UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA CRISTINA CELESTINO DA SILVA COSTA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO

ARAGUAÍNA

2015

ANA CRISTINA CELESTINO DA SILVA COSTA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Msc. Renata Alves da Silva.

ARAGUAÍNA
2015

ANA CRISTINA CELESTINO DA SILVA COSTA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em _____/_____/________.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Msc. Renata Alves da Silva

Orientadora

____

Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva

____

Prof. Msc. Deive Barbosa Alves

Á toda a família, em especial a minha mãe, as minhas filhas, meu esposo e meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, meu alicerce, por nos conceder a graça da existência, por ter me dado forças e capacidade para a produção deste trabalho. E por suprir todas as nossas necessidades, sejam elas materiais ou espirituais.

Á minha querida mãe Maria, por ser a maior incentivadora de toda a trajetória acadêmica e por ter contribuído também para a formação do meu caráter e honestidade, e por ela ser o primeiro ser que acredita em meu potencial.

As minhas filhas, Fernanda Gabriella e Sara Emanuelly, por terem suportado a minha ausência no decorrer de toda a graduação e elaboração deste, e por elas me conceder a graça e alegria nos momentos de exaustão e desânimo.

Aos meus irmãos, Ana Paula, Juliana, e João Paulo, por todos os incentivos e apoio nessa caminhada.

Ao meu querido esposo, por ter me apoiado, ter abdicado de minha presença, e assumido minhas responsabilidades familiares.

A todos os professores do colegiado de Matemática, pelo crescimento intelectual proporcionado.

Aos meus orientadores do projeto PIBIC, Robson Willian e Willian Francisco, que despertaram em mim um olhar para a Matemática Pura.

Aos meus orientadores do Laboratório de Ensino de Matemática, Adriano Fonseca e Douglas Silva.

A Renata Alves da Silva, minha orientadora, por toda a contribuição intelectual e pelas horas de empenho em busca de me mostrar o melhor caminho da pesquisa e pela paciência com minhas limitações, que foram superadas com seu excelente apoio.

Aos meus colegas de graduação, em especial a Maria Priscila, Dnilton, Julio, Domingos, Wismael, Cristiane, Karen, Rizamar, Valdirene, Honek, Suelena, Valéria, Paulo, Leilane, Maíra, Maria, pelo companheirismo durante todo o curso e as horas de estudo compartilhadas.

A Capes por ter me concedido a bolsa no projeto PIBIC.

A Universidade Federal do Tocantins onde estou concluindo a graduação.

“Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”

Paulo Freire (1996)

RESUMO

O presente trabalho teve por objetivo fazer um estudo teórico do conteúdo de Equações Algébricas e analisar as abordagens dadas no ensino e a aprendizagem no Ensino Médio. Para tanto, foi realizado um estudo dos documentos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN-EM), Lei de Diretrizes e Bases (LDB) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para averiguar as competências e habilidades que esses documentos preveem aos alunos de Ensino Médio acerca do conteúdo abordado. Também foi feita uma pesquisa qualitativa em duas escolas estaduais de Araguaína-TO, onde foi apresentado um questionário aos professores de matemática, no intuito de recolher informações a respeito das estratégias de ensino, recursos didáticos utilizados e como vem sendo trabalhado este conteúdo em sala de aula. Os livros didáticos adotados pelas escolas supracitadas também foram analisados, com a intenção de conhecer as abordagens dadas ao ensino desse conteúdo. Com base na análise dos documentos oficiais e das respostas dos questionários direcionados aos professores, o trabalho traz uma discussão e reflexões sobre o ensino de Equações Algébricas, no sentido de contribuir para uma aprendizagem satisfatória.

Palavras-chave: Equações Algébricas. Ensino e Aprendizagem. Ensino Médio.

ABSTRACT

This study aimed to make a theoretical study of Algebraic Equations content and analyze the approaches given in teaching and learning in high school. Therefore, a study was conducted of the documents National Curriculum Parameters for Secondary Education (PCN-MS), Law of Directives and Bases (LDB) and the National Textbook Program (PNLD) to ascertain the skills and abilities that these documents provide for the high school students about the addressed content. A qualitative research was also done in two state schools in Araguaína-TO, which was presented a questionnaire to teachers of mathematics in order to gather information about the teaching strategies, teaching resources used and how has been working this content in room class. The textbooks adopted by the aforementioned schools were also analyzed with the intention of knowing the approaches given to the teaching of this content. Based on the analysis of official documents and answers to the questionnaires directed to teachers, the work brings a discussion and reflections on the teaching of Algebraic Equations, to contribute to a satisfactory learning.

Keywords: Algebraic Equations. Teaching and Learning. High school.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **09**
2. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS...**13**
2.1 POLINÔMIOS...13
2.1.1 Operações com polinômios 15
2.1.2 Grau do polinômio...18
2.1.3 Divisão de polinômios...19
2.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS.....................................22
2.2.1 Raiz de uma equação algébrica...22
2.3 NÚMEROS DE RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA...................25
2.3.1 Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A)....................................25
2.4 RELAÇÕES DE GIRARD...27
2.4.1 Raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais...28
2.4.2 Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros...29
3. O ENSINO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO COM BASE NOS DOCUMENTOS: PCN, PNLD E LDB..**33**
3.1 A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS..........33
3.2 ESTUDO DOS DOCUMENTOS SUPRACITADOS.................................34
4. UMA ABORDAGEM DO CONTEÚDO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS EM DUAS ESCOLAS ESTADUAIS DE ARAGUAÍNA.......................................**41**
4.1 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS..44
4.1.1 Construção Dos Dados...44
4.1.2 Análise e discussões das respostas dadas ao questionário…..........45
CONSIDERAÇÕES FINAIS **56**
REFERÊNCIAS...**59**
APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES.......................62
APENDICE B: RESPOSTA DOS PROFESSORES DADAS AO QUESTIONÁRIO...64

1. INTRODUÇÃO

Geralmente, na educação básica começamos a ter o primeiro contato com essas equações nas séries iniciais onde o objetivo principal do estudo das equações é o de encontrar o valor da incógnita x da equação, que é proposto a partir de problemas que envolvem as quatro operações algébricas.

No sétimo ano do Ensino Fundamental, quando a partir de um problema baseado em figuras geométricas estudamos equação geral até sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Em seguida no 8º ano vemos primeiramente os polinômios e suas propriedades e assim temos contato com as adições algébricas. Já no 9º ano o aluno tem esse contato na manipulação de exercícios com equações de grau 2.

Sabendo disso, após ter lecionado em uma escola particular do município de Araguaína no Ensino Fundamental, do sexto ao nono ano, pude abordar livremente o conteúdo de equações seguindo o livro didático e usando o material Algeplan usado para fazer equações algébricas de até dois graus a partir de figuras geométricas manipuláveis. Assim, consegui alcançar os objetivos que a escola almeja, mas não deixei de ter dificuldades, pois a escola exigia um leque de conteúdos muito extenso no qual os alunos de cada ano teriam que assimilar em curto prazo.

Nesse sentido, a partir do Estágio supervisionado II e do meu primeiro ano de trabalho nessa escola, pude conhecer um pouco como é ensinado e são estudadas as Equações Algébricas no Ensino Fundamental.

O presente trabalho surgiu a partir de uma inquietação do meu primeiro ano de trabalho com alunos do Ensino Fundamental, ao ensinar Equações Algébricas, com o auxílio do material Algeplan, que foi confeccionado junto com os alunos. Nessa experiência onde pude abordar o conteúdo com o auxílio de um recurso didático de forma proveitosa, o que me motivou a investigar como estariam sendo feito o estudo e o ensino desse conteúdo no Ensino Médio onde os alunos estão mais próximos de fazer o Exame Nacional do Ensino Médio, e quais abordagens seriam usadas para tais.

Outro aspecto que explica a relevância deste trabalho é saber como o professor está abordando este assunto em sala de aula, de que forma, quais atividades são desenvolvidas, e principais dificuldades dos alunos em compreender o conteúdo. Creio que seja possível a partir desta investigação obter novas reflexões acerca da prática do ensino de Matemática e assim poder também discutir algumas estratégias de ensino e propor novas abordagens.

> [...] a maioria dos professores trabalha a álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas mostram que o seu ensino não tem recebido devida atenção. (FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 40)

Como no Ensino Fundamental se é estudado a partir do 7º ano tais equações, pressupõe que os alunos do Ensino Médio já tenham tais domínios sobre esses conceitos. Entretanto, não foi isso que observamos no Estágio supervisionado III, muitos alunos se revelaram não possuir esse domínio, pois não sabem diferenciar uma equação de uma função, e também não possuem conhecimentos de métodos gerais, alguns até dizem nunca terem vistos tais conteúdo, outros utilizam técnicas mecanizadas para se chegar ao resultado. Como por exemplo, em uma equação do primeiro grau, como $x + 3 = 0$, usam expressões do tipo "passa o 3 para o outro lado com o sinal de menos". Expressões assim nos incitam em reaver certos conceitos que os professores estão utilizando em sala de aula, antes de continuarmos ao aprofundamento do conteúdo.

Nessa perspectiva apresento a questão que irá nortear esse trabalho:

Como está sendo abordada o ensino de equações algébricas no ensino médio?

Esboço aqui os objetivos deste trabalho que irão me ajudar a transcorrer sobre o tema na tarefa de discutir como está sendo abordado as equações algébricas.

- Explorar o conteúdo de equações algébricas;
- Investigar através dos seguintes documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais, Programa Nacional do livro Didático, Lei de Diretrizes e Bases e alguns livros didáticos de Matemática quais são as orientações de como deve ocorrer o ensino das equações algébricas no Ensino Médio;

- Elaborar, aplicar e analisar um questionário aos professores de Matemática de duas escolas estaduais de Araguaína sobre o conteúdo e quais as principais dificuldades enfrentadas para a abordagem desse assunto;
- Fazer um levantamento de como é abordado o conteúdo de Equações Algébricas nas provas do ENEM;
- Trazer reflexões acerca do ensino dessas equações no Ensino Médio.

No que se refere aos procedimentos metodológicos, iniciamos esse estudo procurando livros, autores que trabalharam com o assunto e buscamos em bibliotecas digitais de universidades renomadas, teses, dissertações e artigos científicos.

Feito isso, foram escolhidas duas escolas de Araguaína para se desenvolver a parte prática, com a intenção de fazer uma pesquisa com os professores de Matemática do Ensino Médio para se analisar os recursos didáticos utilizados nas aulas, visando observar como ocorre a abordagem das Equações Algébricas. Para preservar a identidade das escolas e dos professores, iremos chamá-los de escola I e escola II, professores A, B, C e D.

Em seguida, analisamos os documentos como:

a) Livros didáticos, que foram usados para fazer o levantamento de conteúdos e a forma na qual são inseridos em sala de aula;
b) Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio que constituem uma proposta curricular, com orientações para o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, levando em consideração as demandas da atualidade, e como vem sendo trabalhado o conteúdo de Equações Algébricas;
c) Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que é um guia que auxilia as escolas na escolha do livro didático, estabelecendo habilidades e competências a serem adquiridas pelos alunos na Educação Básica;

Em seguida fizemos um levantamento em forma de questionário analisando os recursos didáticos que os professores utilizam em sala de aula para ensinar o conteúdo mencionado, dentre outros levantamentos que serão apresentados no decorrer deste trabalho.

Após essa coleta de dados, foi realizada uma análise sucinta da importância do estudo das equações algébricas para o cotidiano do aluno, para o ingresso no

Ensino Superior através do ENEM e outros vestibulares, e de como vem sendo tratada em sala de aula. Na sequência concluiremos esse trabalho trazendo reflexões acerca do ensino dessas equações e, se possível, apresentaremos ideias de novas estratégias de ensino para trabalhar este conteúdo no Ensino Médio.

Em termos de organização o trabalho foi estruturado em 4 capítulos. No primeiro capítulo denominado de introdução justificamos o motivo pelo qual escolhemos o estudo do tema, a problemática que traz a questão que irá nos nortear para a execução deste trabalho, assim como os objetivos específicos a nossa pesquisa e os procedimentos metodológicos usados para este.

No segundo capítulo, teremos um estudo teórico das Equações Algébricas. Para isso se fez necessário um estudo preliminar ao conteúdo de Equações Algébricas onde iremos usar como base a 7ª edição do livro do autor Gelson Iezzi: Fundamentos de Matemática Elementar 6: complexos, polinômios, equações. Em seções delimitadas, traremos definições, propriedades, exemplos, teoremas e suas demonstrações.

O terceiro capítulo é destinado a análise dos documentos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), Lei de Diretrizes e Base (LDB) no que se trata das habilidades e competências para o Ensino Médio. E depois as abordagens dadas ao conteúdo dos livros adotados pelas escolas pesquisadas.

O quarto capítulo, faremos a análise das respostas dos questionários e discutiremos acerca dos dados obtidos.

Para finalizar o trabalho traremos as considerações finais, destacando os pontos positivos e reflexões acerca da pesquisa, propondo novas estratégias de abordagem ao tema.

2 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste capítulo, faremos um estudo da teoria de equações algébricas. Para isso, utilizaremos a 7ª edição do livro de Matemática Elementar de Gelson Iezzi. T De acordo, traremos definições, propriedades, exemplos, operações, teoremas, demonstrações, que são importantes para a compreensão da teoria.

Para adentrarmos ao estudo das Equações Algébricas, se faz necessário estudos preliminares ao conteúdo que traremos a seguir.

2.1 POLINÔMIOS

Nesta seção apresentaremos os conceitos de polinômios, operações, propriedades, exemplos que são imprescindíveis para o estudo de Equações Algébricas.

Definição 2.1: Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, consideremos a função: $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p(x) = a_0 + a_1x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$. A função p é denominada polinômio associado à sequência dada. Os números $a_0, a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2\, x^2, a_nx^n$ são chamadas termos do polinômio p.

Observação: Podemos classificar os polinômios de acordo com a quantidade de termos que ele apresenta, dentre eles segue que:

- Quando um polinômio apresenta apenas um termo chamamos de $monômio$.
- Quando um polinômio apresenta dois termos chamamos de $binômio$.
- Quando um polinômio apresenta três termos chamamos de $trinômio$.
- A partir de 4 termos, recorre-se à designação genérica: $polinômios$.

Exemplos:

1) $p(x) = 2 + 2x + 6x^2$ onde $a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = 6$

2) $g(x) = 11 + 31x^4$ onde $a_0 = 11, a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 31$

3) $h(x) = 2x + 3x^2 - 5x^3$ onde $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = -5$

Valor numérico de um polinômio – raiz

Definição 2.2: Sejam $p(x)$ uma função polinomial e um número complexo a. $o\ valor\ numérico$ da função polinomial $p(x)$ para $x = a$ é o valor que se obtém ao substituir $x\ por\ a$ e efetuando os cálculos necessários. Indicaremos por

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$, denominamos o valor numérico de $p(x)\;em\;a$, por:

$p(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n$.

Exemplo:

Dado $P(x) = 2 + x + 3x^2$, encontre o valor numérico para $x = 3\;e\;x = 2 + i$

Solução: Temos $x = 3$, assim substituindo o valor da incógnita x na função inicial temos

$P(3) = 2 + 3 + 3.3^2 = 32$

Logo, concluímos que o valor numérico do polinômio $P(x) = 2 + x + 3x^2\;em\;3$ é $P(3) = 32$.

Quando $x = 2 + i$, temos:

$P(2 + i) = 2 + (2 + i) + 3(2 + i)^2 = 2 + 2 + i + 3(4 + 4i + i^2)$

$= 4 + i + 12 + 12i + 3i^2 = 13 + 13i$

Concluímos que o valor numérico do polinômio acima em $2 + i$ é

$P(2 + i) = 13 + 13i$.

Observação : Para simplificar a notação, escreveremos apenas

$p = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \cdots + a_nx^n$ para simbolizar um polinômio p na incógnita x.

Raiz ou zero do polinômio

Em particular, se a é um número complexo e p é um polinômio tal que

$p(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz ou um zero de p.

Definição 2.3: Dado um polinômio p qualquer, a raiz dele será um número b se, somente se, o valor numérico do polinômio for zero quando x = b.

Exemplo: Seja $p(x) = x^2 - 1$, vamos determinar as raízes de p, ou seja, os zeros da função,

Solução: Para calcularmos os zeros da função, devemos resolver a equação

$p(x) = 0,$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Concluímos que $-1\;e + 1$, são raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 1$, pois

$p(1) = 1^2 - 1 = 0$

$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

Igualdade de polinômios

Definição 2.4: Dizemos que um polinômio p é $nulo$ quando p assume o valor numérico zero para todo $x \in \mathbb{C}$. Em símbolos indicamos:

$$p = 0 \leftrightarrow p(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{C}$$

Teorema 2.5: $Um\ Polinômio\ p$ é $nulo\ se, e\ somente\ se, todos\ os\ coeficientes\ de\ p\ forem\ nulos.$ $Em\ símbolos, sendo\ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, temos$:

$$p = 0 \leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_n = 0$$

Omitiremos a demonstração, mas esta pode ser verificada em Fundamentos da matemática elementar, de Gelson Iezzi (2005, p.56).

Polinômios idênticos: Dizemos que dois polinômios $p\ e\ h$ são idênticos quando assumirem valores numéricos iguais para todo x complexo.

$$p = h \leftrightarrow p(x) = h(x), \forall\, x\ \in \mathbb{C}$$

Teorema 2.6: $Dois\ polinômios\ p\ e\ h\ são\ iguais\ se, e\ somente\ se, os\ coeficientes\ de\ p\ e\ h\ forem\ ordenadamente\ iguais.$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i\ e$$

$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$

Temos: $p = h \leftrightarrow a_i = b_i, \forall\, i \in \{0,1,2, \ldots, n\}$

Demonstração:

$Para\ todo\ x \in \mathbb{C}, temos$:

$a_i = b_i\ \leftrightarrow a_i - b_i = 0 \leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \leftrightarrow p(x) = h(x) \blacksquare$$

2.1.1 Operações com polinômios

Adições de polinômios

Definição 2.7: Dados dois polinômios

$p(x) = a_0 + a_1\ x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ e

$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$, podemos chamar de soma dos polinômios p com h a seguinte expressão

$(p + h)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)x^n$, Isto é, podemos representar por:

$$(p+h)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)\,x^i$$

Exemplos: Somar $p(x)=5+4x+x^3 e\ h(x)=7+3x+x^2+2x^3$

Solução: Vamos rescrever p e h para facilitar os cálculos:

$p(x)=5+4x+0x+x^3\ e$

$h(x)=7+3x+x^2+2x^3$

$(p+h)(x)=(5+7)+(4+3)x+(0+1)x^2+(1+2)x^3=12+7x+x^2+3x^3.$

Veremos agora, propriedades que se aplicam na adição.

$\mathbf{Teorema\ 2.8}$: $A\ operação\ de\ adição\ define\ em\ P, conjunto\ dos\ polinômios\ de\ coeficientes\ complexos, uma\ estrutura\ de\ grupo\ comutativo, isto\ é, verifica-se\ as\ seguintes\ propriedades$:

Sejam $p, h\ e\ g$ polinômios de P. Vamos mostrar que P é um grupo comutativo, ou seja, vale as propriedades:

[A - 1] propriedade associativa

[A - 2] propriedade comutativa

[A - 3] existência de elemento neutro

[A - 4] existência de inverso aditivo

Veremos a seguir as demonstrações dessas propriedades:

[A - 1]:$Consideremos\ p, g\ e\ h\ polinômios, temos\ que\ provar\ que$

$$p+(g+h)=(p+g)+h\ \forall\ p, g\ e\ h\in P.$$

$Fazendo\ p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i, e\ \ h(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i,$

$\big(p+(g+h)\big)(x)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i\ \ e\ \big((p+g)+h\big)(x)=\sum_{i=0}^{n}e_ix^i\ \ em\ que\ d_i=a_i\ +(b_i+c_i)$

$e_i=(a_i+b_i)+c_i;\ \ \forall i\in\{0,1,2,\dots,n\}.$

$[A-2]$: $Consideremos\ p, g\ polinômios, vamos\ mostrar\ que\ p+g=g+p, \forall\ p, g\in P$

$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$

$(p+g)(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$ e $(g+p)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i$

Temos: $c_i=a_i+b_i=b_i+a_i=d_i, \forall\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$

$[A-3]$: $\exists\ e_a\in P\ tal\ que\ p+e_a=p\ \forall\ p\in P$.

$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\ \ e\ e_a(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix^i\ temos$:

$p + e_a = p \leftrightarrow a_i + \alpha_i = a_i, \forall\ i\ \in \{0,1,2, \dots n\}\ e\ assim$

$\alpha_i = 0, \forall i \in \{0,1,2, \dots n\}.\ Portanto\ e_a(elemento\ neutro\ para\ a\ adição\ de\ polinômios)$ é o polinômio nulo.

[A - 4]: $\forall p \in P, \exists\ p`\ \in P\ tal\ que\ p + p` = e_a$

Fazendo $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\ e\ p'(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i, temos$:

$p + p' \equiv e_a \leftrightarrow a_i + a_i' = 0, \forall\ i \in \{0,1,2, \dots n\}\ e\ então\ a_i' = -a_i, com\ i\ \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Portanto,

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i)x^i = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$$

é o $inverso\ aditivo\ de\ p$, ou seja, é o polinômio que somado com p dá o polinômio nulo.

Subtrações de polinômios

Definição 2.9: Dados dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\ e$ $g(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n$ definimos a diferença entre p e g como o polinômio $p - g = p + (-g), isto$ é :

$(p - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n$

Multiplicação de Polinômio

Definição 2.10: Dados dois polinômios $p\ e\ g$, chama-se produto pg o polinômio

$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, e\ g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n$

$$\begin{aligned}(pg)(x) &= a_0\,(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n) \\ &\quad + a_2x^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n) + \cdots + a_mx^m(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_nx^n) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_mb_n\,x^{m+n}\end{aligned}$$

O polinômio que encontramos podemos chamar de

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$$

no qual o coeficiente c_k pode ser obtido assim:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i.}$$

Podemos notar que pg pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de p por cada termo b_jx^jde g, segundo a regra $(a_ix^i).\ (b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Propriedades da Multiplicação

A multiplicação em P (conjunto dos polinômios de coeficientes complexos) verifica-se as seguintes propriedades:

I) Associativa: $p.(g.h) = (p.g).H, \forall\, p, g, h \in P$;

II) Comutativa: $p.g = g.p, \quad \forall\, p, g \in P$;

III) Existência do elemento neutro: $\exists\, e_m \in P \ / \ p.e_m = p, \forall\, p \in P$;

IV) Distributiva: $p.(g+h) = (p.g) + (p.h), \ \forall\, p, g, h \in P$.

Por não fazer parte do objetivo deste trabalho, omitiremos as demonstrações dessas propriedades.

A seguir, veremos exemplos onde podemos aplicar as operações vistas até aqui de polinômios.

Exemplo: Dados os polinômios: $p(x) = 7 - 2x + 4x^3 \ e \ g(x) = 3 + 4x + 8x^3$ $h(x) = -2x^2 + 4x^3 + 5x^4$. Vamos calcular $(p+g)(x)$, $(pg)(x)$ e $(h-g)(x)$

Solução:

$$(p+g)(x) = (7 - 2x + 4x^3) + (3 + 4x + 8x^3)$$
$$= 7 + 3 - 2x + 4x + 4x^3 + 8x^3$$
$$= 10 + 2x + 12x^3$$

$$(p.g)(x) = (7 - 2x + 4x^3).(3 + 4x + 8x^3)$$
$$= 7(3 + 4x + 8x^3) - 2x(3 + 4x + 8x^3) + 4x^3(3 + 4x + 8x^3)$$
$$= 21 + 28x + 56x^3 - 6x - 8x^2 - 16x^4 + 12x^3 + 16x^4 + 32x^6$$
$$= 21 + 28x - 6x - 8x^2 + 56x^3 + 12x^3 + 32x^6$$
$$= 21 + 22x - 8x^2 + 68x^3 + 32x^6$$

$$(h-g)(x) = (-2x^2 + 4x^3 + 5x^4) - (3 + 4x + 8x^3)$$
$$= (0-3) + (0-4)x + (-2-0)x^2 + (4-8)x^3 + (5-0)x^4$$
$$= -3 - 4x - 2x^2 - 4x^3 + 5x^4$$

2.1.2 Grau do polinômio

Definição 2.10: Seja $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chamamos grau de um polinômio p, e representamos por ∂p ou $gr\, p$ o número natural f tal que $a_f \neq 0 \ e \ a_i = 0$ para todo $i > f$.

$$\partial p = f \leftrightarrow \begin{Bmatrix} a_f \neq 0 \\ a_i = 0, \forall\, i > f \end{Bmatrix}$$

Desta forma, o grau de um polinômio p é o índice do último termo não nulo de p. Ou seja, é o índice de maior valor.

Exemplo: Determine o grau dos seguintes polinômios:

$$h(x) = 8 + 6x^3 \ \rightarrow \partial h = 3$$
$$g(x) = 4x + x^3 - 2x^5 \ \ \rightarrow \partial g = 5$$
$$p(x) = 1 + 6x + 3x^2 + (b-4)x^3 \rightarrow \begin{Bmatrix} \partial p = 2, se\ b = 4 \\ \partial p = 3, se\ b \neq 4 \end{Bmatrix}$$

Se o grau do polinômio p for n, chamaremos o coeficiente a_n de coeficiente dominante de p. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, p é chamado polinômio unitário.

Grau da soma

$\mathbf{Teorema\ 2.11}$: $Se\ p, g\ e\ p + g\ \text{são}\ polin\hat{o}mios\ \text{não}\ nulos, \text{então}\ o\ grau\ de$
$p + g$ é $menor\ ou\ igual\ ao\ maior\ dos\ \text{números}\ \partial p\ e\ \partial g.$

$$\partial(p + g) \leq \text{máx}\{\partial p, \partial g\}$$

Grau da multiplicação

$\mathbf{Teorema\ 2.12}$: $Se\ p\ e\ g\ \text{são}\ dois\ polin\hat{o}mios\ \text{não}\ nulos, \text{então}\ o\ grau\ de\ pg$ é $igual\ a\ soma$
$dos\ grau\ de\ p\ e\ g.$

$$\partial(pg) = \partial p + \partial g$$

A demonstração será omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada na página 68 do livro de Fundamentos de Matemática Elementar do autor Gelson Iezzi.

Vimos a partir do teorema da soma, que o grau de dois ou mais polinômios distintos é obtido a partir da soma desses polinômios, termo a termo semelhante, e o termo de maior grau será o grau da soma. Em relação ao grau do produto de dois ou mais polinômios, é obtido a partir da soma dos graus de cada polinômio.

Exemplo: Sejam $h(x) = 8 + 6x^3\ e\ g(x) = 4x + x^3 - 2x^5$. Encontrar o grau de $(h + g)(x)\ e\ (hg)(x)$

$(h + g)(x) = 8 + 4x + 7x^3 - 2x^5 \rightarrow \partial(h + g) = 5$

$$\begin{aligned} (hg)(x) &= (8 + 6x^3).(\,4x + x^3 - 2x^5) \\ &= 8(\,4x + x^3 - 2x^5) + 6x^3(\,4x + x^3 - 2x^5) \\ &= 32x + 8x^3 - 16x^5 + 24x^4 + 6x^6 - 12x^8 \\ &= 32x + 8x^3 + 24x^4 - 16x^5 + 6x^6 - 12x^8 \rightarrow \partial(hg) = 8. \end{aligned}$$

2.1.3 Divisões de polinômios

Definição 2.13: Dados dois polinômios p (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir p por g é determinar dois outros polinômios q(quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

$$q.g + r = p$$

$\partial r < \partial g$ (ou r = 0, caso em que a divisão é chamada exata).

Observações: Há dois casos em que a divisão de p por g é imediata.

1) O dividendo p é o polinômio nulo ($p = 0$). Onde os polinômios $q = 0 \; e \; r = 0$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão, pois

$\mathrm{qg + r = 0. g + 0 = 0.}$ Então,

$$p = 0 \rightarrow q = 0 \; e \; r = 0$$

2) O dividendo p não é nulo, mas tem grau menor que o divisor

($\partial \mathrm{p} < \partial \mathrm{g}$). Nessa situação temos, os polinômios $\mathrm{q = 0 \; e \; r = p}$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão, pois

$qg + r = 0. g + p = p \; e \; \partial r = \partial p < \partial g$.

$$\partial p < \partial g \rightarrow q = 0 \; e \; r = p.$$

Divisão por binômios do 1º grau

Neste item, vamos trazer divisões de polinômios p, com $\partial p \geq 1$, por polinômios g com $\partial g = 1$ e coeficiente dominante 1.

Exemplo: Efetuar a divisão de $p = 2x^4 + 6x^2 + 4x - 1 \; por \; g = x - 3$ pelo método da chave.

Solução:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + 6x^2 + 4x - 1 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 6x^3 & 2x^3 + 6x^2 + 24x + 76 \\ \cline{1-1}
\quad 6x^3 + 6x^2 + 4x - 1 & \\
\quad -6x^3 + 18x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 24x^2 + 4x - 1 & \\
\qquad -24x^2 + 72x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 76x - 1 & \\
\qquad\qquad -76x + 228 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 227 &
\end{array}$$

Neste tipo de divisão r é um polinômio constate, pois $\partial g = 1 \rightarrow \partial r = 0 \; ou$

$r = 0$. Vemos que o valor numérico de r não depende do número a substituído no lugar de x, isto é, $r(a) = r, \forall\, a \in \mathbb{C}$

Portanto, podemos notar que

$p(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4x - 1$, então

$p(3) = 2.3^4 + 6.3^2 + 4.3 - 1 \rightarrow p(3) = 227 \rightarrow p(3) = r = 227.$

A divisão de polinômios apresenta vários métodos de resolução como por exemplo o de Descartes, o método da chave, o algoritmo de Briot-Ruffini, porém, por não fazer parte dos nossos objetivos não serão tratados neste trabalho. Caso o leitor tenha interesse, poderá ser consultado no livro Fundamentos de Matemática Elementar de Gelson Iezzi.

A seguir apresentaremos alguns teoremas importantes para a teoria de divisão de polinômios.

2.14 Teorema do resto: *O resto da divisão de um polinômio p por* $x - a$ *é igual ao valor numérico de p em* a.

Demonstração: Pela definição de polinômios, temos que

$$q.(x - a) + r = p$$

Onde q e r são respectivamente, o quociente e o resto da divisão. Como $x - a$ tem grau 1, o resto r ou é nulo ou possui grau zero. Logo, r é um polinômio constante. Calculando o valor do polinômio da igualdade acima em a, temos

$$q(a).(a - a) + r(a) = p(a).$$

Portanto, $r = p(a)$.

Exemplos:

1) O resto da divisão de $p = 6x^3 + 4x^2 + 2$ por $g = x - 4$ é:
$$p(4) = 6.4^3 + 4.4^2 + 2 = 6.64 + 4.16 + 2 = 450$$

2) O resto da divisão de $p = (x + 4)^3 + (x - 3)^2$ *por* $G = x - 2$ é:
$$p(2) = (2 + 4)^3 + (2 - 3)^2 = 6^3 + (-1)^2 = 216 + 1 = 217.$$

Veremos agora, o teorema de D´Alembert que é de grande importância para o estudo das equações.

2.15 Teorema de D´Alembert: *Um polinômio p é divisível por* $x - a$ *se, e somente se,* a *é raiz de* p.

Demonstração: ($\leftarrow$) Da divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$ tais que $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$. Como o divisor $(x - a)$ é de grau 1, o resto será de grau zero, ou seja uma constante. Fazendo $r(x) = r, constante,$ temos: $p(x) = (x-a)q(x) + r$ e substituindo x por a segue que

$0 = p(a) = (a-a)q(a) + r$. Assim $r = 0$.

(→) Se $p(x)$ é divisível por $(x-a) \rightarrow r = 0$. Logo $p(x)$ é divisível por $x - a$.

$$\underset{(divisão\ exata)}{r = 0} \quad \rightarrow \quad \underset{(a \text{ é } raiz\ de P)}{P(a) = 0.}$$

Exemplos:

1) Verificar que $p = (x-1)^2 + (x-1)^3$ é $divisível\ por\ g = x - 1$.

Solução: $p(1) = (1-1)^2 + (1-1)^3 = 0^2 + 0^3 = 0$, assim temos que p é divisível por g.

2) Vamos verificar se $p = x^6 - 6x^2 + 7$ é $divisível\ por\ g = x - 1$.

Solução: $P(1) = 1^6 - 6.1^2 + 7 = 1 - 6 + 7 = 12 \neq 0\ Logo\ p\ não\ é\ divisivel\ por\ g$.

Até aqui, exploramos o conteúdo de polinômios que é importante e necessário para seguirmos com o trabalho. Na seção seguinte estudaremos as equações algébricas.

2.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

Seguiremos essa seção com as seguintes questões norteadoras:

- Como conseguimos encontrar as raízes?
- São só essas as raízes da equação?
- Tem métodos mais fáceis para encontrar as raízes?

Essas perguntas, são frequentes em sala de aula, e abordaremos sobre elas no decorrer da seção.

Definição 2.16: Dadas duas funções polinomiais $p(x)\ e\ g(x)$, chamamos $equação\ polinomial\ ou\ equação\ algébrica$ a sentença aberta $p(x) = g(x)$.

Exemplo: Sejam $p(x) = 4x^3 + 2x + 7\ e\ g(x) = 6x^2 + 7x$ a sentença aberta $4x^3 + 2x + 7 = 6x^2 + 7x$ é uma equação algébrica.

Observação: Uma sentença aberta em x pode ser verdadeira ou falsa conforme o valor atribuído à incógnita x.

Exemplos:

1) Para $x = 0$, $\underbrace{4.0^3 + 2.0 + 7}_{p(0)} = \underbrace{6.0^2 + 7.0}_{g(0)} \rightarrow 7 \neq 0$ (Falsa)

2) Para $x = 1$, $\underbrace{4.1^3 + 2.1 + 7}_{p(1)} = \underbrace{6.1^2 + 7.1}_{g(1)} \rightarrow 13 = 13$ (Verdadeira)

2.2.1 Raiz de uma equação algébrica

Definição 2.17: Dada uma equação algébrica $p(x) = g(x)$ chamamos de raiz da equação todo número que substituído em lugar de x, torna a sentença verdadeira. Assim, o número r é a raiz de $p(x) = g(x)$ se, e só se, $p(r) = g(r)$ é sentença verdadeira.

Usando o exemplo dado acima, na equação $4x^3 + 2x + 7 = 6x^2 + 7x$ verificamos que 1 é raiz.

Para $x = 1 \rightarrow 4.1^3 + 2.1 + 7 = 6.1^2 + 7.1 \rightarrow 13 = 13$ (Verdadeira).

Observe que para $x = -1$ *e* 2, a sentença não é verdadeira.

$x = -1 \rightarrow 4.(-1)^3 + 2.(-1) + 7 = 6.(-1)^2 + 7.(-1) \rightarrow 1 = 1$ (Verdadeira).

$x = 2 \rightarrow 4.2^3 + 2.2 + 7 = 6.2^2 + 7.2 \rightarrow 35 \neq 38$ (Falsa).

Conjunto solução de uma equação algébrica

Definição 2.18: Chamamos de conjunto solução ou conjunto verdade da equação $p(x) = g(x)\ em\ \mathbb{C}$, o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Exemplos:

1) O conjunto solução da equação $4x^3 + 2x + 7 = 6x^2 + 7x$ é $S = \left\{1, \frac{1-\sqrt{29}}{4}, \frac{1+\sqrt{29}}{4}\right\}$.

2) O conjunto solução da equação $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$ é $S = \{1, -1, 2\}$.

Resolução de uma equação

Resolver uma equação algébrica significa determinar o conjunto solução dessa equação.

Dada uma equação algébrica $p(x) = g(x)$, para resolvê-la, precisamos desenvolver um raciocínio lógico e concluir quais são as raízes. Nesse sentido, nossa meta a partir de agora é apresentar métodos de resolução de equações.

Equações equivalentes

Definição 2.19: Duas equações algébricas são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução, isto é, toda raiz de uma equação é também raiz da outra e reciprocamente. Deste modo, por exemplo, as equações

$3x + 2 = x + 10 \; e \;\; 2x = 8$ são equivalentes, pois o $s_l = \{4\}$ para ambas.

Observação: Há duas transformações que não alteram o conjunto solução de uma equação algébrica, isto é, há duas maneiras de transformar uma equação algébrica em outra, equivalente à primeira:

- Somar aos dois membros a mesma função algébrica

$$p(x) = g(x) \leftrightarrow p(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

Exemplo: Seja a equação $\underbrace{5x^2 + 2x - 4}_{p(x)} = \underbrace{4x^2 + x - 2}_{g(x)}$ *(1)*

Adicionamos $h(x) = -g(x) = -4x^2 - x + 2$ aos dois membros:

$$\underbrace{(5x^2 + 2x - 4)}_{p(x)} + \underbrace{(-4x^2 - x + 2)}_{h(x)} = \underbrace{(4x^2 + x - 2)}_{g(x)} + \underbrace{(-4x^2 - x + 2)}_{h(x)}$$

Simplificando, temos: $x^2 + x - 2 = 0$ (2)

Decorre que (1) é equivalente a (2), portanto: $S_1 = S_2 = \{1, -2\}$.

Aplicamos a propriedade que diz: Em toda equação polinomial, transpor um termo de um membro para outro, trocando o sinal de seu coeficiente, não altera o conjunto solução.

$$p(x) = g(x) \leftrightarrow p(x) - g(x) = 0$$

- Multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo $k \; (k \neq 0)$

$$p(x) = g(x) \leftrightarrow k.p(x) = k.g(x)$$

Exemplo: $2x^2 + 4 = 0 \; e \; 16x^2 + 32 = 0$ são equivalentes pois a 2ª foi obtida através da 1ª de uma multiplicação por 8.

Na resolução de uma equação polinomial é ideal sempre procurar transforma-la em outra mais simples, em que o conjunto solução possa ser obtido com facilidade. Deste modo, aplicando as operações expostas nas observações acima, é possível transformar qualquer equação.

$P(x) = p(x) - g(x) = 0$ toda equação polinomial é redutível à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Ao transformamos uma equação algébrica para a forma $P(x) = 0$ podem ocorrer dois casos imediatos:

1º) $P(x)$ é identicamente nula, isto é, estamos diante da equação

$$0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + \cdots + 0.x = 0 = 0.$$

que é um sentença verdadeira para todo número complexo que seja colocado no lugar de x, logo

$$S = \mathbb{C}$$

2º) $P(x)$ é uma constante não nula, isto é, estamos diante da equação

$$0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + \cdots + 0.x + k = 0,$$

que é uma sentença falsa para todo número complexo que seja substituído pela incógnita x, logo

$$S = \emptyset.$$

Exemplo: Resolva a seguinte equação:

a) $(x-2)(x^2+2) + 2x = 2x^3 + 3x - 2$

Solução:

a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 2x^3 + 3x - 2$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 2x^3 + 3x - 2$$

$$(x^3 - 2x^2 + 2x - 4 - (2x^3 + 3x - 2) = 0$$

$$-x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$$

De agora em diante vamos considerar as Equações Polinomiais $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ em que o grau de p é maior que zero.

2.3 NÚMEROS DE RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Definição 2.20: Toda equação algébrica pode ser estabelecida na forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$ e as seguintes proposições são equivalentes:

r é $raiz\ da\ equação$ $p(x) = 0$;

r é $raiz\ da\ função\ algébrica$ $p(x)$;

r é $raiz\ do\ polinômio\ p$.

As três proposições são resumidas em $p(r) = 0$

Vamos admitir que a equação $p(r) = 0$ é de grau n se, e só se, $P(x)$ e P for de grau n.

2.3.1 Teorema Fundamental Da Álgebra (T.F.A): $Todo\ polinômio\ F\ de\ grau\ n \geq 1\ admite\ ao\ menos\ uma\ raiz\ complexa$.

O teorema fundamental da álgebra foi demonstrado por Gauss em 1799 e será exposto sem demonstração, pois requer um pouco mais de análise matemática.

$\boldsymbol{Teorema\ 2.21}$: $Toda\ equação\ polinomial\ de\ grau\ n\ (n \geq 1)$ $com\ coeficientes\ complexos\ possui\ pelo\ menos\ uma\ raiz\ complexa$.

Como consequência do teorema fundamental da álgebra temos:

Corolário 2.22: $(Teorema\ da\ Decomposição)$ $Todo\ polinômio\ com\ coeficientes\ complexos$ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\ com\ n \geq 1\ e\ a_n \neq 0\ pode\ ser$ $decomposto\ num\ produto\ de\ n\ fatores\ de\ 1^{\underline{o}}\ grau, ou\ seja$:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio de grau n $(n \geq 1)$ pelo T.F.A $p(x)$ admite $x_1 \in \mathbb{C}$ como raiz, ou seja, $p(x_1) = 0$. Então, existe $q_1(x)$ (quociente) de grau $n - 1$ tal que:

$p(x) = (x - x_1)\, q_1(x)$.

Agora se $q_1(x)$ tiver grau $n - 1 \geq 1$, de novo existem $x_2 \in \mathbb{C}$ e $q_2(x)$ de grau $n - 2$ tal que:

$q_1(x) = (x - x_2)q_2(x) \rightarrow p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_2(x)$.

Deste modo, se $q_2(x)$ tiver grau $n - 2 \geq 1$, existem $x_3 \in \mathbb{C}\ e\ q_3(x)$ de grau $n - 3$ tal que:

$$q_2(x) = (x - x_3)q_3(x) \rightarrow p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)q_3(x).$$

Aplicando o processo sucessivamente, concluímos que

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

A menos de ordem dos fatores, a decomposição é única.

Corolário 2.23: Toda equação algébrica de grau n com coeficientes complexos possui $exatamente\ n\ raízes\ complexas$.

Demonstração:

Pelo corolário 2.22, todo polinômio $p(x)$ de grau n pode ser decomposto num produto de n fatores do 1º grau, logo

$$p(x) = 0 \rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0.$$

O que implica que a equação $p(x) = 0$ possui exatamente n raízes complexas.

Exemplo: Vamos fazer a decomposição do polinômio $p(x) = x^3 - 4x$ em fatores de 1º grau.

Solução: Vamos decompor $p(x) = x^3 - 4x$ pelo método da fatoração, logo $p(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$. Portanto, $p(x)$ é de 3° grau e possui 3 raízes que são: $0, 2, -2$.

Multiplicidade de uma raiz

Definição 2.24: Dizemos que r é raiz de $multiplicidade\ m$ $(m \geq 1)$ da equação $p(x) = 0\ se, e\ somente\ se, p = (x - r)^m. q\ e\ q(r) \neq 0.$

Isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a $x - r$.

Quando $m = 1$, dizemos que r é raiz simples; quando $m = 2$, dizemos que r é raiz dupla; quando $m = 3$, dizemos que r é raiz tripla, e assim por diante.

Exemplos:

1) $x^4(x + 3)^5 = 0$

Solução: Essa equação admite as raízes 0 e -3 com multiplicidades 4 e 5, respectivamente, e, embora a equação seja de 10º grau, seu conjunto solução tem só 2 elementos, $S = \{0, -3\}$.

2) Quantas raízes possui a equação algébrica $x(x - 3)^5(x - 2)^3 = 0$.

Solução: Pelo corolário 2.22, a equação possui 9 raízes, sendo: 0 uma raiz com multiplicidade simples, 3 uma raiz de multiplicidade quíntupla e 2 uma raiz de multiplicidade tripla.

2.4 RELAÇÕES DE GIRARD

Definição 2.25: As relações de Girard são as relações entre coeficientes e raízes da equação $P(x) = 0$

Usaremos o Teorema da decomposição para encontrar as relações de Girard para as equações do 2º e 3º graus e depois faremos uma generalização.

Equação do 2º grau

A equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ tem raízes $x_1 e\, x_2$, que decomposta em fatores lineares fica:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ e pela identidade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Equação do 3º grau

A equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem raízes $x_1, x_2\, e\, x_3$ que decomposta em fatores lineares fica:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x + a(x_1x_2x_3)$$

E pela identidade de polinômios, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Equação de grau n

De modo geral, para uma equação algébrica de grau $n \geq 3$ da forma $a_nx_n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$. a

Cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, temos:

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ (Soma das raízes)

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}\,x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$ (Soma das raízes duas a duas)

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots x_{n-2}\,x_{n-1}\,x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$ (Soma das raízes três a três)

....

$S_h = \left(Soma\ de\ todos\ os\ C_{n,h}\ produtos\ de\ h\ raízes\ da\ equação\right) = (-1)^h\frac{a_{n-h}}{a_n}$

....

$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n\,\frac{a_0}{a_n}$. (Produto das n raízes).

As relações de Girard são muito importantes quando se sabe alguma informação sobre as raízes da equação algébrica de grau n, mas não suficientes para obter $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. A solução do sistema das relações em si nos leva de novo a equação original.

Exporemos aqui algumas propriedades que relacionam entre si as raízes complexas e não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais que ajudam a determinar as raízes da equação.

2.4.1 Raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais

Teorema 2.26: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite o número complexo $z = a + bi$ como raiz, então $\bar{z} = a - bi$, conjugado de z, também é raiz da equação.

Demonstração:

Consideremos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, a \neq 0,$ com coeficientes reais. Por hipótese, temos que $z = a + bi\ com\ b \neq 0$ e raiz da equação, ou seja, $p(z) = 0$. Portanto,

$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$

Aplicando o conjugado em ambos os membros da equação temos

$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0} = \bar{0}$

Aplicando a propriedade da adição de conjugados $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ temos

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} = \bar{0}$$

Aplicando a propriedade do produto de conjugados $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$ em ambos membros e o fato dos coeficientes a_n serem reais, ou seja, $a_n = \bar{a}_n$ para todo n, temos

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots a_2\overline{z^2} + a_1\bar{z} + a_0 = 0$$

Aplicando a propriedades das potências de conjugados $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, temos

$$a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^n + \cdots a_2(\bar{z})^2 + a_1(\bar{z}) + a_0 = 0.$$

Ou seja, $p(\bar{z}) = 0$, de modo que $\bar{z}$, também é raiz da equação $p(x) = 0$.

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$. Sabendo que o número complexo $1 + i$ é raiz da equação, implica que $1 - i$ também é raiz e podemos escrever

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = (x - 1 + i)(x - 1 - i)q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x)$$

Onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2. Dividindo $p(x)$ por $x^2 - 2x + 2$ vamos obter $q(x) = x^2 - 1$ que tem como raízes -1 e 1. Portanto, as raízes da equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ são: $-1, 1, 1 + i\ e\ 1 - i$.

2.4.2 Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Teorema 2.27: Se o número racional $\frac{p}{q}$ com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração:

Por hipótese, temos que $\frac{p}{q}$ é uma raiz não nula da equação.

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, logo

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a equação acima por q^n temos

$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$

Isolando $a_n p^n = -q \underbrace{(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})}_{k \in \mathbb{Z}}$,

Pois os coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_2, a_1, a_0, p, q$ são números inteiros, logo

$a_n p^n = -qk.$

Como o MDC de p e q é 1, então o MDC de p^n com q também é 1. Logo, q é divisor de a_n.

De modo análogo, isolando $a_0\, q^n$, temos

$$a_0 q^n = -p \underbrace{(a_n p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-2}\, q + \cdots + a_1 q^{n-1})}_{s \in \mathbb{Z}}.$$

Podemos escrever $a_0 q^n = -ps$ Como o MDC de q^n com p é 1, conclui-se que p é divisor de a_0.

Exemplo: Vamos pesquisar se a equação $3x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$ possui raízes racionais

Solução: Na equação dada, temos $a_0 = 2\ e\ a_3 = 3$

p é divisor de 2 → $p \in \{-1, 1, -2, 2\}$

q é divisor de 3 → $q \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Pelo teorema acima, as prováveis raízes racionais $\frac{p}{q}$ satisfazem a propriedade.

$\frac{p}{q} \in \left\{-1,1,-2,2,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}.$

Fazendo a verificação, vemos que a equação

$3x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$ possui três raízes racionais: $-\frac{1}{3}\,,-\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}$.

São vários os métodos de resolução de equações algébricas, dentre eles podemos destacar: Método algébrico, Método geométrico, o Método de Viète, o Método de Ferrari, Método de Galoes, Método de Euler, dentre outros. Vimos alguns deles neste trabalho principalmente os algébricos. Não seguiremos adiante em ver diferentes métodos de resolução, pois não faz parte do nosso objetivo.

Os exemplos de situações problemas que iremos trazer a seguir foram encontrados nos livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio.

Situação 1: Carlos trabalha em um determinado setor numa indústria de carros. Ele recebe um salário fixo mensal de 2300,00 reais mais 20,00 reais por hora extra trabalhada. Se ele trabalhar 1 hora extra qual será o valor do salário de Carlos?

Solução: Para resolver essa equação precisamos inicialmente fazer a interpretação algébrica com base nos dados trazidos pela situação. Assim temos que:

$S_t = salário\ total$

$Salário\ mensal\ fixo\ de\ Carlos$ é $R\$\ 2300$

$Taxa\ fixa\ por\ hora\ extra\ trabalhada$ é $R\$\ 20{,}00$

$t = tempo\ trabalhado\ em\ horas$

Com esses dados podemos escrever a equação que o representa:

$S_t = 2300 + 20t$

Se Carlos trabalhar 1 hora, ou seja, $(t = 1)$ temos que o salário dele será de R$ 2320,00.

Situação 2: (FGV-SP) Durante o último jogo da seleção brasileira, brinquei com meu primo, apostando quem conseguiria colocar mais pipocas na boca. Comecei colocando duas a duas na boca e fui aumentando r pipocas por vez, como em uma PA. Ele começou colocando 1 na boca e foi multiplicando por r, como numa PG. Na quarta vez em que colocamos pipocas na boca, descobrimos que a quantidade colocada por nós dois foi a mesma. Nessa nossa brincadeira, o valor de r é:

(a) Um número quadrado perfeito

(b) Um número maior que 3.

(c) Um divisor de 15.

(d) Um múltiplo de 3.

(e) Um número primo.

Solução:

Para solucionarmos essa situação problema, precisamos compreender os dados do problema.

Dados: temos uma PA cujo primeiro termo é 2 e uma PG de primeiro termo 1, ambas de razão r. Também é informado que o 4º termo de ambas é igual. O problema pede o valor de r, que segundo o enunciado, é a razão das sequencias descritas no texto.

Vamos resolver o 4º termo de cada sequência, iguala-los e resolver a equação cúbica resultante.

Assim, vamos construir a PA e a PG de acordo com enunciado:

$PA\ (2, 2 + r, 2 + 2r, 2 + 3r, \dots)$

$PG\ (1, r, r^2, r^3, \dots)$

Igualando o 4º termo das duas sequências temos $r^3 = 2 + 3r$.

Vamos resolver a equação encontrada para obter o valor de r, assim temos:

p é divisor de $2 \rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2\}$

q é divisor de $1 \rightarrow q \in \{-1, 1\}$

Então, $\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2\}$

Fazendo a verificação $p(-1) = 0$, então -1 é raiz da equação. Vamos eliminar a raiz -1 utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini para obter as raízes restantes:

-1	1	0	-3	-2
	1	-1	-2	0

Portanto, as duas raízes restantes são as raízes da equação $r^2 - r - 2 = 0$:

Usando a fórmula de Bháskara $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, temos que $r = 2 \; ou \; r = -1$

Assim, o conjunto solução dessa equação é $S = \{-1, 2\}$. Porém, a raiz que satisfaz a situação é o número 2, pois a razão neste caso não pode ser negativa, porque não há pipoca negativa. Logo r = 2 é um número primo. Portanto a resposta da situação problema é a alternativa (e).

3 O ENSINO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO COM BASE NOS DOCUMENTOS: PCN-EM, PNLD E LDB

Suscitaremos neste capítulo à análise de documentos oficiais (PCN-EM), (PNLD) e (LDB) para o ensino de matemática referente ao Ensino Médio. Neste sentido, traremos as relações dadas entre eles, esboçaremos os objetivos, as habilidades e competências exigidas, e o que cada um expõe acerca do ensino de matemática, em especial o estudo das Equações Algébricas.

3.1 A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Este tema é relevante devido à importância que as equações ocupam na Matemática e em outras áreas de conhecimento. As equações algébricas estão presentes em várias situações do nosso cotidiano, nesse sentido, recorremos a ela para resolver várias situações problemas, tendo em vista a diversidade de aplicações.

É no Ensino Fundamental, quando usamos letras no lugar de números que começamos a ter nosso primeiro contato com a matemática abstrata, ao resolver equações onde procuramos descobrir quantidades e valores desconhecidos.

Inicialmente trabalhar com letras que representam números pode ser difícil, porque os alunos estão acostumados com a aritmética. Ao introduzir conceitos de operações algébricas que satisfazem propriedades cujos operadores podem ser números ou letras, essa tarefa pode-se tornar bem complicada pois eles não estão acostumados as generalizações.

Na resolução de várias situações problemas na era midiática onde quase todos possuem aparelhos celulares, computadores, e etc, podemos pensar que o estudo matemático pode também se adequar a estas tecnologias, com o intuito de subsidiar e despertar o desejo de aprender matemática utilizando recursos que os próprios alunos têm em mãos. É verdade que para o ensino de equações algébricas se faz necessário o uso do livro didático do aluno, além de muitos outros recursos, podendo então, fazer diversas abordagens ao tema, tornando o estudo interessante e prazeroso.

Aprender equações é imprescindível para qualquer candidato ao vestibular e ao ENEM, pois na área de matemática há várias questões destinadas a resolução de problemas que envolvem equações algébricas. Nesse sentido, é ideal que aluno possua conhecimento do conteúdo.

3.2 ESTUDO DOS DOCUMENTOS SUPRACITADOS

Os PCNs do Ensino Médio tem por objetivo orientar o trabalho dos educadores desde os anos iniciais até o final do Ensino Médio, estes apresentam metodologias que poderão ser usadas em sala de aula para que os professores alcancem resultados satisfatórios e os alunos tenham um ensino de qualidade. O documento sugere aos professores que além de oferecer uma educação que transmita conhecimentos técnicos, também prepare os alunos para serem cidadãos com habilidades para adaptar-se em situações que possam acontecer em sua vida profissional ou pessoal.

No âmbito da matemática os PCNs, Brasil (1999, p. 254), propõe para o Ensino Médio os seguintes objetivos, pelos os quais os alunos devem ser capacitados:

> - Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> - Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> - Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> - Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> - Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> - Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> - Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos, e entre esses temas o conhecimento de outras áreas do currículo;
> - Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> - Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Em relação as situações problemas nas quais o aluno sempre se depara em sala de aula, Os PCNs a respeito das aquisições do aluno destacam:

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL,1998, p.52)

Nesse sentido, é sempre importante que os alunos estejam sempre bem orientados pelos professores e pessoas que o cercam no âmbito escolar, para que eles se sintam motivados a buscar a própria independência em relação ao desenvolvimento de estratégias de enfrentamento na hora de resolver problemas em sala de aula.

Com isso, podemos citar o estudo de Equação Algébrica já que, na resolução de exercícios o aluno é estimulado a pensar e traçar estratégias de resolução para alcançar os resultados, e assim ele alcança os objetivos, adquirindo habilidades e competências que ele deve ser capacitado. Nessa linha, é ideal que o aluno o resolva, e se errar, repita novamente refazendo e analisando os erros cometidos e, assim ele vai adquirindo as habilidades traçadas pelo PCN.

Ainda nesse sentido, sabemos que a matemática é de suma importância para o desenvolvimento, geração de competências e habilidades, que podem propiciar atividades no caráter formativo e auxiliador, contribuindo para o desenvolvimento de processos de pensamentos e raciocínio, cuja utilidade seja a de capacitar o aluno a resolver problemas propiciando confiança.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista no ensino médio (BRASIL, 1998, p.40)

O PNLD foi criado para subsidiar e ajudar as escolas na escolha dos livros didáticos. Com base no Brasil (2012, p. 16), o ensino de Matemática, deve capacitar os estudantes para:

> • Planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
> • Compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;
> • Interpretar matematicamente situações do dia a dia ou do mundo tecnológico e científico e saber utilizar a Matemática para resolver situações-problema nesses contextos;
> • Avaliar os resultados obtidos na solução de situações-problema;
> • Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
> • Saber usar os sistemas numéricos, incluindo a aplicação de técnicas básicas de cálculo, regularidade das operações, e etc;
> • Saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações;
> • Reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
> Compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber utilizar em situações-problema;
> • Utilizar os conceitos e procedimentos estatísticos e probabilísticos, valendo-se, entre outros recursos, da combinatória;
> • Estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos de números e operações, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidades, para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista.

A partir da análise deste guia notamos que o documento prevê as habilidades que o aluno adquire ao estudar e compreender os diversos conteúdos matemáticos inclusive o de Equações Algébricas que pode capacita-lo a interpretar situações do dia a dia.

A LDB (Lei 9394/96) é a legislação que regulamenta o sistema educacional público ou privado do Brasil da educação básica ao ensino superior reafirma o direito à educação, garantido pela Constituição Federal e estabelece os princípios da educação e os deveres do Estado em relação à educação escolar pública, definindo as responsabilidades, em regime de colaboração, entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios.

No artigo 35, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional- LDB Nº 9394/96 assim explicita a finalidade do Ensino Médio na etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, que são:

> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 2006, p. 18)

Com o estudo dos documentos supracitados, vimos que as habilidades e competências exigidas e recomendadas se relacionam. No estudo de equações algébricas o aluno deve desenvolver raciocínios lógicos, saber se sobressair em situações problemas do cotidiano, com o auxílio de conhecimentos matemáticos. E assim de acordo com a LDB “desenvolver a autonomia intelectual”.

A seguir vamos apresentar uma análise do que vem sendo cobrado no ENEM, referente ao conteúdo de Equações Algébricas.

O Exame Nacional do ensino Médio foi criado para avaliar a aprendizagem dos alunos e hoje vem sendo umas das maiores portarias para o ingresso do ensino superior.

Com a análise das matrizes de referências de matemática do ENEM, Brasil (2009), podemos observar, que dentre as sete competências das áreas exigidas pela avaliação, a Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. Que se desdobra em 5 habilidades que são:

> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. (Brasil, 2009, p. 6).

No que se refere à equação algébrica, o exame costuma fazer com que o aluno, a partir de um gráfico, tabela ou situação-problema, observe a relação entre determinadas grandezas e chegue a fórmula que expresse tal relação. A partir das relações de grandezas, e usando letras para representa-las, é possível generalizar padrões, conceitos, operações e propriedades por meio de fórmulas.

Com base nessas habilidades, avaliamos algumas provas do ENEM e vimos que realmente são exigidas tais competências e que em algumas questões de resolução de problemas os alunos recaem a uma equação algébrica para serem resolvidas.

Traremos agora, questões que envolviam equação algébrica no ENEM nos últimos anos.

ENEM 2015

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona v e x é

a) $v = 10.000 + 50x - x^2$

b) $v = 10.000 + 50x + x^2$

c) $v = 15.000 - 50x - x^2$

d) $\boldsymbol{v = 15.000 + 50x - x^2}$

e) $v = 15.000 - 50x + x^2$

Solução:

O valor a ser arrecado por dia, em reais é calculado através do produto entre a quantidade vendida (Q), em litros, pelo preço do litro (P), em reais. Essas duas variáveis são função do valor de desconto x, em centavos. A venda é de 10.000 litros por dia ao preço de 1,50 real/litro. A cada centavo de desconto, a quantidade vendida aumenta em 100 litros, portanto Q= 10.000 + 100x e P= 1,50 – 0,01x, convertendo o valor x de centavos para reais divide-se por 100 ou multiplica-se por 0,01. Como $v = Q.P$

$v = (10.000 + 100x)(1{,}50 - 0{,}001x) = 15.000 + 150x - 100x - x^2$

$v = 15.000 + 50x - x^2$ que está explicita na letra d.

Nesta questão, exigia que o aluno determinasse a expressão algébrica que relacionava o desconto dado a um combustível com total arrecado em sua venda.

ENEM 2012

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

Qo = –20 + 4P

QD = 46 – 2P

Em que Qo é quantidade de oferta, QD é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Qo e QD se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

(A) 5

(B) 11

(C) 13

(D) 23

(E) 33

Essa questão envolve a equação de primeiro grau para determinar o valor numérico, obtida da igualdade de duas ou mais funções representativas de situações de mercado.

ENEM 2011

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

(A) 100n + 350 = 120n + 150

(B) 100n + 150 = 120n + 350

(C) 100(n + 350) = 120(n + 150)

(D) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)

(E) 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

Nesta questão, exigia que o aluno determinasse a equação que representa a empresa que apresentava um valor mais econômico para a contratação da prefeitura.

Analisando as questões relacionadas as Equações Algébricas e as competências exigidas pelo exame, vimos que elas aparecem a partir de situações problemas do nosso dia a dia, e que as questões exigem do aluno um certo raciocínio e conceitos preliminares bem entendidos, e ainda são questões bem elaboradas e contextualizadas que exigem interpretação e conhecimentos de técnicas matemáticas bem compreendidas. Sabendo disso, cabe aos profissionais e candidatos ao exame, estarem sempre atentos as habilidades e competências exigidas pelo exame.

Além de o exame servir para avaliar o ensino e aprendizagem dos alunos é também uma porta de entrada para o Ensino Superior. Nesse sentido, é de grande importância o estudo e o entendimento eficaz de conteúdos matemáticos, pois se a aprendizagem não foi feita dessa maneira, os alunos serão prejudicados ao se depararem com situações que eles poderão não conseguir se sobressair.

4 UMA ABORDAGEM DO CONTEÚDO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS EM DUAS ESCOLAS ESTADUAIS DE ARAGUAÍNA

Como os livros adotados pelas escolas estavam entre as indicações do guia PNLD, consideramos relevante ressaltar e citar as análises feitas enfatizando o conteúdo de equação algébrica, já que, trata-se de um livro indicado pelo programa, e assim, são considerados suficientes como instrumento de formação para o ensino médio.

O guia traz as abordagens, estruturas, metodologias e por fim faz uma análise de cada coleção e dos conteúdos trazidos por elas. Para este trabalho, observamos apenas a abordagem dada a equação algébrica nos livros, assim, aduziremos a pesquisa feita nas escolas pesquisadas. Principalmente destacando como o professor lida ao expor os conteúdos que arrolam o estudo das equações seguindo o livro. Neste aspecto o PNLD diz:

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (BRASIL, 2012, p.12-13)

Nesse sentido, consideramos importante o uso dos livros didáticos que sejam indicados e considerados ideais para o uso no Ensino Médio com base no PNLD. Tendo em vista que o livro adotado pela escola é seguido literalmente pelos professores.

Apresentaremos a seguir, uma análise dos livros didáticos que as escolas supracitadas adotaram, no intuito de averiguar como é exposto o conteúdo de Equações Algébricas para o Ensino Médio.

Foram analisadas nos livros didáticos adotados pelas escolas pesquisadas as abordagens dadas ao conteúdo de Equações Algébricas (Polinomiais), para determinar quais conceitos são considerados relevantes pelo autor. Também se pensou, para fins de análise, na forma que estes conceitos são abordados e qual a estratégia de ensino adotada, e se esses livros apresentam uma proposta de ensino diferenciada para o ensino do conteúdo em questão, muitas vezes vistos nestes anos apenas como cumprimento de currículo.

Os livros adotados pela Escola I são da coleção Novo Olhar, que está indicada no PNLD.

A coleção é dividida em três volumes, contemplando conteúdos de Álgebra, Geometria, Funções, Matemática Financeira, Estatística e Probabilidade. A seleção de tópicos ordenados por capítulos corresponde a temas tradicionalmente abordados no Ensino Médio.

Os conteúdos são sempre iniciados com a apresentação de uma situação problema propiciando ao aluno desafios para que ele reflita e utilize seus conhecimentos prévios na construção do conhecimento. O capítulo é finalizado com seções de exercícios de fixação e de revisão. Os três volumes desta coleção têm a mesma estrutura, começando com uma breve apresentação seguida do sumário, que apresenta a divisão dos capítulos, bibliografia e siglas. No volume 03 encontram-se questões de vestibular e do ENEM.

Com o objetivo de dialogar com a proposta desta pesquisa, a análise se direcionou para o estudo do capítulo que trata das Equações Polinomiais, que está no terceiro volume desta coleção que é usado no 3º ano do Ensino Médio.

No capítulo 8, onde encontramos o estudo das equações algébricas o livro traz: O estudo de Polinômios, Operações com polinômios, Equações polinomiais, Teorema Fundamental da álgebra, Relações de Girard, Multiplicidade de uma raiz, Raízes complexas, Pesquisando raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros, e finaliza explorando o tema com Equações cúbicas e quárticas.

A articulação dos conteúdos de cada tópico é executada de forma variada e permeia todo texto. Em geral, opta-se por uma abordagem simples e direta. Para determinar o conjunto solução de uma equação de grau maior ou igual a três, por exemplo, escolhe-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini (para reduzir o grau da equação) e a pesquisa de raízes racionais.

Em relação a Educação de Jovens e Adultos (EJA) que a escola oferece, o livro adotado pela escola é da coleção VIVER, APRENDER e está dividido por etapas 1, 2 e 3. Em unidades que se divide em capítulos. Sobre o estudo das Equações Algébricas, encontramos na etapa 2 na unidade 2 que tem como tema: A matemática resolvendo problemas e está delimitado no capitulo 3: trabalhando sistemas de equações, elementos de geometria analítica e probabilidade.

O livro começa fazendo afirmações em relação a situações do dia a dia que podem ser resolvidas através de equações. E em seguida traz um exemplo do cotidiano como: a compra de refeições e o preço gasto por 2 amigos. Do problema eles extraem 2 equações com as mesmas incógnitas referentes ao alimento semelhante consumido pelo casal de amigos. Em seguida traz também a representação gráfica do sistema gerado pelas equações. Só depois de muitos exemplos envolvendo a representação gráfica é que o livro menciona o método algébrico que é possível obter os valores das incógnitas procuradas, ou seja, os valores exatos de cada coordenada do ponto desejado.

O método apresentado é o da substituição onde escolhemos uma equação e isolamos a incógnita. Daí tem um suposto valor, em seguida substitui-se o valor encontrado e assim teremos uma nova equação com apenas uma das incógnitas e pode ser resolvida da forma usual. Feito isso o livro em seguida traz a aplicação de conhecimentos em forma de exercícios baseado em problemas do cotidiano e sistemas de equação para encontrar suas soluções. Vimos também neste, a equação geral da reta.

Na escola II, as coleções de livros adotados são da coleção MATEMÁTICA – CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luis Roberto Dante.

A coleção é composta por unidades, divididos em capítulos. Na abertura dos capítulos, há textos com informações e propostas de atividades sobre os temas a trabalhar. Em seguida, vêm as explanações teóricas, acompanhadas de exemplos, problemas resolvidos e entremeadas por exercícios propostos.

Cada capítulo inclui uma seção de exercícios, intitulada Tim-tim por Tim-tim, em que são seguidas, em detalhes, diferentes fases de resolução de um problema; A Matemática e as práticas sociais, com situações-problema relacionadas à formação para a cidadania; e atividades adicionais que reúnem questões de vestibulares de todas as regiões do país. No final dos livros, encontram-se: Questões do Enem; Glossário; Sugestões de leituras complementares; Significado das siglas de vestibulares; Referências bibliográficas e Respostas.

Encontramos o conteúdo de Equações algébricas no capítulo 7 que está com a seguinte sequência didática: Polinômios: operações – equações algébricas; Teorema Fundamental da Álgebra: decomposição em fatores primos; relações de Girard; raízes racionais e complexas não reais.

Com base na análise do PNLD, as abordagens das equações algébricas são desenvolvidas de maneira satisfatória, com exercícios bem escolhidos. Matrizes e determinantes são introduzidas por meio de um grande conjunto de propriedades e verificadas em exemplos.

A partir da análise feita nos livros das escolas percebe-se, que a abordagem dos conteúdos de cada tópico é feita de maneira sucinta, iniciando, geralmente, com um breve histórico acerca da origem, conceito seguido de alguns exemplos resolvidos. Nota-se, contudo, que em relação à validação de resultados das proposições, elas são plenamente justificadas, facilitando o entendimento do aluno no que diz respeito a algumas propriedades como o Teorema Fundamental da Álgebra, Raízes Complexas, Relações de Girard, Raízes Racionais. No entanto, ao tratar o tópico de raiz ou zero da equação os autores não fazem uso de gráficos, o que acaba acontecendo poucas vezes no decorrer desses capítulos.

4.1 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A pesquisa tem como base um questionário destinado a professores do Ensino Médio. Por questões éticas foram omitidas suas identidades, e assim serão apresentados aqui por letras do alfabeto maiúsculas identificados por A, B, C e D.

Cerca de 6 professores se propuseram a responder o questionário, mas apenas 4 entregaram a tempo de serem analisadas. Participaram da pesquisa 4 professores de matemática de duas escolas da rede estadual de Ensino Médio. O questionário trazia questões acerca da abordagem e as estratégias utilizadas no ensino de equações algébricas no qual buscamos diagnosticar as dificuldades que os professores e alunos encontram no ensino deste conteúdo.

4.1.1 Construção Dos Dados

Para a obtenção dos dados visitamos as escolas supracitadas apresentando o tema do trabalho, a intenção de pesquisa aos diretores. Com a autorização da pesquisa, elaboramos o questionário que continha 4 questões acerca da formação acadêmica do professor, 5 questões sobre o uso de recursos didáticos e outras 9 questões sobre o ensino de equações. Como pode ser observado no questionário no Apêndice A.

As respostas em anexo, serão trazidas de acordo com a organização do questionário. Que está delimitado em 3 partes, acerca da formação, dos recursos didáticos e sobre o ensino das equações algébricas.

4.1.2 Análise e discussões das respostas dadas ao questionário

Os professores que responderam ao questionário de início se mostraram curiosos e entusiasmados em respondê-lo, mas quando viram que eram numerosas as questões nos pareceram meio desmotivados e alegaram a falta de tempo, e que estavam passando por períodos de avaliações, dentre outras. Tivemos dificuldades em recolher as respostas pois os professores trabalhavam em turnos opostos e outros esqueciam até mesmo de responder.

A seguir figuram os resultados das análises das respostas do questionário aplicado aos professores de matemática de duas escolas estaduais de Araguaína-TO

Formação e experiência de trabalho

Responderam ao questionário 4 professores de matemática sendo 2 homens e 2 mulheres, todos são efetivos e atuam no ensino médio. Todos os professores entrevistados possuem Ensino Superior completo, 3 em Ciências com habilitação em Matemática e 1 possui Licenciatura plena em Física e Licenciatura plena em Matemática.

Todos os professores atuam na rede de ensino em um tempo bastante plausível para ser considerado experiente, variando de 10 a 21 anos. Tempo suficiente para nos proporcionar uma ideia de como está o ensino de matemática em particular o conteúdo de equações algébricas, baseado nas respostas dadas ao questionário.

A experiência dos professores dá ao nosso trabalho certa relevância, pois são professores que já tiveram oportunidades de experimentar e propor estratégias e abordagens diferentes para se trabalhar em sala de aula.

Quadro 01- Formação Continuada

Professor	Respostas
A	Não são mais oferecidos. Os que são oferecidos são on line, estudar pelo computador desmotiva.

B	São insuficientes, e muitas vezes não atendem as necessidades específicas de cada área de atuação do professor.
C	Não oferece.
D	Não oferece.

Ao perguntarmos sobre os cursos de formação continuada para os professores, com base nos dados obtidos não estão sendo oferecidas como antes, relatos de professores nos informa que basicamente a cerca de 6 anos o estado parou de oferecer os cursos. Hoje em dia, eles oferecem apenas, cursos via on-line, como podemos observar na tabela 1, as respostas dos professores A e B revelam que são insuficientes, e que não atendem à demanda e expectativa de cada área que o professor atua. Acrescenta ainda que, “estudar pelo computador é meio desmotivador”.

Em particular, o professor C que trabalha na escola II, nos revela fazendo um comentário que ele se diz revoltado quanto a questão de número 3 do questionário, que diz respeito a formação continuada. Pois ele afirma que é dever do estado propiciar a formação continuada, ou seja, cursos que complementem a formação deles como a CESGRANRIO que era a empresa contratada para prestar esse serviço, que ele considerava satisfatório, pois atendia expectativas. Ele afirmou ainda que o governo não fez os repasses com a empresa contratada “fazendo assim desvio de verbas” O que os impede de continuar a formação já que têm por direito que seja financiado pelo governo.

Vamos apresentar um quadro com as diferentes respostas sobre a visão, desafios e as perspectivas que os professores têm em relação ao ensino de Matemática.

Quadro 02 - Visão, Desafios e perspectivas futuras

Professores	**Visão sobre o ensino de Matemática**	**Desafios**	**Perspectivas Futuras**
A	“Depois que o aluno é alfabetizado ele tem que saber matemática”.	“O desafio é fazer com que os alunos queiram aprender matemática”.	“Tentar conciliar necessidades com o aprendizado. Fazer com que deixa de ser surreal, para não ouvirmos pra quê estudar matemática”.
B	“A matemática está presente no cotidiano. No entanto, temos esbarrado na entrave do descaso e descompromisso generalizado”.	“Pais e alunos que não se envolvem com responsabilidade. Além da negligência dos governantes”.	“Tentamos despertar nos alunos um senso crítico...”
C	“O ensino do estudo da matemática é algo que fica a desejar, desde a má estruturação até a sua aplicação”	“Os desafios são enormes com o melhorar as condições de trabalho aos seus profissionais”.	“As perspectivas futuras não são animadoras”
D	“É um processo que se torna difícil”.	“Devido à falta de base de alguns alunos”.	“As perspectivas futuras não são boas, pois só haverá uma melhoria se for estruturada a educação básica”.

Embora o ensino da matemática é de grande importância, com base no quadro acima, o ensino da matemática se revela preocupante e está deixando a desejar como afirma o professor C, pois aparecem vários fatores denominados como desafios que vão desde a estruturação da escola, as más condições de trabalho, as questões que englobam todo o ensino de matemática, a falta de participação dos pais e até mesmo a falta de compromisso e interesse pelo o estudo por parte dos alunos.

Nesse sentido, as perspectivas futuras não são das mais agradáveis, os professores alegam que os alunos se mostram desinteressados em aprender; os pais que não participam da aprendizagem do filho, a falta de base de alguns alunos e também a própria estruturação da educação básica que não é das melhores.

Em relação a citação da falta de base dita pelo professor D, nos incita a questionar: Será que o ensino está sendo superficial, de modo que o aluno não está conseguindo fixar o conteúdo? Sendo assim ele poderá ter grandes dificuldades e deficiências acerca da aprendizagem de Matemática.

A presença dos pais é de grande importância na aprendizagem dos alunos, pois eles devem ser ensinados tanto na escola como em casa. E a parte de casa fica com os pais no que diz respeito a estimulação e ajuda na cobrança de atividades que foram propostas pela escola. Caso isso não ocorra, temos alunos sem comprometimento com os estudos e despreocupados pois nem em casa são exigidos. Assim, acredito que os pais e os professores devem atuar em parceria para que a aprendizagem ocorra de fato. Hoje o que vemos é a transferência de responsabilidade, muitos pais vão as escolas apenas no período de matrículas e não vão a reuniões e nem participam efetivamente do processo de aprendizagem dos filhos.

Sobre o ensino de Matemática “deixar de ser surreal” descrito pelo professor A nos diz com essa fala que, muitas das vezes a dificuldade está na Matemática ou até mesmo pelos professores não destacarem sua aplicabilidade, buscando assim, o despertar de um envolvimento que o professor deve buscar de seus alunos para que tenham o prazer de aprender, e assim, não se questionarem ao dizer “para que estudar matemática?”. Nesse sentido o professor deve ser inovador pois de acordo com Behrens:

> O docente inovador precisa ser criativo, articulador e, principalmente, parceiro de seus alunos no processo de aprendizagem. Nesta nova visão, o professor deve mudar o foco do ensinar para reproduzir conhecimento e passar a preocupar-se com o aprender e, em especial, o "aprender a aprender" abrindo caminhos coletivos de busca e investigação para a produção do seu conhecimento e do seu aluno. (BEHRENS, 2000, p.71)

Pois quando o professor instiga no aluno essa visão de investigação, de ir atrás e de querer aprender, abre caminhos para a produção de conhecimento, o de aprender com prazer e não só por obrigação de aprender.

Recursos Didáticos

Os recursos básicos como: quadro, apagador, pincel, livro didático e paradidáticos são os mais utilizados pelos professores A, B, C e D em sala de aula. Poucas vezes são usadas aulas em laboratórios de matemática ou de informática. Os materiais manipuláveis também quase não são utilizados em sala de aula. Embora que nas respostas os professores citaram que usam materiais concretos, software, vídeo-aula, como recursos , mas com pouca frequência, tendo em vista que os materiais concretos são grandes auxiliadores no ensino de matemática. Segundo Turrioni, o material concreto exerce um importante papel na aprendizagem.

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos. (TURRIONI, 2004, P.66)

Utilizado de forma correta o material concreto torna-se um parceiro para auxiliar o ensino de matemática.

Através do questionário quando perguntamos se as escolas possuíam materiais suficientes e eficientes, percebemos em linhas gerais que as escolas pesquisadas não possuem laboratórios de ensino de Matemática, e a grande deficiência é a falta de espaço. Todos os professores disseram não estar satisfeitos quanto a eficiência dos materiais que estão dispostos para uso nas escolas, e o principal fator é a quantidade de material disponível e o espaço para utilizá-los que não é adequado. Além de serem insuficientes os materiais já se apresentam danificados e sucateados como disse o professor B: "Assim como as demais escolas estaduais, a escola tem deficiência em material didático, muitos já sucateados".

Sabemos que os recursos didáticos são de grande importância, porém se fazem necessários um preparo e planejamento para que o professor saiba utilizá-los, não só de forma lúdica, mas também com funções educativas e que haja de fato o aprendizado com o uso deles.

> Entretanto, a utilização de materiais manipulativos, se esses ficarem restritos apenas à manipulação dos alunos de forma lúdica e sem função educativa, não é o suficiente para que exista o aprendizado discente. É preciso que seu uso esteja relacionado a fundamentos pedagógicos para que possa promover a aprendizagem da matemática. (FIETZ; MARTINS, 2010, p.515).

Ou seja, não basta apenas à manipulação de certos materiais em sala de aula é necessário que no uso de recursos didáticos o professor esteja preparado, e que saiba também utiliza-los de forma proveitosa e que assim, busque o interesse dos alunos em estudar com o auxílio de materiais.

Quando perguntamos aos professores, quais recursos didáticos eram necessários para se ter um bom ensino de matemática, nos responderam que os recursos são de fato importantes e a educação para ser de qualidade não dependeria apenas dessas ferramentas. E citaram o interesse e comprometimento dos alunos para com o ensino, pois se assim tivessem, melhoraria algo que já estaria bom. Mencionaram ainda, salas adequadas com laboratórios específicos de matemática, jogos matemáticos, software para a aplicação do conteúdo, e também o uso do livro que são considerados indispensáveis pelos professores para um bom ensino.

Sobre o ensino de equações algébricas (Polinomiais)

Vejamos no quadro 03 as respostas dos professores.

Quadro 03 - Como o conteúdo é abordado?

Professor	Resposta dada
A	“Utilizo a abordagem que o livro didático oferece”
B	Não respondeu
C	“Sempre começo com exemplo prático de aplicação que explique a funcionalidade dos polinômios e suas aplicações”.
D	“Começo sempre com a situação problema, onde esses conteúdos são aplicados”.

Com base no quadro 3, podemos ver que a abordagem dada ao ensino de equação se dá a partir da abordagem trazida pelo livro didático começando sempre com uma situação-problema, definições, exercícios e assim sua aplicabilidade. Um dos professores entrevistados diz citar as aplicações dadas ao tema após a situação problema.

Em relação as estratégias utilizadas para ensinar Equações Algébricas os professores apresentaram as aulas expositivas, formação de grupos, vídeo aulas, e ainda múltiplas estratégias. Quanto a essa pergunta os professores nos mostram que utilizam as mais básicas estratégias e recaem as aulas tradicionais de ensinar, e poucos dos entrevistados detalharam as estratégias que eles costumam utilizar em sala de aula para ensinar o conteúdo de equações.

Os professores disseram conhecer materiais que os auxiliassem no ensino de equações algébricas dentre eles estão: os de completar o quadrado usado em equações do segundo grau, jogos, aplicativos de celular e softwares, foram os citados por eles. Apenas um professor disse não conhecer nenhum material que subsidiasse o ensino de equações.

A maneira tradicional de ensinar com o uso da aula expositiva é a mais usada pelos professores hoje em dia. Mas é necessário que se tenha aulas inovadoras, ou seja, aulas em que os alunos possam ter o contato com jogos, software, em laboratórios e com uso de materiais concretos dentre outros. Nesse sentido, perguntamos aos professores como os alunos reagiam a essas aulas e as respostas nos levam ao mesmo sentido, de que os alunos ficam empolgados, interessados e entusiasmados em grande maioria. As respostas dos professores nos levam a reflexão de para que essas aulas sejam de fato, satisfatórias são necessários o empenho e o compromisso por parte dos alunos, além de se ter disposição de tais recursos.

> Freqüentemente os alunos do Ensino Fundamental têm dificuldade em resolver problemas algébricos e a maioria desses alunos chega ao Ensino Médio com grandes deficiências em álgebra. A grande dificuldade desses alunos é montar algebricamente a equação que traduz para a linguagem algébrica o que o problema pede com palavras. (AZEVEDO. 2002, p.33)

O conteúdo de Equações Algébricas requer certos conhecimentos básicos e preliminares, nesse sentido quando perguntamos aos professores acerca das dificuldades dos alunos em aprender o conteúdo, eles nos responderam que a grande maioria dos alunos possui um conhecimento superficial, pois não conseguiram guardar o que lhes foi ensinado nos anos anteriores, ou seja, a falta de base, em conhecimento e domínios que seriam pré-requisitos para o estudo das equações, não se fazem presentes quando exigidos.

A maioria dos professores, apontaram como causa, a falta de interesse e motivação dos alunos em aprender o conteúdo. Logo ficam sem base para ir adiante com a aprendizagem do conteúdo. Além disso, professores incluíram ainda as quatro operações que são imprescindíveis para o ensino de todos os conteúdos matemáticos. Quanto a isso, Azevedo (2002, p.34) em sua tese diz:

> [...] chamamos a atenção para a matemática que o aluno, depois de quase 12 anos de estudos, deveria trazer para o trabalho com equações algébricas. Fazendo uma análise retrospectiva do que o aluno viu, em matemática, durante esse tempo, pudemos perceber que números e operações, álgebra do Ensino Fundamental e Médio, geometria e trigonometria são pré-requisitos para o estudo das equações algébricas. Na realidade o estudo desse tópico é quase sempre mal feito, pois, ora não há tempo para ele, ora não há forma de trabalho que seja bem sucedida.

Nessa linha, perguntamos aos professores o que eles têm feito para sanar as dúvidas de seus alunos quanto ao ensino de equações algébricas. Eles disseram que propõem grupos de estudos, aulas de reforço, aplicação de revisão dos conteúdos preliminares ao estudo do conteúdo, explicam novamente o conteúdo e usam estratégias diferentes para melhorar a compreensão dos alunos, usando algum material auxiliar.

> Um dos desafios do professor é buscar estratégias que facilitem a ação pedagógica em sala de aula, propiciando ao aluno situação que envolva conteúdos essenciais à aprendizagem e garantam a autonomia do pensamento. Para que essa autonomia se desenvolva, é necessário propor atividades que possibilitem ao aluno interpretar situações-problema do cotidiano e desenvolver habilidades de concentração e de abstração. (FERNANDES, 2012, p.36)

Dentre as técnicas ou estratégias mais utilizadas para sanar as dúvidas e dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo, os professores usam as aulas de revisão, onde eles têm a oportunidade de explicar o conteúdo novamente de diferentes formas, e usando recursos distintos até que o aluno aprenda, como afirma o professor B “Explicando, explicando novamente, de várias formas e utilizando recursos distintos”.

Os professores com essas atitudes se mostram preocupados e adotam estratégias para que sejam sanadas as dúvidas e dificuldades dos alunos. Mas, segundo Lorenzato,

> Mais do que repetição de exercícios e memorização de fórmulas, o ensino de matemática deve ser direcionado ao aluno de forma que ele possa construir seu próprio conhecimento no qual o aluno possa compreender o conteúdo que lhe está sendo proposto e apresentado, pois se a compreensão não ocorre o aluno passa a ter um pensamento de que a matemática é uma matéria difícil que ele não consegue aprender. (LORENZATO, 2006, p. 12)

Assim as novas abordagens e estratégias de ensino, são importantes no processo de aprendizagem do aluno, pois na busca da compreensão dos conteúdos o aluno pode construir seu próprio conhecimento com a ajuda do professor.

Perguntamos aos professores se eles se sentiam desafiados em ensinar equações algébricas, e se eles possuíam alguma dificuldade em ensiná-las. A maioria nos respondeu que não se sentiam desafiados, mas que possuem dificuldades logo vistas, pois além da falta de materiais didáticos suficientes, tem a falta de conhecimento dos educandos em conteúdos que são pré-requisitos de cada ano. Responderam que a matemática em geral é desafiadora, e destacaram o tempo para planejamento que é considerado insuficiente.

O professor A que atua na rede de ensino há 21 anos, diz ter grande dificuldade em explicar o conteúdo, e que depende muito da turma, pois o conteúdo vem no final do livro e na maioria das vezes não dá tempo de ensinar este conteúdo aos alunos. E mais uma vez citam o domínio das quatro operações, e afirma que “a álgebra consiste em misturar letras e números e eles se confundem bastante no uso delas”.

> As equações algébricas ou polinomiais, que aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio, são praticamente ignoradas nas escolas públicas. Os professores alegam que o tempo destinado para trabalhar os conteúdos do Ensino Médio é muito curto e que o programa é muito extenso; que os alunos entram para o Ensino Médio com uma grande defasagem no conteúdo do Ensino Fundamental, que dificilmente chegam até esse tópico com os alunos e, quando chegam, não percebem que ele enfeixa toda a matemática do Ensino Médio. Assim sendo, as equações algébricas são vistas como mais um conteúdo que tanto faz ensinar ou não. (AZEVEDO. 2002, p. 3).

Com essa afirmação podemos falar que o estudo desses conteúdos é de suma importância já que estão presente em várias provas de vestibulares, ENEM, e os alunos que não tiveram a oportunidade de estudar esse conteúdo na escola, serão prejudicados ao se depararem com situações e problemas que as envolva para serem resolvidos.

Vamos observar no quadro as respostas dos professores, a respeito dos métodos utilizados para resolver uma Equação Algébrica.

Quando 04 - Métodos de resolução usados pelos professores

Professor	Respostas
A	"Deu nome as letras usando alimentos que os alunos consomem como arroz, feijão, carne. Usava essa denominação para trabalhar com a soma, multiplicação. Substituição e Briot-Rufini"
B	Não respondeu
C	Não respondeu
D	"Equivalência de membros Aplicação de fórmulas"

Podemos observar no quadro, que os professores tiveram uma certa dificuldade de detalhar e citar métodos de resolução que são ensinados por eles aos alunos. Os que responderam, disseram usar o de equivalência de membros, e aplicação de fórmulas. A respeito disso, Fiorentini; Miorim (1992, p.40) dizem:

> [...] a maioria dos professores trabalha a álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas mostram que o seu ensino não tem recebido devida atenção.

O professor A, disse nomear as letras por nomes de comidas para interagir com os alunos. E garante em sua escrita um método eficaz para utilizar e se trabalhar com a soma de termos semelhantes e multiplicação de polinômios. Nesse sentido o professor se revela criativo quanto a denominação das letras por algo que os alunos conhecem.

> Para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a alegria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer concepções, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar. (LORENZATO, 2009, p.25).

Com isso podemos falar que um dos pontos chave para que o ensino aprendizagem seja eficaz é o fato de os alunos se sentirem entusiasmado em estudar disciplinas de Matemática.

Na resposta do professor A, que diz que as vezes nem dá para se aplicar o conteúdo, com base no PNLD deve ser pelo fato do exagero e o excesso de repetições, casos particulares de exercícios e também conteúdos repetitivos dos livros adotados pelas escolas.

Quadro 05 - Você considera o livro didático suficiente?	
Professor A	"O livro nunca é suficiente, sempre recorremos a outros materiais".
Professor B	"O livro didático não é suficiente, é necessários outros recursos, nesse caso quase sempre confeccionados junto com os alunos".
Professor C	"O livro é apenas ponto de apoio".
Professor D	"Não é suficiente, recorro a outros livros, apostilas, material da internet, etc".

Perguntamos ainda aos professores se eles consideravam o livro didático suficiente para ensinar equações algébricas. Responderam-nos que o livro didático oferecido pela escola nunca é suficiente, e que eles sempre recorrem a outros meios como apostilas, outros livros, materiais da internet, materiais confeccionados com os alunos. Nesse sentido o livro didático é um ponto de apoio, ou seja, é um recurso norteador.

Os PCNs (1998) recomendam que o professor utilize, além do livro didático, outras fontes de informação (revistas, jornais, computadores, filmes, por exemplo), para ampliar o seu conhecimento e enriquecer o conteúdo das aulas.

Ainda de acordo com os PCNs o livro didático é um importante suporte de conhecimento "servindo como orientação para o trabalho do professor, sendo muitas vezes, o único suporte de pesquisa para diversos educadores".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das Equações Algébricas é de grande importância, visto que é um assunto presente em várias situações do cotidiano. Como futura professora, penso que devemos estar preparados e atentos com o ensino e aprendizagem deste conteúdo. Entretanto, as vezes isso passa meio despercebido, pelo fato de não nos atentarmos que estamos usando-o frequentemente em nosso dia a dia, para resolvermos situações problemas comuns.

Estudar a teoria das equações foi desafiador, pois nos deparamos com situações que necessitávamos de reaver alguns conceitos para que pudéssemos seguir com a abordagem desse tema. Isso não significa que o estudo realizado anteriormente foi superficial, ao contrário, os estudos da graduação ajudaram bastante, no sentido de que adquirimos uma facilidade de entender os conceitos dos conteúdos, pois já possuímos uma certa familiaridade em assuntos e raciocínios matemáticos que usamos para demonstrar propriedades, teoremas vistos, e assim, resolver exercícios.

Consideramos que trabalhar com as abordagens dadas as equações foi satisfatório, tendo em vista que conseguimos alcançar os nossos objetivos que era o de investigar como elas estariam sendo realizadas nas escolas pesquisadas. Quando nos referimos a palavra abordagem no ensino de matemática estamos falando em diferentes maneiras que utilizamos para entender e ensinar determinados conteúdos.

Nesse sentido, através da análise da pesquisa realizada a partir das respostas do questionário com professores do Ensino Médio, ficamos preocupados com o tratamento e importância que é dado para o conteúdo de Equações Algébricas, pois eles veem nos últimos capítulos dos livros. Relatos de professores nos revelam que em muitas das vezes, esses nem chegam a ser ensinados no Ensino Médio, ficando a mercê apenas dos conteúdos superficiais que os alunos estudaram no Ensino Fundamental. Embora sabemos que no Ensino Médio seriam aprimorados os conhecimentos de tais conteúdos, como prevê os documentos estudados como os PCNs, a LDB e o PNLD.

Com o intuito de provocar nos alunos o interesse por esse estudo, podemos destacar alguns recursos didáticos que foram mencionados e comentados pelos professores pesquisados pois o uso de jogos e informática no ensino da Matemática tem-se mostrado tendências eficazes para o trabalho com adolescentes, com o objetivo de fazer com que eles gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno.

Compreendemos com esse trabalho, que Jogos e/ou informática podem ser utilizados para introduzir, reforçar o aprendizado do conteúdo de equações algébricas ou preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados. Também o uso de modelagem, aliado a jogos ou informática, pode produzir seu real aprendizado por meio de aulas nas quais os alunos participam ativamente do processo de ensino-aprendizagem.

Mas na realidade das escolas pesquisadas isso não acontece, por diversos fatores que foram mencionados pelos professores, seja eles de espaço, ou da própria insuficiência de materiais dispostos pelas escolas. O fato é que o estudo das equações nestas escolas está sendo deixado de lado na maioria das vezes, não recebendo o tratamento ou a atenção devida, para que os alunos sejam capacitados a fazerem exames nacionais, vestibulares e até mesmo se sobressair em algumas situações que requerem tais conceitos.

Outro fator que deixa a desejar é a formação Continuada que não está sendo oferecida de forma presencial e sim on-line é um dos fatores que está desmotivando os professores, pois eles acreditam que é nesse momento que podem atualizar e conhecer novas estratégias de ensino e com isso variar as abordagens para com o ensino.

Neste sentido, após a análise dos dados um dos professores pesquisados disse não conhecer nenhum jogo, ou material que pudesse auxiliá-lo no ensino de equações algébricas. Então sugerimos aqui alguns jogos e materiais pesquisados para se trabalhar o conteúdo, como o jogo Vai e Vem das Equações, o Algeplan, o Software Equação do 2º grau V 1.5, pois consideramos de fácil compreensão e utilização e podem ser encontrados no site da Universidade Federal de Minas Gerais.

Entretanto, para que os professores possam usar de certas abordagens é necessário um espaço adequado como um laboratório próprio de matemática, que com base na análise feita a partir do questionário, professores se revelaram insatisfeitos com a precariedade de materiais oferecidos pelas escolas e que consideravam insuficientes.

Mas, não só com jogos e recursos didáticos a aprendizagem pode ser é considerada eficaz e prazerosa. Para que ela seja proveitosa, também se faz necessário, o uso do livro didático que é um grande parceiro para o professor, já que propõe uma sequência didática.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Elizabeth, Quirino de. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2002.

BEHRENS, M.A. Projetos de Aprendizagem Colaborativa num Paradigma Emergente. In: MORA, J. M.; MASETTO, M.T.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** Campinas, SP: Papirus, 2000. (Coleção Papirus Educação). Cap. 2 p.67-132.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio** (ENEM) fundamentação teórico metodológica. INEP, 1999.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais– 1998. Secretaria de Educação fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Matriz de Referência para o ENEM**. MEC/SEM, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Matriz de referência do Enem.** Disponível em: <https://maisenem.zendesk.com/hc/pt-br/articles/202525989-Matriz-de-refer%C3%AAncia-> Acesso em: 12 jun. 2016.

BRASIL. **Programa Nacional do Livro Didático**. PNLEM/2005: Matemática. Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 2012.

DANTE, LUIZ ROBERTO. **Matemática:** Contexto & Aplicações. Ensino Médio. 2 ed. SP: Ática, 2013. 3v, p. 170-207.

FIETZ, H. M.; MARTINS S.L.S. **Jogos e Materiais Manipulativos no Ensino da Matemática para o Ensino Fundamental.** In, EREMATSUL – Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul XVI Edição, 2010, Porto Alegre, RS. Disponívelem<http:www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/jogosemateriaismanipulativos.pdf>. Acesso em 01 jun. 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores associados, 2006. – (Coleção Formação de professores).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 6**. Complexos, polinômios, equações. 7 ed. SP. Atual. 2005, p. 54-141.

INEP-INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA LEGISLAÇÃO DOCUMENTOS. **Provas do ENEM**. Disponível em:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/itens/mt/10300.pdf› Acesso em: 15 jun. 2016.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática.** Campinas, SP: Autores associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, A M. **Álgebra ou Geometria? Para onde pende o pêndulo?** Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação Unicamp. V. 3. Pro-Posições. Campinas: Cortez, 1992 p. 40.

PONTES, Ronaldo da Silva. **Equações Polinomiais:** Soluções algébricas, geométricas e com auxílio de derivadas. João Pessoa-PB. 2013. Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br/bitstream/tede/7470/5/arquivototal.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2016

SCRIVIANO, C. N. et al. **Ciências Transformações e Cotidiano:** ciências da natureza e matemática ensino médio: Educação de Jovens e Adultos. 1. ed. São Paulo: Global, 2013. (Coleção viver, aprender)

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. Ensino Médio. 2 ed. SP: FTD, 2013, p. 258-285.

TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na Formação Inicial de Professores**. 2004, 175f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro. Disponível em: <http://www.ccet.ufrn.br/matematica/lemufrn/Artigos/O%20laboratorio%20de%20educação%matematica%20na%20formação%20inicial%20de%20professores.pdf> Acesso em: 01 jun. 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS. **Jogo: vai e vem das equações**. PIBID-Matemática. Alfenas-MG. Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica>. Acesso em: 16 jun. 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normatização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011, 52 p.

APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

UFT – Universidade Federal do Tocantins

Você está convidado (a) a responder este questionário anônimo que faz parte da coleta de dados da pesquisa: EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: COMO VEM SENDO ABORDADA NO ENSINO MÉDIO, da aluna ANA CRISTINA CELESTINO DA SILVA, sob orientação do Prof. Msc. RENATA ALVES DA SILVA

Perguntas Abertas

1) Qual é a sua de área formação?
2) Quanto tempo é professor na Educação Básica?
3) O que acha dos cursos de formação continuada que são oferecidos pelos governos estadual e federal?
4) Qual é a sua visão sobre o ensino da disciplina de Matemática? Quais são os desafios e perspectivas futuras?

Recursos Didáticos

1) Quais recursos didáticos oferecidos pela escola para o ensino de matemática você utiliza para ensinar?

a) Quais recursos didáticos são utilizados na aula de matemática?
b) A escola possui materiais didáticos suficientes para o ensino de matemática? O que acha desses materiais que escola oferece?
c) Na sua opinião, quais recursos didáticos são necessários para se ter um bom ensino de matemática?
d) Você acha suficiente? E quanto a eficiência desses materiais?

Sobre o ensino de Equações algébricas (Polinomiais)

1) Como o conteúdo é abordado?

2) Que estratégia de ensino costuma utilizar em suas aulas para ensinar equações algébricas?

3) Você tem conhecimento de algum material que possa subsidiar o ensino de equações algébricas? Já usou algum deles? Se não, por quê?

4) Como os alunos reagem às aulas inovadoras? Exemplos: jogos, em laboratórios, uso de software, de materiais concretos e outros. O estudo com esses recursos didáticos se torna satisfatório?

5) Quais são as dificuldades dos alunos em aprender o conteúdo?

Mencione frases rotineiras ou frequentes.

6) O que você tem feito para sanar as dúvidas dos alunos quanto ao ensino de equações algébricas?

7) Você se sente desafiado em ensinar equações algébricas? Qual sua dificuldade como professor?

8) Quais métodos de resolução você utiliza para resolver equações algébricas?

Considera o uso do livro didático oferecido pela escola suficiente para ensinar Equações Algébricas ou recorre a outros materiais?

APÊNDICE B: RESPOSTAS DOS PROFESSORES DADAS AO QESTIONÁRIO

Professor A

Perguntas abertas

1) Ciências com habilitação em matemática.
2) 21 anos
3) Não são mais oferecidos. Os que são oferecidos são on line, estudar pelo computador desmotiva.
4) Depois que o aluno é alfabetizado ele tem que saber matemática. O desafio é fazer com que os alunos queira aprender matemática, tentar conciliar necessidades com o aprendizado. Pois para você organizar o seu dia precisamos de matemática. Fazer com que deixa de ser surreal, para não ouvirmos "Pra quê estudar matemática"

Recursos Didáticos

1) Quadro, apagador, pincel, livro didático, o laboratório de informática.
   a) Os citados acima, e materiais manipuláveis (concreto) confeccionados com o auxílio do PIBID.
   b) Não, precisamos de um lab. De matemática e espaço físico.
   c) Se tivermos alunos interessados e compromissados com o ensino e a aprendizagem, os recursos seriam uma ferramenta para melhor o que já estaria bom.
   d) Não é suficiente, temos 20 computadores para uma turma de 40 alunos. Precisamos de um auxiliar para ajudar a usar esses recursos. O tempo também é insuficiente.

Sobre o ensino de Equações algébricas (Polinomiais)

1) Utilizo a abordagem que o livro didático oferece,
2) Uma vídeo aula com múltiplas estratégias para abordar as equações polinomiais de forma que o aluno compreenda.
3) Em equações do 2º grau, uso o de completar o quadrado,
4) Alguns materiais, foram confeccionados jogos de potências. De uma turma de 40 consegui envolver 30, pois eles tem preguiça de fazer contas grandes.
5) "Para que estudar matemática" "Vou ser caminhoneiro não preciso de matemática".

Além da falta de interesse, as quatro operações, se ele não souber multiplicar, por exemplo ele não saberia fazer a multiplicação de equação em uma conta simples $2x.2x = 4x^2$.

6) Revisão de conteúdos, quando possível, fazemos aulas diferenciadas usando recurso para ajudar o aluno a compreender. No mais, reaplicamos o conteúdo, provas;
7) Como o conteúdo vem no final do livro, dependendo da turma nem chegamos a aplicar. Quando o aluno não tem domínio das 4 operações fica difícil, outra coisa a álgebra consiste em misturar letras e números e eles confundem.
8) No ensino de equação para interagir com os alunos denominava as letras por comidas como feijão, arroz, carne e outros elementos diferentes para se trabalhar com a soma, termos semelhantes, multiplicação.

   Uso o método da substituição o da soma, o de Briot-Ruffini, as vezes nem passo, é no final do livro e do ano as vezes, quase sempre, dependendo do andamento da turma não dá de passar o conteúdo.
9) O livro nunca é suficiente, sempre recorremos a outros materiais.

Professor B

Perguntas abertas

1) Ciências Habilitação em matemática
2) 15 anos
3) São insuficientes, e muitas vezes não atendem as necessidades específica de cada área de atuação do professor.
4) A matemática está presente no cotidiano. No entanto, temos esbarrado no entrove do descaso, e descompromisso generalizado. Pais e alunos que não se envolvem com responsabilidade. Além da negligencia dos governantes. Tentamos despertar nos alunos um senso crítico...

Recursos Didáticos

1) Multimídia (Data show), alguns vídeos, livros paradidáticos entre outros.

   a)

– Data show (vídeo, construção gráfica)

- Livro aluno, livro de pesquisa/ apoio
- Internet
- Material confeccionado junto com aluno

b) Assim como as demais escolas estaduais, a escola tem deficiência em material didático, muitos já sucateados.

c) Recurso didático são importantes, todavia uma educação de qualidade não depende apenas dessas ferramentas.

d) Ver item b

Sobre as Equações algébricas (Polinomiais)

1) Não respondeu
2) A estratégia é a mais básica, utilizando a “balança”, e tentar/demonstrar a necessidade de equilibrar e como fazer isso.
3) Sim, tem jogos e outras ferramentas aplicativos p/ ser utilizado no celular.
4) O aluno gostam de aulas inovadoras. No entanto, como já mencionado p/ que se torne satisfatório, falta compromisso e empenho, Além de se ter á disposição tais recursos.
5) Os alunos tem um aprendizado muito superficial. Não conseguem guardar o qe foi ensinado na séries anteriores. Têm sempre falta de pré requisito p/ determinada série.
6) Explicando, explicando novamente, de várias formas e utilizando recursos distintos.
7) A matemática em geral é desafiadora.
   Ver item 1-b- recursos didáticos
   Além da insuficiência de tempo para planejamento.
8) Não respondeu
9) O livro didático não é suficiente, é necessários outros recursos, nesse caso quase sempre confeccionados junto com os alunos.

Professor C

Perguntas abertas

1) Licenciatura em Física e Licenciatura em matemática
2) Atuo na Educação Básica há 10 anos.
3) Não oferece a formação.
4) O ensino do estudo da matemática é algo que fica a deseja dede mas estruturação até a sua aplicação, os desafios são enormes, com o melhorar as condições de trabalho a seus profissionais, as perspectivas futuras não são animadoras.

Recursos Didáticos

1) – Aulas expositivas, demonstrativas e práticas sempre que possível.

   - Discussão com alunos através de formação de questionamentos, argumentação, construção, comunicação.

   a) – Recursos pedagógicos como imagens, sólidos geométricos.

   b) Não, apenas alguns, em quantidade insuficiente.

   c) Uma sala adequada, com laboratório específico nessa área.

   d) Não é suficiente.

Sobre o ensino de Equações algébricas (Polinomiais)

1) A abordagem sempre começa com exemplo pratico de aplicações que explique a formalidade dos polinômios e suas aplicações.
2) Não respondeu
3) Software
4) De forma satisfatória
5) Falta de conhecimento de base para o domínio de tal conteúdo.
6) Aplicação de revisão de bases matemáticas.
7) Não tenho
8) Não respondeu
9) O livro é apenas ponto de apoio.

Professor D

Perguntas abertas

1) Ciências com habilitação plena em Matemática.
2) 18 anos
3) Atualmente não está sendo oferecido nenhum. Quando tinha não era satisfatória.
4) É um processo que se torna difícil, devido à falta de base de alguns alunos.

   As perspectivas futuras não são boas, pois só haverá uma melhoria se for restruturada a educação básica.

Recursos Didáticos

1) - Livro didático

   - Livros paradidáticos

   - Kit multimídias

a) - Livro didáticos

- Lista de exercícios

b) Não. Os materiais não são suficientes.

c) - Livro didáticos
- Software para aplicação dos conteúdos trabalhados´
- Jogos matemáticos, etc.

d) - Não é suficiente.

Sobre o ensino de Equações algébricas (Polinomiais)

1) Começo sempre com a situação problemas onde esses conteúdos são aplicados.
2) - Aulas esportivas
- Formação de grupos
- Abordagem de situação problemas
3) Não.
4) Eles reagem com entusiasmo, mas esses tipos de aulas não dá para ser trabalhados em todas as aulas
5) - Falta de base em conteúdos básicos
- Alunos desmotivados e sem compromissos
6) - Propondo criação de grupos de estudos.
- Aula de reforço
7) Não. Além da falta de materiais didáticos e formação voltada para o ensino de matemática, tem a falta de conhecimento dos educandos em conteúdos pré requisitos de cada série.
8) - Equivalência de membros.
- Aplicação de fórmulas.
9) - Não é suficiente, recorro a outros livros, apostilas, material da internet, etc.