



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CAMPUS DE ARAGUAÍNA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**LETTICIA CORTEZ NEGREIROS**

**UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E A  
TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS COM ALGUMAS APLICAÇÕES**

ARAGUAÍNA

2020

**LETTICIA CORTEZ NEGREIROS**

**UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E A  
TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS COM ALGUMAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA

2020

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

N385e Negreiros, Letticia.

Um estudo introdutório sobre projeção estereográfica e a transformação de Möbius com algumas aplicações.. / Letticia Negreiros. – Araguaína, TO, 2020.

79 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2020.

Orientador: Alvaro Julio Yucra Hanco

1. Números complexos. 2. Projeção estereográfica. 3. Transformação de Möbius. 4. Aplicações. I. Título

**CDD 510**

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

**LETTICIA CORTEZ NEGREIROS**

**UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E A  
TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS COM ALGUMAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 26 / 11 / 2020.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



---

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior



---

Prof. Me. André Luiz Ortiz da Silva

Dedico aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Sobretudo, agradeço a Deus, por me guiar e me dar forças durante essa trajetória.

Aos meus pais, Marineis e Manoel Messias, por serem meu alicerce, por terem me apoiado e me incentivado com amor incondicional.

A minha irmã Bheatriz, que sempre torceu e acreditou em mim, até quando nem eu acreditei, que nunca mediu esforços para me ajudar quando precisei, e a minha irmã Loislene, pelos seus conselhos e cuidados.

Ao meu esposo Ivonei, por todo amor, apoio, e companheirismo. A minha tia avó Antônia, por ter aberto a porta da sua casa com tanto carinho.

Aos meus amigos que sempre estiveram presentes durante essa caminhada, Eliabe, Karollyne, Milene, Carollyne Jully, Camilo, Victor, Geisson, Eliaquim e todos os que torceram por mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Álvaro Julio, pelas suas orientações impecáveis, por toda ajuda, paciência e compreensão.

Aos professores do colegiado de matemática, por toda dedicação, e conhecimentos compartilhados, especialmente aos professores, José Carlos e André Luiz, pela participação na banca examinadora.

A todos um muito obrigada! Sem vocês eu não teria chegado até aqui.

Sonhos determinam o que você quer, ação determina o que você conquista.

Aldo Novak

## RESUMO

Essa pesquisa teve o objetivo de estabelecer uma relação entre o plano complexo estendido e a esfera, através de uma técnica muito estudada na antiguidade, a projeção estereográfica. Para isso, faremos uma introdução ao conjunto dos números complexos, destacando os tópicos mais relevantes para compreendermos e definirmos a projeção estereográfica, em seguida, apresentaremos suas principais propriedades e duas aplicações, a primeira relaciona a projeção estereográfica e os ternos pitagóricos de Euclides, a segunda é uma aplicação na fotografia, que mostra como uma imagem pode ser manipulada para ter a aparência de uma esfera. Além disso, este trabalho abordará os estudos desenvolvidos por August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), que originou o que hoje conhecemos por transformações de Möbius. Após definir essas transformações e apresentar seus principais resultados, mostraremos uma aplicação envolvendo as transformações em uma esfera apoiada no plano complexo, e também as transformações de Möbius elementares, translação, inversão e rotação, onde faremos o uso do software GeoGebra para criar animações em 3D.

**Palavras-chave:** Números Complexos. Projeção Estereográfica. Transformações de Möbius.

## ABSTRACT

This research aims to establish a relationship between the extended complex plane and the sphere, through a technique that has been studied in ancient times, the stereographic projection. For this, we will make an introduction to the set of complex numbers, highlighting the most relevant topics to understand and define the stereographic projection, then we will present its main properties and two applications, the first relates the stereographic projection and Euclid's Pythagorean triple, to second is an application in photography, which shows how an image can be manipulated to look like a sphere. In addition, this work will address the studies developed by August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), who originated what we know today by Möbius transformations. After defining these transformations and presenting their main results, we will show an application involving the transformations in a sphere supported on the complex plane, and also the elementary Möbius transformations, translation, inversion, and rotation, where we will use the GeoGebra software to create 3D animations.

**Keywords:** Complex numbers. Stereographic Projection. Möbius transformations.

# Lista de Figuras

2.1	Afixo do Ponto $P$ .	20
2.2	Afixo do Conjugado de $z$ .	21
2.3	Forma Polar.	23
2.4	Conjugado de $z$ .	24
3.1	Projeção Estereográfica.	32
3.2	Projeção de circunferências que passam por $N$ .	36
3.3	Projeção de circunferências que não passam por $N$ , e são paralelas ao plano $\mathbb{C}$ .	37
3.4	Circunferência inscrita na esfera do Lema 3.4.	37
3.5	$\overline{PS} \cdot \overline{SQ} = \overline{RS}^2$ .	38
3.6	Cone oblíquo.	39
3.7	Cone oblíquo.	39
3.8	$\triangle GIF \sim \triangle EIH$ .	40
3.9	Conservação dos ângulos.	41
4.1	Triângulos pitagóricos.	45
4.2	Projeção estereográfica de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ .	45
4.3	Exemplo numérico da projeção estereográfica de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ .	49
4.4	Vista panorâmica de Araguaína.	51
4.5	Fotografia estereográfica.	52
6.1		66
6.2	Projeção no plano complexo estendido.	67
6.3	Projeção na superfície esférica.	68
6.4	$T_u(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w)$ .	70
6.5	Passos 1, 2 e 3.	76
6.6	Passo 4.	76
6.7	Passo 5.	77
6.8	Passos 6 e 7.	77
6.9	Imagem da reta que passa pelos pontos $w_1$ e $w_2$ .	78

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Uma Introdução aos Números Complexos</b>	<b>14</b>
2.1	Corpo dos Números Complexos . . . . .	14
2.1.1	Propriedades da adição . . . . .	15
2.1.2	Propriedades da multiplicação . . . . .	17
2.2	Representação Geométrica, Conjugado Complexo e Módulo . . . . .	19
2.2.1	Complexo conjugado . . . . .	20
2.2.2	Módulo de um número complexo . . . . .	21
2.3	Representação Polar . . . . .	22
2.4	Operações na Forma Polar . . . . .	25
2.4.1	Fórmula de De Moivre . . . . .	27
2.5	Raízes $n$ -ésimas . . . . .	28
<b>3</b>	<b>O Plano Complexo Estendido: Projeção Estereográfica</b>	<b>31</b>
3.1	Projeção Estereográfica . . . . .	31
3.1.1	A Projeção Estereográfica em coordenadas . . . . .	32
3.1.2	Algumas propriedades da projeção estereográfica . . . . .	35
3.2	Plano Complexo Estendido . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Algumas Aplicações da Projeção Estereográfica</b>	<b>44</b>
4.1	Os Ternos Pitagóricos de Euclides . . . . .	44
4.2	Projeção Estereográfica na Fotografia . . . . .	50
4.2.1	Araguaína - Breve Histórico . . . . .	50
4.2.2	Fotografia Estereográfica . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Transformações de Möbius</b>	<b>53</b>
5.1	Pontos Fixos . . . . .	59
5.2	Razão Cruzada . . . . .	61

<b>6</b>	<b>Aplicação: Transformações de Möbius e Transformações na Esfera</b>	<b>65</b>
6.1	Movimentos da esfera . . . . .	68
6.2	Uma Análise da Transformação de Möbius e a Esfera . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>79</b>
	<b>Referências</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho, fizemos um estudo introdutório da Projeção Estereográfica e as Transformações de Möbius, explorando suas principais propriedades e algumas aplicações.

A técnica denominada *projeção estereográfica na Esfera de Riemann* foi estabelecida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866). Em seus estudos sobre a superfície esférica, Riemann mostra que é possível projetar estereograficamente uma esfera sobre um plano, essa projeção é definida na esfera inteira, menos um ponto, chamado ponto de projeção.

Essa técnica de projetar estereograficamente uma esfera sobre um plano já havia sido apresentada na antiguidade por Ptolomeu (100 - 168), que descreve a projeção estereográfica em sua obra denominada *Planisphaerium*, que pode ser traduzida como “plano celestial” ou “mapa estelar”.

O termo projeção estereográfica foi introduzido em 1831 pelo matemático alemão Ludwig Immanuel Magnus, que nasceu em 15 de março de 1790 em Berlim e morreu no dia 25 de setembro de 1861, a quem a descoberta dessa projeção é por vezes atribuída. O reconhecimento de Magnus como matemático foi estabelecido em 1834.

A palavra “estereográfica” origina do grego e é a união das palavras: sólido e desenho, ou seja, é a geometria que desenha sólidos. A palavra “geometria” origina do grego e significa, “geo” terra, e “metria” significa “medir”.

A *projeção estereográfica* viabilizou o desenvolvimento de áreas como a análise complexa, a cartografia, a astronomia, a topologia, a fotografia dentre outras áreas. Essa projeção notável é uma relação entre o plano complexo e a esfera.

O segundo tema abordado neste trabalho deve-se efetivamente a August Ferdinand Möbius, matemático e astrónomo alemão que nasceu em 17 de novembro de 1790, e morreu aos 77 anos em Leipzig. Möbius tinha um interesse natural pela Matemática, apesar de ter iniciado o curso de direito na universidade de Leipzig, em 1809. Porém, logo mudou o rumo de seus estudos, concentrando-se no que realmente gostava, Matemática, Física e Astronomia.

---

Em 1815, Möbius defende a sua tese sobre equações trigonométricas. O seu trabalho mais conhecido foi a criação da fita de Möbius, um objeto obtido pela colagem das duas extremidades de uma fita, após dar meia volta numa delas. Ele originou também o que hoje conhecemos por *Transformações de Möbius* e estão entre as transformações mais importantes da Geometria.

As transformações exercem um papel muito importante em várias áreas da Matemática, e na ciência de modo geral. Essa importância consiste no fato delas tornarem possível converter problemas aparentemente complicados em problemas análogos, porém, com soluções mais simples.

Como o assunto dessa monografia está inserido no ambiente dos números complexos, o Capítulo 2, propõe uma introdução desse conjunto, apresentando definições, exemplos e algumas propriedades.

No Capítulo 3, definimos o plano complexo estendido através do estudo da projeção estereográfica, da qual, apresentamos algumas de suas principais propriedades e suas respectivas demonstrações, nas quais, utilizamos o software GeoGebra, para auxiliar a visualização do leitor.

No Capítulo 4, apresentamos duas aplicações da projeção estereográfica, na primeira mostramos uma relação entre os ternos pitagóricos de Euclides e a projeção estereográfica, e na segunda mostramos como produzir uma fotografia estereográfica a partir de imagens panorâmicas, para essa aplicação, utilizamos o software Adobe Photoshop CS6.

No Capítulo 5, definimos as transformações de Möbius seguida de seus principais resultados e apresentamos os conceitos de pontos fixos e razão cruzada.

Por fim, no Capítulo 6, apresentamos uma aplicação envolvendo as transformações de Möbius e as transformações em uma Esfera apoiada no plano complexo. Para uma melhor visualização dos passos que foram seguidos, utilizamos o software GeoGebra versão 5.0.

# Capítulo 2

## Uma Introdução aos Números Complexos

O surgimento dos números complexos está ligado às equações polinomiais cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos, por um longo tempo, os matemáticos consideraram essas equações sem solução, até que perceberam a insuficiência do conjunto dos números reais, originando assim, as primeiras ideias para a criação dos números complexos. Neste capítulo, apresentaremos primeiramente o corpo dos números complexos, a representação geométrica seguida do conjugado e módulo de um número complexo, sua representação e operações na forma polar, e por fim, falaremos sobre como podemos extrair as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo. A elaboração deste capítulo está baseada nas referências [1, 4, 5].

### 2.1 Corpo dos Números Complexos

**Definição 2.1.** Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por  $\mathbb{C}$ , o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações de adição e a multiplicação.

É usual representar-se cada elemento  $(a, b) \in \mathbb{C}$  com o símbolo  $z$ , portanto:

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (a, b) \text{ sendo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ao introduzir os números complexos, devemos definir as operações de adição e multiplicação de maneira que permaneçam válidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva que essas operações possuem quando referidas aos números reais.

**Definição 2.2 (Adição).** Se  $z = (a, b)$  e  $w = (c, d) \in \mathbb{C}$ , então

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

**Definição 2.3 (Multiplicação).** Se  $z = (a, b)$  e  $w = (c, d) \in \mathbb{C}$ , então

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + cb).$$

**Observação 2.4.** i) Notemos que considerando o número complexo  $i = (0, 1)$ , obtemos

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = -1$$

dessa forma, o número complexo  $i = (0, 1)$  será chamado de unidade imaginária. Logo, a propriedade básica da unidade imaginária é:

$$i^2 = -1.$$

ii) Os números complexos formam um conjunto numérico mais abrangente que os números reais, dado que é possível solucionar equações do tipo  $x^2 + 1 = 0$ , se usarmos o símbolo  $\sqrt{-1}$  como se fosse um número em particular.

Destacamos que existe um outro tipo de notação para números complexos, na forma

$$z = a + ib,$$

a qual, iremos utilizar neste trabalho.

A partir dessa nova notação, podemos analisar como se dá cada uma das operações citadas para os elementos desse conjunto.

### 2.1.1 Propriedades da adição

Usando a nova notação para números complexos, consideremos  $z = a + ib$  e  $w = c + id$ , ao somarmos teremos:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + ib + id = (a + c) + (b + d)i.$$

O número complexo  $(0 + i0)$  é denotado por  $0$ .

**Proposição 2.5.** As seguintes propriedades são válidas para quaisquer  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ ,  $v = e + if \in \mathbb{C}$ :

- a)  $z + (w + v) = (z + w) + v$  (associatividade).
- b)  $z + w = w + z$  (comutatividade).
- c)  $0 + z = z$  (elemento neutro).
- d)  $z + (-z) = 0$  (elemento oposto).

**Demonstração:** Sejam  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ ,  $v = e + if \in \mathbb{C}$ .

a)

$$\begin{aligned}z + (w + v) &= (a + ib) + [(c + id) + (e + if)] \\&= (a + ib) + [(c + e) + (d + f)i] \\&= [a + (c + e) + ib + (d + f)i] \\&= [(a + c) + e + (ib + id) + if] \\&= [(a + c) + (ib + id)] + (e + if) \\&= [(a + ib) + (c + id)] + (e + if) \\&= (z + w) + v.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}z + w &= (a + ib) + (c + id) \\&= (a + c) + (b + d)i \\&= (c + a) + (d + b)i \\&= (c + id) + (a + ib) \\&= w + z.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}0 + z &= (0 + 0i) + (a + ib) \\&= (0 + a) + (0 + b)i \\&= a + ib \\&= z.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}z + (-z) &= (a + ib) + [-(a + ib)] \\&= (a + ib) + (-a - ib) \\&= (a - a) + (b - b)i \\&= 0 + 0i \\&= 0.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.6.** A seguir, apresentamos a adição de alguns números complexos.

a)  $(2 + 6i) + (10 - 8i) = (2 + 10) + (6 - 8)i = 12 - 2i;$

b)  $(7 + 3i) - (2 + 2i) = (7 - 2) + (3 - 2)i = 5 + i;$

c)  $(2 + 9i) - (6 - 10i) = (2 - 6) + (9 + 10)i = -4 + 19i;$

d)  $2i + (6 + 7i) = (0 + 6) + (2 + 7)i = 6 + 9i.$

### 2.1.2 Propriedades da multiplicação

Agora, para a multiplicação, usando a nova notação dos números complexos, consideremos  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  temos:

$$(a + ib)(c + id) = ac + aid + ibc + bdi^2 = ac - bd + aid + ibc = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O número complexo  $(1 + i0)$  é denotado por 1.

As operações de subtração e divisão em  $\mathbb{C}$  são definidas da seguinte forma: dados  $z, w \in \mathbb{C}$ , temos

$$z - w = z + (-w) \quad e \quad \frac{z}{w} = zw^{-1} \text{ se } w \neq 0.$$

**Proposição 2.7.** As seguintes propriedades são válidas para quaisquer  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ ,  $v = e + if \in \mathbb{C}$ :

- a)  $z(wv) = (zw)v$  (associatividade).
- b)  $zw = wz$  (comutatividade).
- c)  $1z = z$  (elemento neutro).
- d)  $zz^{-1} = 1$  se  $z \neq 0$  (elemento inverso).
- e)  $z(w + v) = zw + zv$  (distributividade em relação à adição).

**Demonstração:** Sejam  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ ,  $v = e + if \in \mathbb{C}$ .

a)

$$\begin{aligned} z(wv) &= (a + ib) \cdot [(c + id) \cdot (e + if)] \\ &= (a + ib) \cdot [(ce - df) + (cf + de)i] \\ &= [a(ce - df) - b(cf + de)] + [a(cf + de) + b(ce - df)]i \\ &= [(ace - adf - bcf - bde)] + [(acf + ade + bce - bdf)]i \\ &= (ac - bd)e - (ad + bc)f + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] \cdot (e + if) \\ &= [(a + ib) \cdot (c + id)] \cdot (e + if) \\ &= (zw)v. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} zw &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ &= (ca - db) + (cb + da)i \\ &= (c + id) \cdot (a + ib) \\ &= wz. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}1z &= (1 + i0) \cdot (a + ib) \\ &= (1 \cdot a - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i \\ &= a + ib \\ &= z.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}zz^{-1} &= (a + ib) \cdot (a + ib)^{-1} \\ &= (a + ib) \cdot \frac{1}{(a + ib)} \\ &= \frac{(a + ib)}{(a + ib)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}z(w + v) &= (a + ib) \cdot [(c + id) + (e + if)] \\&= (a + ib) \cdot [(c + e) + (d + f)i] \\&= [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i \\&= [ac + ae - bd - bf] + [ad + af + bc + be]i \\&= [ac - bd + ae - bf] + [ad + bc + af + be]i \\&= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)]i \\&= (a + ib) \cdot (c + id) + (a + ib) \cdot (e + if) \\&= zw + zv.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.8.** A seguir, apresentamos a multiplicação de alguns números complexos.

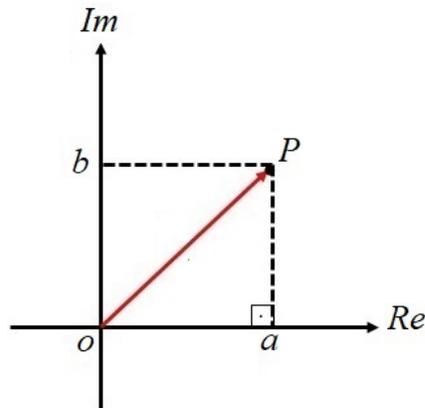
- a)  $(3 - 5i)(4 + 7i) = (12 + 35) + (21 + 20)i = 47 + i;$
- b)  $(3 + 6i) \cdot [(2 - 3i) + (4 - 5i)] = (3 + 6i) \cdot (6 - 8i) = (18 + 48) + (36 - 24)i = 66 + 12i;$
- c)  $10(5 + 5i) = 50 + 50i = 50(1 + i);$
- d)  $(4 + 3i) + [(1 - 2i) \cdot (3 + i)] = 4 + 3i + (5 - 5i) = 9 - 2i.$

Finalizamos esta seção destacando que o conjunto dos número complexos  $\mathbb{C}$  é um corpo, ou seja, é um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas nas Proposições 2.5 e 2.7.

## 2.2 Representação Geométrica, Conjugado Complexo e Módulo

Seja o número complexo  $z = a + ib$ , sua parte real  $a$  é representada por  $Re z$ , e sua parte imaginária  $b$ , por  $Im z$ . Podemos associar esse número complexo a um único ponto  $P$  de coordenadas  $a$  e  $b$  no plano bidimensional, denominado plano de Argand-Gauss, como vemos na Figura 2.1.

Figura 2.1: Afixo do Ponto  $P$ .



Fonte: Arquivo pessoal.

### 2.2.1 Complexo conjugado

**Definição 2.9.** Dado o número complexo  $z = a + ib$ , o conjugado de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = a - ib$ .

**Proposição 2.10.** As seguintes propriedades se verificam para quaisquer  $z = a + ib$ ,  $w = c + id \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $\bar{\bar{z}} = z$ ,  $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$  e  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ .
- (b)  $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$  se  $w \neq 0$ .
- (c)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$  e  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (d)  $z \in \mathbb{R}$  se, e somente se  $\bar{z} = z$ .
- (e)  $z$  é imaginário puro, isto é,  $\operatorname{Re} z = 0$ , se, e somente se  $\bar{z} = -z$ .

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser vista em [4], p. 6. □

**Exemplo 2.11.** Dados os números complexos  $z = 2 + 6i$  e  $w = 3 - 7i$ , vamos calcular  $\bar{z}$ ,  $z + \bar{z}$ ,  $z - \bar{z}$ ,  $\overline{z - w}$ ,  $\overline{zw}$ .

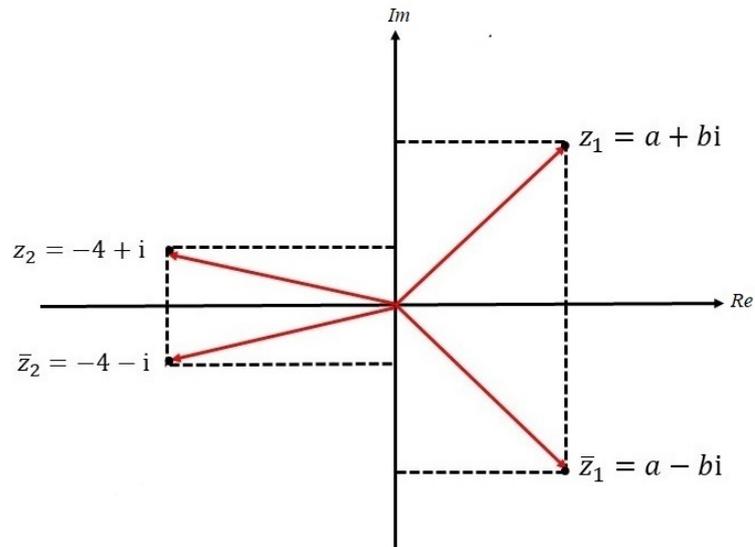
**Resolução:**

- i) O conjugado de  $z = 2 + 6i$  é  $\bar{z} = 2 - 6i$ . O conjugado de  $\bar{z} = 2 - 6i$  será  $\bar{\bar{z}} = 2 + 6i$  ou seja,  $z$ ;
- ii)  $z + \bar{z} = (2 + 6i) + (2 - 6i) = 4 = 2 \operatorname{Re} z$ ;
- iii)  $z - \bar{z} = (2 + 6i) - (2 - 6i) = 2 \cdot 6i = 12i$ ;
- iv)  $\overline{z - w} = \overline{(2 + 6i) - (3 - 7i)} = \overline{-1 + 13i} = -1 - 13i$ ;

v)  $\overline{z}w = (2 - 6i) \cdot (3 + 7i) = (6 + 42) + (14 - 18)i = 48 - 4i.$

A figura abaixo ilustra exemplos de complexos conjugados.

Figura 2.2: Afixo do Conjugado de  $z$ .



Fonte: Arquivo pessoal.

### 2.2.2 Módulo de um número complexo

O módulo ou valor absoluto de um número complexo  $z = a + ib$  é definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Proposição 2.12.** As seguintes propriedades se verificam para quaisquer  $z = a + ib$ ,

$w = c + id \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $Re z \leq |Re z| \leq |z|$  e  $Im z \leq |Im z| \leq |z|.$
- (b)  $|z|^2 = z\bar{z}$ ,  $|\bar{z}| = |z|$  e  $|zw| = |z||w|.$
- (c)  $|z/w| = |z|/|w|$  se  $w \neq 0.$
- (d)  $|z + w| \leq |z| + |w|.$
- (e)  $|z + w| \geq ||z| - |w||.$

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser vista em [4], p. 6. □

**Exemplo 2.13.** Dado  $z = 3 + 2i$ ,  $w = 3 + 4i$ , vamos determinar:

- a)  $|z \cdot w|.$
- b)  $|z/w|.$

**Resolução:**

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

$$|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\begin{aligned} a) |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ &= \sqrt{13} \cdot 5 \\ &= 5\sqrt{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) |z/w| &= |z|/|w| \\ &= \sqrt{13}/5. \end{aligned}$$

**Observação 2.14.** A propriedade (b)  $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow z\bar{z} = |z|^2$ , possibilita calcular o quociente  $z = \frac{z_1}{z_2}$  de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  com  $z_2 \neq 0$ , onde  $z z_2 = z_1$ . Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

De modo geral, sejam  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  com  $c \neq 0$  e  $d \neq 0$ , temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bic - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd - (ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

**Exemplo 2.15.** A seguir, determinamos o quociente dos números complexos  $z_1 = 4 + 6i$  e  $z_2 = 2 - 2i$ , respectivamente.

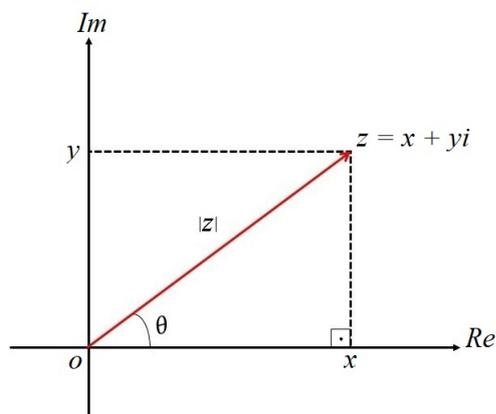
**Resolução:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 6i}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{8 + 8i + 12i + 12i^2}{4 + 4} = \frac{-4 + 20i}{8} = \frac{-1 + 5i}{2}.$$

## 2.3 Representação Polar

Nesta seção estudaremos uma outra maneira de representar os números complexos no plano. Seja  $z = x + yi$ , um número complexo não nulo, chama-se argumento de  $z$  o ângulo  $\theta$  formado entre o eixo  $Ox$  e a semirreta  $Oz$ , sendo  $\theta \in [0, 2\pi)$  como vemos na Figura 2.3.

Figura 2.3: Forma Polar.



Fonte: Arquivo pessoal.

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|}, \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{|z|}. \end{cases} \iff \begin{cases} x = |z| \cos(\theta), \\ y = |z| \text{sen}(\theta). \end{cases}$$

Assim temos:

$$z = x + yi = |z| \cos(\theta) + i|z| \text{sen}(\theta) = |z|[\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)].$$

Considerando  $r = |z|$ , obtemos

$$z = r[\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)], \quad (2.1)$$

chamado **forma polar** ou **forma trigonométrica** do número complexo  $z$ .

Se substituirmos  $\theta$  por  $\theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que a igualdade (2.1) ainda será válida. Logo, o conjunto de todos os argumentos de  $z$  é dado por

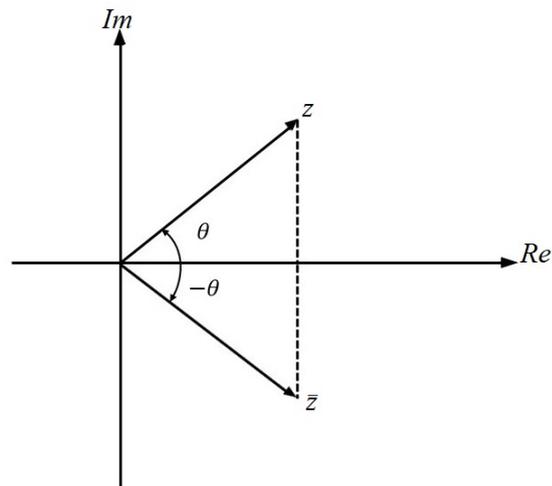
$$\text{arg}(z) = \{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Observação 2.16.** Temos:

i) A forma polar do conjugado de  $z$  é

$$\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \text{sen}(-\theta)] = r[\cos(\theta) - i \text{sen}(\theta)].$$

A Figura 2.4 mostra a representação geométrica.

Figura 2.4: Conjugado de  $z$ .

Fonte: Arquivo pessoal.

ii) Dado que  $|z|^2 = z\bar{z}$ , temos que  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Logo,

$$z^{-1} = r^{-1}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)].$$

**Exemplo 2.17.** Vamos determinar a forma polar dos seguintes números complexos:

(a)  $z = 2 + 2i$ .

(b)  $z = 1 + \sqrt{3}i$ .

**Resolução:**

(a)  $z = 2 + 2i$ .

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,  $\theta = 45^\circ$  ou  $\frac{\pi}{4}$

Portanto,  $z = 2\sqrt{2}(\operatorname{cos}(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ))$ .

(b)  $z = 1 + \sqrt{3}i$ .

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

Logo,  $\theta = 60^\circ$

Portanto,  $z = 2(\cos(60^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ))$ .

## 2.4 Operações na Forma Polar

Vamos utilizar a representação polar de um número complexo para deduzir com mais clareza as operações de multiplicação e divisão de números complexos.

**Teorema 2.18.** *Se  $z = r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$  e  $w = t[\cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi)]$ , então*

(i) *o produto  $z \cdot w$  é dado por*

$$z \cdot w = r \cdot t[\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)].$$

(ii) *o quociente  $\frac{z}{w}$  é dado por*

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t} \cdot [\cos(\theta - \phi) + i \operatorname{sen}(\theta - \phi)].$$

**Demonstração:**

(i) Vamos provar o produto:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \cdot t[\cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi)] \\ &= r \cdot t[\cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) i \operatorname{sen}(\phi) + \cos(\phi) i \operatorname{sen}(\theta) + i^2 \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)] \\ &= r \cdot t[\cos(\theta) \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) + i(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) + \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta))]. \end{aligned}$$

Segundo as fórmulas de adição das relações trigonométricas cosseno e seno: Dados quaisquer,  $\theta$  e  $\phi$ , temos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta - \phi) &= \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\phi) \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

Portanto,  $z \cdot w = r \cdot t[\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)]$ .

(ii) Vamos provar o quociente:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{w} &= \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} \\
 &= \frac{r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \cdot t[\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)]}{t^2[\cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi)] \cdot [\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)]} \\
 &= \frac{r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \cdot t[\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)]}{t^2[\cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\phi)]} \\
 &= \frac{r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \cdot t[\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)]}{t^2} \\
 &= \frac{r}{t} \cdot [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \cdot [\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)].
 \end{aligned}$$

Na terceira igualdade foi usada a relação fundamental da trigonometria:  $\operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ .

De acordo com o item (i), podemos concluir que:

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t} \cdot [\cos(\theta - \phi) + i \operatorname{sen}(\theta - \phi)].$$

□

**Exemplo 2.19.** Sejam os números complexos  $z = 20(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$  e  $w = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$ . Vamos calcular  $z \cdot w$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}
 z \cdot w &= 20 \cdot 2[\cos(30^\circ + 60^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ)] \\
 &= 40(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \\
 &= 40(0 + i) \\
 &= 40i.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.20.** Sejam os números complexos  $z = 15(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$  e  $w = 3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ . Vamos determinar  $\frac{z}{w}$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{w} &= \frac{15}{3} [\cos(120^\circ - 30^\circ) + i \operatorname{sen}(120^\circ - 30^\circ)] \\
 &= 5(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \\
 &= 5(0 + i) = 5i.
 \end{aligned}$$

### 2.4.1 Fórmula de De Moivre

**Proposição 2.21.** A multiplicação de números complexos na forma polar estende-se para um número qualquer de fatores. Sendo

$$z_j = r_j(\cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

teremos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. \quad (2.2)$$

**Demonstração:**

Quando consideramos  $n = 1$  retornamos à forma polar dos números complexos, e a mesma não seria relevante nesse contexto.

Quando  $n = 2$ , temos:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)],$$

de acordo com o item (i) do Teorema 2.18 podemos verificar que a fórmula acima é válida. Agora suponhamos que também seja válida para  $n = k$ , com  $k \in \mathbb{N}$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_k = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k)],$$

então para  $n = k + 1$  temos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{k+1} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{k+1} [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{k+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{k+1})].$$

Portanto, a equação (2.2) é válida para  $n$  números complexos como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação 2.22.** Temos:

- i) Em particular, se todos os fatores forem iguais a  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , da Proposição 2.21 obtemos

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)], \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- ii) Se  $z \neq 0$ , a afirmação do item i) anterior também vale para todo inteiro  $n \leq 0$ . Dado que, por i) resulta  $z^{-n} = r^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]$  e como  $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ , obtemos

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)], \quad \text{para todo inteiro } n \leq 0.$$

- iii) Dos itens i) e ii) anteriores, concluímos que se  $z \neq 0$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)], \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

- iv) Se  $|z| = r = 1$  no item anterior, obtemos a fórmula de De Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

## 2.5 Raízes $n$ -ésimas

Sejam  $w$  um número complexo e  $n \geq 1$  um número natural, dizemos que  $z \in \mathbb{C}$  é uma raiz  $n$ -ésima de  $w$  se

$$z^n = w.$$

A seguir veremos que um número complexo  $w \neq 0$  possui  $n$  raízes distintas.

**Teorema 2.23.** *Fixe  $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ . Todo número complexo não nulo  $w$  possui exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[n]{|w|} \left[ \cos \left( \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (2.3)$$

onde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser vista em [4], p. 10. □

**Observação 2.24.** De (2.3) todas as  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $w$  possuem o mesmo módulo igual a  $\sqrt[n]{|w|}$ .

**Exemplo 2.25.** Vamos determinar as raízes sextas do número complexo  $z = \sqrt{3} + i$ .

**Resolução:**

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Logo a forma polar é  $z = 2 \left( \frac{\pi}{6} + i \frac{\pi}{6} \right)$ . O módulo das 6 raízes é

$$\sqrt[6]{|z|} = \sqrt[6]{r} = \sqrt[6]{2} \cong 1,1.$$

O argumento de cada raiz será determinado por

$$\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n},$$

onde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Neste caso como  $n = 6$ , os argumentos das outras 5 raízes são:

$$\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{36} rad$$

$$\frac{13\pi}{36} + \frac{\pi}{3} = \frac{25\pi}{36} rad$$

$$\frac{25\pi}{36} + \frac{\pi}{3} = \frac{37\pi}{36} rad$$

$$\frac{37\pi}{36} + \frac{\pi}{3} = \frac{49\pi}{36} rad$$

$$\frac{49\pi}{36} + \frac{\pi}{3} = \frac{61\pi}{36} rad.$$

As seis raízes são:

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{36} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{36} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{25\pi}{36} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{37\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{37\pi}{36} \right)$$

$$z_4 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{49\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{49\pi}{36} \right)$$

$$z_5 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{61\pi}{36} + i \operatorname{sen} \frac{61\pi}{36} \right).$$

**Exemplo 2.26.** Quais são as raízes quartas de 1?

**Resolução:**  $z = 1 + 0i$ ,  $r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$ ,

$$\operatorname{sen}(\theta) = 0$$

$$\operatorname{cos}(\theta) = 1$$

$$\theta = 0^\circ.$$

Logo a forma polar é  $z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ . O módulo das quatro raízes é

$$\sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{r} = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Como no exemplo anterior, o argumento de cada raiz de  $z = 1$  será determinado por

$$\frac{\operatorname{arg}(z) + 2k\pi}{n},$$

onde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Dado que, estamos calculando as raízes quartas,  $n = 4$ . Assim, os argumentos das outras 3 raízes são:

$$0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} rad$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi rad$$

$$\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} rad.$$

As quatro raízes são:

$$z_0 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

$$z_1 = 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z_2 = 1 \left( \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \right)$$

$$z_3 = 1 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right).$$

## Capítulo 3

# O Plano Complexo Estendido: Projeção Estereográfica

O *plano complexo estendido* é formado por todos os números complexos juntamente com o ponto infinito, em outras palavras, é a união do infinito ao plano complexo. A adição do infinito aos números complexos permite a utilização de operações que em determinados contextos não fariam sentido, como a divisão por zero, representada pela expressão  $\frac{1}{0} = \infty$ .

A fim de um melhor entendimento das propriedades e conceitos que abrangem o Plano Complexo Estendido, estudaremos inicialmente as Projeções Estereográficas e suas principais propriedades. Os conteúdos que se encontram neste capítulo estão baseados nas referências [2, 6].

### 3.1 Projeção Estereográfica

Nesta seção estabelecemos uma relação entre o plano complexo e a esfera, através da projeção estereográfica, definida na esfera inteira, exceto em um ponto chamado Polo Norte.

Consideremos a esfera unitária  $S^2$  de centro  $O = (0, 0, 0)$ , definida da seguinte forma:

$$S^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}.$$

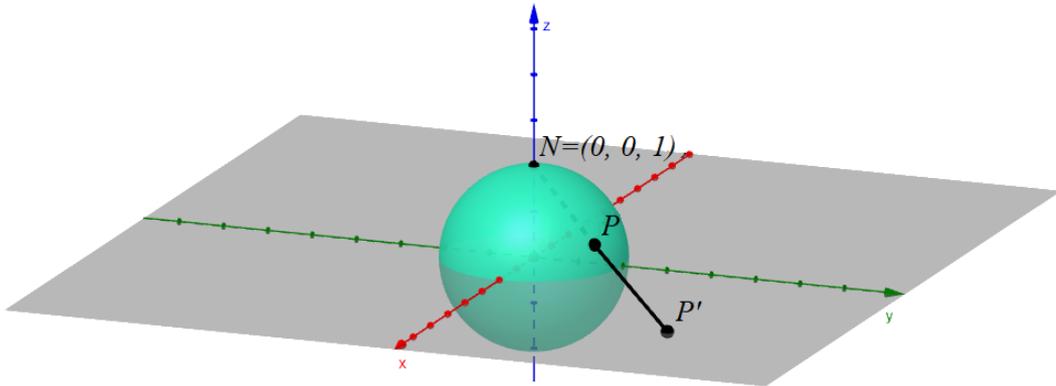
Por outro lado, identificamos o plano complexo com o plano equatorial, ou seja, para as coordenadas  $(x, y, u) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{C}$  é o plano onde  $u = 0$ . O ponto  $N = (0, 0, 1)$  é chamado *Polo Norte*.

Nesse sentido, o plano complexo é o conjunto  $\mathbb{C}$ , cujos elementos são denotados da seguinte forma  $z = x + yi$ . Notemos que a circunferência unitária em  $\mathbb{C}$  coincide com o equador da esfera  $S^2$  e que com esta representação,  $N$  não pertence ao plano  $\mathbb{C}$ .

Para o ponto  $P \in S^2 - \{N\}$ , existe uma única reta que passa por  $P$  e  $N$ , que indicaremos por  $\overrightarrow{NP}$ . Essa reta intercepta o plano  $\mathbb{C}$  em exatamente um ponto  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definição 3.1.** A aplicação  $\Psi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  que associa a um ponto  $P = (x', y', z')$  o ponto  $P' = \Psi(P) \in \mathbb{C}$  obtido pela intersecção  $\overrightarrow{NP} \cap \mathbb{C}$  é chamado **Projeção Estereográfica**.

Figura 3.1: Projeção Estereográfica.



Fonte: Arquivo pessoal.

A projeção estereográfica é conforme, pois permite projetar objetos de uma superfície esférica, numa superfície plana de modo que os ângulos entre os objetos da esfera sejam preservados. A seguir, veremos que a aplicação  $\Psi$  é bijetora e por esse motivo, admite inversa.

### 3.1.1 A Projeção Estereográfica em coordenadas

Para definir a projeção estereográfica em coordenadas, obteremos primeiramente a lei de formação para projeção  $\Psi$  que relaciona as coordenadas dos pontos da esfera em função das coordenadas dos pontos do plano complexo, onde  $P' = \Psi(P)$ .

Por meio de ferramentas da Geometria Analítica, vamos determinar a equação da reta  $a$  definida pelos pontos  $N = (0, 0, 1)$  e  $P = (x', y', z')$ .

Começamos definindo o vetor diretor da reta

$$\overrightarrow{NP} = P - N = (x', y', z') - (0, 0, 1) = (x', y', z' - 1),$$

A fim de escrever:

$$\begin{aligned} a & : \{N + t \cdot \overrightarrow{NP} : t \in \mathbb{R}\} \\ a & : \{(0, 0, 1) + t(x', y', z' - 1) : t \in \mathbb{R}\} \\ a & : \{(0, 0, 1) + (tx', ty', t(z' - 1)) : t \in \mathbb{R}\} \\ a & : \{(tx', ty', 1 + t(z' - 1)) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Para determinar as coordenadas do ponto de interseção da reta  $a$  com o plano complexo  $\mathbb{C} = \{(x, y, v) \in \mathbb{R}^3; v = 0\}$ , devemos ter  $P' = (x, y, 0)$ , ou seja, fazendo com que a terceira coordenada seja igual a 0, assim,  $\Psi(P) \in a \cap \mathbb{C}$ . Dessa forma,

$$a \cap \mathbb{C} = \{(tx', ty', 1 + t(z' - 1)) = (x, y, 0)\},$$

então, como  $z'$  é diferente de 1,

$$\begin{aligned} 1 + t(z' - 1) &= 0 \\ t(z' - 1) &= -1 \\ t &= \frac{-1}{z' - 1} \\ t &= \frac{1}{1 - z'}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x &= tx' = \left(\frac{1}{1 - z'}\right)x' = \frac{x'}{1 - z'}, \\ y &= ty' = \left(\frac{1}{1 - z'}\right)y' = \frac{y'}{1 - z'}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Psi : S^2 - \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x', y', z') &\longmapsto \left(\frac{x'}{1 - z'}, \frac{y'}{1 - z'}\right) = \frac{x'}{1 - z'} + \frac{y'}{1 - z'}i, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $z = \Psi(x', y', z')$  é dado por:

$$z = x + yi = \frac{x'}{1 - z'} + \frac{y'}{1 - z'}i = \frac{x' + y'i}{1 - z'}.$$

**Proposição 3.2.** A aplicação  $\Psi$  definida em (3.1) é bijetora.

**Demonstração:**

i)  $\Psi$  é **injetora**.

Sejam  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  em  $S^2 - \{N\}$ , Tais que

$$\Psi(P_1) = \Psi(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_1}{1 - z_1}, \frac{y_1}{1 - z_1}\right),$$

$$\Psi(P_2) = \Psi(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{x_2}{1 - z_2}, \frac{y_2}{1 - z_2}\right),$$

com

$$\Psi(P_1) = \Psi(P_2),$$

daqui,

$$\frac{x_1}{1 - z_1} = \frac{x_2}{1 - z_2}$$

$$\frac{y_1}{1 - z_1} = \frac{y_2}{1 - z_2}.$$

Dessa forma,

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \quad e \quad z_1 = z_2.$$

Logo,

$$P_1 = P_2.$$

Portanto, se  $\Psi(P_1) = \Psi(P_2)$ , então  $P_1 = P_2$ , e assim provamos que  $\Psi$  é injetora.

ii)  $\Psi$  é **sobrejetora**.

Considere uma reta  $b$  definida pelos pontos  $P' = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$  e  $N = (0, 0, 1) \in S^2$ .

Determinemos o vetor diretor de  $b$ .

$$\overrightarrow{NP'} = P' - N = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1),$$

para que possamos escrever:

$$b : \{(0, 0, 1) + t(x, y, -1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$b : \{(0, 0, 1) + (tx, ty, -t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$b : \{(tx, ty, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Pretendemos mostrar que existe um único ponto  $P$  tal que  $\{P\} = b \cap S^2$ . Visto que o ponto  $P = (x', y', z') \in b$ , temos que  $x' = tx$ ,  $y' = ty$  e  $z' = 1 - t$ .

Dessa forma, o ponto  $P$  está em  $S^2$  quando

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Substituindo os valores, resulta:

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

logo,

$$\begin{aligned} t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1, \\ t^2(x^2 + y^2) + t^2 &= 2t. \end{aligned}$$

Fazendo  $z = x + iy$  e usando a definição do módulo de um número complexo  $|z|^2 = x^2 + y^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} t^2|z|^2 + t^2 &= 2t \\ t^2(|z|^2 + 1) &= 2t \\ t^2 &= \frac{2t}{|z|^2 + 1}, \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\frac{1}{t}$  temos,

$$t = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Assim, encontramos o ponto  $P = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2$  tal que  $\Psi(P) = P'$ . Dessa forma, concluímos que  $\Psi$  é sobrejetora.

Portanto,  $\Psi$  é bijetora.  $\square$

**Observação 3.3.** i) De acordo à Proposição 3.2, podemos dizer que a aplicação  $\Psi$ , por ser bijetora, admite inversa, cuja lei de formação é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 - \{N\} \\ z = x + iy &\longmapsto \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

ii) Essa aplicação é chamada de *Projeção Estereográfica*.

### 3.1.2 Algumas propriedades da projeção estereográfica

O estudo destas propriedades está baseado na referência [6].

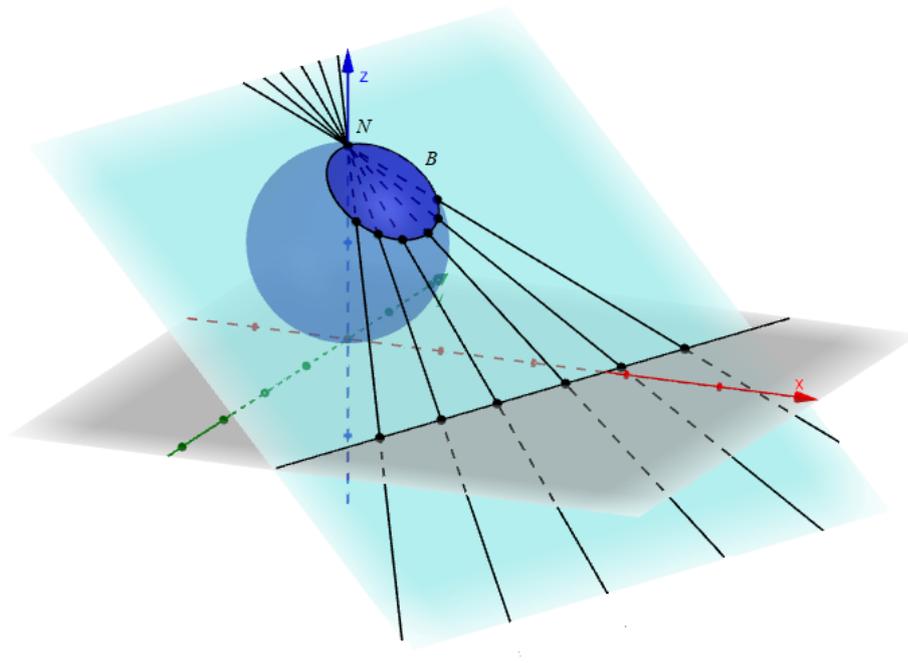
**Primeira propriedade.** *Circunferências da esfera que passam pelo polo norte projetam-se como retas no plano.*

**Demonstração:** Qualquer ponto que esteja sobre uma circunferência  $B$  que passe pelo polo norte, gera um conjunto de retas que passam por  $N$  e por cada um dos pontos da circunferência, essas retas pertencem ao plano definido por  $B$ . Como a interseção de dois planos não-paralelos é uma reta, a projeção da circunferência  $B$  é a reta que resulta da interseção do plano definido por  $B$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$ . Conforme vemos na Figura 3.2.  $\square$

**Segunda propriedade.** *Circunferências na esfera que não passam pelo polo norte são projetadas como circunferências no plano.*

**Demonstração:** Essa demonstração será dividida em duas partes:

- i) Na primeira mostraremos que as circunferências na esfera, paralelas ao plano de projeção, e que não passam pelo polo norte, se projetam como circunferências no plano.
- ii) Na segunda mostraremos o caso em que essas circunferências não são paralelas ao plano de projeção e se projetam como circunferências nesse plano.

Figura 3.2: Projeção de circunferências que passam por  $N$ .

Fonte: Arquivo pessoal.

Primeiro observamos que, dada uma circunferência  $B$  na esfera  $S^2$  que não passe pelo polo norte, todas as retas da projeção que saem de  $N$  e passam por todos os pontos da circunferência formam um cone circular com vértice em  $N$ . A circunferência  $B$  pode ser obtida como secção desse cone com o próprio plano que contém  $B$ , e a sua projeção,  $B'$ , é a secção desse cone com o plano de projeção.

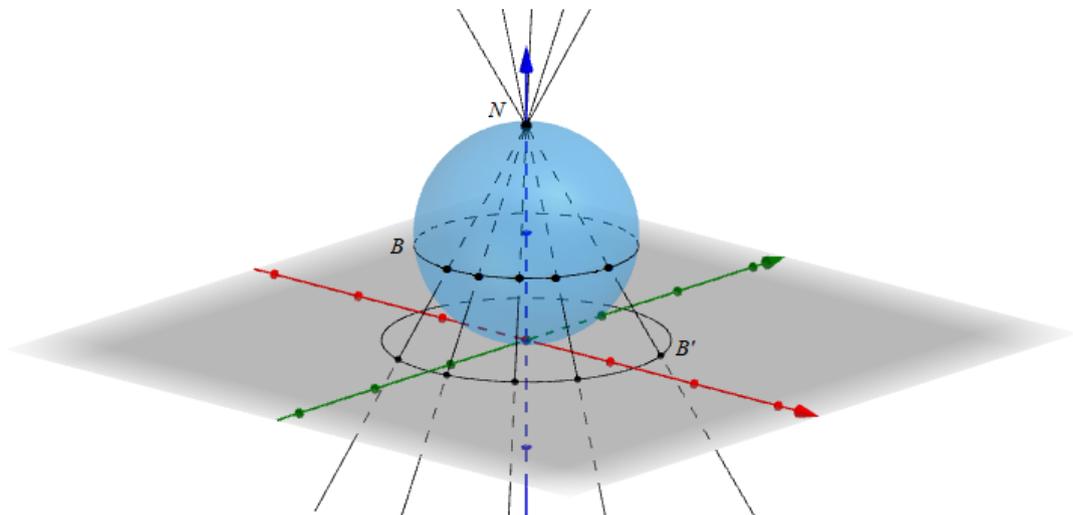
Agora mostraremos que  $B'$  é uma circunferência no plano de projeção, provando e utilizando um resultado que identifica as secções circulares de um cone circular. De fato, se a circunferência  $B$  for paralela ao plano de projeção, o cone definido pelas retas de projeção e por  $B$  é um cone circular reto, uma justificativa direta que utiliza semelhanças de triângulos permite concluir que  $B'$  é uma circunferência, como observamos na Figura 3.3. Porém, se esse cone fosse oblíquo, devemos usar outros argumentos para realizar a demonstração. Esse caso será estudado com maiores detalhes na Parte 2 abaixo.

## Parte 2

Para provar esta segunda parte precisamos do resultado do seguinte lema.

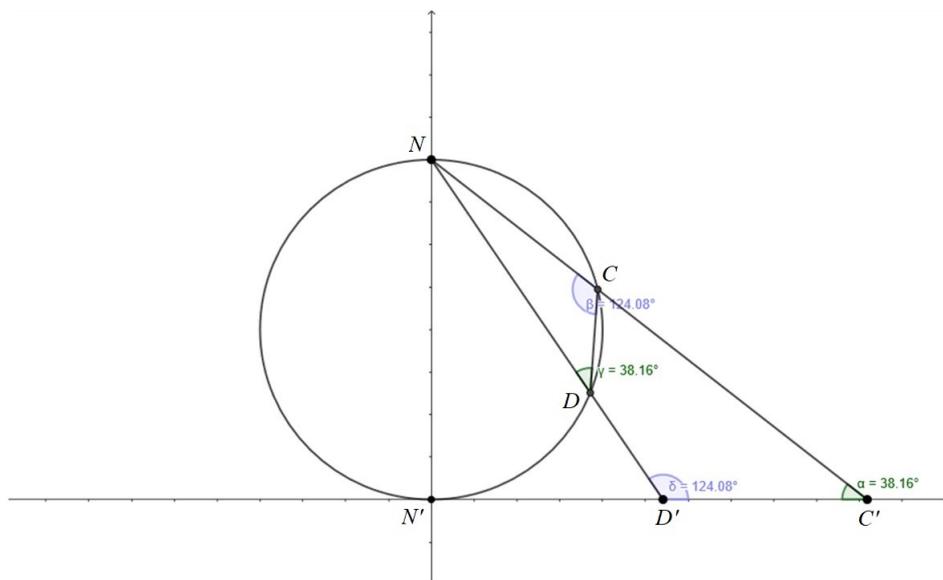
**Lema 3.4.** Sejam  $C$  e  $D$  dois pontos de uma circunferência inscrita na esfera e  $C'$  e  $D'$  a projeção estereográfica de  $C$  e  $D$  respectivamente. Então  $N\widehat{C}D = N\widehat{D}'C'$  e  $N\widehat{D}C = N\widehat{C}'D'$ .

Figura 3.3: Projeção de circunferências que não passam por  $N$ , e são paralelas ao plano  $\mathbb{C}$ .



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 3.4: Circunferência inscrita na esfera do Lema 3.4.



Fonte: Arquivo pessoal.

Do Lema 3.4, considerando o plano gerado pelas retas que passam pelos segmentos  $\overline{C'N}$ ,  $\overline{C'N'}$  e  $\overline{N'N'}$  obtemos a seguinte figura.

Se uma circunferência não passa pela origem da projeção, então podemos assumir que o plano que passa por  $NN'$  e pelo centro da circunferência dado é o plano  $NCD$  onde  $\overline{CD}$  é diâmetro da circunferência que queremos projetar.

Sabemos que todas as retas da projeção que partem de  $N$  e passam por todos os pontos

da circunferência  $B$  formam um cone circular com vértice em  $N$ .

Lembremos que no cone reto só é possível obter secções circulares fazendo cortes paralelos à base, já no cone oblíquo, existem duas formas diferentes de se obter secções circulares:

- i) A primeira delas é como no cone reto;
- ii) A segunda forma é considerando um cone circular oblíquo tendo o ponto  $N$  como vértice.

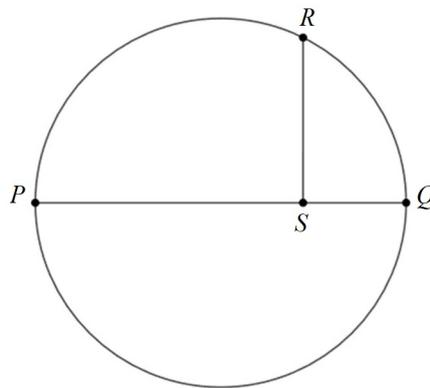
Para obter a segunda forma é importante recordar a seguinte propriedade:

- Dada uma circunferência de diâmetro  $\overline{PQ}$ , se  $\overline{RS}$  for perpendicular a  $\overline{PQ}$  onde  $R$  é um ponto arbitrário dessa circunferência, e  $S \in \overline{PQ}$ , logo a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\overline{PS} \cdot \overline{SQ} = \overline{RS}^2.$$

De modo recíproco, se a igualdade anterior for verdadeira então  $R$  pertence a uma circunferência de diâmetro  $\overline{PQ}$  como mostra a figura 3.5.

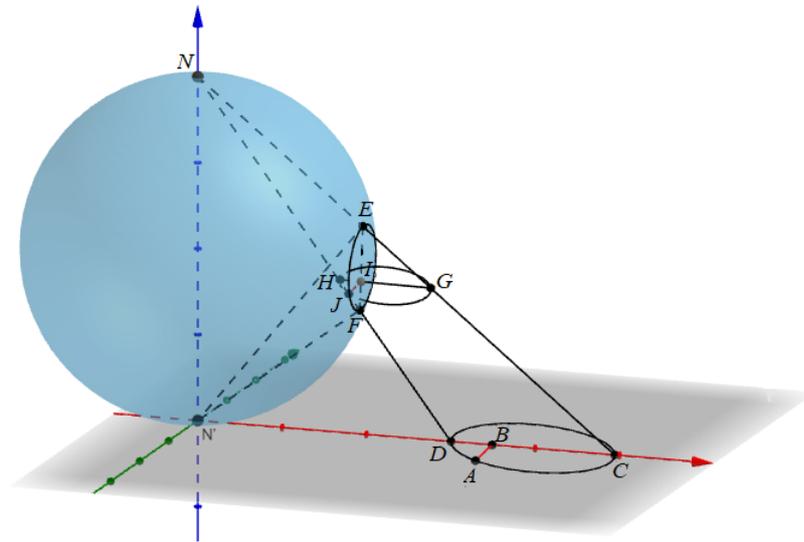
Figura 3.5:  $\overline{PS} \cdot \overline{SQ} = \overline{RS}^2$ .



Fonte: Arquivo pessoal.

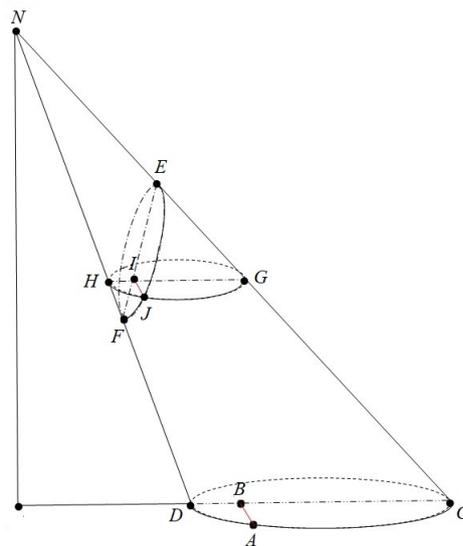
Continuamos com a demonstração, e tomemos um cone circular oblíquo tendo o ponto  $N$  como vértice e  $\overline{BC}$  como diâmetro da base. Sem perda de generalidade, podemos supor que a reta  $BC$  passe pelo pé da perpendicular do ponto  $N$  em relação à base.

Figura 3.6: Cone oblíquo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 3.7: Cone oblíquo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Posteriormente, seccionamos o cone, através de um plano normal ao  $NCD$  ao longo do segmento  $\overline{EF}$ , com  $E$  e  $F$  pertencentes à superfície do cone, de maneira que  $N\widehat{E}F = N\widehat{D}C$  e  $N\widehat{F}E = N\widehat{C}D$ . Durante esse processo obtemos a curva  $\widehat{EJF}$ .

Se provarmos que a curva  $\widehat{EJF}$  é uma circunferência teremos encontrado a segunda forma de seccionar um cone oblíquo para obter uma circunferência.

Para provar que a curva  $\widehat{EJF}$  é uma circunferência, consideremos um ponto qualquer  $J$  dessa curva e um ponto qualquer  $A$  da circunferência da base do cone. Por outro lado, desenhamos os segmentos  $\overline{JI}$  e  $\overline{AB}$  perpendiculares ao plano  $NCD$ . Como estes dois segmentos são perpendiculares a  $NCD$  então serão paralelos entre si.

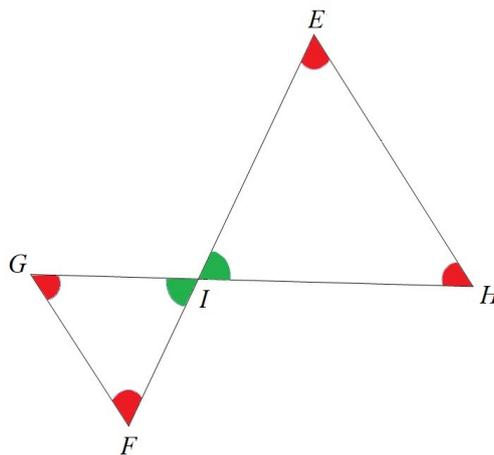
A seguir, desenhamos o segmento  $\overline{HG}$  passando por  $I$  e paralelo ao segmento  $\overline{CD}$  e constrói-se a secção do cone gerada pelo lado que passa por  $\overline{HG}$  e  $\overline{JI}$ . Esta secção vai ser paralela à base do cone porque  $\overline{HG}$  é paralelo a  $\overline{CD}$  e  $\overline{JI}$  é paralelo a  $\overline{AB}$ , assim, essa secção é uma circunferência.

Conforme a propriedade citada acima, a seguinte igualdade é verdadeira para a circunferência de diâmetro  $\overline{HG}$ ,

$$\overline{HI} \cdot \overline{IG} = \overline{JI}^2.$$

No entanto, como  $N\widehat{E}F = N\widehat{D}C = N\widehat{G}H$ , pois  $\overline{HG}$  é paralelo a  $\overline{CD}$  e  $N\widehat{F}E = N\widehat{C}D = N\widehat{H}G = E\widehat{G}I$ . Daqui conclui-se que os triângulos  $\triangle GIF$  e  $\triangle EIH$  são semelhantes como vemos na Figura 3.8.

Figura 3.8:  $\triangle GIF \sim \triangle EIH$ .



Fonte: Arquivo pessoal.

Logo,

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{IF}} \iff \overline{HI} \cdot \overline{IG} = \overline{EI} \cdot \overline{IF}.$$

Daqui,

$$\overline{EI} \cdot \overline{IF} = \overline{JI}^2.$$

Esta igualdade é válida para qualquer ponto da curva  $\widehat{EJF}$  e qualquer segmento  $\overline{EF}$ , dessa forma, conclui-se que a curva  $\widehat{EJF}$  é uma circunferência.

Portanto, todas as secções do cone paralelas a  $\widehat{EJF}$  também são circunferências.  $\square$

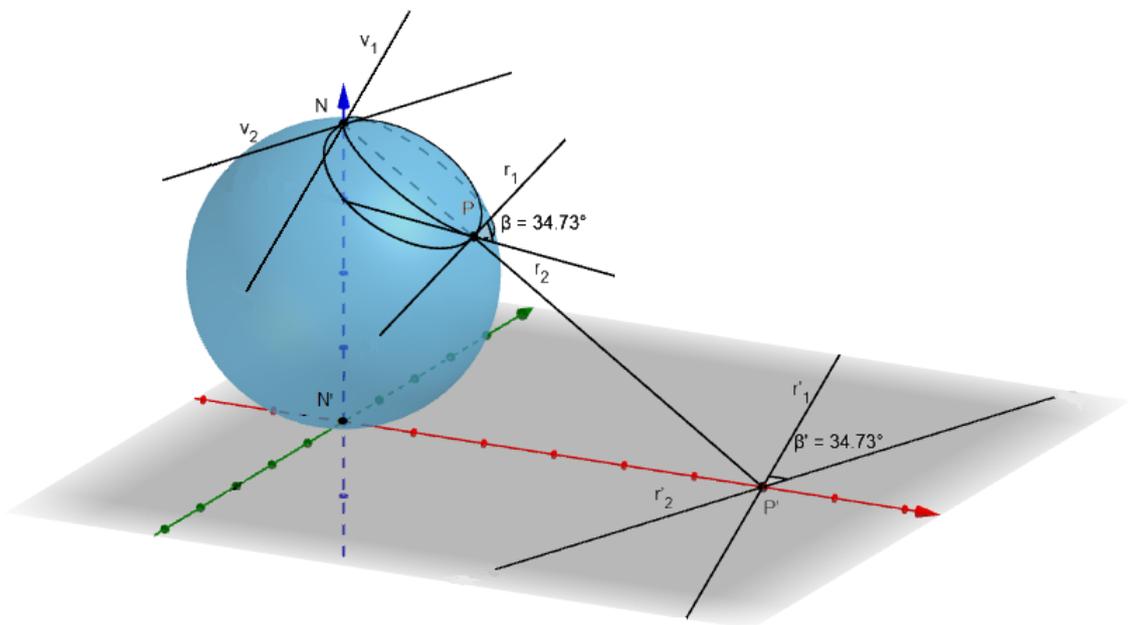
**Terceira propriedade.** *Ângulos entre curvas da esfera são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas no plano.*

**Demonstração:** Vamos provar que os ângulos entre curvas da esfera são preservados quando essas curvas são projetadas estereograficamente no plano. O ângulo entre duas curvas de uma esfera se define como o ângulo que existe entre as retas tangentes a essas curvas no ponto onde elas se intersectam.

Dessa forma, sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas tangentes à esfera num ponto  $P$  e  $\beta$  o ângulo formado entre elas. Por outro lado, denominamos  $r'_1$  e  $r'_2$  às projeções estereográficas das retas  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente e  $\beta'$  o ângulo formado entre elas.

A seguir, provaremos que  $\beta = \beta'$ .

Figura 3.9: Conservação dos ângulos.



Fonte: Arquivo pessoal.

O plano definido pela semirreta  $r_1$  e  $N$  intersecta a esfera formando uma circunferência

que passa por  $N$  e  $P$ , esse plano passa por todos os diferentes pontos de  $r_1$ , e através da projeção estereográfica se projeta na reta  $r'_1$  que passa por  $P'$ . Seja  $v_1$  a reta tangente à circunferência no ponto  $N$ , essa reta é paralela a  $r'_1$ , devido a que todas as retas tangentes em  $N$  são paralelas ao plano de projeção.

Da mesma forma, o plano definido pela semirreta  $r_2$  e  $N$  intersecta a esfera em outra circunferência que passa por  $N$ , e tem como tangente nesse ponto a reta  $v_2$  que é paralela a  $r'_2$ . Logo, dado que todos os lados dos ângulos são paralelos dois a dois, o ângulo  $\beta'$  entre  $r'_1$  e  $r'_2$  é igual ao ângulo entre  $v_1$  e  $v_2$ , que por sua vez é igual ao ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$ , porque os ângulos entre as duas circunferências da esfera nos pontos de interseção  $P$  e  $N$  são iguais. Para confirmarmos esse fato, basta observar que o plano que corta perpendicularmente o segmento  $\overline{PN}$  no seu ponto médio é plano de simetria para as duas circunferências. Portanto, temos a igualdade dos ângulos,  $\beta = \beta'$ , e assim finalizamos a demonstração.  $\square$

## 3.2 Plano Complexo Estendido

Na seção 3.1 obtivemos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \Psi : S^2 - \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x', y', z') &\longmapsto \Psi(x', y', z') = \frac{x' + y'i}{1 - z'} = z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 - \{N\} \\ z = x + iy &\longmapsto \Psi^{-1}(x + iy) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = (x', y', z'). \end{aligned}$$

Que são a projeção estereográfica e sua inversa, respectivamente.

Daqui podemos definir,

$$|z|^2 = |\Psi(x', y', z')|^2 = \left| \frac{x' + y'i}{1 - z'} \right|^2 = \left| \frac{x'^2 + y'^2}{(1 - z')^2} \right| = \frac{x'^2 + y'^2}{(1 - z')^2},$$

como  $P \in S^2 - \{N\}$  vale  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \iff x'^2 + y'^2 = 1 - z'^2$ , logo podemos escrever

$$|z|^2 = \frac{1 - z'^2}{(1 - z')^2} = \frac{(1 - z') \cdot (1 + z')}{(1 - z') \cdot (1 - z')} = \frac{1 + z'}{1 - z'}.$$

- Notemos que a projeção estereográfica é contínua pelo fato dela ser a composta de funções contínuas, e a inversa  $\Psi^{-1}$  é contínua pois a função que está em cada coordenada de sua imagem é contínua. Portanto  $\Psi$  é um homeomorfismo <sup>1</sup> da  $S^2 - \{N\}$  no plano complexo  $\mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>homeomorfismo é uma função inversível e contínua cuja a inversa também é contínua.

- Além disso, observarmos que quando  $P = (x', y', z') \in S^2 - \{N\}$  tende a  $N = (0, 0, 1)$ , temos que  $\Psi(P)$  tende para  $\infty$ , e quando  $z$  tende para  $\infty$ ,  $\Psi^{-1}(z)$  tende a  $N$ .
- Concluimos que, através da projeção estereográfica  $\Psi$  podemos identificar o plano complexo  $\mathbb{C}$  com  $S^2 - \{N\}$  e podemos definir  $\Psi(N) = \infty$ . Assim, surge a possibilidade de estender o plano complexo  $\mathbb{C}$  acrescentando um ponto no infinito, obtendo  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , chamado *Plano Complexo Estendido*, que nos fornece a bijeção

$$\Omega : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

definida por,

$$\Omega(P) = \begin{cases} \Psi(P), & P \in S^2 - \{N\} \\ \infty, & P = N. \end{cases}$$

# Capítulo 4

## Algumas Aplicações da Projeção Estereográfica

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações envolvendo a projeção estereográfica, mostraremos a surpreendente relação entre a projeção estereográfica e os ternos pitagóricos. Posteriormente, mostraremos como se faz uma fotografia estereográfica a partir de panoramas, a técnica é feita pelo software Adobe Photoshop CS6. O estudo das aplicações apresentadas neste capítulo estão baseadas nas referências [6, 8].

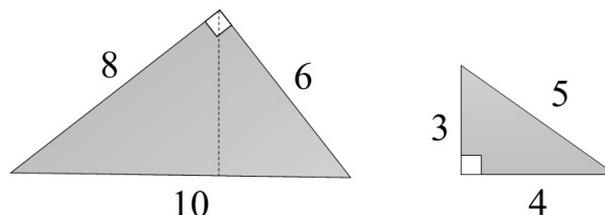
### 4.1 Os Ternos Pitagóricos de Euclides

Os ternos pitagóricos aparecem em registros da Matemática Babilônia escrita no século XVIII antes de Cristo, posteriormente, foram estudados no período grego pelos pitagóricos e por Platão e apareceram de forma explícita na obra *Os Elementos de Euclides*, depois foram estudados pelos Matemáticos islâmicos e esteve sempre presente na literatura ao longo dos séculos.

Um triângulo retângulo é chamado de pitagórico, quando as medidas de todos os seus lados são dadas por números inteiros positivos. Neste contexto, dizemos que os ternos pitagóricos (ou trios pitagóricos) são ternos de números inteiros que correspondem às medidas dos lados de um mesmo triângulo retângulo. Alguns triângulos pitagóricos já eram conhecidos e utilizados em construções na antiguidade, mesmo antes de receber o nome Teorema de Pitágoras.

**Exemplo 4.1.** A seguir apresentamos dois triângulos retângulos pitagóricos.

Figura 4.1: Triângulos pitagóricos.



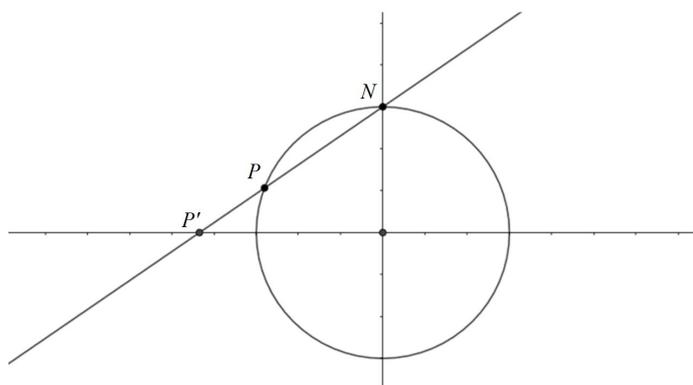
Fonte: Arquivo pessoal.

Vamos apresentar uma incrível relação da projeção estereográfica e os ternos pitagóricos, gerados pela fórmula de Euclides. A partir de uma adaptação da projeção estereográfica, será possível mostrar de que forma estes dois conceitos se relacionam entre si.

A projeção estereográfica é uma aplicação definida de  $\mathbb{R}^3$  para  $\mathbb{R}^2$  que relaciona um ponto na esfera com um ponto no plano complexo ou plano de projeção, dessa forma, a projeção estereográfica é definida na esfera, com exceção de um ponto, denominado polo norte, a partir daí, será possível projetá-la no plano.

Nesse contexto, vamos redefinir a projeção estereográfica para o caso específico em que se projeta um ponto de uma circunferência num ponto da reta real. Assim, a projeção estereográfica será uma aplicação de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ .

Por consequência, em vez de uma esfera, teremos uma circunferência e o plano de projeção será uma reta. Observemos uma circunferência centrada na origem de raio unitário, e consideremos o eixo das abscissas como a reta onde se projetam os pontos da circunferência. O ponto  $N = (0, 1)$  é a origem da projeção, e se  $P$  for um ponto da circunferência, então a projeção de  $P$  é o ponto onde a reta  $\overrightarrow{NP}$  intersecta o eixo das abscissas.

Figura 4.2: Projeção estereográfica de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ .

Fonte: Arquivo pessoal.

A seguinte proposição apresenta uma adaptação da projeção estereográfica que estudamos no Capítulo 3, essa proposição descreve o comportamento tanto da projeção estereográfica, como uma aplicação de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ , quanto de sua inversa.

**Proposição 4.2.** Considere uma circunferência unitária e de centro na origem. Seja  $N = (0, 1)$  a origem da projeção e o eixo das abscissas  $y = 0$  a reta de projeção. Sejam  $P = (a, b)$  as coordenadas de um ponto da circunferência e  $P' = (K, 0)$  as coordenadas da projeção estereográfica do ponto  $P$ , então:

$$(1) K = \frac{a}{1-b}$$

$$(2) (a, b) = \left( \frac{2K}{K^2 + 1}, \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \right).$$

**Demonstração:**

- (1) Chamemos de  $r$  a reta compreendida pelos pontos  $N = (0, 1)$  e  $P = (a, b)$ . Para determinar a equação da reta  $r$ , devemos encontrar o seu vetor diretor, dado por:

$$\overrightarrow{NP} = P - N = (a, b) - (0, 1) = (a, b - 1),$$

para que possamos escrever:

$$r : \{N + t \cdot \overrightarrow{NP} : t \in \mathbb{R}\}$$

$$r : \{(0, 1) + t(a, b - 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$r : \{(0, 1) + (ta, t(b - 1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$r : \{(ta, 1 + t(b - 1)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dado que a reta de projeção é o eixo das abscissas  $y = 0$ , e como  $P' \in r$ , temos:

$$(ta, 1 + t(b - 1)) = (x, 0),$$

definimos acima as coordenadas do ponto  $P' = (K, 0)$ , logo

$$K = ta \tag{4.1}$$

$$0 = 1 + t(b - 1), \tag{4.2}$$

da equação (4.2), obtemos

$$t = \frac{1}{1-b},$$

substituindo na equação (4.1), podemos concluir

$$K = \frac{a}{1-b},$$

como queríamos demonstrar.

(2) Iniciamos determinando a equação da reta  $\overrightarrow{NP'}$ , que possui a seguinte forma:  $y = mx + n$ .

Lembremos que é possível determinar o coeficiente angular de uma reta conhecendo dois pontos pertencentes a esta reta, digamos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ . Para tal fim, podemos usar a fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

assim, como  $N = (0, 1)$  e  $P' = (K, 0)$  pertencem à reta  $\overrightarrow{NP'}$ , obtemos

$$m = \frac{0 - 1}{K - 0} = -\frac{1}{K}.$$

A reta  $\overrightarrow{NP'}$  passa pelo ponto  $N = (0, 1)$ , ou seja, na equação  $y = mx + n$ , quando  $x = 0$ , resulta  $y = n = 1$ .

Assim, a reta  $\overrightarrow{NP'}$  tem a equação

$$y = -\frac{x}{K} + 1.$$

O ponto  $P = (a, b) \in \overrightarrow{NP'}$ , logo,

$$b = -\frac{a}{K} + 1.$$

Como  $P$  pertence a circunferência,  $a^2 + b^2 = 1$ .

A seguir, resolvemos um sistema determinado pelas duas equações anteriores.

$$\begin{cases} b = -\frac{a}{K} + 1 \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \iff \left\{ a^2 + \left( -\frac{a}{K} + 1 \right)^2 = 1. \iff \left\{ a^2 + \left( -\frac{a}{K} \right)^2 - \frac{2a}{K} + 1 = 1. \right. \right.$$

$$\iff \left\{ a^2 + \frac{a^2}{K^2} - \frac{2a}{K} = 0. \iff \left\{ \frac{a^2 K^2 + a^2 - 2aK}{K^2} = 0. \iff \left\{ K^2 a^2 + a^2 - 2aK = 0. \right. \right.$$

$$\iff \left\{ (K^2 + 1)a^2 - 2aK = 0. \iff \left\{ a[(K^2 + 1)a - 2K] = 0. \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \vee \\ (K^2 + 1)a - 2K = 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \vee \\ a = \frac{2K}{K^2 + 1}. \end{array} \right.$$

Como  $b = -\frac{a}{K} + 1$ ,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a = \frac{2K}{K^2 + 1} \\ b = 1 \vee b = -\frac{2}{K^2 + 1} + 1 = \frac{-2 + K^2 + 1}{K^2 + 1} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a = \frac{2K}{K^2 + 1} \\ b = 1 \vee b = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}. \end{cases}$$

Portanto, o ponto da circunferência terá as seguintes coordenadas:

$$P = \left( \frac{2K}{K^2 + 1}, \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \right).$$

□

**Exemplo 4.3.** Consideremos uma circunferência de raio 1 e de centro na origem. Seja  $N = (0, 1)$  a origem da projeção e o eixo das abcissas a reta de projeção. Vamos determinar as coordenadas do ponto da circunferência  $P = (a, b)$ , dado que essa reta intersecta o eixo  $x$  no ponto  $P' = (2, 0)$ .

**Resolução:**

Da Proposição 4.2, temos que  $P' = (K, 0)$ ,

$$K = \frac{a}{1 - b}, \quad \text{e} \quad (a, b) = \left( \frac{2K}{K^2 + 1}, \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \right).$$

Daqui, como  $P' = (2, 0)$ , resulta  $K = 2$ , logo

$$(a, b) = \left( \frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1}, \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} \right) = \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) = (0,8, 0,6).$$

Esse resultado pode ser verificado através do software GeoGebra, como mostra a Figura 4.3.

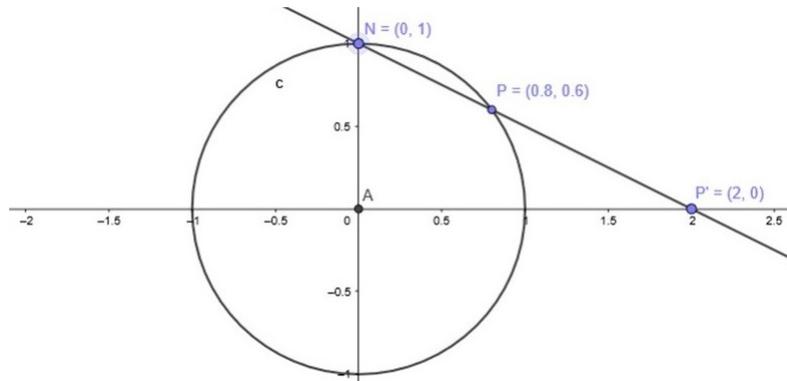
**(A) Fórmula de Euclides para ternos pitagóricos:**

Quanto aos ternos pitagóricos, Euclides mostrou em sua obra que se  $m$  e  $n$  forem dois números naturais com  $m > n$  e  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2mn$  e  $c = m^2 + n^2$ , tal que,  $a^2 + b^2 = c^2$ , então os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  são ternos pitagóricos.

Por exemplo, se  $m = 3$  e  $n = 2$  vem  $a = 5$ ,  $b = 12$  e  $c = 13$ ,

$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$

portanto,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são ternos pitagóricos.

Figura 4.3: Exemplo numérico da projeção estereográfica de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ .

Fonte: Arquivo pessoal.

### (B) A projeção estereográfica e os ternos pitagóricos:

O estudo da projeção estereográfica de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$  permite produzir ternos pitagóricos, especificamente, através de sua aplicação inversa, e da seguinte forma:

Consideremos que o ponto  $\left(\frac{m}{n}, 0\right)$ , com  $m > n$  em  $\mathbb{N}$ , representa um número racional do eixo das abscissas.

Segue, da Proposição 4.2 que  $K = \frac{m}{n}$ , e

$$\left(\frac{2K}{K^2 + 1}, \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}\right) = \left(\frac{\frac{2m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1}\right) = \left(\frac{2mn}{m^2 + n^2}, \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right),$$

é um ponto da circunferência unitária, daqui

$$\left(\frac{2mn}{m^2 + n^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)^2 = 1,$$

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

logo,  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2mn$  e  $c = m^2 + n^2$ , com  $m > n$  em  $\mathbb{N}$ , são ternos pitagóricos.

Concluimos, portanto, que a inversa da projeção estereográfica aplicada em racionais gera ternos pitagóricos.

**Observação 4.4.** A análise que apresentamos no final do item anterior coincide com a fórmula de Euclides para ternos pitagóricos.

## 4.2 Projeção Estereográfica na Fotografia

A aplicação da projeção estereográfica na fotografia é a técnica de manipular imagens panorâmicas através do software Adobe Photoshop CS6, utilizando o filtro *Coordenadas Polares* para criar um efeito esférico nas imagens. Para esse fim, usamos uma foto panorâmica da cidade de Araguaína do estado do Tocantins. A seguinte história se encontra baseada em [10].

### 4.2.1 Araguaína - Breve Histórico

Os índios da tribo Carajá foram os primeiros moradores da região compreendida entre os rios Andorinhas e Lontra. Atualmente, essa área constitui a maior parte do município de Araguaína.

O início do desbravamento ocorreu em 1876, com a chegada de João Batista da Silva e família, naturais do Piauí. Nessa época o povoado era chamado de “Livra-nos Deus”, devido ao constante temor de ataques indígenas e de animais selvagens. Mais tarde, com a vinda de outras famílias, o pequeno povoado aumentou e mudou o nome para Lontra.

Devido à falta de estradas, as condições geográficas e climáticas, o povoado não desenvolveu, até a chegada de novas famílias em 1925, onde novas perspectivas de crescimento tomaram conta dos moradores e a primeira igreja católica foi erguida.

Em 1949, o povoado Lontra passou a integrar o município de Filadélfia. No mesmo ano houve a mudança de nome para povoado Araguaína, em decorrência do rio Araguaia. Em 1953 foi transformado em distrito e em 1958, a Lei Estadual nº 2.125 decretou a criação do município.

O desenvolvimento econômico-social de Araguaína iniciou a partir de 1960, com a construção da rodovia Belém-Brasília. Entre os anos de 1960 a 1975, Araguaína atingiu um estágio de desenvolvimento sem precedentes na história do estado de Goiás e se tornou a quarta maior cidade do estado.

Com a criação do estado do Tocantins em 1989, Araguaína tornou-se a maior cidade do estado e ganhou o título de “Capital Econômica do Estado”. Sua população estimada em 2019 era de 180470 habitantes, sendo a segunda mais populosa do estado, atrás apenas da capital Palmas.

### 4.2.2 Fotografia Estereográfica

Para obter a projeção estereográfica da Figura 4.4, seguimos os seguintes passos:

---

<sup>1</sup>Disponível em: <<https://clebertoledo.com.br/tocantins/tocantins-registra-706-casos-de-covid-19-em-apenas-2-dias-araguaina-mais-298-e-palmas-82/>>. Acesso em: 15 de ago. 2020.

Figura 4.4: Vista panorâmica de Araguaína.



Fonte: Portal CT <sup>1</sup>(Foto: Marcos Sandes/Ascom PM).

- i) Abrimos a imagem escolhida no software Adobe Photoshop CS6 e rotacionamos pelo menu *Imagem* → *Rotação da Imagem* →  $180^\circ$ .
- ii) Utilizamos o atalho: *Ctrl + Alt + I* para deixar a imagem quadrada, escolhemos o valor de 1000 pixels na largura e na altura.
- iii) Selecionamos o menu *filtro* → *distorção* → *coordenadas polares*, depois a opção *retangular para polar* e clicamos em *ok*.
- iv) Usamos a *Ferramenta Carimbo* (atalho: *S*), para suavizar as áreas no ponto de encontro do que eram as extremidades do panorama.

Figura 4.5: Fotografia estereográfica.



Fonte:Arquivo pessoal.

# Capítulo 5

## Transformações de Möbius

As transformações exercem um papel significativo em diversas áreas da Matemática e na ciência de modo geral. Essa importância deve-se ao fato delas tornarem possível transformar problemas aparentemente complicados em problemas análogos com soluções mais simples.

August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, originou o que hoje conhecemos por Transformação de Möbius, uma das classes mais importantes das aplicações conformes, que levam circunferências em circunferências, circunferências em linhas e linhas em circunferências.

Como vimos anteriormente, a projeção estereográfica é uma aplicação complexa de variável complexa que leva o plano complexo na esfera. Neste capítulo, estudaremos uma transformação de  $\mathbb{C}_\infty$  em  $\mathbb{C}_\infty$  definida por uma composição de transformações mais simples, a saber: translação, rotação, dilatação (ou contração) e inversão.

Os assuntos apresentados neste capítulo estão baseados nas referências [2, 3, 7].

**Definição 5.1.** Uma Transformação de Möbius é uma aplicação  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

em que  $a, b, c$  e  $d$  são números complexos, tais que  $ad - bc \neq 0$ .

**Observação 5.2.** A condição  $ad - bc \neq 0$  assegura que  $c$  e  $d$  não são ao mesmo tempo nulos.

- i) Se  $c \neq 0$ , a função  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  está definida para todo  $z$ , tal que  $z \neq -\frac{d}{c}$ .
- ii) Se  $c = 0$  e  $ad - bc \neq 0$ , temos  $d$  não nulo e

$$T(z) = \frac{az + b}{d}.$$

Por outro lado, se  $z$  tende a  $\infty$ , faremos a seguinte análise:

a) Se  $c = 0$ , então

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Logo,  $|z| \rightarrow \infty \Rightarrow |T(z)| \rightarrow \infty$ .

b) Se  $c \neq 0$ , então

$$T(z) = \frac{a + \frac{b\bar{z}}{|z|^2}}{c + \frac{d\bar{z}}{|z|^2}}. \quad (5.1)$$

Logo,  $|z| \rightarrow \infty \Rightarrow T(z) \rightarrow \frac{a}{c}$ .

No caso em que  $z = -\frac{d}{c}$ , com  $c \neq 0$ , podemos definir  $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ . Em síntese, vamos determinar uma transformação de Möbius com  $ad - bc \neq 0$  como uma aplicação bijetora  $T : \mathbb{C}_\infty \mapsto \mathbb{C}_\infty$  dada por

$$T(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } c = 0 \text{ e } z = \infty, \\ \infty, & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = \left(-\frac{d}{c}\right), \\ \frac{a}{c}, & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = \infty, \\ \frac{az + b}{cz + d}, & \text{se } z \neq \left(-\frac{d}{c}\right), \infty. \end{cases} \quad (5.2)$$

Do item ii) da Observação 5.2, observamos que a Transformação de Möbius  $T(z)$  é uma transformação linear afim. É importante destacar que toda aplicação linear afim é uma Transformação de Möbius. Além disso, toda transformação de Möbius é inversível e sua inversa é uma transformação de Möbius.

A proposição a seguir mostra que uma Transformação de Möbius qualquer pode ser obtida pela composta das seguintes Transformações de Möbius:

(1) translação:  $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ;

(2) inversão:  $T_2(z) = \frac{1}{z}$ ;

(3) rotação e dilatação (ou contração) em relação a origem  $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$ ;

(4) translação:  $T_4(z) = \frac{a}{c} + z$ .

**Proposição 5.3.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números complexos tais que  $ad - bc \neq 0$  e considere a transformação de Möbius  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Então,*

$$T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z),$$

onde  $T_1$  e  $T_4$  são translações,  $T_3$  dilatação e  $T_2$  inversão.

**Demonstração:**

Iniciemos reescrevendo a fórmula  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ :

$$\begin{aligned}
 T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + \frac{bc}{c} + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{az + \frac{ad}{c} + \frac{bc}{c} - \frac{ad}{c}}{cz + d} \\
 &= \frac{az + \frac{ad}{c} + \frac{bc - ad}{c}}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz + d) + \frac{bc - ad}{c}}{cz + d} \\
 &= \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz + d)}{cz + d} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \\
 &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{c \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)} \\
 &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.
 \end{aligned}$$

Provemos agora que  $T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)$ .

De (1) temos  $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$  e de (2)  $T_2(z) = \frac{1}{z}$ . Logo,

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = \frac{1}{T_1(z)} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

De acordo com o item (3)  $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$ , então

$$\begin{aligned}
 (T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(z) &= T_3 \circ (T_2 \circ T_1)(z) \\
 &= \frac{bc - ad}{c^2} \cdot (T_2 \circ T_1)(z) \\
 &= \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.
 \end{aligned}$$

Finalmente de (4) temos  $T_4(z) = \frac{a}{c} + z$ , resulta,

$$(T_4 \circ (T_3 \circ (T_2 \circ T_1)))(z) = T_4(T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(z) = \frac{a}{c} + (T_3 \circ (T_2 \circ T_1))(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Assim, concluímos que  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)$ .  $\square$

A seguir apresentamos o lema que será utilizado na demonstração do Teorema 5.5 abaixo.

**Lema 5.4.** Qualquer reta ou circunferência no plano pode ser escrita na forma

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Bx - 2Cy + D = 0, \quad (5.3)$$

que descreve uma reta se  $A = 0$  e  $B^2 + C^2 \neq 0$  e, caso  $A \neq 0$ , representará uma circunferência se  $B^2 + C^2 > AD$ .

**Demonstração:**

Para verificar esse lema consideremos os seguintes casos:

- i) Com  $A = 0$ , temos a equação  $-2Bx - 2Cy + D = 0$ , uma vez que a condição  $B^2 + C^2 \neq 0$  garante que  $B$  e  $C$  não sejam ao mesmo tempo nulos, adquirimos a equação de uma reta.
- ii) Já no caso em que  $A \neq 0$  pretendemos mostrar sobre quais condições a equação (5.3) pode representar uma circunferência.

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Bx - 2Cy + D = 0,$$

$$A \left[ x^2 + y^2 - 2 \left( \frac{B}{A} \right) x - 2 \left( \frac{C}{A} \right) y + \frac{D}{A} = 0 \right],$$

$$A \left[ x^2 + y^2 - 2 \left( \frac{B}{A} \right) x - 2 \left( \frac{C}{A} \right) y + \frac{D}{A} = 0 \right],$$

dado que  $A \neq 0$ , resulta

$$x^2 + y^2 - 2 \left( \frac{B}{A} \right) x - 2 \left( \frac{C}{A} \right) y + \frac{D}{A} = 0,$$

completando quadrados, temos

$$x^2 - 2 \left( \frac{B}{A} \right) x + \left( \frac{B}{A} \right)^2 + y^2 - 2 \left( \frac{C}{A} \right) y + \left( \frac{C}{A} \right)^2 + \frac{D}{A} - \left( \frac{B}{A} \right)^2 - \left( \frac{C}{A} \right)^2 = 0,$$

$$\left( x - \frac{B}{A} \right)^2 + \left( y - \frac{C}{A} \right)^2 + \frac{AD - (B^2 + C^2)}{A^2} = 0.$$

Portanto, podemos concluir que essa equação será de uma circunferência se  $A \neq 0$  e  $B^2 + C^2 > AD$ .

□

**Teorema 5.5.** As transformações de Möbius preservam todas as circunferências na esfera, isto é, se  $C$  é uma circunferência em  $\mathbb{C}_\infty$  então,  $T(C)$  também é uma circunferência em  $\mathbb{C}_\infty$ , para qualquer transformação de Möbius  $T$ .

**Demonstração:**

Com base na equação ( 5.3) e as condições dadas, pretendemos obter uma equação equivalente na variável complexa.

Consideremos um número complexo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e o seu conjugado  $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ , daqui

$$x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}, \quad 2x = z + \bar{z}, \quad 2y = -i(z - \bar{z}), \quad (5.4)$$

dessa forma podemos reescrever a equação ( 5.3) como

$$\begin{aligned} Az\bar{z} - B(z + \bar{z}) + iC(z - \bar{z}) + D &= 0, \\ Az\bar{z} - Bz - B\bar{z} + iCz - iC\bar{z} + D &= 0, \\ Az\bar{z} - (B - iC)z - (B + iC)\bar{z} + D &= 0, \end{aligned}$$

Fazendo  $E = B + iC$ , temos o conjugado  $\bar{E} = B - iC$ , logo

$$Az\bar{z} - \bar{E}z - E\bar{z} + D = 0. \quad (5.5)$$

Observemos que a equação (5.5) é uma reta se, e somente se,  $A = 0$  e  $E \neq 0$ , e é uma circunferência se, e somente se,  $A \neq 0$  e  $E\bar{E} - AD > 0$ .

Agora, pretendemos encontrar a imagem da curva dada pela equação (5.5) sob as transformações a seguir:

i) translação:  $T(z) = z + b$ , basta substituímos  $z$  por  $z + b$  na equação (5.5)

$$A(z + b)(\overline{z + b}) - \bar{E}(z + b) - E(\overline{z + b}) + D = 0,$$

fazendo  $z + b = q$ , obtemos

$$Aq\bar{q} - \bar{E}q - E\bar{q} + D = 0.$$

ii) rotação:  $T(z) = \beta z$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\beta| = 1$ . Substituindo  $z$  por  $\beta z$  na equação (5.5)

$$A(\beta z)(\overline{\beta z}) - \bar{E}(\beta z) - E(\overline{\beta z}) + D = 0,$$

tomando  $r = \beta z$ , temos

$$Ar\bar{r} - \bar{E}r - E\bar{r} + D = 0,$$

iii) homotetia:  $T(z) = \gamma z$ ,  $\gamma > 0$ . Substituindo  $z$  por  $\gamma z$  na equação (5.5)

$$A(\gamma z)(\overline{\gamma z}) - \bar{E}(\gamma z) - E(\overline{\gamma z}) + D = 0,$$

fazendo  $s = \gamma z$ , resulta

$$As\bar{s} - \bar{E}s - E\bar{s} + D = 0.$$

Observemos que nos três itens acima, obtivemos equações do mesmo tipo da equação (5.5) e com as mesmas características, provando que a translação, a rotação e a homotetia levam reta em reta e circunferência em circunferência.

Utilizando o mesmo processo, vamos analisar o que acontecerá com a inversão  $T(z) = \frac{1}{z}$ . Substituindo  $z$  por  $\frac{1}{z}$  na equação (5.5), obtemos

$$A \frac{1}{z\bar{z}} - \bar{E} \frac{1}{z} - E \frac{1}{\bar{z}} + D = 0,$$

multiplicando por  $z\bar{z}$  ambos os lados da equação, resulta

$$A - \bar{E}z - Ez + Dz\bar{z} = 0,$$

ou seja,

$$Dz\bar{z} - Ez - \bar{E}z + A = 0. \quad (5.6)$$

Daqui, a equação (5.6) tem a mesma forma da equação (5.5), considerando um cambio nas variáveis  $A, \bar{E}, E, D$  por  $D, E, \bar{E}, A$ , nessa ordem. Logo,

- 1) Se a equação (5.5) determina uma circunferência que não passa pela origem, ou seja,  $z = 0$  não é solução desta equação, então  $D \neq 0$ . Assim, a equação (5.6) determina também uma circunferência que não passa pela origem, já que  $E\bar{E} - AD > 0$  e  $A \neq 0$ .
- 2) Se a equação (5.5) determina uma circunferência que passa pela origem, ou seja, se  $D = 0$ , então em (5.6) obtemos uma reta que não passa pela origem, pois  $A \neq 0$ .
- 3) Se a equação (5.5) determina uma reta que não passa pela origem, ou seja, se  $A = 0$ ,  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$ , então (5.6) determina uma circunferência que passa pela origem.
- 4) Finalmente, se a equação (5.5) determina uma reta que passa pela origem, isto é, se  $A = D = 0$  e  $E \neq 0$ , a equação (5.6) determina uma reta que passa pela origem.

As consequências apresentadas acima podem ser resumidas no quadro abaixo:

Quadro 1: Transformação de Möbius  $1/z$ .

$z$	$1/z$
circunferência que não passa pela origem	circunferência que não passa pela origem
circunferência que passa pela origem	reta que não passa pela origem
reta que não passa pela origem	circunferência que passa pela origem
reta que passa pela origem	reta que passa pela origem

Fonte: Arquivo pessoal.

## 5.1 Pontos Fixos

O conceito de pontos fixos é extremamente importante para mostrar a existência de uma única transformação de Möbius que aplica três pontos dados em outros três pontos dados.

**Definição 5.6.** Seja  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  uma aplicação. Dizemos que um ponto  $p$  do domínio de  $f$  é um ponto fixo se  $f(p) = p$ .

Por definição, os pontos fixos de uma transformação de Möbius  $T$  serão as soluções da equação

$$T(z) = z$$

daqui,

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= z \\ az + b &= cz^2 + dz \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0. \end{aligned}$$

- **Caso em que  $c \neq 0$ :**

Na condição de  $c \neq 0$  temos uma equação quadrática, que no conjunto  $\mathbb{C}_\infty$ , admitirá duas soluções distintas ou uma solução com multiplicidade dois. Assim, teremos no máximo dois pontos fixos, da forma

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (5.7)$$

Supondo  $T$  normalizada, isto é,  $ad - bc = 1$ . Logo,  $ad - bc = 1 \iff bc = ad - 1$  e substituindo em (5.7) segue

$$\begin{aligned} z &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4(ad - 1)}}{2c} \\ &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{d^2 - 2ad + a^2 + 4ad - 4}}{2c} \\ &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4}}{2c} \\ &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}. \end{aligned}$$

No caso particular onde  $a + d = \pm 2$  obtemos  $z = \frac{(a - d)}{2c}$  como o único ponto fixo.

- **Caso em que  $c = 0$ :**

No caso em que  $c = 0$  devemos observar as duas condições a seguir:

i) Se  $d \neq a$ :

$$T(z) = \frac{az + b}{d}$$

$$z = \frac{az + b}{d}$$

$$dz = az + b$$

$$dz - az = b$$

$$z = \frac{b}{d - a},$$

dessa forma,  $z = \frac{b}{d - a}$  é um ponto fixo, e vale observar que, por (5.2), tem-se  $T(\infty) = \infty$ . Assim, o  $\infty$  é outro ponto fixo.

ii) Se  $d = a$ :

$$T(z) = \frac{az + b}{d}$$

$$T(z) = \frac{az}{a} + \frac{b}{a}$$

$$T(z) = z + \frac{b}{a},$$

que corresponde uma translação. Daqui,  $T(\infty) = \infty$ , ou seja,  $\infty$  é o único ponto fixo.

Nos casos de **homotetia** (dilatação ou contração) e **rotação**, resulta que  $T(0) = 0$  e  $T(\infty) = \infty$ , motivos pelos quais  $T$  tem como domínio e contradomínio ao conjunto  $\mathbb{C}_\infty$ .

Finalmente, no caso da inversão,

$$T(z) = \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{1}{z}$$

$$z^2 = 1$$

$$z = \pm 1,$$

o que significa que  $-1$  e  $1$  serão seus pontos fixos.

## 5.2 Razão Cruzada

A razão cruzada é útil para definirmos transformações de Möbius que levam três pontos determinados  $z_1, z_2$  e  $z_3$  em outros três pontos determinados  $w_1, w_2$  e  $w_3$ .

**Definição 5.7.** O número complexo dado por

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (5.8)$$

é chamado de **razão cruzada** para  $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .

**Observação 5.8.** i) Destacamos que a ordem dos números complexos é extremamente importante quando substituídos na Fórmula (5.8).

ii) A extensão da razão cruzada em  $\mathbb{C}_\infty$  é definida por

$$[\infty, z_1, z_2, z_3] = \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_1, z_2, z_3] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

**Teorema 5.9.** A razão cruzada é invariante por uma Transformação de Möbius.

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser vista em [2], p. 70.  $\square$

**Observação 5.10.** Seja  $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  e  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  deixa invariante a razão cruzada  $[z, z_1, z_2, z_3]$ , quando

$$[f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)] = [z, z_1, z_2, z_3].$$

**Teorema 5.11.** Dados três pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$ ,  $z_1, z_2, z_3$ , e outros três pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$ ,  $w_1, w_2, w_3$ , existe uma única transformação de Möbius  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , tal que  $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$  e  $T(z_3) = w_3$ .

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser vista em [2], p. 72.  $\square$

**Observação 5.12.** Adotando  $T(z) = w$ , a equação

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (5.9)$$

define, implicitamente uma transformação de Möbius  $T$ , que mapeia os números complexos distintos  $z_1, z_2, z_3$  em  $w_1, w_2, w_3$ , distintos respectivamente.

**Exemplo 5.13.** Vamos determinar a transformação de Möbius  $T$  tal que  $T(i) = 1, T(1) = i$  e  $T(0) = -1$ .

**Resolução:**

Utilizando a notação da equação (5.9), temos:

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 0,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = i, \quad w_3 = -1.$$

Substituindo em (5.9) e efetuando o produto cruzado, obtemos  $w$  em função de  $z$ .

$$\frac{(w-1)}{(w-(-1))} \cdot \frac{(i-(-1))}{(i-1)} = \frac{(z-i)}{(z-0)} \cdot \frac{(1-0)}{(1-i)}$$

$$\frac{(wi+w-i-1)}{(wi-w+i-1)} = \frac{(z-i)}{(z-zi)}$$

$$(wi+w-i-1) \cdot (z-zi) = (wi-w+i-1) \cdot (z-i)$$

$$wzi + wz - zi - z + wz - wzi - z + zi = wzi - wz + zi - z + w + wi + 1 + i$$

$$2wz - 2z = wzi - wz + zi - z + w + wi + 1 + i$$

$$2wz - wzi + wz - w - wi = zi + z + 1 + i + 2z$$

$$3wz - wzi - w - wi = zi + z + 1 + i$$

$$w(3z - zi - 1 - i) = zi + z + 1 + i$$

$$w = \frac{zi + z + 1 + i}{3z - zi - 1 - i}$$

$$w = \frac{z(i+1) + 1 + i}{z(3-i) - 1 - i}$$

Portanto, a transformação de Möbius  $T$  é dada por

$$T(z) = \frac{z(i+1) + 1 + i}{z(3-i) - 1 - i}$$

$$= \frac{(z+1)(1+i)}{z(3-i) - 1 - i},$$

é a única transformação de Möbius tal que:

$$T(i) = \frac{i(i+1) + 1 + i}{i(3-i) - 1 - i} = \frac{2i}{2i} = 1;$$

$$T(1) = \frac{1(i+1) + 1 + i}{1(3-i) - 1 - i} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{2+2i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = i;$$

$$T(0) = \frac{0(i+1) + 1 + i}{0(3-i) - 1 - i} = \frac{1+i}{-1-i} = -1.$$

**Observação 5.14.** i) Para determinar a transformação de Möbius através da equação (5.9) usando  $\infty$  como um dos pontos do domínio ou contradomínio, por exemplo,  $z_i = \infty$  para

algum  $i = 1, 2, 3$ , basta reescrever a equação (5.9) e calcular o limite quando o módulo desse ponto  $z_i$  tende para o  $\infty$ .

ii) Na prática, basta desconsiderar os fatores de (5.9) que contenham um ponto do domínio ou contradomínio igual a  $\infty$ .

**Exemplo 5.15.** Vamos determinar a transformação de Möbius  $T$  tal que  $T(\infty) = 1$ ,  $T(1) = -1$  e  $T(0) = \infty$ .

**Resolução:**

Temos:

$$\begin{aligned} z_1 = \infty, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 0, \\ w_1 = 1, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = \infty. \end{aligned}$$

Calculando o limite quando  $z_1$  e  $w_3$  tende para o infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - z_1)(z_2 - z_1)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} &= \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{z}{z_1} - 1\right) z_1 (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \left(\frac{z_2}{z_1} - 1\right) z_1} \\ &= \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{z \bar{z}_1}{|z_1|^2} - 1\right) (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \left(\frac{z_2 \bar{z}_1}{|z_1|^2} - 1\right)} \\ &= \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{w_3 \rightarrow \infty} \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} &= \lim_{w_3 \rightarrow \infty} \frac{(w - w_1) \left(\frac{w_2}{w_3} - 1\right) w_3}{\left(\frac{w}{w_3} - 1\right) w_3 (w_2 - w_1)} \\ &= \lim_{w_3 \rightarrow \infty} \frac{(w - w_1) \left(\frac{w_2 \bar{w}_3}{|w_3|^2} - 1\right)}{\left(\frac{w \bar{w}_3}{|w_3|^2} - 1\right) (w_2 - w_1)} \\ &= \frac{(w - w_1)}{(w_2 - w_1)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a seguinte equação com  $w$  em função de  $z$ ,

$$\frac{(w - w_1)}{(w_2 - w_1)} = \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}.$$

Resolvendo essa equação, resulta

$$\frac{(w-1)}{(-1-1)} = \frac{(1-0)}{(z-0)}$$

$$w = \frac{-2+z}{z}.$$

Portanto, a transformação de Möbius  $T$  é dada por

$$T(z) = \frac{-2+z}{z},$$

resultando ser a única transformação de Möbius. Notemos que nessa transformação  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$ , e  $d = 0$ .

Conforme a definição (5.2) temos que  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ , daqui

$$T(\infty) = \frac{a}{c} = 1;$$

$$T(1) = \frac{-2+1}{1} = -1;$$

$$T(0) = \frac{b}{d}, \text{ como } d = 0 \text{ temos que, } T(0) = \infty.$$

A partir dessa introdução que vimos sobre as transformações de Möbius, apresentaremos uma aplicação, que relaciona essas transformações, com transformações em uma esfera, e também com projeções na esfera e no plano complexo estendido. Dessa forma, pretendemos utilizar grande parte dos estudos realizados nos capítulos anteriores.

## Capítulo 6

# Aplicação: Transformações de Möbius e Transformações na Esfera

Neste capítulo, apresentaremos uma aplicação relacionando as transformações de Möbius e as transformações na esfera, para uma melhor visualização utilizaremos o software GeoGebra. Para o desenvolvimento deste capítulo usamos como base a referência [7].

O estudo dessa aplicação tem o objetivo de mostrar que dada uma transformação de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tais que  $ad - bc \neq 0$ , e uma esfera dada por

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2 = r^2, u_0 > 0\}, \quad (6.1)$$

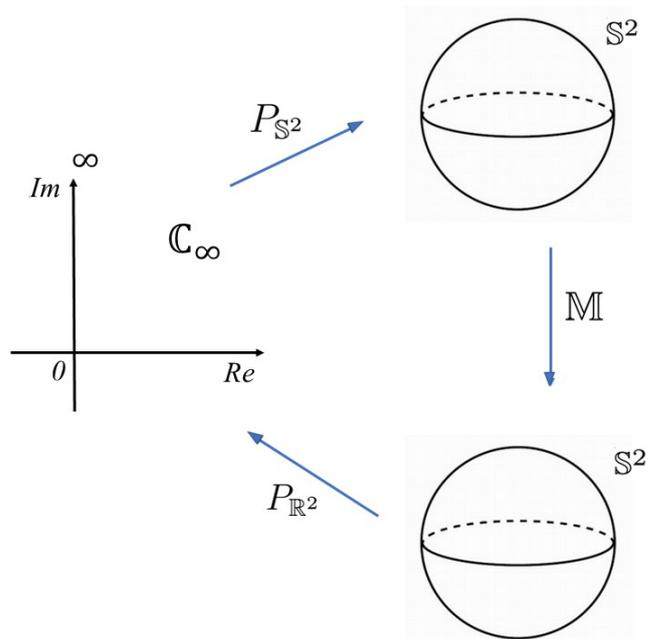
para algum ponto  $(x_0, y_0, u_0)$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Existe uma transformação  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ M \circ P_{\mathbb{S}^2})(w),$$

onde  $P_{\mathbb{R}^2}$  é a projeção da superfície da esfera em  $\mathbb{R}^3$  no plano, e  $P_{\mathbb{S}^2}$  é a projeção do plano na superfície de uma esfera em  $\mathbb{R}^3$ , como vemos na figura abaixo.

Figura 6.1



Fonte: Arquivo pessoal.

De acordo com o estudo que realizamos no Capítulo 3 quando deduzimos a projeção estereográfica, agora podemos considerar uma esfera centralizada em qualquer ponto e o plano complexo estendido, e apresentar uma “extensão da projeção estereográfica” conforme a seguinte definição.

**Definição 6.1.** Dada a esfera  $\mathbb{S}^2$ , definida em (6.1) e um ponto  $K = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{S}^2$  com  $K \neq N$ , definimos a transformação *projeção no plano complexo estendido* como

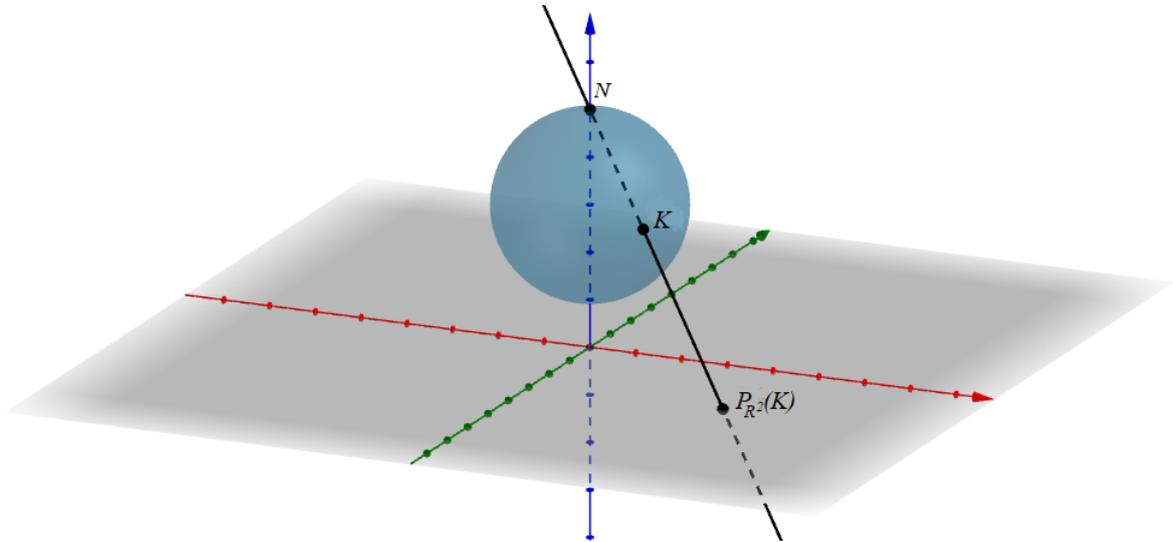
$$\begin{aligned}
 P_{\mathbb{R}^2} : \quad \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\
 N &\longmapsto \infty \\
 (x_k, y_k, z_k) &\longmapsto x + iy
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases}
 x = \frac{x_k(z_0 + r) - x_0 z_k}{z_0 + r - z_k}, \\
 y = \frac{y_k(z_0 + r) - y_0 z_k}{z_0 + r - z_k}.
 \end{cases} \quad (6.2)$$

Analogamente, podemos determinar a inversa da função  $P_{\mathbb{S}^2}$  de acordo com a seguinte definição.

Figura 6.2: Projeção no plano complexo estendido.



Fonte: Arquivo pessoal.

**Definição 6.2.** Dada a esfera  $\mathbb{S}^2$ , definida em (6.1), definimos a transformação *projeção na superfície esférica de  $\mathbb{S}^2$*  como

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_{\infty} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ \infty &\longmapsto (x_0, y_0, z_0 + r) \\ a + ib &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{2r(z_0 + r)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + r)^2}(a - x_0), \\ y = y_0 + \frac{2r(z_0 + r)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + r)^2}(b - y_0), \\ z = z_0 + r - \frac{2r(z_0 + r)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + r)^2}(z_0 + r). \end{cases} \quad (6.3)$$

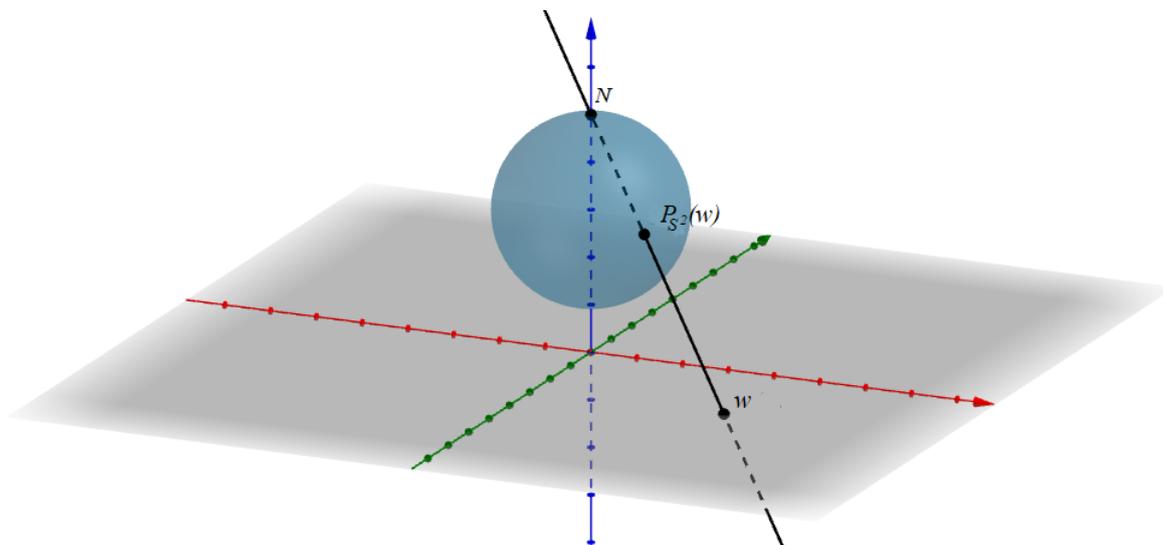
A composta das transformações definidas em (6.2) e (6.3) resulta na identidade e consequentemente são transformações inversas. Dessa forma, para  $w \in \mathbb{C}_{\infty}$  e  $K \in \mathbb{S}^2$ , temos

$$(P_{\mathbb{R}^2} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) = w$$

e

$$(P_{\mathbb{S}^2} \circ P_{\mathbb{R}^2})(K) = K.$$

Figura 6.3: Projeção na superfície esférica.



Fonte: Arquivo pessoal.

Ou seja, se tomarmos a projeção de  $K_w$  no plano complexo estendido, obteremos o ponto  $w$  em  $\mathbb{C}_\infty$ . Se em seguida tomarmos a projeção de  $w$  na superfície esférica obteremos o ponto  $K_w$  em  $\mathbb{S}^2$ .

## 6.1 Movimentos da esfera

Estudaremos agora algumas transformações em  $\mathbb{R}^3$  que se relacionam com as transformações de Möbius. Temos como objetivo mostrar que fixada uma transformação de Möbius  $T$  e uma esfera  $\mathbb{S}^2$  definida em (6.1), existe uma transformação  $\mathbb{M} : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , tal que se  $w \in \mathbb{C}_\infty$ ,  $T(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w)$ , ou seja, primeiramente encontramos a projeção de  $w$  na superfície esférica de  $\mathbb{S}^2$  e posteriormente aplicamos a transformação  $\mathbb{M}$  em  $\mathbb{S}^2$ , gerando  $\mathbb{S}_1^2$ , e como passo final aplicamos a projeção da esfera  $\mathbb{S}_1^2$  no plano, obtendo  $w' \in \mathbb{C}_\infty$  de forma que  $w' = T(w)$ .

Afim de exemplificar como é realizado esse processo, faremos uma análise utilizando duas transformações de Möbius elementares, *translação e multiplicação por complexo*. Seguindo a equação (6.1) da esfera  $\mathbb{S}^2$ , consideremos, adequadamente, uma esfera de diâmetro unitário sobre o plano complexo estendido, de forma que seu polo sul seja a origem de  $\mathbb{R}^3$ . Assim, a esfera  $\mathbb{S}^2$  estará definida da seguinte forma

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Sejam  $w = a + ib = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} - \{0\}$  e  $K = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{S}^2$ , resulta

$$P_{\mathbb{S}^2}(w) = \left( \frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right)$$

e

$$P_{\mathbb{R}^2}(K_w) = \frac{x_k}{1 - z_k} + i \frac{y_k}{1 - z_k}.$$

i) *Análise da transformação translação:*

Considerando  $u = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  e a transformações de Möbius que representa a translação

$T_u : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , dada por

$$T_u(w) = w + u = (a + x_0) + i(b + y_0), \text{ para todo } w \in \mathbb{C}, \text{ e}$$

$$T_u(\infty) = \infty.$$

Por outro lado, seja  $M_{T_u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$M_{T_u}(K) = (x_k + x_0, y_k + y_0, z_k),$$

uma outra transformação translação em  $\mathbb{R}^3$ . Se aplicarmos essa transformação em  $\mathbb{S}^2$ , geramos uma nova esfera  $\mathbb{S}_1^2$ , transladada por  $u$ , isto é,

$$\mathbb{S}_1^2 = M_{T_u}(\mathbb{S}^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

**Provemos que:** A transformação de translação pode ser escrita da seguinte forma

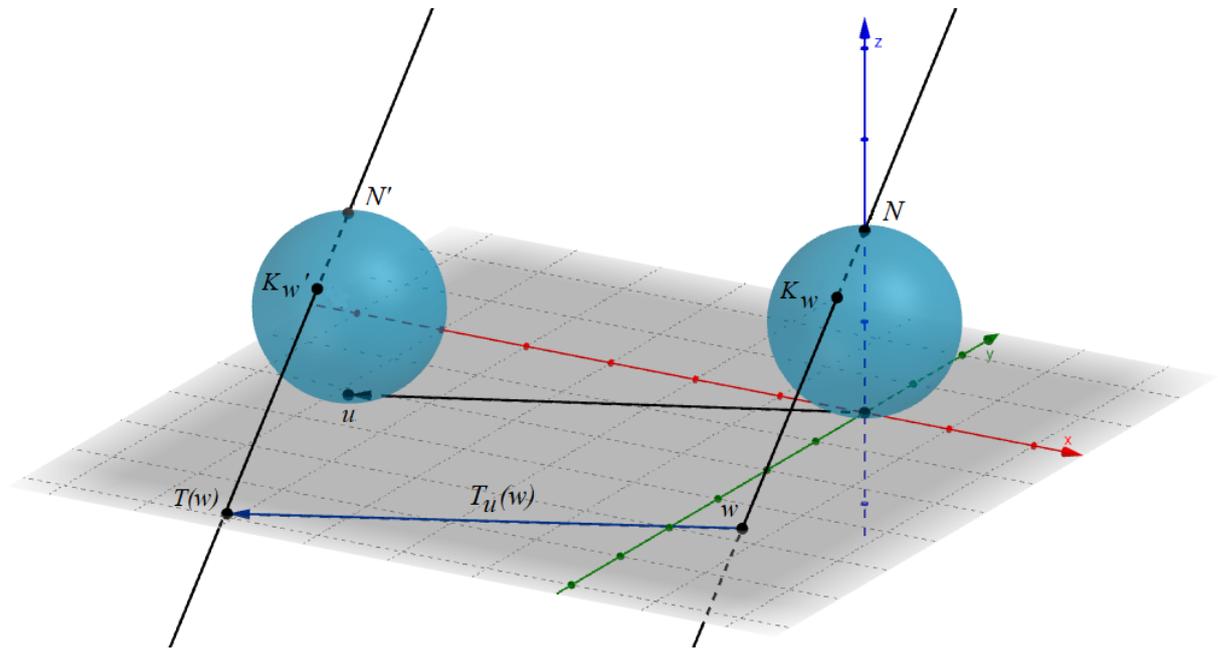
$$T_u(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w).$$

Dadas as transformações, vamos determinar  $(P_{\mathbb{R}^2} \circ M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w)$ .

$$P_{\mathbb{S}^2}(w) = \left( \frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right).$$

Assim,

$$(M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) = M_{T_u}(P_{\mathbb{S}^2}(w)) = \left( \frac{a}{\rho^2 + 1} + x_0, \frac{b}{\rho^2 + 1} + y_0, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right).$$

Figura 6.4:  $T_u(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w)$ .

Fonte: Arquivo pessoal.

Logo,

$$\begin{aligned}
 (P_{\mathbb{R}^2} \circ M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) &= P_{\mathbb{R}^2}(M_{T_u} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) \\
 &= \left( \frac{\frac{a}{\rho^2 + 1} + x_0 - x_0 \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}}{1 - \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}} \right) + i \left( \frac{\frac{b}{\rho^2 + 1} + y_0 - y_0 \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}}{1 - \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{a + x_0 \rho^2 + x_0 - x_0 \rho^2}{\rho^2 + 1}}{\frac{1}{\rho^2 + 1}} \right) + i \left( \frac{\frac{b + y_0 \rho^2 + y_0 - y_0 \rho^2}{\rho^2 + 1}}{\frac{1}{\rho^2 + 1}} \right) \\
 &= (a + x_0 \rho^2 + x_0 - x_0 \rho^2) + i(b + y_0 \rho^2 + y_0 - y_0 \rho^2) \\
 &= (a + x_0) + i(b + y_0) \\
 &= T_u(w).
 \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

ii) *Análise da transformação multiplicação por complexo:*Sejam  $\beta = \rho_0 e^{i\theta_0}$ , um número complexo fixo e  $M_\beta : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  uma transformação,

definida por

$$\mathbb{M}_\beta(w) = \beta w = \rho \rho_0 e^{i(\theta + \theta_0)},$$

para todo  $w \in \mathbb{C}_\infty$ .

Por outro lado, seja  $\mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma transformação, dada por

$$\mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta}(K) = (x_k \cos \theta_0 - y_k \sin \theta_0, \sin \theta_0 + y_k \cos \theta_0, Z_k + \rho_0 - 1),$$

representando uma rotação em torno do eixo- $z$  e uma traslação vertical. Ou seja, através dessa transformação rotacionamos um ponto  $K \in \mathbb{R}^3$  em torno do eixo- $z$  por um ângulo  $\theta_0$  e, logo, trasladamos o resultado verticalmente por  $\rho_0 - 1$  unidades. Dessa forma, o resultado de aplicar essa transformação em  $\mathbb{S}^2$  é a esfera

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \rho_0 + 0.5)^2 = 0.25\}.$$

**Provemos que:** A transformação de multiplicação por complexo pode ser escrita da seguinte forma  $\mathbb{M}_\beta(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w)$ .

Sabemos que

$$P_{\mathbb{S}^2}(w) = \left( \frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right),$$

logo,

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) = \mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta}(P_{\mathbb{S}^2}(w)) = \left( \frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\rho^2 + 1}, \frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\rho^2 + 1}, \rho_0 - \frac{1}{\rho^2 + 1} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (P_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) &= P_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{M}_{\mathbb{M}_\beta} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w) \\ &= \left( \frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\rho^2 + 1} \rho_0 \right) + i \left( \frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\rho^2 + 1} \rho_0 \right) \\ &= \left( \frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\frac{1}{\rho^2 + 1}} \rho_0 \right) + i \left( \frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\frac{1}{\rho^2 + 1}} \rho_0 \right) \\ &= (a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0) \rho_0 + i(a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0) \rho_0 \\ &= \rho_0(\rho \cos \theta \cos \theta_0 - \rho \sin \theta \sin \theta_0 + i \rho \cos \theta \sin \theta_0 + \\ &\quad i \rho \sin \theta \cos \theta_0) \\ &= \{\rho[\cos(\theta_0 + \theta)]\} \rho_0 + i\{\rho[\sin(\theta_0 + \theta)]\} \rho_0 \\ &= \rho \rho_0 [\cos(\theta + \theta_0) + i \sin(\theta + \theta_0)] \\ &= \rho \rho_0 e^{i(\theta + \theta_0)} \\ &= \mathbb{M}_\beta(w). \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

## 6.2 Uma Análise da Transformação de Möbius e a Esfera

Na Proposição 5.3 mostramos que uma transformação de Möbius  $T$  pode ser escrita como combinação de transformações elementares, tais como translação, rotação e inversão. Assim, com o estudo que realizamos dos movimentos da esfera na seção anterior, observamos que podemos escolher uma esfera  $\mathbb{S}^2$  apropriada e uma transformação  $\mathbb{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que também pode estar representada como combinação de transformações elementares, tais como translação e rotação, de forma que

$$T(w) = (P_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M} \circ P_{\mathbb{S}^2})(w).$$

Como vimos anteriormente na Proposição 5.3, dada uma Transformação de Möbius qualquer,

$$T(w) = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad (6.4)$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ , esta pode ser escrita como a composta de transformações de Möbius, da seguinte forma:

$$T(w) = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(w),$$

onde

$$T_1(w) = w + \frac{d}{c}, \quad T_2(w) = \frac{1}{w}, \quad T_3(w) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot w \quad \text{e} \quad T_4(w) = \frac{a}{c} + w.$$

A seguir, apresentaremos a técnica para replicar o comportamento de uma Transformação de Möbius  $T$  através de projeções e movimentos de uma esfera. Considerando a transformação de Möbius definida em (6.4) e as seguintes equações

$$\frac{d}{c} = x_1 + iy_1, \quad \frac{bc - ad}{c^2} = \rho_0 e^{i\theta_0} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c} = x_2 + iy_2.$$

Seguiremos os seguintes passos:

**Passo 1:** Usar a esfera  $\mathbb{S}^2$  de diâmetro unitário, centrada em  $C = (-x_1, -y_1, 0.5)$ .

**Passo 2:** Projetar  $w = a + ib$  na esfera  $\mathbb{S}^2$  através da projeção  $P_{\mathbb{S}^2}(w)$ , gerando o ponto  $K_w$  na esfera.

**Passo 3:** Transladar a esfera  $\mathbb{S}^2$  em função do vetor  $v_1 = (x_1, y_1, 0)$ , gerando a esfera  $\mathbb{S}_1^2$  de diâmetro unitário, centralizada em  $C' = (0, 0, 0.5)$  e  $K'_w$  o ponto transladado de  $K_w \in \mathbb{S}^2$  em  $\mathbb{S}_1^2$ .

**Passo 4:** Rotacionar em  $\pi$  rad a esfera  $\mathbb{S}_1^2$  em torno da reta  $t$ , dado a equação vetorial

$$X \in t : X = (0, 0, 0.5) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

obtendo  $K_w''$ .

**Passo 5:** Rotacionar em  $\theta_0$  rad a esfera em torno do eixo- $z$  e transladar verticalmente em função do vetor  $v_2 = (0, 0, \rho_0 - 1)$  obtendo  $K_w'''$ .

**Passo 6:** Transladar a esfera em função do vetor  $v_3 = (x_2, y_2, 0)$ , obtendo  $K_w''''$ .

**Passo 7:** Utilizar a projeção  $P_{\mathbb{R}^2}$  em  $K_w''''$ , obtendo  $T(w)$ .

**Exemplo 6.3.** Dada uma transformação de Möbius, definida por

$$T(w) = \frac{w + i}{iw - 2 - i}.$$

Utilizando os passos detalhados acima, vamos determinar a transformação  $\mathbb{M}$  e, em seguida, vamos analisar como ela mapeia a reta  $n$  que passa por  $w_1 = 2$  e  $w_2 = \frac{1}{2}[(1 - 3i) - \sqrt{-4 - 6i}]$ .

**Resolução:**

Comparando a transformação de Möbius

$$T(w) = \frac{w + i}{iw - 2 - i},$$

com a equação (6.4), temos

$$a = 1, \quad b = i, \quad c = i, \quad d = -2 - i.$$

Logo,

$$\frac{d}{c} = -1 + 2i, \quad \frac{bc - ad}{c^2} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad \frac{a}{c} = -i.$$

Dessa forma, podemos aplicar o passo a passo descrito acima.

- **Passo 1:** Consideremos a esfera  $\mathbb{S}^2$  de diâmetro unitário e centrada em  $C = (1, -2, 0.5)$ .
- **Passo 2:** Vamos projetar  $w_1 = 2 \in \mathbb{C}_\infty$ , na esfera  $\mathbb{S}^2$  para determinar as coordenadas do ponto  $K_{w_1} \in \mathbb{S}^2$ . Utilizando a equação (6.3), obtemos.

$$x = 1 + \frac{2 \cdot 0.5(0.5 + 0.5)}{(1 - 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (0.5 + 0.5)^2}(2 - 1) = \frac{7}{6},$$

$$y = -2 + \frac{2 \cdot 0.5(0.5 + 0.5)}{(1 - 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (0.5 + 0.5)^2}(0 + 2) = -\frac{5}{3},$$

$$z = 0.5 + 0.5 - \frac{2 \cdot 0.5(0.5 + 0.5)}{(1 - 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (0.5 + 0.5)^2}(0.5 + 0.5) = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Assim, } K_{w_1} = P_{\mathbb{S}^2}(w_1) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{6}\right).$$

- **Passo 3:** Transladamos a esfera  $\mathbb{S}^2$  em função do vetor  $v_1 = (-1, 2, 0)$ , gerando a esfera  $\mathbb{S}_1^2$  de diâmetro unitário, centralizada em  $C' = (0, 0, 0.5)$ ,  $K'_{w_1} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) \in \mathbb{S}_1^2$ .
- **Passo 4:** Para fazer o processo de rotacionar em  $\pi$  rad a esfera  $\mathbb{S}_1^2$  em torno da reta  $t$ , é o mesmo processo de rotacionar em  $\pi$  rad a esfera  $\mathbb{S}_1^2$  em torno do eixo- $x$  e, em seguida, transladá-la verticalmente pelo vetor  $v = 2(0, 0, 0.5)$ . Dessa forma, obtemos a esfera  $\mathbb{S}_2^2$ .

Primeiro apresentamos a matriz de rotação em  $\pi$  rad em torno do eixo- $x$ :

$$R_\pi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi \\ 0 & \operatorname{sen} \pi & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A seguir determinamos a rotação do vetor  $K'_{w_1} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ :

$$R_\pi(K'_{w_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Agora vamos transladar o vetor  $R_\pi(K'_{w_1})$  em função do vetor  $v = 2(0, 0, 0.5)$ :

$$K''_{w_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Portanto  $K''_{w_1} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \in \mathbb{S}_2^2$ . Analogamente, faremos o mesmo processo para determinar  $C''$ , que é o centro da esfera  $\mathbb{S}_2^2$ .

Primeiro rotacionamos:

$$R_\pi(C') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

logo, transladamos:

$$C'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos concluir que  $C' = C''$ .

- **Passo 5:** Vamos rotacionar em  $\frac{5\pi}{4}$  rad a esfera  $\mathbb{S}_2^2$  em torno do eixo- $z$  e, em seguida, transladá-la verticalmente em função do vetor  $v_2 = (0, 0, \sqrt{2} - 1)$ , obtendo a esfera  $\mathbb{S}_3^2$ .

Primeiro apresentamos a matriz rotação do ângulo  $\frac{5\pi}{4}$  rad:

$$R_{\frac{5\pi}{4}}(z) = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{4} & -\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} & 0 \\ \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} & \cos \frac{5\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A seguir determinamos a rotação do vetor  $K''_{w_1} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ :

$$R_{\frac{5\pi}{4}}(K''_{w_1}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos transladar esse vetor verticalmente em função do vetor  $v_2 = (0, 0, \sqrt{2} - 1)$ :

$$K'''_{w_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} - \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Portanto  $K'''_{w_1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2} - \frac{5}{6}\right) \in \mathbb{S}_3^2$ .

Para encontrar  $C'''$ , ou seja, o centro da esfera  $\mathbb{S}_3^2$ , calculamos a soma

$$C''' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim temos,  $C''' = \left(0, 0, \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ .

- **Passo 6:** Transladamos a esfera  $\mathbb{S}_3^2$  pelo vetor  $v_3 = (0, -1, 0)$ , obtendo a esfera  $\mathbb{S}_4^2$  e o ponto

$$K''''_{w_1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{4} - 1, \sqrt{2} - \frac{5}{6}\right).$$

Para encontrar  $C''''$ , o centro da esfera  $\mathbb{S}_4^2$ , calculamos

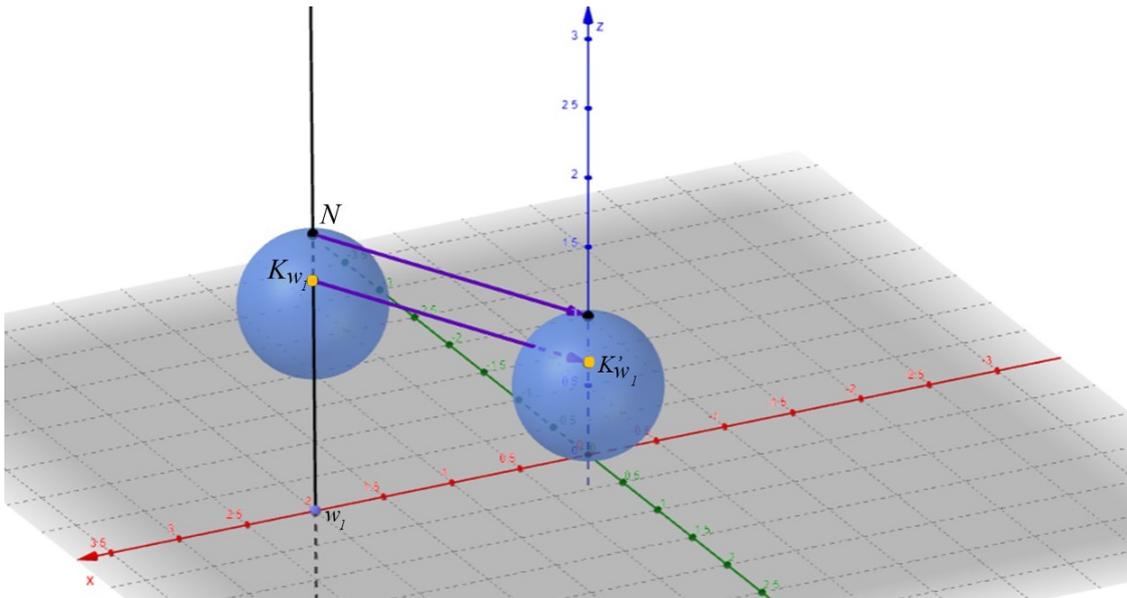
$$C'''' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim temos,  $C'''' = \left(0, -1, \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ .

- **Passo 7:** Utilizamos a equação (6.2) para aplicar a projeção  $P_{\mathbb{R}^2}$  em  $K''''_{w_1}$  e  $C''''$ , obtendo  $T(w_1) = P_{\mathbb{R}^2}(K''''_{w_1}) = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$ .

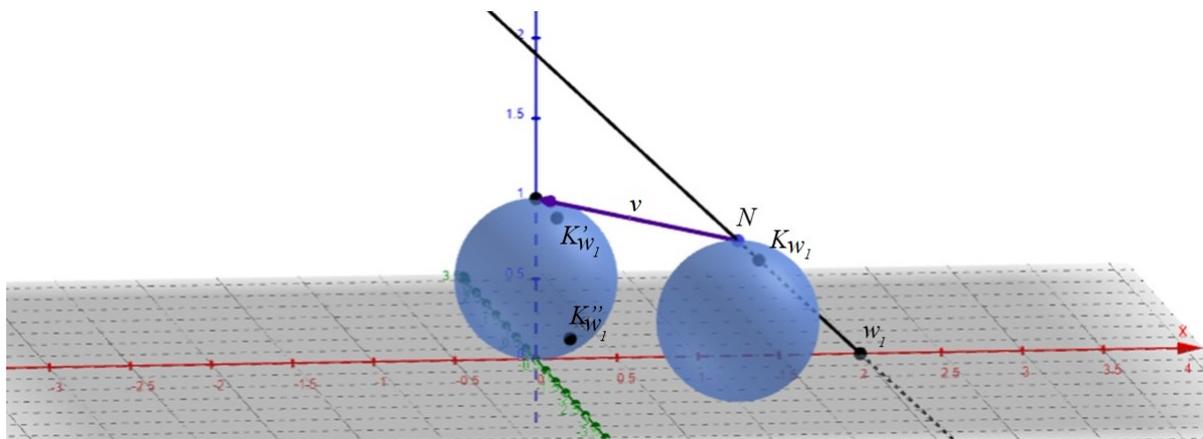
A seguir apresentaremos as ilustrações referentes à técnica utilizada acima, na qual, replicamos o comportamento da transformação  $T(w)$  através de projeções e movimentos de uma esfera.

Figura 6.5: Passos 1, 2 e 3.



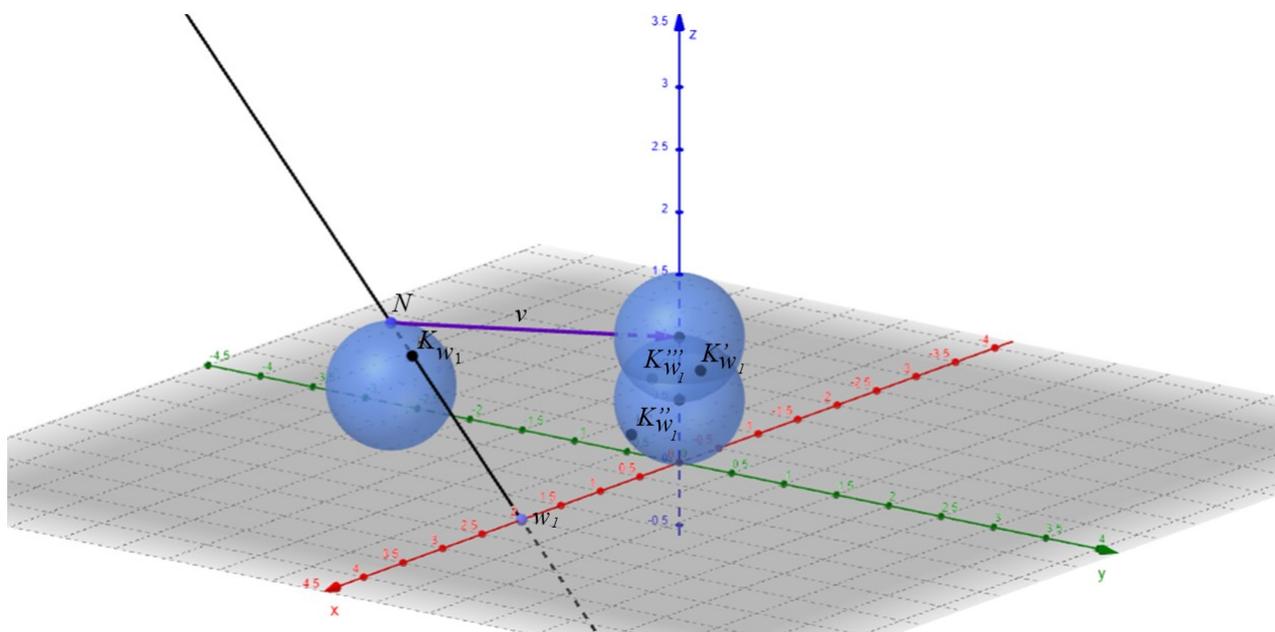
Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 6.6: Passo 4.



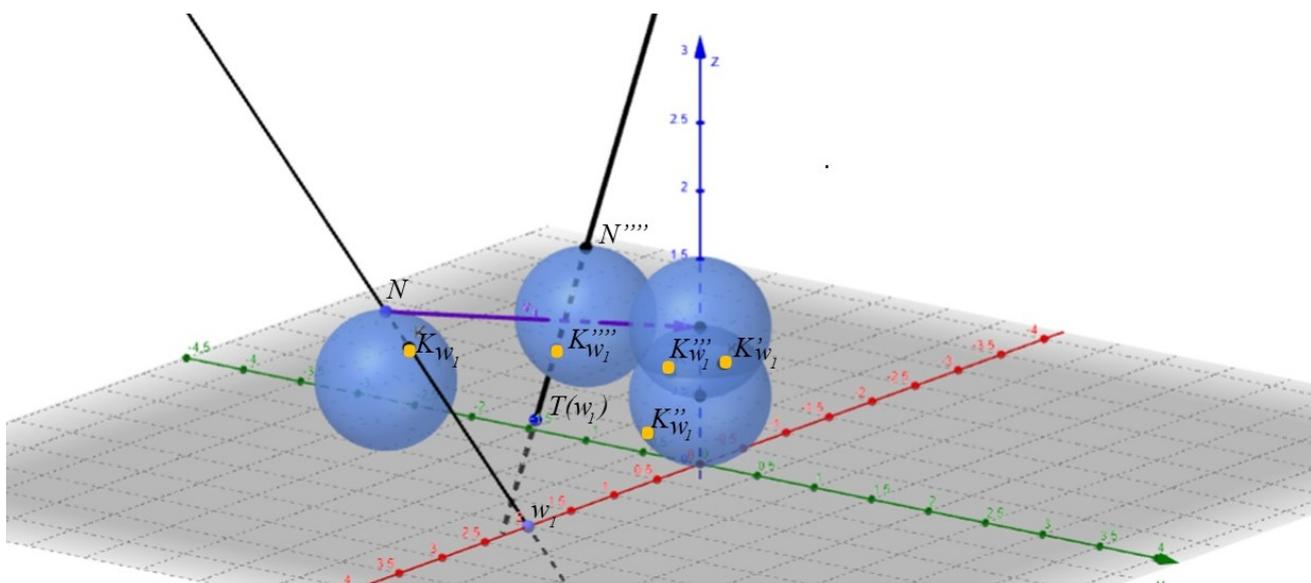
Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 6.7: Passo 5.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 6.8: Passos 6 e 7.



Fonte: Arquivo pessoal.



# Capítulo 7

## Considerações Finais

Com base no exposto nesta monografia sobre a Projeção Estereográfica e as Transformações de Möbius, procuramos mostrar a relevância e abrangência dessas temáticas, destacando suas principais propriedades e trazendo algumas aplicações.

Dessa forma, mostramos a importância dos números complexos no processo de transferir estereograficamente pontos de uma superfície esférica para um plano de projeção e vice-versa, aqui esse plano é denominado plano complexo estendido.

Experimentamos a valiosa utilidade do software GeoGebra, para gerar algumas figuras nas demonstrações e também nas aplicações, visando tornar a compreensão mais acessível ao leitor, pois o software possibilita criar ilustrações em 3D. Usamos também o software Adobe Photoshop CS6, para mostrar a aplicação da projeção estereográfica na fotografia, explorando os efeitos que essa técnica pode criar a partir de imagens panorâmicas.

Por outro lado, conseguimos apresentar uma aplicação das transformações de Möbius e as transformações de uma esfera sobre um plano complexo, a partir das transformações elementares (*translação, rotação e inversão*). Devido à importância dessa aplicação, buscamos detalhar cada passo tanto de forma escrita, quanto através de animações em 3D no GeoGebra.

Assim, buscamos analisar de forma introdutória as teorias e algumas aplicações que consideramos relevantes, das Transformações de Möbius e da projeção estereográfica. Acreditamos que com esse trabalho, conseguimos, na medida do possível, despertar a curiosidade do leitor para buscar e explorar um pouco mais sobre esses assuntos, que trazem consigo uma contribuição significativa tanto para a Matemática, como para a ciência de um modo geral. Além disso, me proporcionou conhecimentos não vistos na graduação, permitindo acrescentar novos conceitos matemáticos à minha formação.

# Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [2] CALISTER, Fernando Marques. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [3] DURAN, Franciéli. **Transformações de Möbius e inversões**. Rio Claro-SP, 2013.
- [4] FERNANDEZ, Cecília S. **Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos**. 2011.
- [5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**, Volume 6: complexos, polinômios, equações. São Paulo, SP, Brasil: Atual, v. 72, p. 74-76, 2014.
- [6] NUNES, Euderley de Castro et al. **A esfera de Riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio**. Manaus, 2015.
- [7] RAIZ, Caio Eduardo Martins. **Transformações de Mobius e projeções na esfera de Riemann**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2018.
- [8] SILVA, Alexandre Manuel Morais Mena. **Projeção estereográfica: propriedades e aplicações**. 2011.
- [9] TOLEDO, Cleber. **Portal CT**, 2020. Disponível em: <<https://clebertoledo.com.br/tocantins/tocantins-registra-706-casos-de-covid-19-em-apenas-2-dias-araguaina-mais-298-e-palmas-82/>>. Acesso em: 15 de ago. 2020.
- [10] TURISMO. Prefeitura de Araguaína. Disponível em: <<https://araguaina.to.gov.br/portal/paginas.php?p=turismo:text=História>>. Acesso em: 15 de ago. 2020.
- [11] TUTORIART. **Projeção Estereográfica: crie “planetas” a partir de panoramas**. Disponível em: <<https://www.tutoriart.com.br/projecao-estereografica-crie-planetas-partir-suas-fotos/>>. Acesso em: 11 de ago. 2020.