UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

PAULO SERGIO OLIVEIRA SILVA

UMA ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS CONTEÚDOS DA MATEMÁTICA PURA APRESENTADOS NOS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFT

ARAGUAÍNA 2015

PAULO SERGIO OLIVEIRA SILVA

UMA ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS CONTEÚDOS DA MATEMÁTICA PURA APRESENTADOS NOS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFT

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamur Andre Venturin.

Araguaína

2015

PAULO SERGIO OLIVEIRA SILVA

UMA ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS CONTEÚDOS DA MATEMÁTICA PURA APRESENTADOS NOS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFT

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Jamur Andre Venturin.

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.º Dr. Jamur Andre Venturin (Orientador)

____

Prof.º Dr. José Carlos de Oliveira Junior

____

Prof.ª Msc. Renata Alves da Silva

AGRADECIMENTOS

Quero em primeiro lugar agradecer a Deus, pelo dom da vida, saúde e coragem para enfrentar as adversidades que encontramos ao estar no mundo. Agradeço à minha família, sobretudo a meu pai José Aparecido, minha mãe Odete Alves e minhas irmãs Késia Patrícia, Kelly Christina e Katielly Suzen, pois, sem eles a realização desse curso de graduação seria bem mais difícil. Não poderia deixar de agradecer também à minha tia Nazaré, pessoa a qual morei durante quase três anos em sua casa, nesse meu tempo de acadêmico, sou muito grato por tudo que ela já fez por mim.

Agradeço a todos meus amigos e colegas que iniciaram o curso de Licenciatura em Matemática juntamente comigo, e outros que conheci durante o curso, tivemos muitos momentos de descontração e compartilhamento de conhecimento, entre eles: Aline Mairah, Ana Claúdia, Ana Cristina, Artur, Camila, Bruna, Cícero, Cristyan, Dnilton, Edson Caitano, Evanilde, Gleyson, Jailson, Janete, José Eurivan, Jocer Neto, Lee Andro, Magdal, Mariane, Melquisedeque, Nayriany, Rosalina, Samuel Coelho, Samuel Sousa, Tiago Pereira, Valdivino, Valéria e Werley. Sou grato a todos!

Agradeço aos professores que contribuíram com minha formação: Adriano Fonseca, Adriano Oliveira, André, Elizangela, Elzimar, Douglas Fonseca, Fernanda, Fernando Guedes, Freud Romão, Janderson, Jamur, Plínio, Roblêdo, Sinval, Temistocles, Ulisses e Yukiko.

Quero agradecer ao professor Àlvaro, que teve um papel importante para o inicio desse trabalho, nos ajudou a destacar os TCC's que fizeram parte de nossa pesquisa.

Agradeço também ao professor José Carlos que contribuiu para esse trabalho como coorientador, sou grato a ele por todo o tempo dedicado, pelas leituras que fez das partes deste trabalho que requisitamos sua ajuda, pelas sugestões e pela boa vontade e disposição que sempre mostrou para nos ajudar.

Quero agradecer a banca examinadora deste trabalho, pelas inúmeras observações, correções e sugestões que fizeram, as quais contribuíram para o enriquecimento do trabalho.

Enfim, quero agradecer ao meu orientador, professor Jamur Venturin, pelo excelente profissional que é, por ter me aceitado como seu orientando e acreditado que

eu seria capaz de desenvolver um bom trabalho, além de suas incansáveis orientações que através delas aprendi lições tanto para a formação acadêmica quanto para a vida.

A todos, minha perene gratidão!

"É preciso diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, até que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática."

Paulo Freire

RESUMO

Nesta pesquisa, buscamos compreender a Matemática Pura apresentada nos trabalhos de conclusão de curso na licenciatura em Matemática da UFT. A indagação dessa pesquisa é: *quais temas da Matemática Pura estão sendo abordados nos TCC's do curso de Licenciatura em Matemática e quais problemas estão sendo resolvidos?* Nosso objetivo é mostrar os temas da Matemática Pura que se evidenciaram nas pesquisas dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFT, Araguaína, e quais problemas eles resolveram paralelamente a esses conteúdos em seus trabalhos de conclusão de curso. Para isso, nos valemos da Fenomenologia tanto como metodologia de pesquisa, para analisar dados, quanto como postura fenomenológica. Entendemos que vários dos temas que se evidenciaram na pesquisa não se encontram nas ementas das disciplinas de Matemática Pura da atual grade curricular do Curso, de acordo com o PPC (2012). Portanto, percebemos que se faz necessário a criação de espaços para se estudar a Matemática Pura. Os espaços a que nos referimos podem ser desde a inclusão de conteúdos que estão sendo pesquisados, nas ementas das disciplinas, à possibilidade da inclusão de novas disciplinas na atual grade curricular para atender essa demanda, ou até mesmo à possibilidade de um projeto que vise um curso de Bacharelado em Matemática na UFT.

Palavras-chave: Fenomenologia, Hermenêutica e Matemática Pura.

ABSTRACT

In this search we seek to understand the pure mathematics presented in the work of completion of course in degree in Mathematics from the UFT. The inquiry of this research is: what themes of Pure Mathematics are being addressed in the TCC's of course degree in Mathematics and what problems are being solved? Our goal is to show the themes of Pure Mathematics which is evidenced in surveys of academics of the course degree in Mathematics of UFT, Araguaína, and what problems they solve in parallel to these contents in their work of completion of the course. For this, we used the Phenomenology as a research methodology to analyze data, and as a phenomenological posture. We understand that many of the themes that were revealed in the survey are not in the menus of the disciplines of Pure Mathematics of the current curriculum of the course , according to the PPC (2012). So we realized that it is necessary to create spaces for studying the Pure Mathematics. The spaces to which we refer can be from inclusion of content that are being searched in the menus of the subjects, to the possibility of the inclusion of new disciplines in the current curriculum to meet this demand , or even the possibility of a project with objective a course of Bachelor of Mathematics at the UFT.

Keywords: Phenomenology, Hermeneutics and Pure Mathematics.

Sumário

Capítulo 1: Introdução

Nesta pesquisa, estamos analisando os trabalhos de conclusão de curso (TCC's) que trazem conteúdos da Matemática Pura, apresentados no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins – Araguaína. Nosso objetivo é mostrar quais conteúdos e problemas da Matemática Pura estão sendo estudados. Para isso, nos valemos da atitude fenomenológica para constituir e analisar os dados, seguida de uma análise hermenêutica, a qual nos possibilita a interpretação do que se mostrar no processo de análise fenomenológica.

Nesse sentido, os conteúdos que são destacados seguem norteados por nossa pergunta de pesquisa: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

O presente trabalho está dividido do seguinte modo:

- No capítulo 2, apresentamos aspecto de fenomenologia, dizendo do modo pelo qual nos valemos do processo fenomenológico de pesquisa, evidenciando a sustentação metodológica. Apresentamos, também, o processo hermenêutico de interpretação.
- No Capítulo 3, mostramos como se deu o método de investigação, onde apresentamos os critérios empregados para a escolha dos TCC's, especificamos também os temas selecionados e apresentamos a pesquisa propriamente dita, onde, em seus desdobramentos, elaboramos uma síntese compreensiva e interpretativa, de cada trabalho analisado, com intuito de evidenciar os conteúdos que são estudados, e também os problemas que são apresentados e resolvidos.
- E no capítulo 4, fizemos a interpretação dos dados, que se mostraram na pesquisa. Onde evidenciamos cada tema que se destacou nos trabalhos analisados, fazendo ainda uma comparação com as ementas das disciplinas do núcleo de Matemática da atual grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFT.

No que segue, comentamos alguns vestígios do conhecimento matemático, onde relatamos sua importância para as sociedades de nossos antepassados, e quão importante a Matemática é para as populações do presente, sobretudo para a produção de objetos tecnológicos.

1.1. Alguns vestígios do conhecimento matemático

Quando pensamos ou falamos a palavra matemática, de imediato nos remetemos a algo difícil, complexo e que causa aversão na maioria das pessoas que estudam ou que já estudaram como disciplina específica de algum curso que fez. Nesse contexto, ao estudar a Matemática nos deparamos a todo instante com perguntas, como: Para que estudar Matemática? Onde utilizarei isso em minha vida? Entre outras. No entanto, podemos dizer sem dúvida que a Matemática está entre as mais importantes ciências conhecidas pela humanidade.

O conhecimento matemático não surgiu de forma rápida e instantânea e nem tampouco foi descoberto em sua forma pronta. De acordo com relatos históricos de antepassados, a Matemática surgiu da necessidade que a espécie humana teve em épocas de grandes desafios e ameaças à sua sobrevivência no local onde viviam. Do ponto de vista de Cyrino (2006) uma das hipóteses que temos sobre a origem do número é que provavelmente nasceu da necessidade que sentiu o homem de verificar a quantidade de seus guerreiros para comparar com a quantidade dos guerreiros de uma tribo rival. A partir dessa singela intuição de equivalência, séculos mais tarde é que veio a noção de número na sua forma abstrata, quando o homem percebeu que era necessário registrar quantidades.

Nesse sentido, Eves (2007, p. 25) nos diz que:

> É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena [...]

Em períodos arcaicos, o ser humano vivia em tribos, e como, naquela época, os meios de transporte e comunicação não favoreciam a interação entre elas. Com isso, algumas tribos permaneceram por algum período de tempo, isoladas das demais, dificultando assim o compartilhamento de suas técnicas e seu conhecimento individual. Rosa (2012) afirma que essas tribos, também conhecidas por civilizações, algumas se destacaram em determinadas técnicas e se evoluíram ao longo do tempo, das quais podemos destacar: Mesopotâmia, Egito, Babilônia, China, Índia, Grécia, Pérsia, entre outras. Naquele tempo, o conhecimento matemático adquirido foi crucial para o suprimento de suas necessidades básicas, como: agricultura, o comércio e a engenharia.

Dentre as civilizações citadas anteriormente, evidenciamos a Grécia, pois, de acordo com Rosa (2012), foi na Grécia antiga a partir do século VI antes da Era Cristã que teve início ao pensamento científico, o qual serviu de alicerce na evolução do pensamento humano.

Nesse contexto, a Matemática se sobressai com grande relevância num ambiente em que predomina a filosofia. Rosa (2012, p. 101) afirma ainda que:

> O espírito científico, essencial para o surgimento das diversas Ciências, originou-se na Grécia, sem querer, contudo, significar que todas as Ciências se formariam durante a evolução da civilização helênica. [...]. Desta forma, a Matemática e a Astronomia foram criadas pelos gregos, ainda que a especulação filosófica não estivesse abandonada.

O envolvimento dos gregos naquela época foi crucial para a gênese das ciências, sobretudo para a Matemática, nos campos da Geometria, Trigonometria e Aritmética. Euclides, Platão e Pitágoras são algumas das figuras que se destacam quando se fala do conhecimento matemático grego. Conhecimento esse que se expandiu, e seus reflexos são percebidos, por exemplo, na Universidade. Com as intermináveis transformações das sociedades, o aprimoramento da ciência Matemática fez-se necessário para suprir novas necessidades de outras épocas, como Rosa (2012, p.83) nos fala:

> O significativo desenvolvimento da Matemática nos séculos XV e XVI se deveu a diversos fatores, sendo mais relevantes os de ordem econômica (expansão comercial, monetarização da economia, surgimento do sistema bancário, requerimentos contábeis). Exigências de agrimensura, de navegação, das novas máquinas e armas de guerra e das grandes obras públicas e o acesso às obras de Euclides, Apolônio, Arquimedes, Pappus, Diofanto e outros matemáticos gregos contribuíram, igualmente, para o renascimento nos campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria.

O fato é que as chamadas ciências exatas nas quais a Matemática está inserida estão sempre em expansão de acordo com as novas exigências da sociedade. O século XVII "[...] ingressou na modernidade com a invenção do Cálculo (logaritmo, infinitesimal), o que permitiria simplificar e facilitar as complicadas operações requeridas, até então, na Astronomia e na Mecânica." (ROSA, 2012, p. 84). Mas o cálculo não foi a única invenção surpreendente do século XVII. Houve também nesse período o surgimento das geometrias analítica e projetiva, teoria dos números e a teoria das probabilidades (ROSA, 2012).

O século XIX foi considerado como o século de ouro para a Matemática, tão fértil e fecunda que foi comparada com a época das grandes descobertas da Civilização grega. Para Rosa (2012, p.40), "A expansão do conhecimento e do volume de teorias Matemáticas e a formulação de ideias e técnicas cada vez mais abstratas chegariam a tal ponto, no final do século, que nenhum matemático seria capaz de dominar, sozinho, todas as suas ramificações". Rosa (2012, p.40) nos diz que:

> Pela alta produtividade em qualidade e quantidade, pela introdução de novos conceitos, pela aplicação de maior rigor metodológico, pela extensão, profundidade e diversificação das pesquisas, e pelos significativos avanços nos diversos ramos (Álgebra, Geometria, Análise), o desenvolvimento da Matemática teórica seria um dos aspectos mais positivos da evolução da Ciência no período. O que caracterizaria

> a Matemática do século XIX, contudo, seria a ênfase na abstração, o retorno ao rigor da fundamentação, a criação da Geometria não euclidiana e a fundação da Lógica matemática.

De acordo com Rosa (2012), em meados do século XX, os cientistas matemáticos se empenharam bastante para resolver os 23 problemas anunciados por Hilbert em 1900, os quais necessitavam de uma significativa atenção dos pesquisadores matemáticos para sua compreensão e possível resolução. Alguns desses problemas foram resolvidos, e outros estão em aberto. Entendemos que o desafio de Hilbert ainda hoje continua a incentivar pesquisas na área da Matemática. Eves (2007, p.655) nos diz ainda que no século XX:

> Muitos dos conceitos básicos da matemática passaram por evoluções e generalizações notáveis, e áreas de importância fundamental, como a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolveram enormemente. [...]. A revolução computacional do século XX afetou também profundamente muitos ramos da matemática. [...]. E o que é bastante curioso, como grande parte da matemática, a maioria dessas considerações modernas têm suas raízes no trabalho dos gregos antigos, muito em particular nos Elementos de Euclides.

A partir da década de 90 com o avanço da tecnologia da informação, a Matemática ganhou uma grande aliada para a divulgação das pesquisas já desenvolvidas e impulsionou ainda mais as que estavam em desenvolvimento. D´Ambrósio (2005) afirma que: produziu Matemática nesses últimos vinte anos mais do que em toda a história da humanidade.

Com as várias ramificações do conhecimento matemático, é percebido hoje a complexidade de se dominar esse conhecimento. Há inúmeros resultados de pesquisas e, tratando-se da Matemática aplicada, em diversas áreas presentificam-se as aplicações. Entendemos que, a indústria se tornou uma grande impulsionadora desse desenvolvimento por ser dependente de pesquisas tecnológicas inovadoras, como, por exemplo, a robótica, a cibernética, a biotecnologia, entre outras que têm suas aplicações em diversos setores – aeroespacial, radiocomunicação, informática, farmacêutica e outros.

Compreendemos que, mesmo com a grande quantidade de pesquisas que já foram publicadas em Matemática Pura e Matemática Aplicada, podemos afirmar que a ciência Matemática ainda está expandindo seus horizontes, visto que há diversas pesquisas em desenvolvimento, bem como não cessa o surgimento de novos problemas na Matemática para serem solucionados.

Capítulo 2: Apontamentos de Fenomenologia e de Hermenêutica

2.1. Atitude fenomenológica na pesquisa

Para podermos falar sobre a Fenomenologia, primeiro, começaremos por especificar o seu significado etimológico. Para isso, nos valemos do conceito apresentado por Bicudo (2010, p. 29):

> Fenomenologia é uma palavra composta por fenômeno + logos. Fenômeno, cujo significado é o que se mostra, o que aparece, e logos, entendido como pensamento, reflexão, reunião, articulação. Portanto, Fenomenologia pode ser tomada como a articulação do sentido do que se mostra, ou como reflexão sobre o que se mostra.

A perspectiva fenomenológica que assumo neste trabalho é a que foi criada pelo matemático e filósofo Edmund Husserl (1859 – 1938)[1]. Para Ales Bello (2006), a Fenomenologia tem a preocupação de buscar compreender o sentido das coisas para o sujeito. Ela afirma, ainda, que é muito importante para o ser humano a compreensão desse sentido, mas que nem todas as coisas são imediatamente compreensíveis. Levando em conta o significado etimológico de Fenomenologia, o sentido de determinada coisa pode ser compreendido pelo sujeito quando este assume uma atitude de indagar o que aí está. Para Venturin (2015, p. 27) "ao assumir uma atitude de indagação não nos contentamos, simplesmente, com o visto ou o efetuado, tomado como um fato[2] dado, mas buscamos compreender para além do que aí está".

Nesse sentido, pesquisar fenomenologicamente é evidenciar as características do fenômeno. Entendemos que, para darmos conta disso, segundo Bicudo (2010), é preciso "ir às coisas mesmas" e não destacar somente o que se diz ou se sabe sobre elas

---

[1] "Edmund Husserl é tido como o "criador" da Fenomenologia. Nasceu em Prossnitz, na Moravia, no antigo Império Austríaco (hoje Prostejov, na República Checa), em 8 de abril de 1859, e morreu em Freiburg, em 27 de abril de 1938. A fim de completar seus estudos de Matemática, iniciados nas universidades alemãs, foi, em 1884, para Viena, onde, sob a influência de Franz Brentano, tomou consciência de sua vocação filosófica. Em 1887, Husserl, que fora judeu, converteu-se à Igreja Luterana. Ensinou Filosofia, como livre-docente, em Halle, de 1887 a 1901; em Gottingen, de 1901a 1918; e, em Freiburg, de 1918 a 1928, quando se aposentou. Na raiz do pensamento de Husserl encontram-se as seguintes influências principais: Franz Brentano e, por seu intermédio, a tradição grega e escolástica; Bolzano, Descartes, Leibniz, o empirismo inglês e o kantismo". (BICUDO, 2011, p. 29)

[2] Fato é o que é dado, está pronto, acabado. Ele é legitimado, por exemplo, pela ciência. (Orientação com o Prof. Jamur Venturin, no dia 28 de abril de 2016)

como um fato dado. Para isso, é importante o movimento de pôr em suspensão[3] os conceitos prévios no momento da investigação para que o conhecimento prévio do pesquisador sobre o tema não o conduza determinantemente, fazendo juízos e afirmações prévias VENTURIN (2015). Bicudo afirma, ainda, que uma pesquisa fenomenológica:

> É uma investigação em que todos os passos dados na trajetória investigativa são intencionais e em que o investigador precisa ficar atento, dar-se conta do que está sendo efetuado, de tal modo que as raízes dos atos cognitivos e a maneira de serem expressos sejam explicitados. (2010, p. 41)

Nessa pesquisa, assumo a Fenomenologia, também, como uma metodologia para constituir e analisar dados. A questão de investigação é: *Quais os temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?* Com ela buscaremos explicitar os significados do que se mostrar durante a leitura dos TCC´s.

Segundo Brito (2010, p. 22), “[...] na abordagem fenomenológica colocamos nossa interrogação como orientadora, no movimento de compreensão dos significados do fenômeno que são evidenciados pelos sujeitos e por nós mesmos”. Também sobre isso, Bicudo (2010, p. 42) diz que “os procedimentos fenomenológicos solicitam que a própria interrogação seja colocada em destaque e que busquemos compreender o que estamos interrogando”. Assim, buscamos compreender por meio da interrogação: *Quais os temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?* Com essa pergunta de pesquisa evidenciamos que nosso fenômeno são os *temas* e o *problemas* da Matemática Pura que são tematizados nos TCC´s.

Para dar conta da interrogação, o pesquisador faz uma rigorosa leitura desses trabalhos e, na medida que lemos o texto, destacamos o que se mostrar de cada trabalho orientados pela interrogação de pesquisa; Sobre a pesquisa fenomenológica Sokolowski (2012, p. 57) diz que:

> Se vamos oferecer uma analise descritiva de qualquer uma e de todas as intencionalidades na atitude natural[4], não podemos compartilhar qualquer uma delas. Devemos tomar distância, refletir sobre, e tornar temática qualquer uma e todas elas. Isto significa que enquanto estamos na atitude fenomenológica suspendemos todas as intencionalidades que estamos examinando.

---

[3] O ato de colocar algo em suspensão equivale dizer, por exemplo, que no momento da leitura de um livro que se pretende pesquisar sobre... É necessário que o pesquisador não faça juízo do texto com seu conhecimento prévio sobre o assunto, conforme afirma Venturin (2015).

[4] Sobre atitude natural, Bicudo (2010, p. 27) afirma que o próprio Husserl diz que é aquela que “tomam-se os fatos tais como são definidos ou considerados na sua fatualidade”.

Desse modo, compreendemos que a abordagem fenomenológica na pesquisa requer atenção contínua do pesquisador, mantendo o rigor necessário, para dar conta do que se interroga.

2.2. Entendimento inicial de Hermenêutica

Um dos significados de hermenêutica, de acordo com o dicionário Houaiss (2009) é "ciência, técnica que tem por objeto a interpretação de textos religiosos ou filosóficos, especialmente das Sagradas Escrituras" buscando ampliar o significado de hermenêutica citamos Bicudo (1991, p. 66):

> As raízes da palavra hermenêutica se encontram no verbo *hermeneuo* ερμηνεύω, traduzido como "interpretação". Essas palavras gregas sugerem, originalmente, exprimir o pensamento por meio da palavra. Seu significado se explicita ao analisar-se as três vertentes básicas de *hermeneuo*: exprimir ou dizer, explicar e traduzir. Atentando para os significados desses termos, os quais têm sido plasmados pelo uso e por suas várias possibilidades de conotação, pode-se interpretar: tornar algo, que é pouco familiar, distante e obscuro, em algo habitado pelo sentido da experiência vivida, próximo e inteligível.

Relatos históricos nos revelam que a hermenêutica, na sua pré-história, foi mobilizada por pessoas que se interessavam pelas escrituras sagradas (bíblia), por ser composta de textos que necessitam de empenho para compreender seus significados. Da mesma forma, a hermenêutica também fez parte de estudos da filologia[5], na busca de redescobrir a literatura clássica. Sobre esse assunto Gadamer (1999, p. 273-274) diz que:

> A hermenêutica teológica, como mostrou Dilthey muito bem, a partir da autodefesa da compreensão reformista da Bíblia contra o ataque dos teólogos tridentinos e seu apelo ao caráter indispensável da tradição; a hermenêutica filológica apareceu como instrumentaria para as tentativas humanísticas de redescobrir a literatura clássica. [...] A hermenêutica procura em ambos os terrenos, da tradição, tanto para a literatura como para a Bíblia pôr a descoberto o sentido original dos textos, através de um procedimento de correção quase artesanal, e ganha uma importância decisiva [...].

Nesse sentido, Bicudo (1991, p. 92) nos diz que o professor é um eterno Hermeneuta, pois em sua atividade está a todo instante interpretando, explicando, procurando tornar claro o sentido de determinado conteúdo para seus alunos. A pesquisadora afirma que a atividade do professor:

---

[5] Segundo o dicionário Houaiss (2009) é o estudo rigoroso dos documentos escritos antigos e de sua transmissão, para estabelecer, interpretar e editar esses textos.

> [...] é intrinsecamente hermenêutica, pois ele interpreta o assunto que ensina, na medida em que procura torná-lo claro, tirá-lo da obscuridade, para os seus alunos. Nessa busca, ele "exprime em voz alta, diz" por meio de palavras e ações, aquilo que ele próprio compreende sobre o que compreendeu. Para tanto, classifica e torna o seu discurso racional. Ele traduz o que é para ser dito, na tentativa de fazer com que o que é estrangeiro, ininteligível para o aluno, se lhe torne familiar. Nesse aspecto, ele opera como um mediador entre o mundo desnudado pelo assunto que ensina, o seu horizonte de compreensão e o do aluno.

Desse modo, nos valemos da hermenêutica, neste trabalho, como um modo para analisar e interpretar os dados que se mostrarem significativos para o pesquisador. Bicudo (1991, p. 77) afirma que o trabalho hermenêutico é: "decifrar (tornar claro, tirar da obscuridade) a marca deixada pelo homem na obra por ele criada". É disso que nos ocuparemos nos próximos capítulos.

Capítulo 3: Procedimentos de Investigação

A pesquisa será de cunho qualitativo, baseando-se no levantamento bibliográfico do acervo de monografias defendidas no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Araguaína. A escolha dessas monografias se deu a partir da verificação de todas as disponíveis no acervo da biblioteca do Campus Cimba. Numa primeira verificação, foram selecionadas 15 monografias, as quais, após ter passado por um processo de análise, percebemos que 6 dessas tratavam de conteúdos da matemática aplicada. Portanto, elas foram descartadas ficando somente com 9 monografias do ramo da Matemática Pura.

A partir da seguinte pergunta: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?* Assumiremos uma atitude fenomenológica, buscando, assim, destacar parte dos conteúdos presentes nas monografias.

Abaixo, segue um quadro especificando o nome do autor, título do trabalho, nome do orientador (a) e o ano de defesa.

Quadro 1: *Trabalhos selecionados como base bibliográfica para a pesquisa*

Autor (a)	Titulo	Orientador (a)	Ano
Cícero Júnior Silva Pinheiro	Uma Breve Introdução sobre Ciclo-Limite de Sistemas Dinâmicos	Prof. Dr. Odair Vieira dos Santos	2014
Domingos Santana Nascimento dos Santos	Cálculo de Integrais Definidas Utilizando Funções de Distribuição de Probabilidade	Profa. Msc. Fernanda Vital de Paula	2014
Flávio Guilherme de Abreu Drumond	Um estudo de grupos: Introdução aos grupos solúveis	Prof. Msc. Willian Francisco de Araújo	2012
Karen Brito Miranda	O Polinômio Característico Aplicado ao estudo Qualitativo de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva.	2013
Magno Acácio dos Santos	Análise de Algumas Bifurcações de Sistemas Dinâmicos	Prof. Dr. Odair Vieira dos Santos	2014
Maria Francisca de Sousa Gomes	O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt Aplicado em Mínimos Quadrados e Polinômios Ortogonais	Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva.	2014
Maria Priscila Barbosa	Uma Breve Análise de Sistemas Lineares	Prof. Msc. Odair Vieira dos Santos.	2013
Onésimo Rodrigues Pereira	Introdução à Criptografia RSA	Prof. Msc. Willian Francisco de Araújo	2012

Como já dissemos anteriormente, esta é uma pesquisa que se desenvolve com uma abordagem fenomenológica, ou seja, a metodologia se sustenta na Fenomenologia. Assim, buscamos evidenciar os aspectos de cada trabalho, seguida de uma análise hermenêutica, visando à interpretação do que se mostrar no processo de análise fenomenológico.

3.1. Sínteses Compreensivas e Interpretativas

Trabalho analisado: Uma breve introdução sobre Ciclo-limite de Sistemas Dinâmicos

Autor: Cícero Júnior Silva Pinheiro **Ano**: 2014

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, destacou-se o estudo da Teoria da Estabilidade dos sistemas de Equações diferenciais Lineares e não-lineares. Mostrou-se como classificar os autovalores e pontos críticos de um sistema para, assim, identificar o tipo de sua estabilidade. Evidenciamos a realização de um estudo sobre ciclo-limite de sistemas não-lineares, onde é explicitado o conceito de ciclo-limite e estabilidade. Visando esclarecer alguns desses temas anunciados, Pinheiro (2014) afirma: "Segundo Poincaré, um **ciclo-limite** é uma trajetória fechada e isolada, que pode aparecer no retrato de fase de sistemas não-lineares." (p. 46, grifos do autor), quanto à estabilidade ela pode ser de três tipos. Para Pinheiro: "Dizemos que um ciclo-limite é **assintoticamente estável** quando as trajetórias vizinhas internas e externas se aproximam. Se as trajetórias vizinhas se afastam, o ciclo limite é **instável**. Se as trajetórias se aproximam por um lado, mas se afastam pelo outro, o ciclo limite é considerado **semiestável.**" (2014, p. 46, grifos do autor).

Compreendemos que os critérios e teoremas como, por exemplo: o critério de Bendixson, o critério de Dulac, o Teorema de Poincaré-Bendixson e os teoremas de índices de Poincaré são importantes para a determinação da localização de um ciclo-limite, caso ele exista. Segue o que dizem esses critérios, conforme exposto no tcc:

- O critério de Bendixson diz que, se num determinado sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a expressão $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}$ não for identicamente nula e não mudar de sinal em um domínio $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}^{2}$, então este sistema não apresenta trajetórias fechadas, ou seja, não há ciclo-limite;
- "Critério de Dulac: [...] Dulac provou que, se existe uma função $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tal que $\frac{\partial(bf)}{\partial x}+\frac{\partial(bg)}{\partial y}$ não é uma expressão identicamente nula e não muda num domínio D simplesmente conexo, então o sistema não apresenta trajetórias fechadas em D." (PINHEIRO, p. 50)
- "Teorema de Poincaré-Bendixson: Esse teorema estabelece que os conjuntos $\boldsymbol{\omega}$-limite de um sistema autônomo cujo plano de fase é o plano cartesiano, e com pontos críticos isolados, podem ser de três tipos:

  Pontos críticos;

  Trajetórias fechadas;

  Pontos críticos $\boldsymbol{Q_j}$ conectados por trajetórias, de modo que os conjuntos $\boldsymbol{\alpha}$-limite e $\boldsymbol{\omega}$-limite dessas trajetórias são os pontos $\boldsymbol{Q_j}$." (PINHEIRO, p. 52)
- "Teoremas de índices de Poincaré: Poincaré provou que o valor do índice $\boldsymbol{I_C}$ depende exclusivamente dos pontos críticos $\overline{\boldsymbol{x}}$ que são envolvidos por *C*. Caso *C* não envolva pontos críticos, então $\boldsymbol{I_C = 0}$. Se a curva pode ser continuamente deformada, até se tornar a curva $\boldsymbol{C'}$, então $\boldsymbol{I_C = I_{C'}}$. Nesse processo de deformação, não se pode passar por nenhum ponto crítico." (PINHEIRO, p. 54)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problema apresentado – ou seja, que é descrito e detalhado no trabalho –, enunciado e resolvido:

- A equação de Van Der Pol.

Segundo Pinheiro (2014), Van Der Pol sugeriu uma equação para modelar o funcionamento de circuitos elétricos dos primeiros aparelhos de rádio. A equação é a seguinte: $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, onde μ é um parâmetro positivo. Essa equação retrata um oscilador harmônico simples, com um atrito, ela tem a característica que, mesmo com o atrito, consegue se autossustentar, para sistemas lineares, na presença de atrito, seria necessária uma entrada periódica, para haver oscilações autossustentadas, ou seja, um ciclo-limite. A equação de Van Der Pol faz com que as oscilações de grande amplitude decaiam e as de menor amplitude cresçam. Nesse sentido a energia dissipada e a energia ganha pelo sistema se equivalem.

Trabalho analisado: Cálculo de Integrais Definidas utilizando Funções de Distribuição de Probabilidades

Autor: Domingos Santana Nascimento dos Santos **Ano:** 2014

Indagação da pesquisa que direciona a análise dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, destacou-se o conteúdo matemático sobre as variáveis aleatórias contínuas e discretas, e definiu-se, inclusive, o que é uma Função de Probabilidade e Função Densidade de Probabilidade (F.D.P.). Mostrou-se um método alternativo para resolver integrais definidas em que são aplicados os modelos probabilísticos de variáveis aleatórias contínuas.

Em concordância com os diversos modelos probabilísticos de variáveis aleatórias contínuas, especificamos a seguir os principais tipos de distribuições de probabilidades contínuas que se evidenciaram: distribuição Cauchy, distribuição Exponencial, distribuição Gama, distribuição Beta, distribuição Logística, distribuição Normal, distribuição Qui-Quadrado, distribuição *t Student*, distribuição Fisher, distribuição uniforme e distribuição Weibull. A seguir, explicitamos o que diz cada uma dessas distribuições:

- "Distribuição de Cauchy: A distribuição de Cauchy tem sua importância em diversas áreas do conhecimento científico, na física, por exemplo, essa distribuição é solução de uma equação diferencial que descreve um determinado tipo de oscilador, em matemática é uma das soluções para a equação de Laplace, entre diversas outras aplicações." (SANTOS, 2014, p. 16)
- "Distribuição Exponencial: Esta é uma distribuição que se caracteriza por ter uma função de taxa de falha constante, isto é, ela representa adequadamente, por exemplo, a probabilidade de tempo de funcionamento de uma peça que ao estar em uso, tenha probabilidade constante de falha, ou seja, não importa por quanto tempo a peça esteja funcionando, a chance dela falhar num pequeno intervalo de tempo subsequente não depende do tempo decorrido." (SANTOS, p. 17)
- "Distribuição Gama: A distribuição gama é uma distribuição generalizada, pois diversas distribuições são casos particulares dela como, por exemplo, a exponencial, a qui-quadrado, entre outras. Essa distribuição é muito aplicada na análise de tempo de vida de produtos." (SANTOS, p. 18)
- "Distribuição Beta: A distribuição beta é frequentemente usada para modelarmos proporções ou objetos que pertençam ao intervalo (0, 1), para o qual esta distribuição está definida." (SANTOS, p. 19)
- "Distribuição Logística: Algumas aplicações da distribuição logística é no estudo do crescimento de populações e na área de análise de sobrevivência. O fato da distribuição logística ter a forma similar à distribuição Normal, torna ela proveitosa em ocasiões convenientes." (SANTOS, p. 21)
- "Distribuição Normal: A distribuição normal conhecida também como distribuição gaussiana é sem dúvida a mais importante entre as distribuições contínuas. Sua importância se deve a vários fatores, entre eles podemos citar o teorema central do limite, o qual é um resultado fundamental em aplicações práticas e teóricas, pois ele garante que mesmo que os dados não sejam distribuídos segundo uma distribuição normal a média dos dados converge para uma distribuição normal conforme o número de dados aumenta." (SANTOS, p. 21-22)

- "Distribuição Qui-Quadrado: É uma distribuição contínua que aparece em muitas áreas da inferência estatística, como análise de tabelas de contingência; verificação da qualidade de ajustamento de modelos estatísticos e probabilísticos aos dados estatísticos; e serve como base para obtenção de outras distribuições de probabilidade como, a t de Student e Fisher." (SANTOS, p. 22)
- Distribuição *t* de *Student*: A distribuição *t* de *Student* é utilizada na estatística para teste de hipóteses e modelagem estatística, por exemplo.
- "Distribuição Fisher: A distribuição F de Snedecor, também conhecida como distribuição de Fisher, é frequentemente utilizada na inferência estatística, que estuda generalizações sobre uma população por meio de evidências fornecidas por uma amostra retirada desta população através da análise da variância." (SANTOS, p. 24)
- "Distribuição Uniforme: A distribuição uniforme é a mais simples dentre as distribuições contínuas, entretanto, uma das mais importantes e utilizadas na teoria de probabilidade. A distribuição uniforme tem a importante característica de representar variáveis que têm a mesma probabilidade de acontecer num intervalo de variação." (SANTOS, p.25)
- Distribuição Weibull: A distribuição Weibull é utilizada na indústria por descrever a vida de componentes eletrônicos, capacitores e dielétricos, cerâmicas etc.

A análise evidenciou que os conceitos e a definição de variância e esperança matemática são amplamente utilizados em distribuições de probabilidade. Entendemos que a esperança de uma variável aleatória é conhecida como uma medida de posição da distribuição dessa variável. Apresentou-se também o conteúdo de Cálculo de Integrais definidas, onde é abordado o Teorema Fundamental do Calculo (T.F.C), parte 1 e parte 2, a parte 1 do T.F.C nos mostra que a integração é uma operação inversa a da derivada; A segunda parte diz que, dado uma função *f* contínua num intervalo fechado [a,b], o valor dessa integral é obtido pela diferença do limite superior e limite inferior aplicado a função integrada.

As técnicas de integração auxiliam o cálculo por tornar menos complicado o cálculo de algumas integrais, quando sua antiderivada não é compreendida de modo direto. Entre elas destacou-se a técnica da *integração por partes* a qual se baseia na fórmula para derivada de um produto, *Regra da substituição* a qual utiliza a regra da cadeia, e a *substituição trigonométrica* que é aplicada para simplificar funções que envolvem as seguintes expressões: $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, afinal de contas, essas técnicas estão dispostas em qualquer livro de cálculo.

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- "Distribuição Beta: Vimos que a *f.d.p.* da distribuição Beta é dada por: $\boldsymbol{f(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ x \in (0,1), \alpha > 0\ e\ \beta > 0}$.

  Considere $\boldsymbol{\int_0^1 (1-x)^9 dx}$.

  Normalmente, ao integrarmos a função $\boldsymbol{f(x) = (1-x)^9}$, definida no intervalo [0,1], segundo a maneira usual utilizamos a técnica de substituição fazendo:

  $$\boldsymbol{u = 1 - x}$$
  $$\boldsymbol{du = -dx \Rightarrow -du = dx}$$

  Assim, $\boldsymbol{\int_0^1 (1-x)^9 dx = \int_0^1 u^9\,(-du) = -\int_0^1 u^9 du}$

  $$\boldsymbol{= -\left[\frac{u^{10}}{10}\right]_0^1 = -\left[\frac{(1-x)^{10}}{10}\right]_0^1}$$
  $$\boldsymbol{= -\left[\frac{0^{10}}{10} - \frac{1^{10}}{10}\right] = \frac{0^{10}}{10} - \frac{1^{10}}{10} = \frac{1}{10}}$$

  Portanto, $\boldsymbol{\int_0^1 (1-x)^9 dx = \frac{1}{10}}$

  Como forma alternativa para o cálculo da integral desta mesma função, utilizando a distribuição Beta e manipulações algébricas, podemos fazer:

  $$\boldsymbol{f(x) = (1-x)^9 = x^{1-1}(1-x)^{10-1}}$$

  $$\boldsymbol{= x^{1-1}(1-x)^{10-1}\frac{B(1,10)}{B(1,10)} = B(1,10)\frac{x^{1-1}(1-x)^{10-1}}{B(1,10)} = B(1,10)g(x)}.$$

  Observa-se que $\boldsymbol{X \sim Beta(1,10)}$ sendo

  $$\boldsymbol{\int_0^1 g(x)dx = 1}$$

  $$\int_0^1 (1-x)^9 dx = \int_0^1 B(1,10)g(x)dx = B(1,10)\int_0^1 g(x)dx \triangleq \frac{1}{10}.1$$

$\boldsymbol{B(1,10)}\,\frac{\boldsymbol{\Gamma(1)\Gamma(10)}}{\boldsymbol{\Gamma(1+10)}}=\frac{\boldsymbol{1\Gamma(9+1)}}{\boldsymbol{\Gamma(10+1)}}=\frac{\mathbf{1.9!}}{\mathbf{10!}}=\frac{\mathbf{9!}}{\mathbf{10.9!}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$. Assim $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{(1-x)^{9}dx}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$." SANTOS (p. 48-49)

- "Distribuição Normal: Vimos que a *f.d.p.* da distribuição Normal é dada por: $\boldsymbol{(x|\mu,\sigma^2)}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\boldsymbol{\sigma>0}$, $-\infty<\boldsymbol{x}<+\infty$, $-\infty<\boldsymbol{\mu}<+\infty$.

  Considere $\int_0^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}dx$.

  Não é possível resolver essa integral pelas técnicas tradicionais de integração. O cálculo desta integral exige um conhecimento mais avançado. Uma forma alternativa para resolver essa integral é utilizando a distribuição Normal, da seguinte maneira: Consideremos a função $p(x)=e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$ no intervalo [0, 2].

  $p(x)=e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}=e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{4}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}}\frac{2\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}=2\sqrt{2\pi}\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}}=$ $2\sqrt{2\pi}\,g(X)$, em que $X\sim N(2,2^2)$. Logo, $\int_0^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{8}dx}=2\sqrt{2\pi}\,g(x)=$ $2\sqrt{2\pi}\,[G(2)-G(0)]=2\sqrt{2\pi}\,\mathbf{.}\,0{,}3413447\ \approx 1{,}711249$." SANTOS (p. 58-59)

Trabalho analisado: Um estudo de grupos: Introdução aos grupos solúveis
Autor: Flávio Guilherme de Abreu Drumond **Ano:** 2012

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise evidencia-se um estudo da teoria dos grupos, com ênfase em grupos solúveis. Destaca-se que o surgimento da teoria dos grupos não se restringiu somente como parte da Álgebra, ela se expandiu e são notáveis seus efeitos em diversos ramos da ciência, por exemplo, "em Química, grupos são utilizados para classificar estruturas cristalinas e as simetrias das moléculas e em Física, o interesse maior está na representação de grupos que podem descrever as simetrias que as leis físicas devem obedecer em certos sistemas." DRUMOND (p. 13)

Compreendemos que, para o estudo da teoria de grupos, mostrou-se necessário uma abordagem de alguns conceitos preliminares, como: congruências, leis de composições internas e suas propriedades, e tábua de uma operação. Destacam-se, sobretudo, as leis de composições internas que são conceitos básicos para o estudo de grupos. Em congruências, mostra-se que suas relações satisfazem as seguintes condições:

- Reflexividade: se $\boldsymbol{a \equiv a(mod\ m)}$
- Simetria: se $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$, então $\boldsymbol{b \equiv a(mod\ m)}$
- Transitividade: se $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ e $\boldsymbol{b \equiv c(mod\ m)}$, então $\boldsymbol{a \equiv c(mod\ m)}$.

Segundo Drumond (p.17) a lei de Composições internas obedece a seguinte definição: "Seja E um conjunto não vazio. Toda aplicação (função) $f{:}E\times E\rightarrow E$ recebe o nome operação sobre E ou lei de composição interna sobre E." Entendemos ainda que uma lei de composição interna $*$ em um conjunto E, satisfaz as seguintes propriedades:

- Associativa;
- Comutativa;
- Elemento neutro;
- Elementos simetrizáveis;
- Elementos regulares;

Compreendemos que um conjunto G não vazio munido de uma operação $*$, será um grupo se para cada par de elementos de G pudermos associar um outro elemento que também pertence a G, e satisfazer as seguintes propriedades:

- "A operação é associativa, isto é, $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall\ a, b, c \in G$;" DRUMOND (p. 28)
- "Existe um elemento neutro e tal que $e * a = a * e = a,\ \forall a \in G$;" DRUMOND (p. 28)
- "Para todo elemento $a \in G$ existe um elemento inverso ou simétrico $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$." DRUMOND (p. 28)

Entendemos que, se o conjunto G, não vazio, satisfizer as três condições citadas acima, então ele será chamado de grupo e será denotado por: $(G,*)$. Mostrou-se ainda, que se um conjunto G satisfizer as três propriedades citadas acima e ainda a propriedade comutativa, então esse grupo será chamado de abeliano.

Com intuito de exemplificar grupos, apresentou-se alguns tipos de grupos, entre eles:

- Grupos aditivos dos $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{R}$;
- Grupo aditivo dos $\boldsymbol{C}$;
- Grupo multiplicativo dos $\boldsymbol{Q}^*$ e $\boldsymbol{R}^*$;
- Grupo multiplicativo dos $\boldsymbol{C}^*$;
- Grupos aditivos de classes de restos;
- Grupo multiplicativo das classes de restos;
- Grupos de permutações e
- Grupos de simetria.

Destaca-se também Homomorfismo e Isomorfismo de grupos. Visando esclarecer o que dizem esses temas, Drumond (p. 44) afirma que "o principal conceito de homomorfismo é que ele é uma aplicação (função) que relaciona dois grupos de tal forma que não altera em nada sua estrutura." Ainda segundo Drumond, "Sejam G e J grupos e $G \rightarrow J$ um homomorfismo de grupos, se f for uma bijeção, então será chamada de isomorfismo de G no grupo J e denotamos $G \approx J$ ou $G \simeq J$. Se $G = J$ a operação é a mesma, então a aplicação f é um isomorfismo de G." (p. 48)

Em relação aos grupos solúveis, mostra-se que "um grupo G é solúvel se podemos ter uma cadeia finita de grupos, $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_n = \{e\}$ onde cada H_i é subgrupo normal de H_{i-1}, tal que cada grupo fator é abeliano." DRUMOND (p. 65)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- "Digamos que hoje seja quarta-feira e foi marcado uma prova para daqui 20 dias, em que dia da semana será a prova?

  Primeiro vamos ilustrar a situação com uma tabela para facilitar a compreensão. Vamos colocar quarta-feira sendo 0 e quinta-feira sendo 1 e assim sucessivamente, então teremos:

Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	Segunda	Terça
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

Vendo a tabela é fácil de identificar, que o dia será uma terça. Agora, usando o conceito de congruência, temos que em cada uma das colunas da tabela a diferença entre o número abaixo e número respectivamente acima é 7, assim temos que nosso calendário é módulo 7. Logo, usando as definições de congruências temos que *m* será 7, *a* será 20 e *b* será o dia que procuramos. Expressando algebricamente temos: $20 = b + 7k$, usando o teorema fundamental do resto,

$$20 \div 7 = 2 \text{ e sobra resto } 6$$

Logo b (lembrando que b indica o resto da divisão por 7 então ele vai variar de 0 a 6, pois na divisão por 7, é fácil notar que não teremos resto maior que 6) e como o resto é 6, o dia estará na coluna da terça." DRUMOND (p. 17)

- "Se $\boldsymbol{G}$ é abeliano, então todo subgrupo $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{G}$ é normal.

  De fato, para quaisquer $x \in H$ e $g \in G$, temos que

  $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x \in H$, pois G é abeliano

  Portanto $\boldsymbol{H}$ é um subgrupo normal de $\boldsymbol{G}$." DRUMOND (p. 58)

- "$\boldsymbol{S_3}$ é solúvel?

  Para verificar se o grupo é solúvel, primeiro vejamos se grupo é abeliano que nos garantiria que o grupo é solúvel. Como vimos anteriormente. S_3, não é abeliano. Então, escolhendo subgrupos de S_3, afim de construir uma série, observamos se estes são subgrupos normais. Temos que H = {id, f1, f1, 2} é normal a S_3. Assim temos a seguinte serie subnormal, $S_3 \supset H \supset \{e\}$. Como S_3 é de ordem 6 e H é de ordem 3, $\frac{|S_3|}{|H|} = 2$ e $\frac{|H|}{|\{e\}|} = 3$, assim este grupo fatores é abeliano, pois $\frac{|G_i|}{|G_{i-1}|} < 5$, logo grupo fator é abeliano. Portanto S_3 é solúvel." DRUMOND (p. 67)

Trabalho analisado: O Polinômio Característico aplicado ao estudo qualitativo de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Autora: Karen Brito Miranda **Ano**: 2013

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, evidencia-se a aplicação do polinômio característico em sistemas de Equações Diferenciais Lineares (EDL), faz-se um estudo qualitativo desses sistemas através dos autovalores. Para isso, apresentam-se alguns conteúdos preliminares como, conceitos de álgebra linear e equações diferenciais. Os conceitos de álgebra linear que se destacam nesta análise são os seguintes: Matrizes, Sistemas Lineares, Espaços Vetoriais e Transformações lineares.

Destacou-se também um estudo sobre Autovalores e Autovetores, Determinantes e aborda-se o Polinômio Característico. Compreendemos que o estudo de autovalores e autovetores estão intrinsecamente ligados ao conteúdo de determinantes, dado que para calcular os autovalores de uma matriz A qualquer, utiliza-se a seguinte fórmula $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, onde os autovalores são escalares λ, e segundo Miranda (2013, p. 40) "os autovetores são os vetores não nulos que pertencem ao núcleo de

$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$”, ou seja, para cada autovalor λ existe um autovetor v associado tal que $Av = \lambda v$.

Entendemos que o polinômio característico de uma matriz A é obtido pela seguinte fórmula $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Este polinômio pode ser utilizado para determinar os autovalores de uma matriz A, como destaca o seguinte teorema: “Seja A uma matriz $n \times n$. Um número λ é um autovalor de A se, e somente se, λ for uma raiz do polinômio característico de A.” MIRANDA (p. 41) Assim, o uso deste polinômio possibilita o estudo da estabilidade de um determinado sistema de equações diferenciais lineares por meio de autovalores encontrados a partir do polinômio característico da matriz correspondente a este sistema. Compreendemos ainda que os autovalores podem ser: reais distintos e de mesmo sinal, reais distintos e de sinais diferentes, reais iguais, complexos, e imaginários puros. E, quanto à estabilidade de um sistema, tem-se que:

- Se os autovalores forem ambos positivos o sistema é dito instável e o ponto crítico é chamado de nó. E se os autovalores forem ambos negativos o sistema é dito assintoticamente estável e o ponto crítico é chamado de nó;
- Se os autovalores forem reais distintos e de sinais diferentes o sistema é dito instável e a origem é chamada de ponto de sela, pois as soluções tendem ao infinito assintoticamente as retas determinadas pelos autovetores;
- Se os autovalores forem complexos tem-se que as trajetórias são instáveis se o autovalor possuir parte real positiva e assintoticamente estável se a parte real do autovalor for negativa, e, neste caso, os pontos críticos são chamados de pontos espirais;
- Se os autovalores forem imaginários puros as trajetórias, estáveis, são círculos centrados na origem e o ponto crítico é chamado de centro;
- E se os autovalores forem reais iguais se tem: “Para que $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$ aconteça, devemos ter $\Delta = 0$. Neste caso, obteremos dois tipos de solução para o sistema $\boldsymbol{X' = AX}$. sobre essas soluções que apresentaremos, é verdade afirmar que se os autovalores são positivos, $(a+d) > 0$ e sua trajetória é instável, se, porém $(a+d) < 0$ então, os autovalores são negativos e o retrato de fase e assintoticamente estável.” MIRANDA (p. 59)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- "Vamos determinar os autovalores e autovetores do operador $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ definido por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$, em que $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$. Para este operador o polinômio característico é $\boldsymbol{P_A}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$

$$= \boldsymbol{det}\begin{vmatrix} \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix}$$
$$= (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{8}$$
$$= \boldsymbol{\lambda}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{5}$$
$$= (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{5})(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1})$$

Como os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são as raízes $\boldsymbol{P_A}(\boldsymbol{\lambda})$, temos que os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{5}$ e $\boldsymbol{\lambda_2} = -\mathbf{1}$.

Agora vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{5}$ e $\boldsymbol{\lambda_2} = -\mathbf{1}$. Para isso vamos resolver os sistemas $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1 I}) = \mathbf{0}$ e $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_2 I}) = \mathbf{0}$, o sistema $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1 I}) = \mathbf{0}$ é $\begin{bmatrix} -\mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Cuja solução geral é $\begin{cases} -\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$

Logo $\boldsymbol{W_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) / \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\}$ é o conjunto de todos os autovetores associados a $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{5}$ acrescentando o vetor nulo. Para o sistema $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_2 I}) = \mathbf{0}$ temos $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ cuja solução geral é

$\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{y}$.

Portanto, $\boldsymbol{W_2} = \{(\mathbf{2}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \ / \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$ é o conjunto de todos os autovetores associados a $\boldsymbol{\lambda_2} = -\mathbf{1}$ acrescentando o vetor nulo." MIRANDA (p. 42-43)

- “Dado o sistema

$$\frac{dx}{dt} = 6x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Encontraremos os autovalores e seus respectivos autovetores associados. Do sistema acima, obtemos a matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Observemos que $a + d = 6 + 1 = 7 > 0$ e também que $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = 49 - 4(6 + 4) = 49 - 40 = 9 > 0$, então $(a + d) = 7 > \sqrt{\Delta} = 3$, satisfazendo assim, a condição necessária para se obter autovalores positivos. Logo,

$$\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5 \text{ e } \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{9}}{2} = 2.$$

Agora, obteremos o autovetor associado a $\lambda_1 = 5$, fazendo a substituição no sistema $(A - \lambda I)K = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 - \lambda_1 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo λ_1, obtemos,

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, o sistema $\begin{cases} k_1 - 2k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_2 = 0 \end{cases}$

implica que $k_1 = 2k_2$, assim os autovetores da forma $K_1 = \begin{bmatrix} 2k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$ são associados a $\lambda_1 = 5$. Considerando $k_2 = 1$, obtemos $K_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Façamos o mesmo processo com λ_2 para encontrar K_2

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema $\begin{cases} 4k_1 - 2k_2 = 0 \\ 2k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$

nos dá $k_2 = 2k_1$ e assim, $K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_1 \end{bmatrix}$ é a forma geral dos autovetores associados a $\lambda_2 = 2$. Tomando $k_1 = 1$ obtemos $K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Portanto uma solução para o sistema $X' = AX$ é $x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$.” MIRANDA (p. 56-57)

Trabalho analisado: Análise de algumas Bifurcações de Sistemas Dinâmicos

Autor: Magno Acácio dos Santos **Ano:** 2014

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, destaca-se as equações diferenciais lineares e não-lineares. Mostrou-se como calcular autovalores e autovetores de sistemas de equações diferenciais lineares para determinar sua estabilidade, já para os sistemas não-lineares a determinação da estabilidade depende da linearização desse sistema. Santos (2014) esclarece que, "é impossível obter soluções analíticas exatas de um sistema de equações diferenciais não-lineares, contudo em determinadas condições, um sistema não-linear pode ser aproximado ao redor de um ponto de equilíbrio por meio de um sistema linear correspondente, pois é por meio desta aproximação que se pode analisar o comportamento das soluções do sistema não-linear próximo do ponto de equilíbrio. Este processo é denominado linearização." (p.37)

Evidenciou-se um estudo de algumas Bifurcações de Sistemas Dinâmicos. Segundo Santos (2014) em um sistema dinâmico ocorre Bifurcação quando muda seus parâmetros, que podem ocorrer mudanças tanto na sua posição como em suas características qualitativas. Nesse estudo, apresentam-se quatro tipos clássicos de bifurcações, as quais se denotam da seguinte forma no tcc:

- "Bifurcação sela-nó: A bifurcação sela-nó, também denominada bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o dispositivo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contraria é criado ou destruído." SANTOS (p. 48)
- "Bifurcação Transcrítica: A bifurcação transcrítica é caracterizada pela permuta de estabilidade de dois pontos de equilíbrios ao se cruzarem no espaço fases (β, x)." SANTOS (p. 48)
- "Bifurcação de Forquilha: A bifurcação de forquilha costuma ocorrer em sistemas físicos que apresentam algum tipo de simetria. Nesses tipos de sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer

ou desaparecer simultaneamente, na medida em que o parâmetro de controle passa por um valor crítico. Esse tipo de bifurcação pode ser dividida em dois tipos: supercrítica e subcrítica.” SANTOS (p.49)

- “Bifurcação de Hopf: A bifurcação de Hopf ocorre quando, para um determinado valor de parâmetro, os autovalores associados à matriz jacobiana em torno do ponto de equilíbrio deixam de ser hiperbólicos e passam a ser imaginários puros.” SANTOS (p. 50)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- “Determine a estabilidade do sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases},$$

Calculemos agora os autovalores da matriz **A** associada ao sistema dado:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Este sistema possui dois autovalores repetidos que são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Desta forma, ξ é o único autovetor associado ao único autovalor:

$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, mas devemos encontrar η para que $x = \xi t e^{-t} + \eta e^{-t}$ faça parte da solução geral. Para que isso seja possível, o vetor η deve obedecer a equação $(A - \lambda I)\eta = \xi$: $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \eta = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$,

Assim, a solução geral é dada da seguinte forma:

$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-t} \right\}$.” SANTOS (p. 28-29)

- “Considere o seguinte sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = x - y + 5xy} \\ \boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 3x - y + x^2 -} y^2 \end{cases}$

Primeiramente, vamos colocar esse sistema, na forma do sistema $x' = \boldsymbol{A}x + g(x)$:

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5xy \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$.

Como podemos observar, $(x, y) = (0,0)$ é o ponto de equilíbrio do sistema e o $det\ \boldsymbol{A} \neq 0$. Existem outros pontos críticos pertencentes a este sistema. Desta forma, $x^* = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio **isolado** do sistema. Agora vamos verificar se a condição $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0$ quando $x \to 0$ se aplica a este sistema:

$\frac{\|g(x,y)\|}{\|x,y\|} \to (0,0)$ quando $(x, y) \to (0,0)$, onde $g(x, y) = \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{bmatrix}$.

Assim, $g_1(x, y) = 5xy$ e $\|5xy\| \to 0$ quando $(x, y) \to (0,0)$; $g_2(x, y) = x^2 - y^2$ e $\|x^2 - y^2\| \to 0$ quando $(x, y) \to (0,0)$. Realmente, concluímos que o sistema é um **sistema quase linear** próximo do ponto de equilíbrio (0,0).” SANTOS (p. 38-39, grifos do autor)

- “Classifique os pontos de equilíbrio do sistema não-linear: $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -2y + 4} \\ \boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -3x^2 + 12}. \end{cases}$

O sistema não-linear possui dois pontos de equilíbrio, ou seja, (-2,2) e (2,2) e as funções *f(x)* e *g(x)* são de classe C^1. A matriz jacobiana associada é: $J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$. Desta forma, o sistema linear associado à matriz jacobiana é: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y \\ \frac{dy}{dt} = 12x. \end{cases}$

Os autovalores encontrados são imaginários puros: $\lambda = \pm 2\sqrt{6i}$, o que significa que o ponto de equilíbrio é um centro estável para o sistema linear e, desta forma, como o sistema não-linear está associado ao sistema linear, esse ponto de equilíbrio será estável também. Já para o ponto de equilíbrio (2,2), a matriz jacobiana associada é: $J(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, o sistema linear associado à matriz jacobiana é: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y \\ \frac{dy}{dt} = -12x. \end{cases}$

Os autovalores encontrados são reais e com sinais diferentes: $\lambda = \pm 2\sqrt{6}$, o que significa que o ponto de equilíbrio é um ponto de sela para o sistema linear e, desta forma, como o sistema não-linear está associado ao sistema linear, esse ponto de equilíbrio será instável também." SANTOS (p. 43-46)

Trabalho analisado: O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt Aplicado em Mínimos Quadrados e Polinômios Ortogonais
Autora: Maria Francisca de Sousa Gomes **Ano:** 2014

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, o assunto que se destaca é sobre o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt e sua aplicação em Mínimos Quadrados e Polinômios Ortogonais. Compreendemos que para falar desse tema alguns conteúdos preliminares devem ser apresentados antes, como por exemplo: Vetores, espaços vetoriais, matrizes e sistemas lineares; Sobre vetores destacaram-se conceitos, como: operações com vetores, módulo de um vetor, e como se representa um vetor – um vetor é representado por um segmento de reta orientado, ou seja, possui direção, sentido e comprimento. As operações básicas para vetores são: a adição e a multiplicação por escalar. Assim, para somar dois vetores, somam-se suas componentes correspondentes e para multiplicar um vetor, por um escalar, multiplica-se esse escalar por cada componente do vetor. O módulo de um vetor é a distância do vetor à origem do plano cartesiano onde esse vetor está representado, e é um número positivo.

Compreendemos também que em Espaços Vetoriais são estudados conceitos de subespaços vetoriais, combinação linear, subespaços gerados, dependência e independência linear, base de um espaço vetorial, e dimensão. Segundo Gomes (2014, p. 16) "Seja E um espaço vetorial e V um subconjunto não vazio de E. Dizemos que V é um subespaço de E se satisfazer as seguintes condições:

1. $\mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$ (vetor nulo)
2. $\boldsymbol{Para\ todo\ u, v \in V, se\ tem: u + v \in V.}$
3. $\boldsymbol{Para\ todo\ a\ \in R, u\ \in V, o\ \ produto\ escalar\ au\ \ \in V}$."

"Em Álgebra Linear **combinação linear** é considerada umas das características mais importantes de um espaço vetorial, visto que é a através dela que podemos obter novos vetores a partir de vetores dados." GOMES (2014, p. 17, grifos do autor) Um subespaço gerado é obtido do seguinte modo, se tem um conjunto *A* de vetores de um espaço vetorial *E*, o subespaço V de E é formado pela combinação linear de todos os vetores de *A*. Em relação á linearidade, um conjunto de vetores de um espaço vetorial é dito linearmente independente se admite apenas a solução trivial. E é linearmente dependente se admite pelo menos uma solução não trivial. "Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de *E* é uma base de E se:

a) $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ é um conjunto de geradores de *E*, isto é, todo vetor de *E* é combinação linear de $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$.

b) $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ é L.I." GOMES (2014, p. 19)

Por ultimo, compreendemos que, a dimensão de um espaço vetorial *E*, é dada em relação ao total de vetores da base de *E*, por exemplo, se *E* possui uma base com *n* vetores então *E* tem dimensão *n;* se *E* não possui base, a dimensão é zero e se *E* tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão é infinita.

Compreendemos que, para o estudo de matrizes, verificou-se os diversos tipos de matrizes, as operações com matrizes, estuda-se também matrizes inversas. Os tipos de matrizes estudados nesta análise foram: matriz triangular superior, matriz identidade, matriz coluna, matriz quadrada, matriz diagonal, matriz linha e matriz transposta. Das operações com matrizes, mostrou-se a adição e a multiplicação. Entendemos que a adição de duas matrizes só é possível se ambas forem de mesma ordem, pois a soma se dá entre os elementos correspondentes das duas matrizes. Já o produto entre duas matrizes *A* e *B* é possível se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas da matriz B. A inversa de uma matriz quadrada A pode ser obtida através da seguinte igualdade $AB = BA = I_m$, sendo B uma matriz quadrada de mesma ordem da matriz A, de coeficientes com valores indefinidos e I_m é a matriz identidade, também de mesma ordem da matriz A. Resolvendo a igualdade $AB = BA = I_m$ obteremos os valores dos coeficientes de B onde B será a matriz inversa, $B = A^{-1}$.

Segundo Gomes (2014, p. 27), "Um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases},$$

Onde os a_{ij} são os coeficientes e os x_i são as incógnitas do sistema."

Gomes (2014) afirma ainda que "se A é uma matriz $m \times n$, o subespaço de $R^{1\times n}$ gerado pelos vetores linhas de *A* é chamado de espaço-linha de *A*. O subespaço de $R^{m\times 1}$ gerado pelos vetores colunas de A é chamado espaço-coluna de *A*, isto é, o espaço-coluna contém todas as combinações lineares das colunas da matriz *A*." (p. 30)

Esses conteúdos são apresentados por se tratar de conteúdos essenciais para o estudo do processo de Ortogonalização. Em seguida ainda apresentam-se conceitos de espaço vetorial com produto interno, norma, ortogonalidade, bases ortogonais e ortonormais, e projeção ortogonal. Entre esses conteúdos, as bases ortogonais recebem atenção especial, pois nem sempre uma base é ortogonal e as bases ortogonais facilitam alguns cálculos matemáticos, deixando-os mais simples para a obtenção do resultado final, daí a importância de trabalhar com bases ortogonalizadas. É aí que o processo de Ortogonalização de Gram Schmidt aparece e se torna importante, pois, ele consiste em determinar uma base ortogonal a um determinado espaço vetorial *E*, tal que E possui produto interno e uma base qualquer.

Destacou-se posteriormente o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt em mínimos quadrados. Sabe-se que nem sempre um sistema linear $Ax = b$, com *m* equações e *n* incógnitas, admite soluções, quando isso acontece, o processo de mínimos quadrados consiste em encontrar um vetor *x* tal que a distância entre o vetor *b* e *Ax* seja a menor possível, quanto menor for essa distância, melhor será a solução aproximada desse sistema. Nesse sentido, Gomes (2015, p. 49) afirma que: "[...] um sistema *Ax* = *b* pode ou não ter solução, dependendo do número de equações e incógnitas que esse sistema possa ter, se o sistema é insolúvel a melhor solução para esses sistemas corresponde ao vetor *x* que aproxima ao máximo *Ax* do vetor *b*. Isto é, determinar um vetor *x* tal que $||Ax - b||^2$ seja minimizada. Quanto menor for a distância, melhor será a solução aproximada". É para esse caso que se utiliza o problema dos mínimos quadrados, pois, ele consiste em encontrar um *x* de modo que *Ax* esteja o mais próximo possível do vetor *b*.

Compreendemos que o problema dos mínimos quadrados pode ser resolvido por três métodos diferentes: método projeção ortogonal, método da equação normal e método decomposição QR. Segue as especificações desses métodos como disposto no tcc:

- O método projeção ortogonal diz que, para resolver um problema de mínimos quadrados utilizando o método projeção ortogonal, a seguinte igualdade deverá ser satisfeita $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Pb}$. Sendo *A*, a matriz dos coeficientes de um sistema dado, *x* é o vetor das incógnitas do sistema e $\boldsymbol{Pb}$ é a projeção do vetor *b* sobre a imagem de *A*. onde b é o vetor obtido dos termos independentes do sistema.
- "Método da Equação Normal: Começamos por observar que a projeção $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Pb} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Pb} - \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$, pertence ao subespaço ortogonal à imagem de *A*. Assim, $(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b})$ é ortogonal a todo vetor na imagem de *A*, isto é, $\langle \boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{y}$. Isto implica que $\boldsymbol{y^T}(\boldsymbol{A^T Ax} - \boldsymbol{A^T b}) = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A^T Ax} - \boldsymbol{A^T b} \rangle = \boldsymbol{0}$, para todo y. Mas, o único vetor que é perpendicular a todos os vetores é o vetor nulo, assim, $\boldsymbol{A^T Ax} - \boldsymbol{A^T b} = \boldsymbol{0}$; isto é: $\boldsymbol{A^T Ax} - \boldsymbol{A^T b}$, essa equação é denominada de equação normal no problema de mínimos quadrados." (GOMES, p. 50)
- "Método Decomposição QR: Outro método para resolver o problema de mínimos quadrados é pela decomposição *QR*. Se *A*=*QR*. A solução para *x* pode ser obtida resolvendo-se o sistema $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{Q^T b}$ e a matriz que projeta sobre a imagem de *A* será $\boldsymbol{QQ^T}$." (GOMES, p. 50-51)

Compreendemos que para falar sobre os polinômios ortogonais é necessário fazer uma abordagem sobre as integrais definidas, pois, as integrais definidas se caracterizam como pré-requisito necessário no conceito de sequência dos polinômios ortogonais. Apresentamos alguns dos principais polinômios ortogonais, os quais são: Polinômios de Jacobi, polinômios de Hermite, polinômios de Laguerre e polinômios de Legendre.

- “Polinômio de Jacobi: São ortogonais no intervalo $[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$ com relação à função peso $\boldsymbol{\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1-\beta)^{\beta}}$, com $\boldsymbol{\alpha,\beta > -1}$ e $\boldsymbol{\alpha,\beta \in R}$. Esses polinômios são denotados por $\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta}}$ e satisfazem $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{p_n^{\alpha,\beta}(x) p_m^{\alpha,\beta}(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx} = \begin{cases} \boldsymbol{0, se\ m \neq n} \\ \frac{\boldsymbol{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}{\boldsymbol{(\alpha+\beta+2n+1)n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}} \neq \boldsymbol{0, m = n} \end{cases}$ Com $\boldsymbol{\Gamma(x)} = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{e^{-t} t^{x-1}\, dt}$.” (GOMES, p. 60)
- “Polinômio de Hermite: São ortogonais em $\boldsymbol{R}$ com relação a função peso $\boldsymbol{\omega(x) = e^{-x^2}}$, em $(-\infty,\infty)$. Esses polinômios são denotados por $\boldsymbol{H_n}$ e satisfazem: $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\, dx} = \begin{cases} \boldsymbol{0, se\ m \neq n} \\ \boldsymbol{2^n n!\sqrt{\pi} \neq 0, se\ m = n} \end{cases}$.” (p. 60)
- “Polinômios de Laguerre: São ortogonais com relação a $\boldsymbol{\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x}}$, com $\boldsymbol{\alpha > 1}$ no intervalo $\boldsymbol{R_+ = \{x : x \geq 0\}}$ e denotado por $\boldsymbol{L_n^{\alpha}}$, satisfazem: $\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx} = \begin{cases} \boldsymbol{0, se\ m \neq n} \\ \boldsymbol{\Gamma(\alpha+n+1)n! \neq 0, se\ m = n} \end{cases}$, com $\boldsymbol{\Gamma(x)} = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{e^{-t}\, t^{x-1} dt}$.” (GOMES, p. 60)
- “Polinômios de Legendre: São ortogonais com relação a função peso 1 no intervalo $[-1,1]$. Esses polinômios são denotados por $\boldsymbol{P_n^{(0)}(x)}$, pois é um caso particular dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$ e satisfazem: $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{P_n^{0}(x) P_m^{0}(x) dx} = \begin{cases} \boldsymbol{0, se\ m \neq n} \\ \frac{2}{\boldsymbol{2n+1}} \neq \boldsymbol{0,\ se\ m = n} \end{cases}$” (GOMES, p. 60-61)

Mas nem sempre um polinômio é ortogonal e para torná-lo ortogonal, utiliza-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Segundo Gomes (2015, p. 61): “esses polinômios são ferramentas indispensáveis para a solução de muitos problemas, além de possuir uma importante contribuição para os estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas e estabilidade numérica. Com aplicações que abrangem da Teoria dos Números à Teoria da Aproximação, da Combinatória à Representação de Grupos, da Mecânica Quântica à Física, Estatística e da Teoria ao Processamento de Sinais.”

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- "Sejam $\boldsymbol{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $\boldsymbol{u_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ e $\boldsymbol{u_3} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ vetores do $\boldsymbol{R^3}$. Esses vetores constituem uma base $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ não ortogonal em relação ao produto interno usual. Vamos obter, a partir do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt uma base $\boldsymbol{B'} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ ortogonal.

  Utilizando todos os passos apresentados no desenvolvimento do processo, temos:

  1. O primeiro vetor de $\boldsymbol{B'}$ será:
  $$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$
  2. Para determinarmos o segundo vetor, tomamos
  $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{v_1} \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{a}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$. Encontrando o valor de $\boldsymbol{a}$ de forma que $\boldsymbol{v_1}$ seja ortogonal a $\boldsymbol{v_2}$
  $$\langle(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{a}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})\rangle = \mathbf{0}$$
  $$\langle(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})\rangle + \langle(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})\rangle = \mathbf{0}$$
  $$\mathbf{2} + \mathbf{3}\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$
  $$\boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$
  Assim, $\boldsymbol{v_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
  $\boldsymbol{v_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$.
  3. O terceiro vetor será determinado da seguinte forma: $\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{u_3} + \boldsymbol{a_2}\boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{v_1}$

  Sabemos, através do desenvolvimento do processo de Gram-Schmidt, que v_3 pode ser escrito como: $v_3 = u_2 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$

  Na determinação do terceiro vetor pouparemos alguns detalhes básicos.

  $$v_3 = (0,0,1) - \frac{\langle(0,0,1),(0,1,1)\rangle}{\langle(0,1,1),(0,1,1)\rangle}(0,1,1) - \frac{\langle(0,0,1),(1,1,1)\rangle}{\langle(1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1).$$

  Realizando os produtos internos, obtemos: $v_3 = (0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) \Rightarrow v_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Portanto, $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal." (p. 43-44)

- "Dado a base $\boldsymbol{q_0(x) = 1, q_1(x) = x, \dots, q_n(x) = x^n}$ com produto interno $\boldsymbol{(0,1)}$. Encontre a base ortogonal $\boldsymbol{P_n(x)}$.

  Solução: Denominaremos os vetores da nova base de $p_0, p_1, \dots, p_n$. $q_0(x) = p_0(x) = 1$

  $$p_1(x) = q_1(x) - \frac{\langle q_1(x), p_0(x)\rangle}{\langle p_0(x), p_0(x)\rangle} p_0(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} 1 = x - \frac{1}{2}.$$

  E assim sucessivamente até obter a sequência de polinômios ortogonais $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$." (GOMES, p. 61-62)

Trabalho analisado: Uma breve análise de Sistemas Lineares

Autora: Maria Priscila Barbosa **Ano:** 2013

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, se evidencia um breve estudo sobre os sistemas de equações diferenciais lineares. Nesse sentido, destacou-se o que é uma equação diferencial, onde entendemos que equação diferencial é uma equação em que suas incógnitas são funções e que relacionam essas funções com suas derivadas, da seguinte forma: $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$. Segundo o que afirma Barbosa (2013) "O conjunto de equações diferenciais com as mesmas funções incógnitas e que se verificam para as mesmas soluções, denomina-se de **sistema de equações diferenciais**." (p. 9, grifos do autor) Compreendemos tambem que é possível constituir um sistema de equações diferenciais de primeira ordem a partir de uma equação diferencial de segunda ordem.

Entendemos que um sistema de equações é linear, se e somente se, cada uma de suas funções $F_1, F_2, \dots, F_n$ for uma função linear das variáveis dependentes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Os sistemas de equações lineares ainda podem ser homogêneo ou não homogêneo, se suas funções $g_i(t)$ são identicamente nulas o sistema é dito homogêneo, caso contrário, é não homogêneo. Percebemos que, qualquer sistema linear de n equações de primeira ordem pode ser reescrito na forma matricial. Destacam-se outros conceitos de sistemas de equações lineares, como: autovalores e autovetores, plano de fase e retrato de fase, pontos críticos e estabilidade.

Segundo Barbosa (2013), "os valores de λ que satisfazem a equação $\det(A-\lambda I)=0$ são chamados de **autovalores** da matriz, e as soluções não nulas que correspondem às equações $Ax=\lambda x$ ou $(A-\lambda I)x=0$ adquiridas a partir de tal valor de λ, são chamadas de **autovetores** correspondentes, ou associadas ao seu autovalor." (p. 13, grifos do autor) interpretamos que o plano de fase é representado pelo plano x_1x_2, retrato de fase é o conjunto de curvas que passam pelo plano x_1x_2, em uma linguagem popular podemos dizer que o plano de fases é um método gráfico usado para interpretações geométricas. Os pontos críticos são as soluções constantes de um sistema autônomo. Quanto à estabilidade, um ponto crítico de um sistema, pode ser: estável, assintoticamente estável ou instável. De acordo com Barbosa (2013) temos:

- "Um ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$ de um sistema autônomo, diz-se **estável** desde que para qualquer ponto inicial $\boldsymbol{x_0}$ suficientemente próximo do ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$, permanece próximo de $\bar{\boldsymbol{x}}$ para todo $\boldsymbol{t>0}$." (p. 22, grifo do autor)
- "Um ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$ de um sistema autônomo é dito **assintoticamente estável** se é estável e se toda a trajetória que começa suficientemente próxima do ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$ tende para $\bar{\boldsymbol{x}}$ quando $\boldsymbol{t}\to+\infty$." (p. 22, grifo do autor)
- "Um ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$ de um sistema autônomo, diz-se **instável** desde que para qualquer ponto inicial $\boldsymbol{x_0}$ suficientemente próximo do ponto crítico $\bar{\boldsymbol{x}}$, afasta-se de $\bar{\boldsymbol{x}}$ para todo $\boldsymbol{t>0}$." (p. 22, grifo do autor)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho –, enunciados e resolvidos:

- "Transforme a equação diferencial de segunda ordem
  $\ddot{u}=0{,}5\dot{u}+2u=0$ em um sistema de equações de primeira ordem.

Solução:

Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = \dot{u}$. Então, $\dot{x}_1 = x_2$. Além disso, $\ddot{u} = \dot{x}_2$. Substituindo $u, \dot{u}$ e $\ddot{u}$ na equação, temos $\dot{x}_2 + 0{,}5x_2 + 2x_1 = 0$ Logo, obtemos o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem.

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0{,}5x_2 \end{cases}$." (BARBOSA, p. 10)

- "Encontre a solução geral e estude a estabilidade do sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$. Primeiro calculemos os autovalores que são raízes da equação $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{5} = \mathbf{0}$. Logo, os autovalores são $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{5}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}$. E os autovetores associados são $\boldsymbol{\xi}^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Então, a solução geral do sistema é $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{c}_{\mathbf{1}} \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{e}^{\mathbf{5}\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}$." (BARBOSA, p. 25)

Trabalho analisado: Introdução à Criptografia RSA

Autor: Onésimo Rodrigues Pereira **Ano:** 2012

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC's: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, evidenciou os conceitos da teoria dos números, os quais se mostraram necessário para entender o método criptográfico RSA[6]. Compreendemos que para entender esse método, exige uma boa familiaridade com alguns conceitos concernentes à teoria dos números. Nesse sentido, destacam-se conceitos tais como, Números Primos, alguns teoremas sobre Divisibilidade de Números Inteiros,

[6] Esse código foi inventado em 1978 por R. L. Rivest, A. Shamir e L. Adleman que, na época, trabalhavam no Massachussets Institute of Technology (M.I.T.). As letras RSA correspondem às iniciais dos inventores do código. PEREIRA (2012, p. 16)

Congruências e suas aplicações, Classes Residuais, Números de Mersenne e de Fermat, Crivo de Erastóstenes e Fatorial de Números Primos. Sobre os números primos destacaram-se, as seguintes proposições:

- Dados dois números inteiros primos *p* e *q* (lembre-se $p,\ q \in Z$) e um número inteiro *r* qualquer, temos:
    1. Se *p* divide *q* então $p = \pm q$;
    2. Se *p* não divide *r* então (p, r)[7] $= 1$;
- Se p é um número primo e $\boldsymbol{p} \ |\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{a_3}.\dots.\boldsymbol{a_n}$ então, $\boldsymbol{p} \ |\boldsymbol{a_i}$ para algum $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$.
- Se *n* não é primo, então *n* possui um fator primo *p,* tal que $\boldsymbol{p} \leq \sqrt{\boldsymbol{n}}$.

Segundo Pereira (2012, p. 20) "Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ são conhecidos como Números de Mersenne e os da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são os Números de Fermat." Compreendemos que o propósito de introduzir esses números é citar alguns deles que são primos. Pereira (2012) afirma ainda que "não se conhece muitos Números de Fermat que são primos, porém, conhece-se um resultado muito importante sobre os mesmos: Dados dois números de Fermat distintos *Fm e Fn, (Fm,Fn)=1.*" Destacou-se que fatorial de um número primo corresponde a seguinte definição:
"Dado *p* um número primo, definimos *f(p)=p!* como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a *p*."

Entendemos que as Congruências tem um vasto campo de aplicações, porém, não é muito comum o estudo dessas aplicações que o tema abrange no cotidiano das pessoas. Podemos citar exemplos dessas aplicações, como: encontrar o resto da divisão de *a* por *m*, estabelecer critérios de divisibilidade por um número dado, etc.. Para compreender melhor tais conceitos, é necessário a seguinte definição: "Seja *m* um inteiro diferente de zero. Dois inteiros *a* e *b* são ditos congruentes módulo *m* se os restos da divisão de *a* e *b* por *m* forem iguais. Nesse caso, escrevemos *a ≡ b (mod m).*" PEREIRA (2012, p. 21)

Destaca-se um estudo sobre classes residuais, segundo Pereira (2012, p. 26) "o conjunto das classes residuais de Z_m é formado pelas classes $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}$, as quais, duas dessas classes nunca[8] serão iguais, e mais, são disjuntas. Podemos então definir:

---

[7] A seguinte notação *(a,b)*, nesta análise se refere ao máximo divisor comum entre *a* e *b*.
[8] Ou são iguais ou $\bar{a} = \bar{b}$ ou $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

$Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$" Pereira (2012) afirma ainda que esse conjunto é de grande importância para o estudo da criptografia.

A seguir, destacaram-se alguns resultados da Teoria dos Números que também são necessários para o estudo do método criptográfico RSA como o Algoritmo de Euclides e o Algoritmo Euclidiano Estendido, Divisão Modular, Algoritmo Chinês dos Restos, Pequeno Teorema de Fermat e Função φ de Euler.

Compreendemos nesta análise que o estudo do algoritmo de Euclides se fez necessário por sempre ser possível verificar a divisão de um número a por um número b (com resto), nesse sentido Pereira (2012) afirma que: "o algoritmo de Euclides ou Algoritmo Euclidiano é usado para calcular o máximo divisor comum (*mdc*) entre dois números inteiros a e b quaisquer. Todavia, sua principal utilidade nesse trabalho está no fato de, através desse algoritmo, sempre ser possível efetuar a divisão de a por b, $a, b \in Z$ (com resto)." (p. 30)

Entendemos que para esclarecer o estudo do método criptográfico que se evidencia nesta análise, apresentou-se a seguinte frase "criptografar é uma arte", a qual em seguida, mostra-se como é feito a codificação e decodificação da mesma.

Portanto, através da seguinte tabela, converte-se a palavra "criptografar é uma arte".

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

T	U	V	W	X	Z	Y
29	30	31	32	33	34	35

A frase convertida corresponde à seguinte sequência de números, 12271825292416271015102799149930221099102729I4, a esse processo chama-se, pré-codificação.

Pereira (2012, p. 16) afirma que "a implementação do método RSA exige dois parâmetros, isto é, dois números primos grandes que chamaremos de p e q. Para codificar uma mensagem é suficiente conhecer o produto dos dois primos que chamaremos de n. Para decodificar uma mensagem é necessário conhecer os dois primos p e q."

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- **“**Se $\boldsymbol{m = 3}$, então $\boldsymbol{Z_m} = \{\boldsymbol{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}}\}$”.

  $\bar{0} = \{x \in Z \,|\, x \equiv 0(mod\ 3)\}$, $\bar{1} = \{x \in Z \,|\, x \equiv 1(mod\ 3)\}$ e $\bar{2} = \{x \in Z \,|\, x \equiv 2(mod\ 3)\}$.” PEREIRA (2012, p. 26)

- “Seja, por exemplo, a equação diofantina linear com duas incógnitas: $\boldsymbol{3x + 6y = 18}$, temos, $\boldsymbol{3.4 + 6.1 = 18}$, $\boldsymbol{3.(-6) + 6.6 = 18}$, $\boldsymbol{3.10 + 6.(-2) = 18}$, logo, os pares de inteiros: 4 e 1, -6 e 6, 10 e -2 são soluções da equação $\boldsymbol{3x + 6y = 18}$.” PEREIRA (2012, p. 36)

Trabalho analisado: Introdução ao Sincronismo entre Sistemas Dinâmicos Caóticos
Autor: Samuel Coelho Brito **Ano**: 2015

Indagação da pesquisa que direciona a leitura dos TCC’s: *Quais temas da Matemática Pura foram abordados nos TCC´s e que problemas estão sendo resolvidos?*

Expondo os Temas de Matemática Pura

Nesta análise, evidenciou-se a teoria do caos em Sistemas Dinâmicos e seu Sincronismo. Compreendemos que as equações diferenciais são pré-requisitos para esse estudo, pois, a partir delas obtemos o método mais comum para definir um sistema dinâmico. Percebemos que há inúmeras vantagens em trabalhar com *n* equações de primeira ordem, no entanto a principal vantagem é que com elas existem três técnicas para analisar um sistema dinâmico, as quais são: técnica analítica, técnica numérica e técnica qualitativa. Segue o que diz cada técnica, conforme expostas no tcc:

- "Técnica analítica: integram-se analiticamente as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais. Essa técnica possui a desvantagem de que nem sempre é possível se determinar tais fórmulas (quase nunca a integração analítica é factível)." (BRITO, 2015, p. 15)
- "Técnica numérica: integram-se numericamente as equações, calculando-se valores para as variáveis dependentes $\boldsymbol{x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))}$ em pontos pré selecionados da variável independente *t*. A desvantagem desse método é que a solução calculada é aproximada e só é válida para a situação calculada, ou seja, vale apenas para aqueles valores de condições iniciais e de parâmetros usados na integração. Quando se altera algum desses valores, é necessário integrar novamente as equações do sistema." (BRITO, 2015, p. 15)
- "Técnica qualitativa: através de cálculos analíticos relativamente simples, temos uma ideia de como o sistema evolui. Essa técnica usa a descrição das variáveis de estado, e seus resultados são representados no espaço de estados, também chamado de espaço de fases. A desvantagem dessa técnica é que parte da informação quantitativa é perdida. Perde-se a informação sobre o comportamento transiente do sistema, isto é, sobre o comportamento que o sistema apresenta antes de atingir um regime permanente." (BRITO, 2015, p. 16)

Compreendemos que não há soluções exatas de equações diferenciais não-lineares, com isso, evidencia-se um estudo da linearização. Entendemos que dado um sistema não-linear é possível obter uma aproximação linear desse sistema através de um sistema linear. Brito (2015, p. 17) afirma que "em determinadas condições o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear reduz-se ao estudo do sistema linear correspondente, ao menos localmente."

Posteriormente, destaca-se uma breve apresentação dos Sistemas Dinâmicos. Vimos que um sistema pode ser de tempo contínuo ou discreto. Será contínuo, se o tempo t pertence aos números reais; e discreto, se t pertence ao conjunto dos números naturais ou inteiros. Destacou-se ainda, outros conceitos, como: sistemas autônomos e não autônomos, espaços de fases, dimensão de um espaço de fases, retrato de fases, estabilidade linear e não linear, e bifurcação. Em relação às bifurcações, entendemos que elas acontecem quando varia os parâmetros de um sistema dinâmico e ocorrem mudanças nos pontos de equilíbrio. Elas podem ser de três tipos:

- “Bifurcação sela-nó: A bifurcação sela-nó, também denominada bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o dispositivo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído.” (BRITO, 2015, p.30)
- “Bifurcação transcrítica: A bifurcação transcrítica é caracterizada pela permuta de estabilidade de dois pontos de equilíbrios ao se cruzarem no espaço de fases (β, x).” (BRITO, 2015, p. 30)
- “Bifurcação de forquilha: A bifurcação de forquilha costuma ocorrer em sistemas físicos que apresentam algum tipo de simetria. Nesses tipos de sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer ou desaparecer simultaneamente, na medida em que o parâmetro de controle passa por um valor crítico. Esse tipo de bifurcação pode ser dividida em dois tipos: supercrítica e subcrítica.” (BRITO, 2015, p. 31-32)

Para começar o estudo sobre sistemas de comportamento caótico, apresentam-se os Expoentes de Lyapunov. Brito (2015) afirma que: “a sensibilidade às condições iniciais é uma das características mais marcantes apresentadas pelos sistemas que apresentam comportamento caótico. Tal sensibilidade pode ser percebida pela divergência de duas trajetórias iniciadas em posições infinitamente próximas. Desta forma, qualquer perturbação, por menor que seja, nas especificações de um dado estado, pode levar a comportamentos distintos após um determinado período de tempo. Consequentemente, fica difícil ou quase impossível predizer o comportamento de um sistema caótico para qualquer instante futuro.” (p. 32-33) Nesse sentido, os expoentes de Lyapunov se destacam por ser capazes de quantificar essa sensibilidade presente nos sistemas caóticos, os quais requer compará-las às condições iniciais, monitorando a divergência exponencial média no tempo de duas trajetórias vizinhas. Ainda de acordo com Brito (2015), um sistema caótico é um sistema dinâmico que apresenta orbitas caótica, as quais têm as seguintes características: é limitada, não periódica e diverge em média exponencialmente de outras órbitas próximas.

Os sincronismos em Sistemas Caóticos são vários, nesta análise destacam-se alguns dos mais conhecidos, a saber: sincronização generalizada, sincronização completa (ou idêntica), sincronização de fase, sincronização de fase imperfeita, sincronização com atraso, sincronização com atraso intermitente e quase sincronização.

- "Sincronização Generalizada: A sincronização generalizada ocorre quando os osciladores acoplados são completamente distintos, e o comportamento dinâmico de um dos osciladores é determinado em função do outro." (BRITO, 2015, p. 44)
- "Sincronização completa: A sincronização completa de osciladores idênticos consiste na perfeita convergência entre as trajetórias dos dois osciladores, obtida devido ao acoplamento entre eles, de tal maneira que eles se mantêm sincronizados um com o outro na medida que o tempo evolui. Neste sentido, todos os expoentes de Lyapunov são negativos." (BRITO, 2015, p. 44)
- "Sincronização de fase: A sincronização de fase pode ser considerada como um procedimento intermediário de sincronização, onde as fases dos osciladores evoluem de forma sincronizada, enquanto suas amplitudes permanecem distintas." (BRITO, 2015, p. 44)
- "Sincronização de fase imperfeita: A sincronização de fase imperfeita ocorre quando há desmembramentos de fase, isto é, saltos no valor da diferença de fase, dentro de um regime de sincronização de fase, caracterizando um comportamento em forma de escada." (BRITO, 2015, p. 44)
- "Sincronização com atraso: A sincronização com atraso é um nível entre sincronização de fase e sincronização completa. Neste caso, os osciladores sincronizam suas fases e amplitudes com um atraso no tempo, isto é, um oscilador se atrasa no tempo em relação ao outro." (BRITO, 2015, p. 44)
- "Sincronização com atraso intermitente: A sincronização com atraso intermitente ocorre quando os dois osciladores estão na maior parte do tempo em regime de sincronização com atraso, mas podem ocorrer faixas de comportamentos não sincronizados, i.e., a sincronização com atraso pode eventualmente emergir e depois desaparecer." (p. 44)
- "Quase sincronização: A quase sincronização é devida à existência de um limite assintótico entre um subconjunto das variáveis de um oscilador e o correspondente subconjunto das variáveis do outro oscilador." (BRITO, 2015, p. 44)

Por último, destaca-se o critério de sincronização escravo-mestre de Pecora e Carroll e, para definí-lo, apresenta-se o seguinte teorema: "o sistema escravo[9] definido pelas equações $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$ e $\dot{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$ sincroniza com o sistema mestre definido pelas equações $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ com condições iniciais $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{0})$ e $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{0})$, respectivamente, pertencentes a um conjunto $\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$ se, e somente se, a órbita $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t})$ do sistema escravo é assintoticamente estável para condições iniciais pertencentes a Ω." (BRITO, 2015, p. 47)

Problemas resolvidos

No TCC, são enunciados vários problemas. Porém estamos explicitando aqueles mais importantes que, do nosso ponto de vista, mostram a aplicabilidade do conteúdo que está sendo abordado relativamente à teoria.

Problemas apresentados – ou seja, que são descritos e detalhados no trabalho – enunciados e resolvidos:

- "Sistema de Lorenz: O sistema de Lorenz, consiste de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, acopladas, que retratam a convecção de fluidos atmosféricos e que apresentam comportamento caótico. Suas equações de estado podem ser descritas por:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x});$$
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{t}} = -\boldsymbol{xz} + \boldsymbol{rx} - \boldsymbol{y};$$
$$\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{bz},$$

  Onde *σ, r* e *b* são parâmetros positivos. Este sistema é um exemplo clássico de sistema autônomo que apresenta um atrator estranho, sendo que as variáveis de estado x(t), y(t) e z(t) têm significados físicos bem definidos." (BRITO, 2015, p. 38-39)

- Sistema de Rössler: o sistema de Rössler é descrito por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e autônomas que geram um atrator caótico

[9] $\boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{v}'$ significam variáveis de estado do subsistema escravo e não derivadas de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ respectivamente. (BRITO, 2015, p. 46)

tridimensional, muito parecido com o atrator proposto por Lorenz, e é apresentado como:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

Onde *a*, *b* e *c* são parâmetros do modelo. BRITO (2015)

Capítulo 4: Interpretação dos Dados

Destacamos por meio das Sínteses Compreensiva e Interpretativa de cada trabalho analisado os temas que se evidenciaram, visto que em alguns trabalhos aparecem alguns conteúdos comuns, por conveniência, apresentamos a união desses temas.

Os temas que se destacaram na análise de dados foram:

- Vetores, Espaços Vetoriais, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares;
- Polinômios Ortogonais;
- Ortogonalização de Gram-Schmidt;
- Ortogonalização de Gram-Schmidt em Mínimos Quadrados;
- Mínimos Quadrados: Método Projeção Ortogonal, Método da Equação Normal e Método da Decomposição QR;
- Números Primos, teoremas de Divisibilidade de Números Inteiros, Congruências e suas Aplicações, Classes Residuais, Números de Mersenne e de Fermat, Crivo de Erastóstenes e Fatorial de Números Primos;
- Algoritmo de Euclides e o Algoritmo Euclidiano Estendido, Divisão Modular, Algoritmo Chinês dos Restos, Pequeno Teorema de Fermat e Função φ de Euler;
- Polinômio característico;
- Equações Diferenciais Lineares e Não-Lineares;
- Autovalores e Autovetores;
- Estabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares via Autovalores;
- Sistema de Equações Diferenciais Aproximado por um Sistema de Equações Diferenciais Lineares;
- Sistemas Dinâmicos: Sistemas Caóticos, Bifurcações;
- Técnicas de Resolução de Sistemas Dinâmicos: Técnicas Analítica, Numérica e Qualitativa;
- Expoentes de Lyapunov;

- Equação de Van Der Pol;
- Sincronismos em Sistemas Caóticos;
- Teoria de Grupos;
- Grupos Solúveis;
- Congruências, Leis de Composições Internas e suas Propriedades, e Tábua de uma Operação;
- Algoritmo Chinês dos Restos.
- Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos;
- Ciclo-Limite de Sistemas Não-Lineares;
- Cálculo de Integrais Definidas utilizando F.D.P conhecidas;
- Variáveis Aleatórias Contínuas e Discretas;
- Função Densidade de Probabilidade (F.D.P.);
- Distribuições de Probabilidades: distribuição Cauchy, distribuição Exponencial, distribuição Gama, distribuição Beta, distribuição Logística, distribuição Normal, distribuição Qui-Quadrado, distribuição t Student, distribuição Fisher, distribuição uniforme e distribuição Weibull.

Dentre esses temas, entendemos que existem aqueles que fazem parte da ementa das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, Câmpus de Araguaína, aqueles que são abordados parcialmente e outros que não existem na ementa das disciplinas.

A partir das análises, interpretamos que os temas abaixo não estão inseridos na ementa das disciplinas que compõem a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, de acordo com o que se mostra no Projeto Pedagógico do Curso PPC (2012);

- Polinômios Ortogonais;
- Mínimos Quadrados: Método Projeção Ortogonal, método da Equação Normal e método da Decomposição QR;
- Sistemas Dinâmicos: Sistemas Caóticos, Bifurcações;
- Sistemas de Equações Diferenciais Aproximado por um Sistema de Equações Diferenciais Lineares;
- Equação de Van Der Pol;

- Estabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares via Autovalores;
- Algoritmo Chinês dos Restos;
- Grupos Solúveis;
- Técnicas de Resolução de Sistemas Dinâmicos: Técnicas Analítica, Numérica e Qualitativa;
- Sincronismos em Sistemas Caóticos;
- Cálculo de Integrais Definidas utilizando F.D.P conhecidas; e
- Distribuições de Probabilidades: distribuição Cauchy, distribuição Exponencial, distribuição Gama, distribuição Beta, distribuição Logística, distribuição Normal, distribuição Qui-Quadrado, distribuição t Student, distribuição Fisher, distribuição Uniforme e distribuição Weibull.

Analisando as ementas das disciplinas do curso de Matemática, destacamos Álgebra Moderna I, Equações Diferenciais I e Probabilidade das quais verificamos que não apresentam um determinado conteúdo, o qual entendemos que é um tema ligado a elas, e que se destacou nas análises. Comecemos analisando, a disciplina **Álgebra Moderna I**, que apresenta a ementa:

- "Números inteiros, Congruência módulo *n* e relações de equivalência, Teoria de grupos." (PPC, 2012, p. 78) O objetivo da disciplina é: "Estudar conceitos relacionados a números inteiros e Teoria de Grupos com rigor teórico." (PPC, 2012, p. 78)

De acordo com o que vimos nas análises dos TCC's, o tema **Grupos Solúveis** aparece no trabalho de Flávio Guilherme de Abreu Drumond, cujo título é: Um estudo de grupos: Introdução aos grupos solúveis. O próprio Drumond (2012) afirma que "nos curso de graduação em Licenciatura em Matemática, tal conteúdo é muito pouco visto e na sua maioria não é citado nas ementas das disciplinas de Estruturas Algébricas, que é responsável pelo estudo das Teorias de Grupos." (p. 13) De acordo com o que investigamos no PPC, a disciplina de estruturas algébricas, citada por Drumond, não faz parte da atual grade curricular.

Destacamos também que a disciplina de **Equações Diferenciais I**, a qual apresenta a ementa:

- “Conceitos iniciais. Equações de primeira ordem. Teorema de existência e unicidade. Equações separáveis, equações lineares, equações exatas. Equações diferenciais lineares de segunda ordem. Equações diferenciais lineares de ordem *n*. Transformada de Laplace. Soluções por séries de potências.” (PPC, 2012, p. 72) E o objetivo é: Desenvolver estudo de equações diferenciais vinculando-as aos diversos fenômenos de transformação estudados por outras ciências como Física, Engenharia, Química e Biologia.” (PPC, 2012, p. 72)

A ementa da disciplina não apresenta o conteúdo **Estabilidade de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares via Autovalores**, entendemos que esse tema se destaca nas análises dos TCC’s de: Karen Brito Miranda (2013, Cícero Júnior Silva Pinheiro (2014), Magno Acácio dos Santos (2014) e Maria Priscila Barbosa (2013). Desse modo, compreendemos que mesmo o tema não estando na ementa, percebe-se que há alunos pesquisando conteúdos de Matemática Pura, extracurriculares.

Outra disciplina que destacamos foi **Probabilidade**, com a ementa:

- “Noções básicas de probabilidade. Variáveis aleatórias. Distribuições de probabilidade. Modelos probabilísticos. Noções de simulação em softwares estatísticos.” (PPC, 2012, p. 62) O objetivo é: “Proporcionar ao discente um sólido conhecimento sobre cálculo de probabilidades, variáveis aleatórias e processos aleatórios, levando-o a entender o papel fundamental da teoria das probabilidades em todas as áreas da ciência. Aumentar a interatividade no ensino do conteúdo via simulação, utilizando softwares estatísticos.” (PPC, 2012, p. 62)

Compreendemos que essa disciplina não apresenta o **Cálculo de Integrais Definidas utilizando as Funções Densidade de Probabilidades conhecidas**, apesar de apresentar as distribuições de Probabilidades na ementa. E esse tema evidenciou-se no trabalho de Domingos Santana Nascimento dos Santos, titulado de: Cálculo de Integrais Definidas utilizando Funções de Distribuição de Probabilidades.

Interpretamos que, mesmo com a indisponibilidade do conteúdo na ementa do curso de Matemática, Cícero Júnior Silva Pinheiro, pesquisou sobre Ciclo-Limite de Sistemas Dinâmicos, o qual apresentou um problema clássico que mostra a relevância do Ciclo-Limite, conhecido como a **Equação de Van der Pol**[10]. Essa Equação foi sugerida por Baltasar Van Der Pol em 1922, para modelar o funcionamento de um circuito elétrico presente nos primeiros aparelhos de rádio a equação tem a seguinte característica $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, onde $\boldsymbol{x}$ é o deslocamento, ela representa um oscilador harmônico simples com atrito, em que seu comportamento leva a uma oscilação autossustentada, ou seja, um ciclo-limite em que a energia dissipada e a energia ganha em certo período se equivalem.

Destacamos também que Domingos Santana Nascimento dos Santos desenvolveu sua pesquisa mostrando um método alternativo significativo para resolução de integrais definidas, que consiste em utilizar as Funções Densidade de Probabilidade para calcular tais integrais. Salientamos que existem algumas funções que não podemos encontrar sua antiderivada utilizando as técnicas usuais de integração, mas, utilizando as Funções Densidade de Probabilidade, é possível sua resolução, como mostra o exemplo apresentado por Santos (2014) e que também ganhou destaque na Síntese Compreensiva e Interpretativa do presente trabalho; Santos (2014) destaca que a seguinte integral definida $\int_0^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{8}dx}$ não é possível sua resolução utilizando as técnicas tradicionais de integração, pois, para calculá-la, exige um conhecimento mais avançado; Portanto, ressalta que uma forma alternativa para resolvê-la é utilizando a distribuição Normal[11].

Assim, é evidente que existem acadêmicos que estão desenvolvendo pesquisas que requerem conteúdos que não se presentificam nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática; Isso se justifica pelo que se mostrou nas análises. Interpretamos que os temas pesquisados solicitam Matemática que não estão nas ementas das disciplinas. Com isso, entendemos que há uma necessidade de inserir quando possível novos conteúdos matemáticos. Entendemos que nem todos os conteúdos que se mostraram nas análises são possíveis de serem estudados numa graduação, seja Licenciatura ou bacharelado, muitos conteúdos fazem parte de ementas de Pós-graduação Stricto Sensu.

De acordo com o que mostramos nessa pesquisa, interpretamos que é explicito o desejo de alguns acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFT estudar

---

[10] A explicação desse problema pode ser conferida com mais detalhes na Síntese Compreensiva e Interpretativa do TCC de Cícero Júnior Silva Pinheiro.

[11] A resolução dessa integral utilizando a distribuição Normal pode ser conferida na Síntese Compreensiva e Interpretativa do TCC de Domingos Santana Nascimento dos Santos.

Matemática Pura. Por isso, interpretamos que se faz necessário construir um espaço destinado aos alunos que estiverem interessados nessa área.

Capítulo 5: Refletindo sobre a Pesquisa

De acordo com o que analisamos neste trabalho, é possível refletir sobre o cenário atual do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, em relação às disciplinas de Matemática Pura. Entendemos que há uma necessidade de inclusão de alguns conteúdos nas disciplinas existentes na grade curricular do curso que não estão sendo estudados durante a graduação e que se faz necessário seu estudo, pois, entendemos que existem acadêmicos desenvolvendo pesquisas na área de Matemática Pura. Nesse sentido, compreendemos que outra possibilidade seria ampliar o número de disciplinas de Matemática Pura, para atender uma demanda de alunos que fazem investigação em Matemática. Vale ressaltar que analisamos somente os trabalhos apresentados no curso de Licenciatura em Matemática. Então, compreendemos que há mais pesquisas desenvolvidas em Matemática Pura, no antigo curso de Ciências com Habilitação em Matemática, o qual foi "extinto" em meados de 2009.

Nós estamos dizendo da importância de ampliar os conteúdos de Matemática, levando em conta que o conhecimento matemático se presentifica nos meios tecnológicos de comunicação, na indústria, na segurança de dados bancários, e até mesmo em outras ciências que têm papel indispensável para o ser humano, como a medicina, a engenharia, a física etc.; Isso vai ao encontro do que afirma D'Ambrósio (1999, p. 107), "a matemática é a espinha dorsal do conhecimento científico, tecnológico e sociológico." Isso mostra e justifica a importância que a Matemática tem para a sociedade altamente tecnológica, como afirma D'Ambrósio.

Interpretamos que, não obstante às limitações decorridas durante a graduação no curso de Licenciatura em Matemática, no que se refere aos conteúdos de Matemática Pura, os alunos: Flávio Guilherme de Abreu Drumond (2012), Onésimo Rodrigues Pereira (2012), Karen Brito Miranda (2013), Maria Francisca de Sousa Gomes (2014), Domingos Santana Nascimento dos Santos (2014), Magno Acácio dos Santos (2014), Cícero Júnior Silva Pinheiro (2014) e Samuel Coelho Brito (2015) buscaram pós-graduação *stricto sensu*, confirmando o interesse pela área.

Portanto, entendemos que é urgente a necessidade de ampliação da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática com a implementação de algumas disciplinas que atendam o interesse de alunos que queiram estudar Matemática Pura.

Nesse sentido, compreendemos que algumas dessas disciplinas poderiam ser optativas, visto que, o curso é Licenciatura em Matemática e a carga horária é composta, também, por outras disciplinas que são necessárias para a formação do licenciado em Matemática não havendo, assim, espaço no atual PPC (2012) do curso, para inserir novas disciplinas obrigatórias de Matemática Pura.

Entendemos que uma possibilidade para atender a demanda dos alunos interessados em estudar a Matemática Pura, seja a elaboração de um projeto que possibilite a criação de um curso de Bacharelado em Matemática na Universidade Federal do Tocantins. Segundo a busca que realizamos nos portais de todas as instituições públicas de ensino superior do Estado do Tocantins, detectamos que nenhuma instituição no Estado do Tocantins possui bacharelado em Matemática. Assim, compreendemos que é apropriado e importante, para o curso de Matemática em Araguaína, elaborar uma proposta para a criação de um curso de Bacharelado em Matemática.

Referências

ALES BELLO, Ângela. **Introdução à Fenomenologia**. Trad. Ir. Jacinta Turolo Garcia e Miguel Mahfoud. Bauru: Edusc, 2006. Disponível em: https://geisamoterani.files.wordpress.com/2014/05/introduc3a7c3a3o_a_fenomenologia_angela_ales_bello-31.pdf**.** Acesso em: 16 out. 2015.

BARBOSA, Maria Priscila. **Uma breve Análise de Sistemas Lineares.** Araguaína, UFT, 2013. 51f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2013.

BICUDO, Maria A. V. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BICUDO, Maria, A. V. **Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, Concepções, Possibilidades Didático-Pedagógicas. São Paulo: Unesp, 2010.

BRITO, Samuel Coelho. **Introdução à Teoria do Caos em Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. Araguaína, UFT, 2015. 59f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2015.

BRITO, Josimar Rodrigues de. **A Historia da Matemática na Formação Docente: Uma perspectiva fenomenológica**. Araguaína, UFT, 2010. 120f. Monografia (Licenciatura em Ciências Matemática) - Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2010.

CYRINO, Hélio Fernando Ferreira. **Matemática e Gregos**. Campinas, SP: Átomo, 2006.

D`AMBROSIO, Ubiratam. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 12. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

DRUMOND, Flávio Guilherme de Abreu. **Um estudo de grupos: Introdução aos grupos solúveis.** Araguaína, UFT, 2012. 73f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e Método**: Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica. Trad. Flávio P. Meurer. 3. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997.

Disponível em: **http://docslide.com.br/documents/gadamer-hans-georg-verdade-e-metodo-ipdf.html**. Acesso em: 25 abril 2016.
GOMES, Maria Francisca de Sousa. **O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt Aplicado em Mínimos Quadrados e Polinômios Ortogonais.** Araguaína, UFT, 2014. 72f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2014.

Hermenêutica e o trabalho do professor de Matemática. In: Cadernos de Pesquisa Qualitativa, n.3, São Paulo: SE&PQ, 1991, p. 63-95. Disponível em: **www.sepq.org.br**. Acesso em: 23 de abril 2016.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

MIRANDA, Karen Brito. **O Polinômio Característico Aplicado ao Estudo Qualitativo de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares**. Araguaína, UFT, 2013. 69f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2013.

PEREIRA, Onésimo Rodrigues. **Introdução à Criptografia RSA**. Araguaína, UFT, 2012. 75f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2012.

PINHEIRO, Cícero Júnior Silva. **Uma Breve Introdução sobre Ciclo-Limite de Sistemas Dinâmicos**. Araguaína, UFT, 2014. 64f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2014.

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA. Araguaína, 2012. Disponível em: http://www.uft.edu.br/matematicaaraguaina/includes/ppc_licenciatura_em_matematica_araguaina.pdf. Acesso em 25 de jun. 2016.

PUPIM, Wagner Barbosa. **Uma análise fenomenológica de dissertações e teses sobre jogos e o ensino e aprendizagem de Matemática no ensino fundamental.** Araguaína, UFT, 2011. 83f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2011.

SANTOS, Domingos Santana Nascimento. **Cálculo de Integrais Definidas Utilizando Funções de Distribuição de Probabilidade.** Araguaína, UFT, 2014. 70f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2014.

SANTOS, Magno Acácio. **Análise de algumas Bifurcações de Sistemas Dinâmicos**. Araguaína, UFT, 2014. 54f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Tocantins – Araguaína, 2014.

SOKOLOWSKI, Robert. **Introdução à Fenomenologia**. 3. ed. Trad. Alfredo. O. Moraes. São Paulo: Loyola, 2012.

VENTURIN, Jamur, A. A Educação Matemática no Brasil da perspectiva do discurso de pesquisadores. Rio Claro, UNESP, 2015. 541f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História das Ciências: Da Antiguidade ao Renascimento Cientifico.** 2.ed. Brasília: Funag, 2012. 3v. Disponivel em: **http://funag.gov.br/loja/index.php?route=product/search&search=historia%20da%20ciencia%20**. Acesso em: 20 Mar. 2016.