por exemplos animais (vacas, ovelhas, ..., etc.) e com isso faz nescessário a utilização do método de contagem.

Segundo Cruz(2009, pg. 14) "começaram primeiro a fazer assosciações com partes do corpo, pedras, galhos de arvóres e entre outros objetos que pudessem ser associados." A associação era feita do modo que se o índivíduo tivesse um determinado animal associava com um dedo da mão, se tivesse dois animais, associava com dois dedos, e assim sucessivamente.

Deste modo já tinha se dado uma grande evolução para o ser humano no sistema de contagem. Porém surgia um problema, a existência de um indivíduo possuir muitos bens, e não ter como controlar seus pertences. Pela necessidade, o ser humano pensou em outras formas de contagem. Uma ideia foi os registros em rochas e madeiras, que facilitavam a contagem de seus pertences. Esta nova forma de contagem ajudou a desenvolver o sistemas de agrupamentos, que deu início ao surgimento de bases. Com a evolução das civilizações, a maneira de calcular também evoluiu, os Indús foram exemplo dessas civilizações. De acordo Cruz(2009) os indús calculavam no sistema de base 10(dez), pois tinha-se uma grande dificuldade em calcular, pois não haviam simbolos ou desenhos que tivesse algum significado para eles efetuarem os cálculos. Na civilização Indú, foi dado significado a um conjunto de símbolos em seguência que utlizamos até hoje $1, 2, 3..., 9$ (CONTADOR, 2008). Com essa nova utilização de representação dos símbolos, simplicou mais o modo de calcular e contar.

Atualmente a base 10 é a mais utilizada, nela se encontra grande parte dos cálculos matemáticos feitos hoje. Porém existem outras bases em uso, uma delas é a base 60, que utilizamos para sabermos, horas, minutos e segundos. Outra base que utilizamos no nosso dia a dia é a de base 12 (doze), sempre que pedimos uma duzia de ovos estamos nos referindo o uso dessa base.

Com o avanço da tecnológia, destacou-se a base 2(binária) que é mais utilizada nos sistemas de computadores.

Proposição 4. *Seja N um número natural , existem $a_0, a_1, ..., a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ tais que:*

$$N = a_n 10^n + ... + a_1 10 + a_0$$

Demonstração. Se $N \in \{0, ..., 9\}$ é só tomar $a_0 = N$ e não há mais nada a fazer. Caso $N \geq 10$, pelo algoritmo da divisão Euclidiana, existem únicos $q_1, a_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$N = q_1 10 + a_o$$

e $0 \leq a_0 < 10$, ou seja $a_0 \in \{0, 1, ..., 9\}$, se $q_1 \in \{0, 1..., 9\}$, temos que $a_1 = q$ e termina-se a prova.

Caso $q_1 \geq 10$, aplicando o algoritimo da divisão Euclidiana , temos que existe únicos $q_2, a_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_1 = q_2 10 + a_1$$

e $0 \leq a_1 < 10$, caso tenhamos $q_2 \in \{0, 1..., 9\}$ e só fazer $a_2 = q_2$ e pronto. Caso contrário continuamos este processo. Como:

$$q_k = q_{k+1} \cdot 10 + a_k$$

,temos: $q_1 > q_2 > q_3 > ...q_k > q_{k+1}$ Desde modo se dermos continuidade a este procedimento teremos $q_n < 10$ para algum n, de modo que será so escrever a$a_n = q_n$ e ficará

$$N = a_n 10^n + ... + a_1 10 + a_0$$

A representação nº N na base 10 é retirada da expressão:

$$N = a_n 10^n + ... + a_1 10 + a_0$$

Representamos N na base 10 é simplesmente escrever o nº $a_1, a_2, ..., a_n$ da seguinte maneira: $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ □

Exemplo 9. $945 = 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5.$

Exemplo 10. $1658 = 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8.$

Capítulo 4

Divisibilidade nos Números Natuais $\mathbb{N}$

4.1 Introdução

Para a divisibilidade existem algumas regras (ou critérios) importantes que serão mostradas neste capítulo. São regras que ajudarão a entender se um determinado número é divisivél por outro.

Para alguns números é mais fácil a compreesão da regra de divisibilidade , por exemplo $2, 3$ e 4 . Porém existem critérios onde os passos são mais dificéis de memorizar, pois não utilizamos diariamente como é o caso por exemplo da divisibilidade por $7, 18$ e 23 entre outros.

Vejamos como funciona a dedução destas regras de divisibilidade. Para isto necessitaremos dos seguintes Lemas.

Lema 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ que deixam o mesmo resto r na divisão por $m \in \mathbb{N}$. Então $m|(a-b)$*

Demonstração. Pelo algoritimo da divisão Euclidiana temos que;

$$a = m \cdot q + r \text{ e } b = m \cdot q_1 + r$$

onde $q, q_1 \in \mathbb{N}$. Na subtração $(a-b)$ temos que;

$$a - b = (m \cdot q + r) - (m \cdot q_1 + r) \Rightarrow a - b = m(q - q_1).$$

Então $m|(a-b)$ $\square$

Cabe a seguinte pergunta: Vale a recíproca do Lema1 ?
A resposta é sim, demonstraremos no próximo Lema.

Lema 2. *Sejam $a, b, m \in \mathbb{N}$ com $a, b \neq 0$. Se $m|(a-b)$, então a e b deixam o mesmo resto na divisão por m.*

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão Euclidiana temos que:

$$a = q_1 \cdot m + r_1,\ 0 \leq r_1 < m \ \text{ e } \ b = q_2 \cdot m + r_2,\ \ 0 \leq r_2 < m.$$

Assim, efetuando a subtração $(a-b)$ temos:

$$a - b = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$$

e daí,

$$r_1 - r_2 = (a - b) - (q_1 - q_2)m$$

Pela igualdade acima segue que $m|(r_1 - r_2)$ assim temos; $0 \leq r_1 < m$.

Suponhamos que $r_1 \geq r_2$
Ora, $m|(r_1 - r_2)$ e $0 \leq r_1 - r_2 < m$, logo,

$$r_1 - r_2 = 0$$

Ou seja, $r_1 = r_2$ e a e b deixam o mesmo resto na divisão por m. O caso $r_1 \leq r_2$ é análogo.

$\square$

Sejam p e N números naturais $p \neq 0$. O número N pode ser escrito na base dez da seguinte forma:

$$N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10.a_1 + a_0$$

$a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para $j \in \{0, ..., n\}$

Os números naturais são divisíveis por 1, de modo que não precisamos elaborar um critério para divisibilidade por 1, por isso começaremos por $p = 2$.

Inicialmente vamos dividir $1, 10, 10^2, ..., 10^n$ por p, que pelo Teorema da Divisão Euclidiana temos que; $10^i = pq_i + r_i$, onde q_i e r_i são o quociente e o resto da divisão de 10^i por p, $0 \leq i \leq n$. Assim,

$$N = (pq_0 + r_0)a_0 + (pq_1 + r_1)a_1 + ... + (pq_n + r_n)a_n$$

Como $pq_0 + r_0 = 10^0 = 1$, temos que:

$$N = a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_n r_n + (a_1 p q_1 + a_2 p q_2 + ... + a_n p q_n)$$

ou seja

$$N = a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_n r_n + p(a_1 q_1 + ... + a_n q_n) \tag{4.1}$$

Como a multiplicação e a soma de naturais ainda é um natural temos que $k = q_1 a_1 + q_2 a_2 + ... + q_n a_n$ é um número natural. Logo,

$$N - (a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) = pk$$

e portanto $p | [N - (a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n a_r)]$.

Daí, pelo Lema 2, N e $a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n$ deixam o mesmo resto quando divididos por p.

Assim temos a Proposição 5

Proposição 5. *Seja $N = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ e p naturais. O resto da divisão de N por p é igual o resto da divisão de*

$$a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_{n-1} r_{n-1} + a_n r_n$$

por p.

4.2 Critérios de Divisibilidade

Vejamos alguns exemplos de formas de descobrir se um determinado número é divisível por outro. Como nosso sistema é de base 10, utilizaremos a potência de 10 para demostrarmos os seguintes critérios de divisibilidade.

4.2.1 Divisibilidade por 2

Na notação da secção anterior, temos:

$$10^i = 2q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 2 \text{ para } 0 \leq i \leq n$$

Como $10^i = 10 \cdot 10^{i-1} = 2 \cdot 5 \cdot 10^{i-1}$, pelo algoritmo da divisão euclidiana temos que:

$$q_i = 5 \cdot 10^{i-1} \text{ e } \quad r_i = 0$$

para cada $i \in \{0, ..., n\}$. Desse modo,

$$N = a_0 + 2(a_1 r_1 + ... + a_n r_n)$$

e daí pela Proposição 5, N é divisível por 2 se, e somente se, a_0 for divisível por 2

Exemplo 11. *O número 126 é divisível por 2 pois a_0 é 6.*

Exemplo 12. *O número 329 não é divisível por 2 pois a_0 é 9.*

4.2.2 Divisibilidade por 3

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 3q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 3 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n$$

Efetuando as divisões de 10^i por 3, obtemos:

$$10 = 9 + 1$$

$$10^2 = 99 + 1$$

$$10^3 = 999 + 1$$

De modo geral temos:

$$10^i = 3q_i + 1,\ q_i \in \mathbb{N}.$$

O que fizemos foi aplicar o Teorema da Divisão Euclidiana e perceber que $r_0 = r_1 = ... = r_n = 1$. Por (4.1) temos que:

$$N = (a_0 + a_1r_1 + ... + a_nr_n) + 3k = (a_0 + a_1 + ... + a_n) + 3k.$$

Assim, a Proposição 5 nos garante que N é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + ... + a_n$ for divisível por 3.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 13. *O número* 258 *é divisível por* 3 *pois, a soma dos algarismos* $2+5+8 = 15$ *sendo que* 15 *divide* 3.

Exemplo 14. *O Número* 539 *não é divisível por* 3 *pois a soma de todos os algarismo* $5 + 3 + 9 = 17$ *e* 17 *não é divisível por* 3.

Levando em conta o critério de divisilibidade por 2 *como já foi mostrado, se* a_0 *for divisível por* 2 *então* N *é divisível por* 2. *Olhando para critério divisibilidade por*

3, no segundo exemplo o algarismo a_0 é 9 e mesmo assim N não é divisível 3. Então o algarismo a_0 não determina se um número e divisível por 3 .

4.2.3 Divisibilidade por 4

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 4q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 4 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n$$

Efetuando as divisões de 10^i por 4, obtemos:

$$10 = 4 \cdot 2 + 2$$

$$10^2 = 100 = 4 \cdot 25$$

$$10^3 = 1000 = 4 \cdot 25 \cdot 10$$

De modo geral

$$10^i = 4 \cdot 25 \cdot 10^{i-2}$$

De modo que, pelo algoritmo da divisão euclidiana os restos dessas divisões serão, $r_2 = r_3 = ...r_n = 0$ e $r_1 = 2$ e daí $N = (a_0 + 2a_1) + 4k$. Então pela Proposição 5, N será divisível por 4 se, e somente se, $2a_1 + a_0$ for divisível por 4.

Exemplo 15. *O número 276 é divisível por 4 pois $2a_1 + a_0$ é múltiplo de 4*

$$2 \cdot 7 + 6 = 20$$

.

Exemplo 16. *O número 258 não é divisível por 4 pois substituindo os seguintes valores na expressão $2a_1 + a_0$ obtemos $2 \cdot 5 + 8 = 18$ que não é divisível por 4.*

4.2.4 Divisibilidade por 5

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 5q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 5 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10^i por 5, obtemos:

$$10^1 = 5 \cdot 2$$

$$10^2 = 5 \cdot 2 \cdot 10$$

De modo geral:

$$10^i = 10.10^{i-1} = 2.5.10^{i-1}$$

Sendo assim, pelo algaritmo da divisão euclidiana temos os restos $r_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e daí.

$$a_0 + a_1 r_1 + ... + a_n r_n = a_0 + 5k.$$

De modo que pela Proposição 5, N será divisível por 5 se, e somente se, a_0 for divisível por 5. Como $0 \leq a_0 \leq 9$, temos que $5|a_0$ se, e somente se, $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 17. *O número 276 não é divisível por 5, pois $a_0 = 6$.*

Exemplo 18. *O número 175 é divisível por 5, pois $a_0 = 5$.*

4.2.5 Divisibilidade por 6

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 6q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 6 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10^i por 6, obtemos:

$$10 = 6.1 + 4$$

$$10^2 = 100 = 6 \cdot 16 + 4$$

$$10^3 = 1000 = 6 \cdot 166 + 4$$

$$10^4 = 6 \cdot 1666 + 4.$$

De modo geral:

$$10^i = 6.m + 4 \text{ sendo } \ m \in \mathbb{N}.$$

Pelo algoritmo da divisão euclidiana os restos dessas divisões serão, $r_1 = r_2 = ... = r_n = 4$, daí $N = (a_0 + 4a_1 + 4a_2 + ... + 4a_n) + 6k$. Então pela Proposição 5, N será divisível por 6 se, e somente se, $a_0 + 4a_1 + 4a_2 + ... + 4a_n$ for divisível de 6.

Veja os exemplos:

Exemplo 19. *O número* 276 *é divisível por* 6 *pois utlizando o critério que apresentamos anteriormente,* $6|a_0 + 4(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ *visto que*

$$a_0 + 4(a_1 + a_2 + ... + a_n) = 6 + 4(7 + 2) = 6 + 4(9) = 6 + 36 = 42,$$

e 42 *é divisível por* 6

.

Exemplo 20. *O número* 175 *não é divisível por* 6 *pois aplicando a regra da divisibilidade por* 6*, então* $6|a_0 + 4(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ *visto que*

$$a_0 + 4(a_1 + a_2 + ... + a_n) = 5 + 4(7 + 1) = 5 + 4(8) = 37,$$

sendo que o resultado encontrado 37 *não é divisor por* 6*.*

4.2.6 Divisibilidade por 7

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 7q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 7 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10^i por 7, obtemos:

$$10 = 7.1 + 3$$

$$10^2 = 100 = 14.7 + 2$$

$$10^3 = 1000 = 142.7 + 6$$

$$10^4 = 10000 = 1428.7 + 4$$

$$10^5 = 100000 = 14285.7 + 5$$

$$10^6 = 1000000 = 142857.7 + 1.$$

Deste ponto pra frente o resto começa a repetir-se na mesma ordem, $1, 3, 2, 6, 4, 5...$ Daí $N = (a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5...) + 7k$. Então pela Proposição 5, N será divisível por 7 se, e somente se, $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5...$ for divisível por 7.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 21. *O número* 276 *não é múltiplo de* 7 *pois*

$$6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 31$$

e 31 *não é divisível por* 7*.*

Exemplo 22. *O número* 823543 *é múltiplo de* 7*, pois*

$$3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 91$$

e 91 *é múltiplo de* 7*.*

Como dissemos no ínicio do capítulo tem alguns números que são mais facéis de memorização e aprendizagem. Aplicar o critério de divisibilidade por 7 *tanto é mais complicado quanto mais extenso for o número. O que não ocorre no critérios de divisibilidade por* 2*, pois quanto maior o número so precisaremos saber se* a_0 *é divisível pr* 2*.*

4.2.7 Divisibilidade por 8

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 8q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 8 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10 por 8, obtemos:

$$10^0 = 8 \cdot 0 + 1$$

$$10^1 = 8 \cdot 1 + 2$$

$$10^2 = 100 = 8 \cdot 12 + 4$$

$$10^3 = 1000 = 8 \cdot 125$$

$$10^4 = 10000 = 8 \cdot 125.10,$$

De modo geral:

$$10^i = 8 \cdot 125.10^{i-1}.$$

Pelo algoritmo da divisão euclidiana os restos da divisão de 10^i por 8 serão, $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$ e $r_3 = r_4 = ... = r_n = 0$ e daí $N = (a_0 + 2a_1 + 4a_2) + 8k$. Então pela Proposição 5, N será divisível por 8 se, e somente se, $a_0 + 2a_1 + 4a_2$ for divisível por 8.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 23. *O número* 968 *é divisível por* 8 *pois* $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 8 + 2.6 + 4.9 = 56$

é divisível por 8.

Exemplo 24. *O número* 276 *não é divisíve por* 8 *pois* $a_0+2a_1+4a_2 = 6+2.7+4.2 = 28$ *não é divisível por* 8.

4.2.8 Divisibilidade por 9

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 9q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 9 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10^i por 9, obtemos

$$10 = 9 \cdot 1 + 1$$

$$10^2 = 100 = 9 \cdot 11 + 1$$

$$10^3 = 1000 = 9 \cdot 111 + 1,$$

de modo geral:

$$10^n = (10^n - 1) + 1$$

Pelo algoritmo da divisão euclidiana os restos da divisão de 10^i por 9 serão., $r_1 = r_2 = ... = r_n = 1$, e daí $N = (a_0 + a_1 + a_2 ... + a_n) + 9k$. Então, pela Proposição 5, N será divisível por 9 se, e somente se, $a_0 + a_1 + a_2 ... + a_n$ for divisível por 9.

Vejamos alguns exemplos que ajude a entender melhor,

Exemplo 25. *O número* 729 *é divisível por* 9 *pois a soma de todos os seus algarismos* $9 + 2 + 7 = 18$ *que é divisível por* 9.

Exemplo 26. *O número* 129 *não é divisível por* 9 *pois, a soma de todos os seus algarismo* $9 + 2 + 1 = 12$ *e* $9 \nmid 12$. *Esse exemplo é justamente para mostrar que nem todo número que termine com o algarimos* 9 *será divisível por* 9.

4.2.9 Divisibilidade por 10

Utilizando a notação da secção 4.1 temos:

$$10^i = 10q_i + r_i,\ 0 \leq r_i < 10 \text{ para } \quad 0 \leq i \leq n.$$

Efetuando as divisões de 10^i por 10, obtemos

$$10^0 = 10 \cdot 0 + 1$$

$$10^1 = 10 \cdot 1$$

$$10^2 = 10 \cdot 10$$

$$10^3 = 10 \cdot 10^2,$$

De modo Geral:

$$10^i = 10.10^{i-1}$$

Pelo algoritmo da divisão euclidiana os restos da divisão de 10^i por 10 serão, $r_1 = r_2 = ...r_n = 0$ e daí $N = a_0 + 10k$. De modo que pela Proposição 5, N será divisível por 10 se, e somente se, a_0 for divisível por 10. Como $0 \leq a_0 \leq 9$, temos que $10|a_0$ se, e somente se, $a_0 = 0$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 27. *O número* 870 *é divisível por* 10 *pois o algarismo* a_0 *é* 0*, De fato* $870 = 87 \cdot 10$

Exemplo 28. *O número* 175 *não é divisível por* 10 *pois o algarismo* a_0 *é* 5*.*

4.2.10 Resumo de Tabela

Mostremos na tabela a seguir um resumo de cada Divisibilidade.

Divisor	Critérios de Divisibilidade
2	$2\|N \Leftrightarrow 2\|a_0$
3	$3\|N \Leftrightarrow 3\|(a_0 + a_1 + a_2 + ...a_n)$
4	$4\|N \Leftrightarrow 4\|(a_0 + 2a_1)$
5	$5\|N \Leftrightarrow 5\|a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
6	$6\|N \Leftrightarrow 6\|a_0 + 4(a_1 + a_2...a_n)$
7	$7\|N \Leftrightarrow 7\|(a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6...)$
8	$8\|N \Leftrightarrow 8\|(a_0 + 2a_1 + 4a_2)$
9	$9\|N \Leftrightarrow 9\|(a_0 + a_1 + a_2 + .. + a_n)$
10	$10\|N \Leftrightarrow a_0 = 0$

Capítulo 5

A prova dos nove ou Noves fora

5.1 Introdução

A prova dos nove ou mais conhecida popurlamente noves fora é uma verificação de cálculo que envolve as operações fundamentais da Matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão) para provar que o cálculo feito está correto. Antes do crescimento exponencial da tecnológia, o uso das cálculadoras era restrito, e o método mais utilizado para verificação de cálculo era o noves fora.

Para (MIGUEL, 2010) "melhor seria conceber o noves fora como uma prática sociocultural de verificação e correção de cálculo escrito, e não conteúdo escolar autonômo". O autor representa as práticas mesmo feitas por apenas uma pessoa como sendo uma prática social, por está relacionada ações e conjuntos da comunidade humana.

Grande parte das pessoas que usavam os métodos de verificação de cálculos eram profissionais; contadores, bancários, comerciantes entre outros, que trabalhavam no dia a dia com números, por isso foi bastate usado por esses profissionais. O noves fora era apresentado em sala de aula como saber escolar, cotéudo encontrado em livros didáticos no século XX, junto com o contéudo de divisibilidade. "A prova dos noves é um método que é utilizado por alguns comerciantes para verificar se existem erros realizados nas quatro operações"(CRUZ, 2013, pg. 09)

Com o uso crescente das calculadoras e com algumas falhas que vamos apresentar adiante, o noves fora foi retirado dos livros didáticos, ficando opcional a aplicação desse conteúdo pelo professor, e assim cada vez mais sendo esquecido. Atualmente é utilizado como forma de historicidade, podendo ser ensinado na escola ou na própria família, mas não são todos que sabem como realmente funciona este método.

5.2 Noves fora

Nesta seção desenvolvemos um estudo para termos melhor compreesão dos conceitos fundamentais que existe por trás desse método, e quais os cálculos que formam o noves fora.

Definição 2. *Dado* $N \in \mathbb{N}$ *o noves fora de* N *é o resto da divisão de* N *por* 9.

Para encontrar o noves fora de um número, um método é saber o maior múltiplo de 9 que é menor ou igual a ele e depois fazer o número menos o múltiplo. O noves fora é o resultado desta subtração . Pelo algoritmo da divisão eucliadiana, o noves fora será é o único número natural r para o qual existe q natural satisfazendo:

$$N = 9 \cdot q + r,\ 0 \leq r < 9.$$

Exemplo 29. *O número* 325 *tem "noves fora"* 1 *, pois o resto da divisão de* 325 *por* 9*, é igual a* 1

Observações:

Por (4.1), dado um número natural

$$N = a_n 10^n + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

temos:

$$N = (a_0 + a_1 + ... + a_n) + 9k,$$

com $k \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 5, N e $a_0 + a_1 + ... + a_n$ deixam o mesmo resto na divisão por 9. Assim, o noves fora de N é igual ao noves fora de $a_0 + a_1 + ... + a_n$.

Exemplo 30. *Para obter o noves fora de* 325 *aplicando a Proposição 5, procedemos da seguinte forma: O noves fora de* 325 *é igual ao noves fora de* $3 + 2 + 5 = 10$ *que por sua vez tem noves fora igual a* $1 + 0 = 1$*. Conseguentemente o noves fora de* 325 *é* 1*, como haviamos visto no exemplo anterior pela aplicação direta da definição 2.*

5.3 Como e por que funciona?

Apresentaremos dois Teoremas que serão fundamentais para a aplicação do noves fora, e observaremos como esses Teoremas são aplicados nas quatros operações fundamentais e como foram conhecidos nos livros didaticos do século XX como "propriedades elementares do resto".

Teorema 2. *(Propriedade da soma) Consideremos* $S = p_1 + p_2 + ... + p_n$*, onde* $p_j \in \mathbb{N}$*. Sejam* $N, r_1, r_2, ...r_n, r \in \mathbb{N}$ *tais que* r *é o resto da divisão de* S *por* N*, e* r_j *é o resto da divisão de* p_j *por* N*. Então* r *é o resto da divisão de* $r_1 + r_2 + ... + r_n$ *por* N*.*

Demonstração. Pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, existem únicos $q_1, q_2, ...q_n, q$ naturais não negativos tais que;

$$p_1 = q_1N + r_1,\ p_2 = q_2N + r_2, \ldots, p_n = q_nN + r_n \text{ e } \quad S = qN + r.$$

Temos:

$$S = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$
$$= (q_1N + r_1) + (q_2N + r_2 +) \ldots + (q_nN + r_n)$$
$$= (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)N + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n).$$

Daí, $N|[S - (r_1 + ... + r_n)]$ e portanto, pelo Lema 2, S e $r_1 + ... + r_n$ deixam o mesmo resto na divisão por N

$\square$

Teorema 3. *(Propriedade da Multiplicação) Consideremos* $S = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$*, onde* $p_j \in \mathbb{N}$*. Sejam* $N, r_1, r_2, ..., r_n, r \in \mathbb{N}$ *tais que* r *é o resto da divisão de* S *por* N*, e* r_j *é o resto da divisão de* p_j *por* N*. Então* r *é o resto da divisão* $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n$ *por* N*.*

Para demonstração deste Teorema nescessitaremos do seguinte Lema.

Lema 3. *Sejam* $q_1, \ldots, q_n, r_, \ldots, r_n, N \in \mathbb{N}$*. Então* $(q_1N + r_1)(q_2N + r_n) \cdots (q_nN + r_n)$ $= Nt + r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$*, onde:*
$t = q_1q_2 \cdots q_n^{n-1} + (r_1q_2q_3 \cdots q_n + q_1r_2q_3 \cdots q_n + q_1q_2 \cdots q_{n-1}r_n)m^{n-2} + \cdots + +(q_1r_2r_3 \cdots r_n + r_1q_2r_3 \cdots r_n + \cdot r_1r_2 \cdots r_{n-1}q_n)$.

Demonstração. A prova deste Lema é feita por indução sobre n não fazemos aqui por fugir aos objetivos deste trabalho. □

Demonstração. (do Teorema 3)Pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, existem únicos $q_1, q_2, ...q_n, q$ naturais não negativos tais que;

$$p_1 = q_1N + r_1$$

$$p_2 = q_2N + r_2$$

$$\vdots$$

$$p_n = q_nN + r_n$$

e

$$S = qN + r.$$

Pelo Lema 3, temos:

$$S = Nt + r_1r_2 \cdots r_n$$

sendo, t um número natural.

Daí, $N|[S - (r_1 \cdot r_2 \cdots r_n)]$ e portanto, pelo Lema 2, S e $r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$ deixam o mesmo resto na divisão por N.

$\square$

5.3.1 Prova dos Nove na Adição

Vimos na Propriedade da soma que um número $S = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ quando dividido por N deixará o mesmo resto que a soma $r_1 + r_2 + ... + r_n$ por N.

Em particular, o resto da divisão de $S = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ por 9 é igual ao resto da divisão de $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ por 9, onde r_i é o resto da divisão de p_i por 9, $1 \leq i \leq N$. Isto signfica que o noves fora de S é igual ao noves fora de $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$. Mas r_i é o noves fora de p_i, assim para obter o noves fora de S, somamos os noves fora dos $p_i's$ e cálculamos o noves fora desta soma.

Em outras palvras, se S for realmemte o resultado de $p_1 + p_2 \ldots + p_n$, i.e , se a conta naõ estiver errada, o noves fora de S é o noves fora de $r_1 + r_2 \ldots + r_n$.

Vejamos um exemplo

Exemplo 31. $128 + 256 = 384$

Na soma $128 + 256 = 384$, *as parcelas são* $p_1 = 128$, $p_2 = 256$ *e o resultado é* $S = 384$. *Aplicando a definição de noves fora ou a mesma ideia do exemplo* 30, *obtemos que o noves fora de* 128 *é* 2 *o noves fora de* 256 *é* 4. *De modo que se a conta estiver correta o noves fora de* $2 + 4 = 6$. *Realmente o resto da divisão de* 384 *por* 9 *é* 6 *pois:*

$$384 = 9 \cdot 42 + 6 \text{ e } 0 \leq 6 < 9.$$

Exemplo 32. *Considemos a soma:*

$$15 + 16 + 17 + 18 = 66$$

Nela temos:

$$p_1 = 15,\ p_2 = 16,\ p_3 = 17,\ p_4 = 18 \text{ e } S = 66.$$

Como pode ser visto aplicando a Proposição 5, o noves fora de 66 *é igual* 3. *Os noves fora de* p_1, p_2, p_3 *e* p_4 *são respctivamente* 6, 7, 8, 0. *Os noves fora de* $6+7+8+0 = 21$

é 3. Ou seja, o noves fora de 66 é igual o noves fora de $6+7+8+0$.

Exemplo 33. *Agora vamos usar a Propriedade da soma para obter o noves fora de 4939. Pela Proposição 5 o noves fora de 4939 é o noves fora da soma*

$$S = 4+9+3+9$$

Como o noves fora de 9 é 0, segue que o noves fora de S *é o noves fora de* $4+3=7$ *que é o próprio 7.*

Dissemos que o noves fora foi usado como forma de verificar se uma conta estava correta como no exemplo que vamos ver agora:

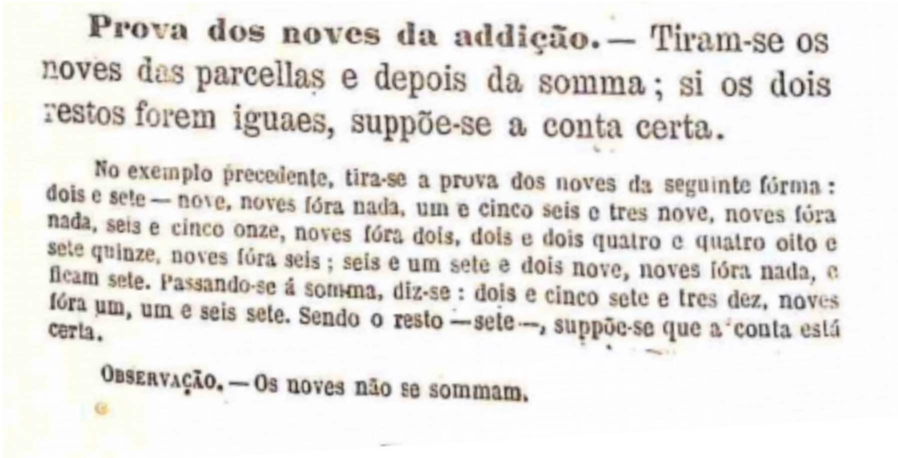
Exemplo 34. *Suponhamos que fizemos a conta*

$$3178 + 416 = 3594$$

e queremos verificar de forma rápida se a conta está correta. Pelo que foi visto acima se o noves fora do resultado da soma $3178 + 416$ *for igual ao noves fora de 3594. Aplicando a Proposição 5, obtemos* $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ *e* $s = 3$ *como o noves fora de 3178, 416 e 3594 respectivamente. Pelo que foi visto acima se o noves fora de* $r_1 + r_2$ *for igual a* s*, provavelmente a conta está correta. Como* $s = r_1 + r_2$*, é possível que não haja erro.*

Era exatamente como no exemplo acima como noves fora é apresentado para adiação em sala de aula. Como uma forma de verificar se a soma estava possivelmente correta. Veja a imagem de como era abordado em sala de aula.

Figura 5.1: Prova da Adição



Prova dos noves da addição. — Tiram-se os noves das parcellas e depois da somma; si os dois restos forem iguaes, suppõe-se a conta certa.

No exemplo precedente, tira-se a prova dos noves da seguinte fórma: dois e sete — nove, noves fóra nada, um e cinco seis e tres nove, noves fóra nada, seis e cinco onze, noves fóra dois, dois e dois quatro e quatro oito e sete quinze, noves fóra seis; seis e um sete e dois nove, noves fóra nada, e ficam sete. Passando-se á somma, diz-se: dois e cinco sete e tres dez, noves fóra um, um e seis sete. Sendo o resto — sete —, suppõe-se que a conta está certa.

OBSERVAÇÃO. — Os noves não se sommam.

Fonte: Souza(1910, pg. 19)

Desta maneira como vimos na imagem acima, era apresentados aos alunos a forma de verificar que a soma poderia está correta.

5.3.2 Prova dos Nove na Subtração

Para fazermos o noves fora na subtração, podemos utilizar o sua operação inversa, do modo que explanaremos a seguir. Consideremos $S, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ com $S = p_1 - p_2$. Podemos reescrever esta subtração da seguinte forma:

$$S + p_2 = p_1.$$

Então se s, r_1, r_2 forem os noves fora de S, p_1 e p_2 respectivamente, pela propriedade da soma, o noves fora de $s + r_2$ é igual ao noves fora de r_1.

Exemplo 35. *Sejam* $p_1 = 44$, $p_2 = 33$ *e* $S = p_1 - p_2 = 11$. *Na notação acima* $r_1 = 8$, $r_2 = 6$ *e* $s = 2$. *Daí,* $s + r_2 = 8$ *que tem noves fora* 8 *que é igual ao noves fora de* r_1.

A ideia acima pode ser generalizada da seguinte forma: Ao invés de considerarmos $p_1, \ldots, p_n$ naturais tomamos $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo o seguinte $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = S \in \mathbb{N}$. Sejam $I_- = \{i | \; p_i < 0\}$ e $I_+ = \{i | \; p_i \geq 0\}$.

Assim temos,

$$S = \sum_{i \in I_-} p_i + \sum_{i \in I_+} p_i,$$

ou seja,

$$S + \sum_{i \in I_-} (-p_i) = \sum_{i \in I_+} p_i.$$

Como $p_i < 0$, se $i \in I_-$, então $-p_i > 0$, para $i \in I_-$ de modo que:

$$\sum_{i \in I_-} (-p_i) \in \mathbb{Z}.$$

Digamos que s seja o noves fora de S, t_i o noves fora de $-p_i$, para $i \in I_-$ e, r_i seja o noves fora de p_i para $i \in I_+$. Então, pelo Propriedade da soma o noves fora de $s + \sum_{i \in I_-} t_i$ é igual ao noves fora de $\sum_{i \in I_+} r_i$

Exemplo 36. *A subtração* $2638 - 1465 - 963 + 315 - 200 = 325$
Sejam $p_1 = 2638$, $p_2 = 1465$, $p_3 = 963$, $p_4 = 315$ *e* $p_5 = 200$. *Dessa forma temos que* $S = 325$.
Note que $I_- = \{p_2, p_3, p_5\}$ *e* $I_+ = \{p_1, p_4\}$. *Assim,*

$$S + \sum_{i \in I_-} (-p_i) = 325 + 1465 + 963 + 200$$

e

$$\sum_{i \in I_+} p_i = 2638 + 315.$$

Aplicando a Propriedade da soma o noves fora de $S + \sum_{i \in I_-} (-p_i)$ *é um, e o noves fora de* $\sum_{i \in I_+} p_i$ *também.*

Note que está ideia engloba o caso da adição apresentado na seção anterior na situação em que temos $I_- = \varnothing$.

Podemos pensar que dados os números p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$ o noves fora de $p_1 - p_2$ seja igual ao noves fora de $r_1 - r_2$, onde r_i é o resto da divisão de p_i por 9. No entanto, isto não é verdade para todos os casos como podemos ver pela Proposição seguinte.

Proposição 6. *Sejam* S, p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}$ *tais que* $S = p_1 - p_2$. *Suponhamos que* s, r_1 *e* r_2 *sejam os noves fora de* S, p_1 *e* p_2 *respectivamente. Se*
(i) $r_1 \geq r_2$, *então* $s = r_1 - r_2$
(ii)$r_1 < r_2$, *então* $s = 9 + (r_1 - r_2)$

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem únicos q, q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$S = 9q + s,\ p_1 = 9q_1 + r_1,\ p_2 = 9q_2 + r_2.$$

Daí,

$$9q + s = (9q_1 + r_1) - (9q_2 + r_2) = 9(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Se $r_1 \geq r_2$, pela unicidade do quociente e do resto temos, $q = q_1 - q_2$ e $s = r_1 - r_2$, o que prova o intem (i).

Caso $r_1 < r_2$, temos:

$$-9 < r_1 - r_2 < 0$$

e daí,

$$0 < 9 + (r_1 - r_2) < 9,$$

ou seja $r = 9 + (r_1 - r_2) \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ de modo que, pela unicidade do resto, $s = r$. Isto concluí a prova. □

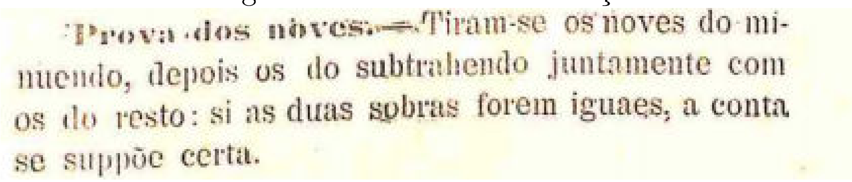
Exemplo 37. *Na subtração* $1256 - 820 = 436$ *temos as parcelas* $p_1 = 1256$ *e* $p_2 = 820$ *com o resultado* $S = 436$.
Pela Proprosição 5 encontramos $r_1 = 5$, $r_2 = 1$ *e* $s = 4$ *veja que este exemplo se enquadra no intem* (i) *da Proposição acima, satisfazendo* $r_1 - r_2 = s$.

Exemplo 38. *Na subtração* $46 - 30 = 16$ *temos as parcelas* $p_1 = 46$, $p_2 = 30$ *e* $S = 16$. *Pela Proposição5 encontramos* $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ *e* $s = 7$ *que se enquadra no intem* (ii) *da Proposição acima onde que* $9 + (r_1 - r_2) = 9 + (-2) = 7$ *sendo igual* s.

Da mesma maneira que para adição, o noves fora era usado como forma de verificar se uma subtração entre números naturais estava correta. Isto era feito normalmente para dois números. Dada a subtração $S = p_1 - p_2$ se s, r_1 e r_2 são os noves fora de S, p_1 e p_2, verificava-se o noves fora de $s + r_2$ é igual a r_1. Caso fossem iguais acreditava-se que a conta estava correta, ou seja, não era usada a Proposição 6, mas sim, a ideia com a qual iniciamos esta seção.

Veja como era apresentado no livro didático no início do século XX. Desta

Figura 5.2: Prova da Subtração



Prova dos noves.—Tiram-se os noves do minuendo, depois os do subtrahendo juntamente com os do resto: si as duas sobras forem iguaes, a conta se suppõe certa.

Fonte: Souza(1910, pg.21)

maneira como na imagem anterior o porfessor ensinava em sala de aula cono verificar se a subtração estava correta.

5.3.3 Prova dos Nove na Multiplicação

Pela Propriedade da multiplicação os números $S = p_1 \cdots p_n$ e $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots r_n$ deixam o mesmo resto quando dividido por 9. Isto significa que o noves fora de S é igual o noves fora de $r_1 \cdots r_n$.

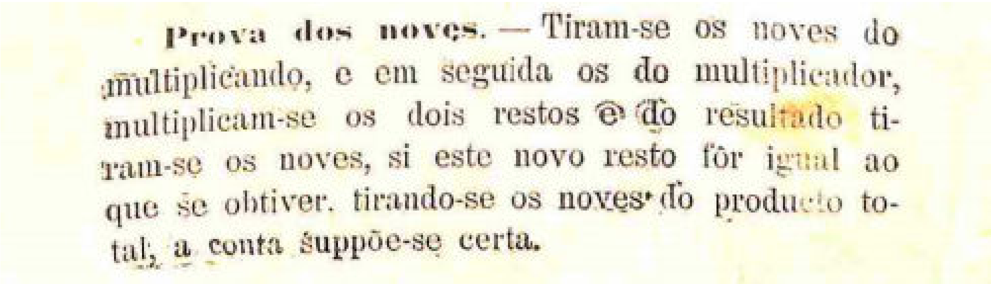
Em outras palvras, se S for realmente o resultado de $p_1, \cdots, p_n$, i.e , se a conta naõ estiver errada, o noves fora de S é o noves fora de $r_1, \cdots r_n$.

Exemplo 39. *Na multiplicação* $85 \cdot 12 = 1020$, *os fatores são* $p_1 = 85$ *e* $p_2 = 12$ *e o resultado é* $S = 1020$.

Pela Proposição 5 obtemos $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ *e* $s = 3$. *Usando a notação acima, o noves fora de* $r_1 \cdot r_2$ *é igual a* s. *De fato* $r_1 \cdot r_2 = 12$ *e* $1 + 2 = 3$, *ou seja, o noves fora de* $r_1 \cdot r_2$ *é* 3.

O noves fora era utilizado para verificação de cálculo em sala de aula. Normalmente era apenas para cálculos com dois fatores. Se $S = p_1 \cdot p_2$, onde s, r_1 e r_2 são os noves fora de S, p_1 e p_2, verificavam se o noves fora de $r_1 \cdot r_2$ era igual o noves fora de S, caso isto acontecesse julgava-se que o cálculo estivesse correto. Como veremos na imagem a seguir, de como era apresentado nos livros didáticos.

Figura 5.3: Prova da Multiplicação



Prova dos noves. — Tiram-se os noves do multiplicando, e em seguida os do multiplicador, multiplicam-se os dois restos e do resultado tiram-se os noves, si este novo resto fôr igual ao que se obtiver. tirando-se os noves do producto total, a conta suppõe-se certa.

Fonte: Souza(1910, pg. 22)

Na sala de aula era a presentada a prova da multiplicação como na imagem anterior, se o noves fora estivesse correto a conta estaria correta.

5.3.4 Prova dos Nove na Divisão

Para efetuar o noves fora na divisão, pode-se utilizar o algoritmo da divisão euclidiana, de foma que possamos usar as Propriedades da soma e da multiplicação. Dados a, $b \in \mathbb{N}$, pelo algoritmo da divisão euclidiana existem únicos q, $r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

Se r_1, for noves fora de a e r_2 o noves fora de b, r_3 noves fora de q e r_4 o noves fora de r, pelas Propriedades da soma e da multiplicação o noves fora de $r_2 \cdot r_3 + r_4$ é igual a r_1.

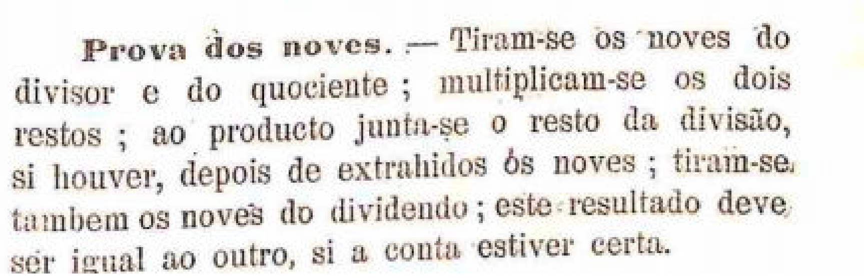
Exemplo 40. *Na divisão $649 \div 89$, o quociente é $q = 7$ e o resto é $r = 26$. Para verificar se essa conta está correta um aluno do início do século XX, utilizava provavelmente sem saber, o algoritmo da divisão euclidiana de onde obtemos a expressão:*

$$649 = 89 \cdot 7 + 26.$$

Usando a notação acima e aplicando a Propriedade 5 obtemos, $r_1 = 1$, $r_2 = 8$, $r_3 = 7$ e $r_4 = 8$. Daí o noves fora de $r_2 \cdot r_3 + r_4 = 1$ sendo igual a r_1.

A maioria dos alunos do século passado após verificar que o noves fora de $r_2 \cdot r_3 + r_4$ é igual a r_1, julagava a conta correta, pois assim era apresentado no livro didático no início do século XX.

Figura 5.4: Prova da Divisão



Prova dos noves. — Tiram-se os noves do divisor e do quociente ; multiplicam-se os dois restos ; ao producto junta-se o resto da divisão, si houver, depois de extrahidos ós noves ; tiram-se tambem os noves do dividendo ; este resultado deve ser igual ao outro, si a conta estiver certa.

Fonte: Souza(1910, pg. 23)

Desta forma como na imagem anterior era aprestando em sala de aula a forma de verificação do cálculo da divisão.

5.4 Encontrando falhas na prova

A Prova dos nove tem falhas? Quando fazemos as operações corretamente a prova dos noves vai poder confirmar que o cálculo foi efetuado corretamente, no entanto em alguns casos quando a conta não for feita corretamente, a prova dos nove não cosegue detectar o erro.

Para Lacava(2016) o noves fora baseia-se na soma dos algarismos de determinado número, se esse algarismos forem invertidos, a soma continuará dando o mesmo resultado, e o noves fora não irá detectar o erro.

Vamos supor que em uma determinada operação matemática têm-se resultado igual à 182, porém houve um erro na operação e obteve-se um resultado igual a 128, o noves fora desses dois resultado são iguais, o noves fora é 2, então pelo método noves fora o cáculo foi feito corretamente.

LACAVA(2016) "da mesma forma se o aluno obtiver outro resultado completamente diferente, e o "noves fora" do resultado correto, é igual o "noves fora" do resultado incorreto, a prova dos noves não indentifica o erro."

Exemplo 41. *Para a soma* $75+28+35 = 183$ *temos que* $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = 8$ *e* $s = 3$ *como o noves fora para as respectivas parcelas e para a soma. Como pode ser visto facilmente o noves fora de* $r_1 + r_2 + r_3$ *é* 3 *sendo igual a* s. *Assim aplicando o noves fora como forma de verificação de cálculo para este a conta está correta. Contudo houve um erro na soma e a respota correta é* 138, *assim o noves fora não detectou o erro, pois a soma dos algarimos de* 183 *e* 138 *são iguais.*

Exemplo 42. *Na multiplicação* $329 \cdot 85 = 35876$ *o noves fora dos fatores e do resultado são respctivamente* $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ *e* $s = 2$. *O noves fora de* $r_1 \cdot r_2$ *é igual a* 2 *sendo igual a* s. *Em sala de aula era mostrado como uma forma de se ter a confirmação que o cálculo estava correto. Porém houve um erro nesta multiplicação, o resultado encontrado foi* 35876, *sendo que o valor correto é* 27965, *e tendo noves fora iguais a* 2, *e assim o noves fora não detectou o erro.*

Os dois últimos exemplos acima nos mostra que não é só na situação citada por Lacava(2016) que o noves fora apresenta falhas. A seguir temos dois resultados que apontam para outros casos de falhas.

Proposição 7. *Suponhamos que dois números naturais* a *e* b *possuiem o mesmo resto* r *quando são divididos por* n. *Se outros dois números naturais* c *e* d *possuem o mesmo resto* z *quando divididos por* n, *então a soma* $(a + c)$ *deixa o mesmo resto que a soma* $(b + d)$ *quando forem divididos por* n.

Demonstração. Se a e b deixam o mesmo resto quando dividos por n, então, pelo Lema1 n divide $(a - b)$, implicando que existe outro número natural p tal que:

$$a - b = p \cdot n \tag{5.1}$$

Se c e d deixam o mesmo resto quando dividos por n, que será análogo ao que fizermos anteriormente, onde existe um número natural q, tal que:

$$c - d = q \cdot n \tag{5.2}$$

Somando membro a membro de (5.1) e (5.2) temos:

$$(a - b) + (c - d) = p \cdot n + q \cdot n$$

daí:

$$(a + c) - (b + d) = n(p + q)$$

Segue, pelo Lema 2 segue que $(a + c)$ e $(b + d)$ terão o mesmo resto quando dividos pelo número n.

□

Proposição 8. *Suponhamos que dois números naturais a e b deixam o mesmo resto r quando divididos por n. Se outros números naturais c e d deixam o mesmo resto z quando divididos por n, então $a \cdot c$ deixam o mesmo resto que $b \cdot d$ quando divididos por n.*

Demonstração. Seguindo o mesmo raciocínio da Proposição anterior, se a e b contém o mesmo resto r quando divididos por n, então n divide $a - b$, o que implica que existe um p natural que satisfaz $a - b = p \cdot n$. Iremos nesta parte isolar o a para ter uma melhor compreensão na demostração:

$$a = p \cdot n + b.$$

Utilizando o mesmo raciocínio para os outros números naturais c e d que possuem mesmo resto z, temos:

$$c = q \cdot n + d,$$

sendo q um número natural.

Multiplicando os dois resultados encontrados:

$$a \cdot c = (p \cdot n + b) \cdot (q \cdot n + d) = pqn^2 + pnd + bqn + bd,$$

ou seja,

$$a \cdot c = bd + n(pnq + pd + bq).$$

Como o produto e a soma de naturais é um natural o resultado obtido de $(pnq+pd+bq)$ será um número natural, que podemos chamar de w. Então

$$ac - bd = nw.$$

Disto segue, pelo Lema 2, que $a \cdot c$ e $b \cdot d$ deixam o mesmo resto na divisão por n.

$\square$

Exemplo 43. *Suponha que estamos fazendo a conta* $95 + 83$ *que tem noves fora* $r_1 = 5$ *e* $r_2 = 2$ *e no entanto cometemos um erro e encontramos o resultado de* $86 + 119$, *que tem noves fora* $n_1 = 5$ *e* $n_2 = 2$. *Dessa forma pela Proposição 7 o noves fora de* $r_1 + r_2$ *é igual o noves fora de* $n_1 + n_2$, *ou seja, neste caso o método do noves fora não detecta o erro.*

Observação importate: Os mesmos casos se aplicam para subtração e divisão. Então o noves fora não pode ser uma prova, pois há falhas.

5.5 Pode existir outro número que forme uma prova?

Quando enunciamos as Propriedades da soma e multiplicação, que dão base para o noves fora, essas Propriedades estão enunciadas para qualquer outro número natural N. No lugar do nove poderiamos usar por exemplo o número 3, e determinar o resto da divisão por 3.

Não há nada que nos informe ao certo por que o nove foi escolhido para ser usado como base nessa prova. Porém, é mais fácil encontrar o resto na divisão por 9 do que na divisão por 7, por exemplo.

Porém um dos possivéis motivos da escolha do nove foi pela base de numeração 10. Para Cruz(2009) isso se deve pelo fato que 10^i dividido por 9 deixa sempre resto

$1, \forall i \geq 1$. Pela Proposição 5 o resto na divisão da soma dos algarismos de um número por 9 é igual o resto da divisão desse número por 9, o que reduz os cálculos na obtenção do resto por 9. O mesmo ocorre com o 3 no lugar de 9.

No entanto usarmos a prova dos três só será possível encontrar três restos ou "três fora", 0,1 ou 2 assim possibilitando maiores chances de erro na verificação de cálculo. Ou seja quanto menor a quantidade de resto, mais chances de haver falhas. Se cometermos um erro de cálculo com diferença de três unidades o noves fora detecta a falha, porém o três fora não.

5.6 O desaparecimento do noves fora

O noves fora foi um método muito utilizado em escolas e comércios, como uma verificação de cálculo no início do século XX. Porém com o passar das décadas, o desenvolvimento da Matemática e da tecnólogia foi crescendo, e assim surgindo novas formas de verificação de cálculo, uma delas o uso da calculadora.

> [...] Com o avanço do mundo moderno e suas tecnólogias o uso da cálculadora foi sendo mais presente no dia a dia principalmente nas escolas. Estamos tão habituados com o uso da cálculadora em sala de aula que a volta dos noves fora, para algumas pessoas poderia ser um retrocesso no ensino(CRUZ, 2009, p.42).

O noves fora pode ser utilizado em sala de aula como contéudo extra escolar, utilizando a história da educação matemática para as operações fundamentais.

Quando falamos em usar a história da matemática como parte metodológica da aula, não é apenas para relatar o noves fora, como um fato histórico, mas fazendo análogias ao longo do tempo, como o método funciona. Sendo de grande ajuda na parte metodologica para o conteúdo de divisibilidade.

O uso da calculadora em sala de aula é frequente, tanto em Escolas como em Universidades, mas antes do uso das mesmas, são ensinados os algoritmos das operações fundamentais(soma, subtração, multiplicação, divisão) nos primeiros anos escolares.

O noves fora estava presente nos livros didáticos, junto com as quatro opereçãoes matemática, ajudando o professor e alunos nos processos de ensino e aprendizagem em sala de aula.

> [...] o livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares (LAJOLO, 1996, p. 4).

Como o noves fora não faz mais parte dos livros didáticos, fica a critério do professor, mostrar ou não como esse método funciona.

> Nas escolas, usava-se a "famosa" prova real ou a prova dos nove para conferir os cálculos. Esta última, com o passar dos anos, deixou de estar presente nos livros didáticos e atualmente, as novas gerações, sequer, ouviram falar no termo "prova dos nove".(LACAVA, 2016, p. 64).

Como o noves fora deixou de ser utilizado nos livros didáticos, e como uma parte dos professores utilizam o livro didático para dar base em suas aulas, consequentemente o noves fora deixou aos poucos de ser uutilizado em sala de aula. Já para a sociedade este método foi sendo deixado de ser utilizado por causa do surgimento das cálculadoras, por serem mais rápidas e não conterem falhas.

Capítulo 6

Principais Inferências

O noves fora foi um contéudo do livro didático ensinado em sala de aula como propriedade elementar do resto. Este contéudo era inicialmente apresentado aos alunos que atualmete estão no 6^o ano, por ser um contéudo que pode ser ensinado antes de críterios de divisibilidade.

Quem usava um pouco de Matemática no século passado, utilizava com frequência o noves fora para verificar se o cálculo estava correto. Devido a falta de escolaridade da época, o método foi adquirido dentro do contexto cultural, ou seja, passado de pai para filho. Comerciantes e bancarios tinham o hábito de fazer conferências utilizando o noves fora.

Este método não pode ser realmente uma prova, pois quando existe uma falha humana na operação do cálculo o noves fora não pode detectar a falha.

O surgimento das calculadoras eletrônicas foi um dos fatores que levaram ao desaparecimento do noves fora da sala de aula, pois além de mais rápida, não contém erros. Por isso acarretou-se a sua saída dos livros didáticos tornando se assim apenas uma parte historica do ensino de Matematica.

Referências Bibliográficas

BEZERRA, S., *Como me tornei professora de matemática: memórias resgatadas através da história da educação matemática.*,ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM),2013, Curitiba. Anais... Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins *matemática, uma breve história.*São Pualo: Editora Livraria da Física, 2008.

COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva; SPINA, Gabriela. *A Estatística nos Livros Didáticos de Ensino Médio* - Statistics in Brazilian's High School Books. Ensino da Matemática em Debate. ISSN 2358-4122, v. 2, n. 2, 2016.

CRUZ, Jaqueline Zdebski da Silva., *Divisibilidade e Prova dos Nove.* 2009. 53 f. Monografia (Especialização) - Curso de Licenciatura em Matemática, Colegiado de Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus Cascavel., Cascavel, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. *Livro didático de matemática:* uso ou abuso? Em Aberto, v. 16, n. 69, 1996.

DOMINGUES.Hygino H. *Algebra moderna*:volume único, Hygino H. Domingues/ Gelson Iezzi - 4 ed. reform- São Paulo: Atual, 2003

EVES, Howard, . *Introdução à História da Matemática,*. Trad.: Higyno H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004. 844p.

LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. , *A prova dos nove e o caso da"Arithmetica Primaria" de Cezar Pinheiro. REVEMAT*, Florianópolis/SC, v.11, n. 1, p. 54-73, 2015.

LACAVA, Alana Godoy. , *Um estudo sobre diferentes abordagens da prova dos nove presentes em livros didáticos de aritmética (1890-1970).* 2017. 159 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016

LAJOLO, Marisa. *Livro didático: um (quase) manual de usuário.* Em aberto, v. 16, n. 69, p. 03-09, 1996.

MIGUEL, A., *Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa emHistória (da Educação Matemática)*: entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35A, abril, 2010 p. 01-57

OLIVEIRA, Alexand Andrade de; LUSTOSA, Lisete Godinho. *A PROVA DOS NOVE.* 1998. 4 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 1998.

RIBEIRO, Dulcyene Maria., *A preparação de aulas usando história da matemática.* Xi Seminário Nacional da Historia da Matemática, Rio Grande do Norte, v. 1, n. 13, p.1-11, abr. 2014.

SOUZA, A. M. de. *Arithmetca Elementar.* 4. ed. Rio de Janeiro: Typ.do Jornal do Commercio. 1910. 177p. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159291>>. Acesso em 26 junho. 2019.

SHOKRANIAN,Salahoddin *Teoria dos números.* Editora Universidade de Brasília, 2º ed, 1999.

VALENTE, Wagner Rodrigues . *História da Educação Matemática:* interrogações metodológicas1 . Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Monte Alegre, v. 22, n. 1, p.29-49, jun. 2007.

VALENTE, W. R. *Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. Zetetiké*, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. 2008.

VALENTE, W. R., *Quem somos nós, professores de matemática?*. Caderno Cedes, Campinas. vol. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008a.

VALENTE, W. R., *Uma história da matemática escolar no Brasil*, 1730-1930.1. ed. São Paulo: Annablume; FAPESP, 1999.

VALENTE, W. R., *Euclides Roxo: e a modernização do ensino de Matemática no Brasil.* São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, 2003.