



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GUILHERME SILVA GUIDA

**CONFIGURAÇÕES DE PONTOS NO PLANO: O TEOREMA DE SILVESTER-
GALLAI**

Araguaína

2022

GUILHERME SILVA GUIDA

**CONFIGURAÇÕES DE PONTOS NO PLANO: O TEOREMA DE SILVESTER-
GALLAI**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Araguaína

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

G946c Guida, Guilherme Silva.
 CONFIGURAÇÕES DE PONTOS NO PLANO: O TEOREMA DE
 SILVESTER-GALLAI . / Guilherme Silva Guida. – Araguaína, TO,
 2022.
 47 f.

 Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins –
 Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.
 Orientador: José Carlos de Oliveira Junior

 1. Pontos. 2. Retas. 3. Geometria Plana. 4. Geometria Analítica.
I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GUILHERME SILVA GUIDA

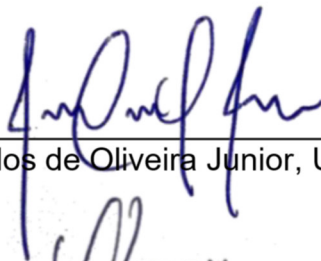
CONFIGURAÇÕES DE PONTOS NO PLANO: O TEOREMA DE SILVESTER-GALLAI

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

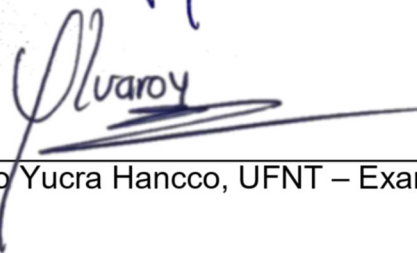
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Data de aprovação: 28 / 06 / 2022

Banca Examinadora:



Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT – Orientador



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco, UFNT – Examinador



Prof. Victor Wender Soares Silva, CBJA – Examinador

Araguaína

2022

*À minha amada mãe Maria Eudes da Silva Guida,
aos meus irmãos Eudeane da Silva Guida,
Gildeane da Silva Guida, Rafael da Silva Guida e
Josiel da Silva Guida. Em memória de meu pai
Raimundo Carneiro Guida e do meu filho Heitor
Henrique Ribeiro da Silva.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer a Deus, por ter me abençoado, me dado forças e por ter cuidado da minha saúde. Agradecer a toda minha família, em especial aos meus irmãos Eudeane da Silva Guida, Gildeane da Silva Guida, Rafael da Silva Guida e Josiel da Silva Guida e minha mãe Maria Eudes da Silva Guida que sempre estiveram do meu lado e não mediram esforços para me ajudar nessa jornada.

Agradecer a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins por terem contribuído de forma direta e indireta na minha jornada, em especial ao meu orientador Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior pela paciência e dedicação.

Agradecer à minha namorada Patrícia Martins Leite por ter me dado forças pra continuar e aos amigos que a universidade me deu, por terem me acompanhado e deixado meus dias mais felizes.

Enfim agradecer a todos que me deram forças, conselhos, sabedoria e torceram pela minha felicidade, sou muito feliz por contar com todos vocês em minha vida.

RESUMO

O presente trabalho consiste em uma pesquisa na área de Geometria Plana com um olhar Analítico, tendo como objetos principais de estudo os elementos primitivos da Geometria Euclidiana Plana, que são os pontos e as retas. Serão abordadas neste trabalho as demonstrações referentes a dois teoremas e algumas curiosidades sobre eles. Inicialmente, discutiremos sobre o teorema de Sylvester-Gallai, e, logo após, apresentaremos um segundo teorema, que é uma das aplicações do primeiro resultado. Para demonstrar cada um desses resultados, utilizamos o método de Demonstração por Contraposição e a demonstração por Indução Finita. A presente pesquisa pode ser inserida na abordagem de pesquisa qualitativa, com procedimentos de investigação de caráter bibliográfico. Os dados analisados e utilizados como base de pesquisa estão contidos em livros e artigos científicos, que serviram de aporte teórico para a demonstração dos dois resultados centrais de uma forma mais clara e didática.

Palavras-chaves: Pontos; Retas; Plano Cartesiano; Geometria Plana; Geometria Analítica.

ABSTRACT

The present work consists of research in the area of Plane Geometry with an Analytical view, having as main objects of study the primitive elements of Euclidean Plane Geometry, which are the points and the lines. This paper will discuss the demonstrations of two theorems and some curiosities about them. Initially, we will discuss the Sylvester-Gallai theorem, and soon after, we will present a second theorem, which is an application of the first result. To demonstrate each of these results, we use the method of Demonstration by Counterposition and the demonstration by Finite Induction. The present research can be placed in the qualitative research approach, with research procedures of a bibliographical nature. The data analyzed and used as a research base are contained in books and scientific articles, which served as theoretical support for the demonstration of the two central results in a clearer and more didactic way.

Keywords: Points; Lines; Cartesian Plane; Plane Geometry; Analytical Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circunferência.	12
Figura 2 – Distância entre dois pontos	20
Figura 3 – Distância entre ponto e reta.	21
Figura 4 – Um exemplo de configuração dos pontos.	26
Figura 5 – Representações dos traçados de retas que passam por pelo menos dois pontos do conjunto \mathcal{P}	27
Figura 6 – Representação gráfica de $d(P_0, \ell_0)$	28
Figura 7 – P_2, P_4 e R na reta ℓ_0	29
Figura 8 – Traçagem da reta j pelos pontos P_2 e P_0	29
Figura 9 – Pontos R e Q são coincidentes.	30
Figura 10 – Representação gráfica de três pontos no plano.	31
Figura 11 – Retas traçadas nos pontos de \mathcal{P}	32
Figura 12 – Representação de alguns pontos do conjunto \mathcal{P} , entre eles o Q_1 e Q_2 por onde passa a reta ℓ_0	33
Figura 13 – Representação do conjunto \mathcal{P}'	33
Figura 14 – Representação do conjunto \mathbb{L}'	34
Figura 15 – Representação dos conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{P}' quando os pontos de \mathcal{P}' são colineares.	34
Figura 16 – Retas traçadas pelos pontos de \mathcal{P}	35
Figura 17 – Representação de \mathcal{P}' quando os pontos não são colineares.	35
Figura 18 – Representação de \mathbb{L}'	36
Figura 19 – Uma configuração de \mathcal{P}	38
Figura 20 – Conjunto $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	38
Figura 21 – Representação gráfica de uma reta que passa exatamente por dois pontos.	42
Figura 22 – representação dos pontos do conjunto \mathcal{P} , entre eles o Q_1 e Q_2 por onde passa a reta ℓ_0	43
Figura 23 – Representação do conjunto \mathbb{L}_0'	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PANORAMA HISTÓRICO	14
3	PRINCIPAIS RESULTADOS	20
3.1	Preliminares para os Teoremas	20
3.1.1	Exemplo de distância entre pontos:	21
3.1.2	Exemplo de distância entre pontos e retas:.....	22
3.1.3	Exemplo de demonstração por contrapositiva:	22
3.1.4	Exemplo 1 de demonstração pelo Primeiro princípio de indução.	23
3.1.5	Exemplo 2 de demonstração pelo Primeiro princípio de indução.	24
3.2	Teoremas Principais	25
4	CURIOSIDADES E PROBLEMAS EM ABERTO	37
4.1	Problema 1	37
4.2	Problema 2	41
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS.....	47

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, pretendemos responder a seguinte questão: “dada uma quantidade n de pontos no plano, não todos colineares, existe uma reta que passa por exatamente dois deles?”. Para dar uma resposta a essa questão, Joseph Sylvester estudou e demonstrou que sim, existe tal reta, porém sua demonstração foi publicada somente cerca de 40 anos depois de demonstrar o resultado. Tempos posteriores, Tibor Gallai, sem o conhecimento da primeira demonstração, provou o resultado do teorema. Assim, este vem sendo normalmente atribuído aos dois matemáticos como *Teorema Sylvester-Gallai*.

Gallai demonstrou o teorema determinando \mathcal{P} como um conjunto dos pontos dados, considerou o conjunto \mathcal{L} como todas as retas ℓ que passam por pelo menos dois pontos de \mathcal{P} . Então entre todos os pares (P, ℓ) , com P não pertencente a ℓ , ele escolheu um par (P_0, ℓ_0) de modo que P_0 tenha a menor distância até ℓ_0 , com Q sendo o ponto em ℓ_0 mais próximo de P_0 (isto é, a interseção entre a reta perpendicular a ℓ_0 traçada pelo ponto P_0), porém foi encontrado um ponto mais próximo a uma reta, sendo isso um absurdo, pois o ponto próximo da reta seria o P_0 .

Este teorema tem como aplicação outro resultado muito importante quando se trata de pontos e retas no plano:

- “Seja \mathcal{P} um conjunto de $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos em uma linha. Então, o conjunto \mathcal{L} de linhas que passam por pelo menos dois pontos contém pelo menos n linhas.”

Então, dada a relevância desse teorema, bem como a dificuldade de encontrar trabalhos voltados a ele, surgiu o interesse em pesquisar sobre tal conteúdo, com o intuito de demonstrar o teorema principal deste trabalho de uma maneira mais clara e detalhada.

Após considerar esses fatos, para demonstrar o resultado principal deste trabalho serão usados alguns elementos da Geometria Plana, com uma visão Analítica.

A Geometria Plana é descrita na coletânea *Os Elementos de Euclides*. Trata-se de uma coleção de 13 livros do autor grego Euclides em Alexandria, de cerca de 300 anos a.C.. De início, ele explica os objetos geométricos e propriedades, no qual

contém 23 definições. O seu próximo passo foi se apropriar de definições dadas como verdades, não havendo a necessidade de serem provadas, os chamados *axiomas*.

Euclides constrói, então, a Geometria Plana pelo método axiomático, em que ele considera alguns postulados, toma como verdade e, assim, prova os resultados da Geometria. Euclides teve seu destaque devido ao fato de que, com apenas cinco postulados, foi capaz de demonstrar 465 conjecturas. Os principais elementos da Geometria Euclidiana Plana são: plano, ponto e reta.

Plano é constituído de pontos e retas. Reta é algo que não tem comprimento nem largura, ponto é definido como aquilo que não tem nenhuma parte. Esses objetos serão chamados de primitivos. Um ponto estar entre outros dois também é conhecido como uma ideia primitiva, no qual é explicado através de quatro axiomas, como nos dizem Dolce e Pompeo (2013, p.7):

Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

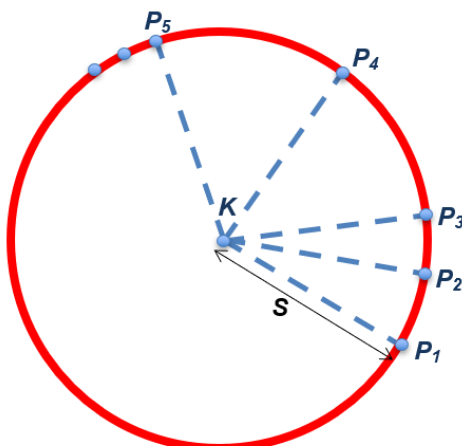
1. Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;
2. Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;
3. Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P; e ainda
4. Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.

Neste mesmo trabalho, também é definido por Dolce e Pompeo (2013, p.3) “o postulado da determinação da reta”, que traz algumas definições sobre pontos e retas, entre elas temos “Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles” (DOLCE; POMPEO, 2013, p.3).

Destacamos que, na Geometria Euclidiana, os pontos não possuem coordenadas, e as figuras planas não possuem equações que as descrevem, como vemos comumente no ensino básico. Essa passagem da Geometria sem coordenadas para a Geometria com coordenadas (chamada de Geometria Analítica) foi um avanço significativo na matemática e possibilitou uma relação entre a geometria e a álgebra.

Por exemplo, na Geometria Plana, Dolce e Pompeo (2013, p.143) definem circunferência como “[...] um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro, e a distância dada é o raio da circunferência”. (Observe a **Figura 1**).

Figura 1 – Circunferência.



Fonte: Compilação do autor.

Veja que S é a distância entre o ponto K (ponto central) ao ponto P_1 , por exemplo. A circunferência é definida por todos esses pontos cujas distâncias a K são iguais a $S > 0$, sendo assim a circunferência da **Figura 1** são os infinitos pontos $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots\}$.

Como dito, na Geometria Plana as coordenadas das figuras não são definidas, já na Geometria Analítica, mesmo com uma definição semelhante de circunferência, definida por lezzi (2005, p.118) como “Dados um ponto C , pertencente a um plano α , e uma distância $r > 0$ não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto C . Circunferência = $\{P \in \alpha \mid d(P, C) = r\}$ ”. Portanto, podemos encontrar uma equação em coordenadas cartesianas que descreve completamente os pontos da circunferência da **Figura 1**. Sejam $P(x, y)$ um ponto da circunferência e $C(a, b)$ seu centro. Então, $d(P, C) = r$ é equivalente a:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Os estudos relacionados a Geometria Analítica foram iniciados no século XVII, pelos Matemáticos Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), seus trabalhos foram produzidos sem a influência de um sobre o outro. Fermat contribuiu para Geometria Analítica através do trabalho intitulado de “*Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*” datado de 1636, publicado em 1679 na obra completa. Descartes contribuiu através da obra “*A Geometria como um dos três apêndices do Discurso do Método.*” Neste trabalho, ele faz a relação algébrica na geometria, com princípios matemáticos para analisar os métodos geométricos como as propriedades do ponto e da reta, determinando coordenadas, distâncias e localização.

O plano cartesiano, criado por Descartes, é composto pelos eixos x e y , sendo eles perpendiculares entre si. O ponto tem as coordenadas (x, y) e deve ser representado por uma letra maiúscula, já a reta é formada por pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem uma equação do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Esta monografia foi dividida em outros quatro capítulos. No segundo, foi feita uma abordagem histórica dos matemáticos Joseph Sylvester e Tibor Gallai, responsáveis pelos dois resultados principais tratados neste trabalho, que são enunciados e demonstrados no terceiro capítulo, detalhadamente. O quarto capítulo, por sua vez, é um compilado de questões em aberto que foram aparecendo durante a pesquisa e são pertinentes ao assunto tratado aqui. Todas elas foram respondidas e complementam os resultados discutidos nos capítulos precedentes. O último capítulo é destinado às considerações finais, que traz informações sobre o texto, reflexões e possíveis futuros trabalhos.

Alguns pré-requisitos para o desenvolvimento desta pesquisa, como Geometria plana, Geometria Analítica (equações da reta, inclinação de reta, etc.), indução finita, contraposição, o leitor interessado pode encontrar detalhes nas respectivas referências Dolce e Pompeo (2013), Iezzi (2005) e Iezzi (2003).

2 PANORAMA HISTÓRICO

Desafiamos o leitor a, neste momento, colocar 10 pontos numa folha de papel de tal forma que nem todos estejam numa mesma reta. Após isso, com toda certeza, existe uma reta que passa por **exatamente** dois pontos dentre os 10 que o leitor dispôs na folha. Faça isso com 15 pontos agora. O resultado é o mesmo. Com 20, 500 ou 1000 pontos, ainda assim o resultado será verdadeiro. Agora, isso é válido para qualquer quantidade de pontos?

O teorema, tema de nosso trabalho, também conhecido como Teorema Sylvester-Gallai, recebe esse nome devido a participação dos matemáticos Tibor Gallai e Joseph Sylvester em sua demonstração. O primeiro que o demonstrou foi o matemático Joseph Sylvester e, cerca de 40 anos passados, Tibor Gallai fez uma nova demonstração do teorema.

Joseph Sylvester, nascido em 03 de setembro de 1814 na cidade de Londres, Inglaterra, cresceu usando apenas os seus dois nomes iniciais, assim sendo chamado de James Joseph, um fato curioso, tendo em vista que seu pai se chamava Abraham Joseph, não contendo o nome Sylvester. Devido a imigração de seu irmão mais velho para os Estados Unidos ele devia ter três nomes para obter residência. Logo, pouco antes de dar início aos estudos universitários, ele veio a adotar o sobrenome Sylvester.

Sylvester começou seus estudos, tendo como a primeira escola de sua vida um internato em *Highgate*, onde se manteve até 1827; em seguida frequentou uma escola em Islington, onde o seu tempo presente no local foi de 18 meses, quando, em 1828, aos 14 anos de idade, teve ingresso na *University College London* com a presença de De Morgan como professor de Matemática logo no primeiro ano em que o colégio recebeu alunos. Sylvester teve sua escolha duvidosa por muitos, pois tal universidade, diferente das outras britânicas, não tinha um grande reconhecimento. Mas sua presença no local chegou ao fim, quando veio a ser acusado de fazer ameaças a um colega universitário com o uso de uma arma. Após o conhecimento do acontecido a família, que seguia a fé judaica, imediatamente transferiu o jovem para continuar seus estudos na *Royal Institution* em Liverpool, pois chegaram a uma conclusão que ele ainda não estava pronto para ingressar em uma universidade.

Sylvester, em 7 julho de 1831, se matriculou no *St John's College*, em *Cambridge*, mas, nos anos 1833 a 1835, devido a uma doença, teve seus estudos

interrompidos. Quando recuperou sua saúde, ele fez o exame de um curso chamado de tripos matemáticos, em 1837, que teve como concorrentes dois famosos matemáticos, Duncan Gregory e George Green. Mesmo com a grande concorrência dos matemáticos, Sylvester conseguiu o segundo lugar, onde ficou à frente dos dois matemáticos; Green ficou em quarto lugar, Gregory conseguiu a quinta colocação, e a primeira colocação ficou com William Griffin, que por sua vez não teve grandes participações em trabalhos após sua formatura. Porém, mesmo com a aprovação no curso, Sylvester não conseguiu se formar, pois para conseguir a formatura era necessário a inscrição do aluno em artigos da Igreja da Inglaterra, mas devido a sua fé judaica se recusou fazer o juramento necessário. Assim ficando, ele também não era elegível para o prêmio *Smith's* (prêmios anuais para estudantes pesquisadores) e nem conseguia concorrer a uma *Fellowship* (bolsa de premiação aos alunos com bom desempenho).

Nos três anos seguintes ao ano de 1838, Sylvester ocupou um cargo na cátedra de filosofia natural na Universidade de Londres, onde trabalhou com seu ex-professor De Morgan; eram um dos poucos lugares que não o proibiam devido sua religião. Mas Sylvester não estava satisfeito, ele era um matemático, amava a Matemática, e era ela que ele queria ensinar. Sendo um pesquisador muito ativo, ele publicou 15 artigos sobre dinâmica de fluidos e equações algébricas e teve seu ciclo na catedral de Filosofia encerrado em 1841, quando renunciou. Em 1841 ele conseguiu seu diploma quando a legislação permitiu que os católicos romanos se formassem no *Trinity College*, que significa que os judeus também poderiam se formar; assim Sylvester recebeu um bacharelado e um mestrado pelo *Trinity College*.

Com o apoio de De Morgan, John Herschel e Charles Babbage, ele se candidatou a uma cadeira em matemática da Universidade da Virgínia, em *Charlottesville*, nos Estados Unidos, onde conseguiu sua nomeação. Depois de alguns meses ele renunciou ao cargo, devido a mau comportamento dos estudantes que eram alterados e faziam uso de bebidas alcoólicas, quando em umas das palestras de Sylvester, um estudante o insultou, ocasionando em um golpe com um bastão, e Sylvester acreditou, erradamente, que tinha assassinado o estudante. Ele fugiu para casa de um de seus irmãos mais velhos, que residia em *Nova York*.

Em *Nova York* ele recebeu negações de *Columbia College* e *Harvard* em procuras de um cargo universitário. Ainda presente na cidade, ele conheceu uma garota conhecida como Miss Marston, pela qual ficou apaixonado, chegando a pedi-

la em casamento, mas ela negou alegando que ele era de religião judaica. Após a frustração amorosa ele embarca de volta à Inglaterra. Sylvester trabalhou como atuário e foi secretário da *Equity Law and Life Assurance Company* em seu retorno ao país.

Sylvester decidiu estudar direito e conheceu Cayley (o trabalho mais importante de Arthur Cayley foi no desenvolvimento da álgebra de matrizes e da geometria não-euclidiana n -dimensional) nos tribunais do *Lincoln's Inn* em Londres, e discutiam matemática enquanto andavam pelos tribunais, embora muito diferentes em temperamento, tornaram-se amigos para a vida toda.

Após algumas tentativas fracassadas de voltar a ser professor de Matemática, Sylvester fez alguns trabalhos sobre a teoria das matrizes, assunto que lhe chamou atenção através de suas conversas com seu amigo Cayley. Ele descobriu um discriminante de uma equação cúbica, e fez o uso do nome “discriminante” em uma equação quadrática e de ordens superiores em 1851.

Sylvester foi o segundo presidente da *London Mathematical Society* e ganhou a primeira medalha de ouro que a universidade concedeu em homenagem a De Morgan, que por sua vez foi o primeiro presidente da sociedade. Ele também acabou sendo eleito a *Paris Academy of Sciences* em 1863. Membro da *Royal Society of London* desde 1839, foi obrigado a se aposentar aos 55 anos pois ele fazia parte de uma academia militar.

Após se ver aposentado, aparentava que ele não trabalharia mais na área da Matemática, pois ele escreveu um único livro à época, sendo este de poesia, no qual sentiu-se muito orgulhoso pela produção da obra, que tinha como título *The Laws of Verse*.

Depois de três anos, sem pesquisas matemáticas publicadas, ele recebeu a visita de *Chebyshev*, e discutiram as ligações mecânicas que podem ser usadas para desenhar linhas retas. Após essa discussão, Sylvester deu uma palestra sobre o tema, que recebeu o título de “Sobre as recentes descobertas na conversão mecânica do movimento”, que ele ministrou no *Royal Institution*. O tema chamou atenção de um matemático que estava presente na palestra chamado Kempe, e trabalharam juntos e fizeram grandes descobertas.

Em 1877 Sylvester acabou aceitando uma cátedra na Universidade *Johns Hopkins* e, um ano depois, criou o primeiro jornal matemático dos Estados Unidos, nomeado *American Journal of Mathematics*. A sua presença na Universidade *Johns*

Hopkins reascendeu o seu interesse em trabalhos matemáticos, onde ele voltou a lecionar e realizar trabalhos em um ambiente agradável, além de mostrar um poder de liderança nunca visto antes. Ele era cercado de orientandos de pesquisas, procurando levá-los a seus interesses acadêmicos. Ele publicou um trabalho sobre as teorias das partições no jornal de sua fundação.

Sylvester negou um trabalho em *Oxford* em 1883, pois ele gostava de dar palestras, de ensinar matemática, e os alunos não mostravam interesse no aprendizado, mas sim em tirar uma nota aprovativa no exame. Em 1892 ele retornou à cidade natal aos 78 anos de idade e em 1893 ele publicou o resultado do Teorema Sylvester-Gallai no *Educational Times*. Com problemas de memória e perda parcial da visão ele viveu seus últimos anos no *Athenaeum Club* e veio a óbito no dia 15 de março de 1897 na sua cidade.

Tibor Gallai, por sua vez, nasceu na Hungria na cidade de Budapeste no dia 02 de janeiro de 1912. Também de família judia, passou muitas dificuldades devido à sua religião, como no ano de 1919 houve uma tomada comunista na Hungria e em 1920 um governo de extrema direita assumiu o comando do país, então durante esse período, os judeus estavam sendo atacados até mesmo nas ruas. Em 1920 o antissemitismo foi descrito em lei, assim, algumas universidades poderiam receber até 5% de estudantes de religião judaica.

Como o Sylvester, Gallai também teve seu nome alterado, pois Tibor nasceu se chamando Tibor Grünwald, até que se viu obrigado a mudar seu segundo nome no período da Segunda Guerra Mundial, pois nenhum húngaro devia ter seus nomes que soasse Alemão. Um trabalho publicado com nome de autoria Tibor Grünwald ocorreu no ano de 1939, após este acontecido ele começou a se chamar de Tibor Gallai. O motivo da escolha deste nome não foi descoberto, mas muitos acreditam que ele escolheu esse nome devido as suas iniciais.

Diante da lei de 1920, que diz sobre os 5% de universitários judeus, Gallai estava muito confiante no seu ingresso na universidade em 1930, tendo em vista que o vencedor de uma competição de matemática tinha direito a uma vaga na universidade. Porém, ele foi impedido de competir pelos professores de ensino médio, muito provavelmente devido aos sentimentos antissemitas naquele momento na Hungria. Ele cogitou consideravelmente cursar engenharia, mas foi impedido por seus amigos, que viam seu talento enorme em matemática. Apesar das dificuldades, ele foi o vencedor de um concurso chamado Eötvös de 1930 e recebeu como prêmio o

ingresso na faculdade, conseguindo dar início a sua carreira acadêmica em Budapeste na Universidade *Pázmány Péter*, onde no mesmo período Paul Erdős ingressou na universidade; conheceram-se, então, e juntos assistiram as palestras de Dénes König que tinham como tema a Teoria dos Grafos. Gallai tem participação no livro "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" de Dénes König, e teve algumas de suas ideias usadas pelo autor, além de mencionar resultados comprovados por Gallai.

O primeiro artigo publicado de Gallai ocorreu no ano de 1936 e recebeu o título de "*On Eulerian lines in infinite graphs*". O trabalho teve participação de Paul Erdős e Endre Weiszfeld, e eles tiveram como incentivo para a escrita do artigo a comprovação do resultado "Se o gráfico G tem vértices os pontos da rede no espaço 3, e dois pontos são unidos por uma aresta se eles diferem em apenas uma coordenada por 1, então G é hamiltoniano e euleriano".

Amigo de trabalho de Gallai, Erdős, explica como foi obtido o resultado do teorema Sylvester-Gallai, deixando claro que não tinha conhecimento da primeira prova de Sylvester, prova essa que tinha como problema principal: "Prove que não é possível dispor qualquer número finito de pontos reais de modo que uma linha reta que passe por cada dois deles passe por um terceiro, a menos que todos estejam na mesma linha reta". Após algum tempo de estudo Erdős conjecturou que "Se x_1, x_2, \dots, x_n for um conjunto finito de pontos no plano não todos em uma linha, então há sempre uma linha que passa por exatamente dois dos pontos." Então Erdős não conseguiu provar a teoria, e pediu ajuda a Gallai, que conseguiu fazer uma prova de maneira bem inteligente. Dez anos passados da prova de Gallai, LM Kelley percebeu que a conjectura não era inédita e já havia sido provada por Sylvester no '*Educational Times*' em 1893.

Após se formar na universidade, Gallai trabalhou em indústrias até 1939, mesmo não trabalhando na área da Matemática, ele realizou várias pesquisas matemáticas. Ele estava trabalhando para a obtenção de seu PhD. Sua tese de doutorado é sobre polinômios com raízes reais.

A Segunda Guerra Mundial surgiu em 1939, tinha a Hungria como aliada a Alemanha nazista, assim muitos judeus húngaros foram servir em campos de concentração, e Gallai foi convocado, porém não foram encontrados registros durante sua passagem pelos campos. Após o término da Segunda Guerra, Gallai retornou a Budapeste, onde lecionou na Escola Judaica na Rua *Abonyi*, em Budapeste, que tinha

cerca de 1200 alunos; lá ele foi caracterizado como um ótimo professor de matemática e era amado pelos alunos.

Gallai segue, então, sua carreira profissional como professor na Universidade Técnica de Budapeste de *Steven L Kaczeus*, onde permaneceu até 1958 quando se demitiu e ingressou no Instituto de Pesquisa de Matemática da Academia Húngara de Ciências, e ficou por cerca de dez anos e então aos 55 anos deixou o instituto. Com poucas economias e sem receber nenhuma pensão, viveu modestamente. Sua esposa adoeceu, e Gallai ficou mais de dez anos acompanhando-a, longe da Matemática. Sua esposa veio a óbito, e ele retomou os estudos e escreveu alguns artigos importantes. Então, Gallai faleceu no dia 2 de janeiro de 1992 em Budapeste na Hungria.

3 PRINCIPAIS RESULTADOS

A seguir, apresentamos dois dos resultados principais deste trabalho e suas demonstrações. Baseamo-nos nas referências do livro *Proofs from THE BOOK* de Aigner e Ziegler (2018).

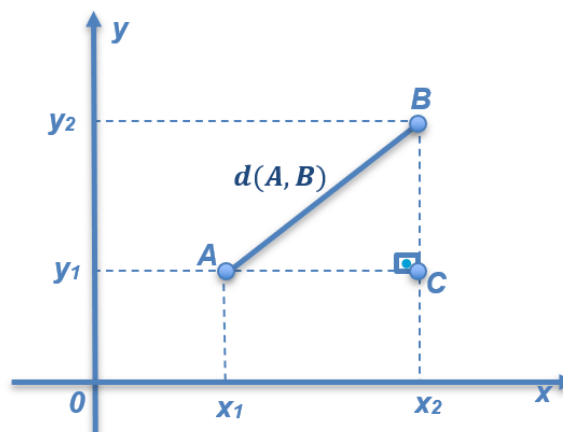
Na demonstração do primeiro teorema, os autores em Aigner e Ziegler (2018) utilizam dois axiomas conhecidos como Os *Axiomas Métricos* e *Axioma de Ordem* (para mais detalhes, veja Dolce e Pompeo (2013, p. 7 e p. 9)). Nesta pesquisa, procuramos contornar essa abordagem com a utilização de tais axiomas, apresentando os argumentos sob o ponto de vista da Geometria Analítica.

Para a demonstração do primeiro teorema, é importante o entendimento de distância entre pontos e distância de um ponto a uma reta. Assim, veja a seguir alguns conceitos geométricos sobre esse conteúdo.

3.1 Preliminares para os Teoremas

A distância entre dois pontos pode ser estabelecida através do teorema de Pitágoras. Note na **Figura 2** que a distância entre o ponto A e B é dada pela a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Figura 2 – Distância entre dois pontos



Fonte: Compilação do autor.

Então “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Assim temos Cateto BC: $y_2 - y_1$; Cateto AC: $x_2 - x_1$; Hipotenusa AB: distância $d(A, B)$.

$$d(A, B)^2 = (AC)^2 + (CB)^2.$$

Substituindo os valores de BC e AC obtém-se:

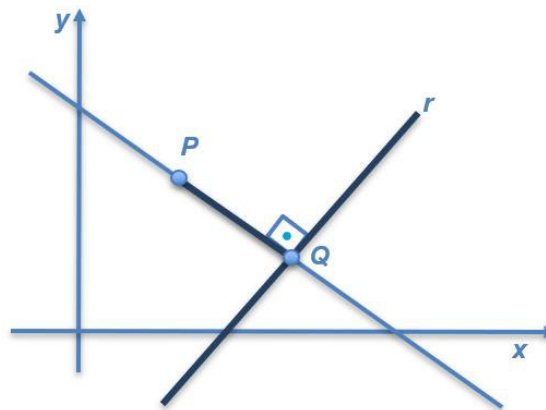
$$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Assim é obtido uma fórmula geral da distância entre dois pontos.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A distância entre uma reta e um ponto é calculada através de um segmento de reta traçado da reta ao ponto, de modo que esse segmento forme um ângulo de 90° em relação a reta, ou seja, esse segmento seja perpendicular a reta. Observe a **Figura 3** a seguir.

Figura 3 – Distância entre ponto e reta.



Fonte: Compilação do autor.

Para calcular a distância entre o ponto e uma reta precisamos saber a equação geral da reta e as coordenadas do ponto. Sabendo que a equação geral da reta é $r: ax + by + c = 0$ e temos como coordenadas do ponto $P = (x_0, y_0)$, então a fórmula para calcular essa distância entre a reta r e o ponto P é dada por $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Para o melhor entendimento, veja os exemplos a seguir, sendo o *Exemplo 1* sobre a distância entre dois pontos e o *Exemplo 2* referente a distância entre pontos e retas.

3.1.1 Exemplo de distância entre pontos

- Dados os pontos $A(2, -3)$ e $B(4, 5)$, determine a distância entre eles.

Veja que $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$; $y_1 = -3$ e $y_2 = 5$.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(4-2)^2 + (5+3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2)^2 + (8)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{4 + 64}$$

$$d(A, B) = \sqrt{68}$$

$$d(A, B) = 2\sqrt{17}.$$

Assim, a distância entre os pontos $A(2, -3)$ e $B(4, 5)$ é de $2\sqrt{17}$.

3.1.2 Exemplo de distância entre pontos e retas

- Achar a distância do ponto $P = (2, 3)$ à reta $r: 6x - 8y + 4 = 0$.

Sendo $a = 6$, $b = (-8)$ e $c = 4$, então:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|6 \cdot 2 + (-8) \cdot 3 + 4|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|12 - 24 + 4|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$d(P, r) = \frac{|-8|}{\sqrt{100}}$$

$$d(P, r) = \frac{8}{10}$$

$$d(P, r) = \frac{4}{5}.$$

Obtendo a distância da reta $r: 6x - 8y + 4 = 0$ ao ponto $P = (2, 3)$, resulta-se em $d(P, r) = \frac{4}{5}$.

Para demonstração do **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)** é usado o método de demonstração por contrapositiva de uma proposição, na qual a prova de um resultado se dá pela negação da tese, chegando-se a um valor proposicional que nega a hipótese para, assim, provar o resultado da proposição original. Matematicamente, Domingues e Iezzi (2003, p. 24) mostram tal ideia com o exemplo que segue.

3.1.3 Exemplo de demonstração por contrapositiva

- “Se a soma de um número inteiro com seu quadrado é um número ímpar, então o número dado é ímpar”

Então tem-se a contrapositiva como: “se um número inteiro é par (ou seja, não é ímpar), então a soma desse número com o seu quadrado é par”. Note que a demonstração dessa segunda proposição implica na primeira. Provando este resultado, escrevendo como $2k$ um número par, temos:

$$2k + (2k)^2.$$

Resolvendo a potência,

$$2k + 4k^2.$$

Colocando o dois em evidência,

$$2(k + 2k^2).$$

Então, chegamos à conclusão que esse número é par, pois é múltiplo de dois, comprovando a primeira proposição é falsa.

■

Na demonstração do **Teorema 2** foi usado o “Primeiro princípio de indução”, que Domingues e Iezzi (2003, p.31) o definem como:

Seja $p(n)$ uma função proposicional cujo universo é o conjunto dos inteiros maiores que ou igual ao um inteiro dado a . Suponhamos que se consiga provar o seguinte:

(i) $p(a)$ é verdadeira.

(ii) Se $r \geq a$ e $p(r)$ é verdadeira, então $p(r + 1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Então, devemos provar para o menor inteiro deste conjunto, supor $p(k)$ e provar que $p(k + 1)$ é verdadeira. Veja os exemplos de demonstração pelo primeiro princípio de indução.

3.1.4 Exemplo 1 de demonstração pelo primeiro princípio de indução

- Prove que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n \geq 1$.

Primeiramente analisa-se se vale para $p(1)$.

i) $p(1)$ é verdadeira.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

$$1 = 1.$$

Sabendo que a sentença é verdadeira para $p(k)$, deve-se comprovar que vale para $p(k + 1)$.

ii) $p(k + 1)$ é verdadeira.

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2}.$$

Sabendo que por hipótese tenho que $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, então pode-se substituir os dados da equação com seus resultados referentes. O lado esquerdo se torna:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + k + 1.$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum chegaremos ao seguinte resultado.

$$\frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2}.$$

Colocando o $(k + 1)$ em evidência, chegaremos em nosso resultado.

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Então chegamos à conclusão que vale para todo $n \geq 1$.

■

3.1.5 Exemplo 2 de demonstração pelo primeiro princípio de indução

- Prove que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ para $n \geq 1$.

Podemos observar do Exemplo 1 que:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Logo, pode-se substituir esse resultado.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2.$$

Agora deve-se provar que vale $p(1)$; supor que vale $p(k)$ e, em seguida, provar que vale $p(k + 1)$ com $k = n$.

i) $p(1)$ é verdadeira.

$$1^3 = \frac{1(1 + 1)}{2},$$

$$1 = 1$$

Sabemos que $p(1)$ é verdadeira, agora será verificado se vale para $p(k + 1)$, admitindo que $p(k)$ valha.

ii) $p(k + 1)$ é verdadeira.

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = \left(\frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} \right)^2$$

Nota-se que pela hipótese de indução que

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k + 1)}{2} \right)^2,$$

e, portanto, pode-se substituir esses dados na equação, obtendo

$$\left(\frac{k(k + 1)}{2} \right)^2 + (k + 1)^3.$$

Ao fazer manipulações algébricas nas potenciações obtemos que:

$$\frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^2(k + 1).$$

Veja que se pode ser feito o mínimo múltiplo de comum:

$$\frac{k^2(k + 1)^2}{4} + \frac{4(k + 1)^2(k + 1)}{4}.$$

Colocando o $(k + 1)^2$ em evidência e resolvendo alguns termos, temos

$$\frac{(k + 1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}.$$

Como $k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2$ podemos escrever:

$$\frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}.$$

Pela propriedade da potenciação pode-se escrever esse resultado da seguinte maneira:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = \left(\frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} \right)^2,$$

satisfazendo, assim, a tese do problema. ■

3.2 Teoremas Principais

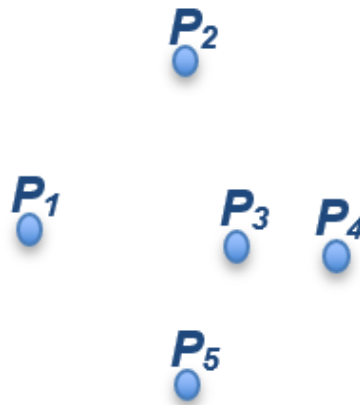
A seguir, apresentamos o primeiro resultado principal deste trabalho.

Teorema 1 (Sylvester-Gallai): *Dada qualquer configuração de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, então existe uma reta que contém exatamente dois desses pontos.*

Antes de apresentarmos a demonstração do **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**, ressaltamos que todo argumento utilizado nela será feito para um caso específico, de forma que fique o mais claro possível para o leitor. Por exemplo, quando escrevermos “ n pontos”, vamos desenhar um caso específico para o valor de n , no caso, tomaremos $n = 5$.

Demonstração: Analisando o teorema, pode-se observar na hipótese que foi “dada qualquer configuração de n pontos no plano [...]” podendo ser usado qualquer configuração de pontos, assim pode-se supor que a organização dos pontos é descrita de acordo com a **Figura 4**.

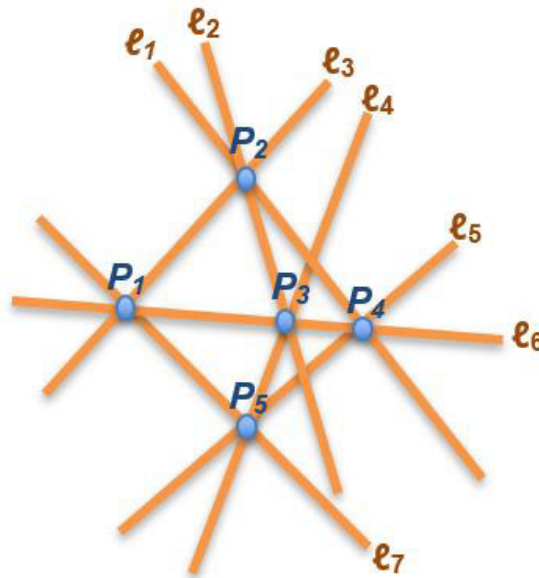
Figura 4 – Um exemplo de configuração dos pontos.



Fonte: Compilação do autor.

Formando assim um conjunto de pontos, que chamaremos de $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_n\}$, que são todos os pontos que estão presentes no plano. A continuação do teorema nos diz que “[...] existe uma reta que contém exatamente dois dos pontos”. Então traçaremos todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de \mathcal{P} . Note que as retas passam por pelo menos dois (ainda não exatamente por dois).

Figura 5 – Representações dos traçados de retas que passam por pelo menos dois pontos do conjunto \mathcal{P} .



Fonte: Compilação do autor.

Veja que pode ser criado um conjunto contendo todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de \mathcal{P} , conjunto esse que será chamado de \mathbb{L} . No nosso exemplo específico, ele terá como elemento todas as retas presentes na **Figura 5**, que serão $\mathbb{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7\}$. No caso geral, temos que tal conjunto é dado por $\mathbb{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \dots, \ell_k\}$.

Nota-se na representação da **Figura 5** que existem pontos que não pertencem a algumas retas, como por exemplo, o ponto P_5 e a reta ℓ_3 , na qual nesta reta estão contidos os pontos P_1 e P_2 , o P_5 não pertence a ela. Então será construído um conjunto, que será chamado de G_1 , em que serão reunidos todos os pares compostos de um ponto e uma reta presente respectivamente nos conjuntos \mathcal{P} e \mathbb{L} tais que o ponto não pertence a reta. O conjunto ficará da seguinte forma:

$$G_1 = \{(P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathbb{L}; P \notin \ell\}.$$

$$G_1 = \{(P_1, \ell_1), (P_3, \ell_1), (P_5, \ell_1), (P_1, \ell_2), (P_4, \ell_2), (P_5, \ell_2), (P_3, \ell_3), (P_4, \ell_3), (P_5, \ell_3), \\ (P_1, \ell_4), (P_2, \ell_4), (P_4, \ell_4), (P_1, \ell_5), (P_2, \ell_5), (P_3, \ell_5), (P_2, \ell_6), (P_5, \ell_6), (P_2, \ell_7), (P_3, \ell_7), \\ (P_4, \ell_7), \dots, (P_n, \ell_n)\}.$$

Como os pontos e as retas presentes no conjunto G_1 são pertencentes aos conjuntos \mathcal{P} e \mathbb{L} , sendo \mathcal{P} e \mathbb{L} finitos, então o conjunto G_1 também será um conjunto finito.

Como os pontos não estão contidos nas suas respectivas retas no conjunto G_1 , então pode ser definida uma distância entre esses pontos e retas, criando assim um conjunto G_2 com essas distâncias, todas positivas. Definimos

$$G_2 = \{d(P, \ell); (P, \ell) \in G_1\}.$$

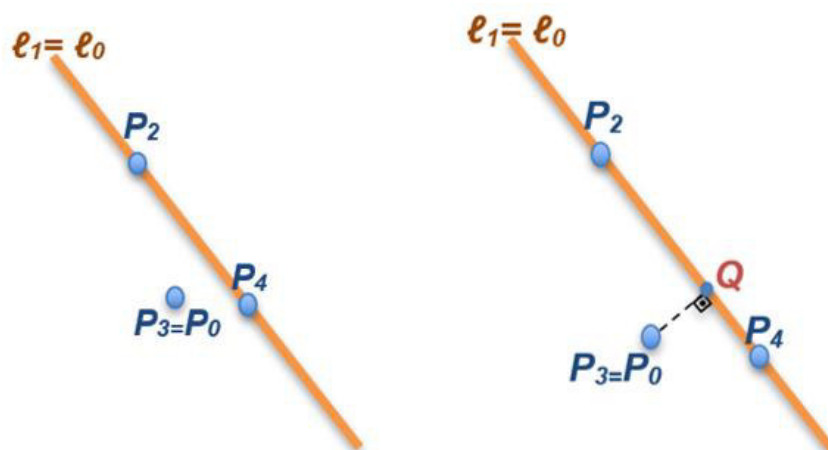
$$G_2 = \{d(P_1, \ell_1), d(P_3, \ell_1), d(P_5, \ell_1), d(P_1, \ell_2), d(P_4, \ell_2), d(P_5, \ell_2), d(P_3, \ell_3), d(P_4, \ell_3), d(P_5, \ell_3), d(P_1, \ell_4), d(P_2, \ell_4), d(P_4, \ell_4), d(P_1, \ell_5), d(P_2, \ell_5), d(P_3, \ell_5), d(P_2, \ell_6), d(P_5, \ell_6), d(P_2, \ell_7), d(P_3, \ell_7), d(P_4, \ell_7), \dots, d(P_n, \ell_n)\}.$$

Observe que G_2 também é um conjunto finito de números positivos, porém agora ele será constituído somente por números reais positivos, pois está sendo observada a distância do ponto à reta, e distância sempre será um número positivo ou será zero (caso que ocorre quando é tratada a distância de um ponto que já pertence a reta), que não vem ao caso. Sabendo que G_2 é finito, podemos tomar um par de um ponto e uma reta pertencente a G_1 , de forma que a distância do ponto a essa reta seja a menor possível. Algebricamente, temos:

$$d(P_0, \ell_0) \leq d(P, \ell), \forall (P, \ell) \in G_1.$$

Por finalidade didática note que em nossa representação (**Figura 6**), o ponto $P_0 = P_3$ e a reta $\ell_0 = \ell_1$, veja que ao definir a distância do ponto à reta, foi encontrado um ponto que fica na perpendicular da reta ao ponto P_0 , esse ponto foi chamado de Q .

Figura 7 – Representação gráfica de $d(P_0, \ell_0)$.

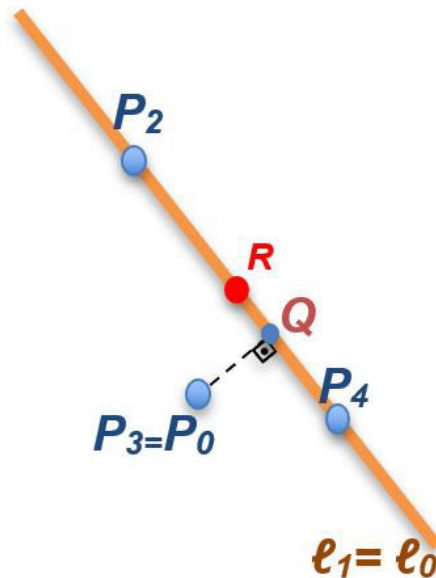


Fonte: Compilação do autor.

O teorema faz a afirmação que “existe uma reta que contém exatamente dois dos pontos”. Assim, afirmamos que: ℓ_0 **passa por apenas dois pontos**.

Para checarmos tal informação, suponha por contradição que ℓ_0 passa por três pontos, na representação, seriam eles P_2, P_4 e R como pode-se observar na **Figura 7**. Nela, desenhamos o ponto R entre P_2 e Q . Faremos os outros casos posteriormente.

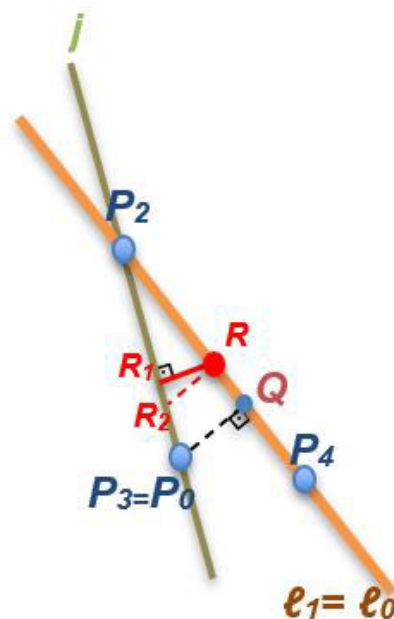
Figura 8 – P_2, P_4 e R na reta ℓ_0 .



Fonte: Compilação do autor.

Observa-se que pode ser traçada uma reta pelos pontos P_2 e P_0 , será chamada de j .

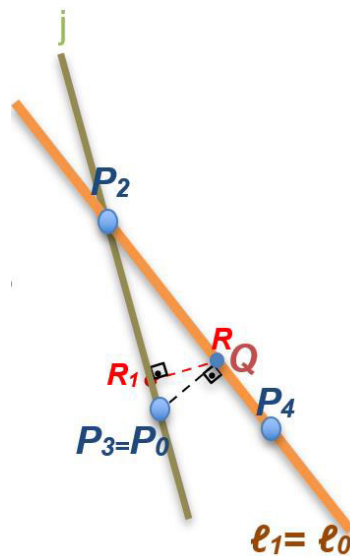
Figura 9 – Traçagem da reta j pelos pontos P_2 e P_0 .



Fonte: Compilação do autor.

Ao construir a reta j , pode-se observar a distância dela ao ponto R , traçando a perpendicular a reta j com destino ao ponto R , veja no exemplo da **Figura 8** o segmento de reta de R a R_1 , em que essa é a distância do ponto R a reta j . Note que ao traçar um outro segmento a um ponto qualquer, que será chamado de R_2 , obteremos o triângulo ΔRR_1R_2 tendo como seu maior lado R e R_2 , que por sua vez já é menor que a distância de P_0 a reta ℓ_0 , então a distância do ponto R a reta j é menor, assim contradizendo o fato de que a distância entre P_0 e ℓ_0 é a menor distância possível entre um ponto e uma reta para todos os pares de pontos e retas presentes no conjunto G_1 “ $d(P_0, \ell_0) \leq d(P, \ell), \forall (P, \ell) \in G_1$ ”. Nesse caso, mostramos que nossa afirmação **ℓ_0 passa por apenas dois pontos** é verdadeira.

Figura 10 – Pontos R e Q são coincidentes.



Fonte: Compilação do autor.

O mesmo vale para a situação em que o ponto R é coincidente ao ponto Q . Observe na **Figura 9** que quando os pontos R e Q são coincidentes, irá formar um triângulo ΔRR_1P_0 , sendo o maior lado deste triângulo o lado RP_0 , que por sua vez é a distância de P_0 a reta ℓ_0 , que é um absurdo, pois a distância de R a reta j é menor que a distância de P_0 á reta ℓ_0 , que já é a menor possível.

■

Note que, mesmo constando na subseção **3.1 Preliminares para os Teoremas**, não se faz o uso dos cálculos das distâncias entre pontos, nem distância entre ponto e reta. Essas informações foram disponibilizados para fins didáticos e

assim, para ter um melhor entendimento sobre o que se diz quando se fala em distância entre pontos e distância entre pontos e retas. Assim, ao ler o desenvolvimento da demonstração, o leitor entenderá de forma mais clara o que se trata essa distância.

Finalizamos este capítulo com o segundo resultado principal deste trabalho, que é ligado diretamente ao **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**.

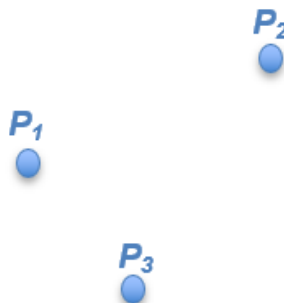
Teorema 2: *Seja \mathcal{P} um conjunto de $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Então o conjunto \mathbb{L} de retas passando por, pelo menos, dois pontos contém no mínimo, n retas.*

Esse teorema relata que dado um conjunto de três ou mais pontos em um plano, não contidos em uma mesma reta, então o conjunto de retas que passam por, pelo menos, dois pontos terá pelo menos n retas. Assim, pode ser obtida a tese que $\#\mathbb{L} \geq n$ (“#” é uma representação de cardinalidade), no qual a cardinalidade (número de elementos) do conjunto de retas passando por, pelo menos, dois pontos será maior ou igual ao número de pontos dados.

Demonstração: Fazendo a demonstração por indução, devemos provar que vale para $n = 3$; em seguida, supor válida para um n , depois estender para $n + 1$.

Então vamos provar para $n = 3$. Para isso criaremos o conjunto \mathcal{P} , que terá os três pontos não colineares, como mostra a **Figura 10** a seguir.

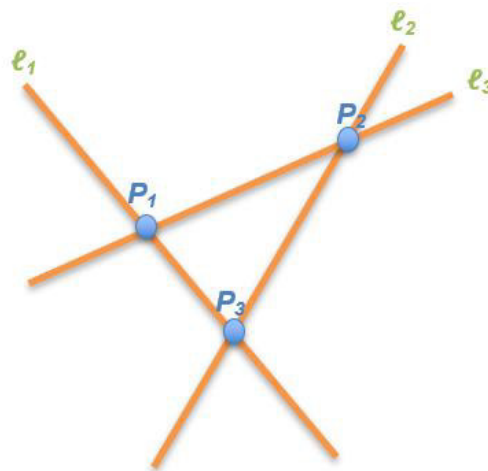
Figura 11 – Representação gráfica de três pontos no plano.



Fonte: Compilação do autor.

Observa-se que para $n = 3$ o conjunto \mathcal{P} será composto pelos três pontos presentes no plano, assim obtendo $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$. Então, serão traçadas todas as retas que passam por pelo menos dois dos pontos, como mostra a **Figura 11**.

Figura 12 – Retas traçadas nos pontos de \mathcal{P} .

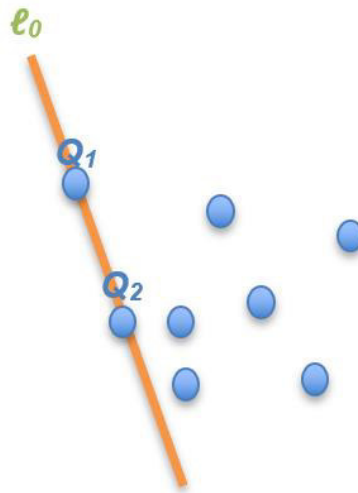


Fonte: Compilação do autor.

Após traçadas essas retas, é criado um conjunto \mathbb{L} , que será composto por todas essas retas traçadas, tendo assim $\mathbb{L} = \{l_1, l_2, l_3\}$; esse conjunto contém três elementos, logo $\#\mathbb{L} = 3$, e sabendo que $n = 3$, temos que $\#\mathbb{L} = 3 \geq 3$, satisfazendo a nossa tese.

Admitindo, assim, que o teorema seja válido para n , agora devemos estendê-lo para $n + 1$. Sabemos, pelo **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**, que existe uma reta $l_0 \in \mathbb{L}$, contendo exatamente dois pontos, digamos que sejam Q_1 e Q_2 pertencentes a \mathcal{P} , sendo $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_{n+1}\}$; veja a representação na **Figura 12**.

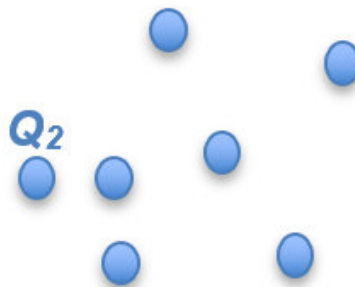
Figura 13 – Representação de alguns pontos do conjunto \mathcal{P} , entre eles o Q_1 e Q_2 por onde passa a reta ℓ_0 .



Fonte: Compilação do autor.

Então será retirado de \mathcal{P} o ponto Q_1 , formando o novo conjunto $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q_1\}$, ou seja, \mathcal{P}' será composto por todos os elementos de \mathcal{P} exceto Q_1 ; veja a **Figura 13**.

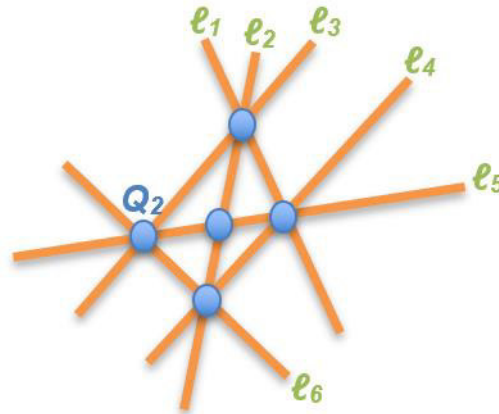
Figura 14 – Representação do conjunto \mathcal{P}' .



Fonte: Compilação do autor.

Ao retirar o Q_1 obtemos o número de elementos de \mathcal{P} , que é $(n + 1)$, menos esse ponto Q_1 , ou seja, menos um elemento, e então $\#\mathcal{P}' = (n + 1) - 1 = n$. Assim, usando a hipótese de indução, obtemos que o conjunto $\mathbb{L}' = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \dots, \ell_n, \dots, \ell_k\}$ possui um número maior ou igual a n de elementos, onde esses elementos são todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de \mathcal{P}' , como mostra a **Figura 14**.

Figura 15 – Representação do conjunto \mathbb{L}' .

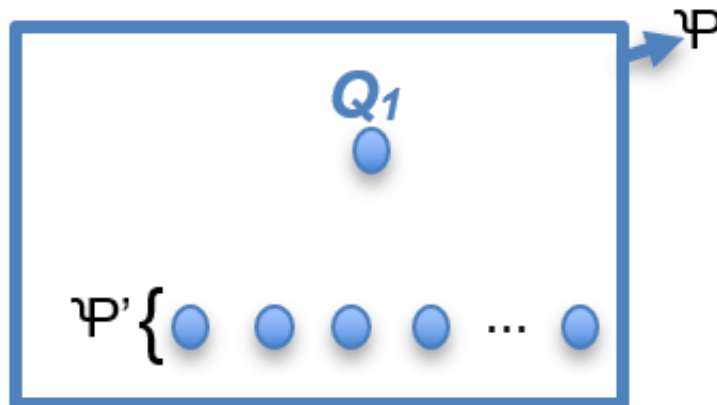


Fonte: Compilação do autor.

Temos então dois casos: um ocorre quando todos os pontos de \mathcal{P}' são colineares, e o outro quando esses pontos não são colineares.

1º caso: Todos os pontos de \mathcal{P}' são colineares: Isso ocorre na situação da **Figura 15** seguir.

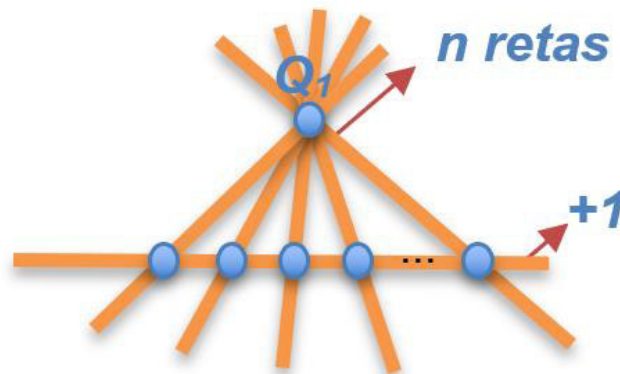
Figura 16 – Representação dos conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{P}' quando os pontos de \mathcal{P}' são colineares.



Fonte: Compilação do autor.

Nessa situação teremos que traçar as retas em pelo menos dois pontos de \mathcal{P} , formando o conjunto \mathbb{L} , como se pode observar na **Figura 16**.

Figura 17 – Retas traçadas pelos pontos de \mathcal{P} .



Fonte: Compilação do autor.

Sabendo que existem n pontos colineares mais o ponto Q_1 que está fora desta reta, temos $\#\mathcal{P} = n + 1$, note também que, como está representado na imagem, podem ser traçadas retas de todos os pontos que estão na mesma linha até o ponto Q_1 , ou seja, podem ser traçadas n retas entre o ponto Q_1 e esses pontos colineares; veja também que passa uma reta onde esses pontos estão contidos, então obtemos $\#L = n + 1$, que é a conclusão $\#L = n + 1 \geq n + 1$, assim comprovando nossa tese.

2º caso: Os pontos de \mathcal{P}' não são colineares, como mostra a **Figura 17** a seguir:

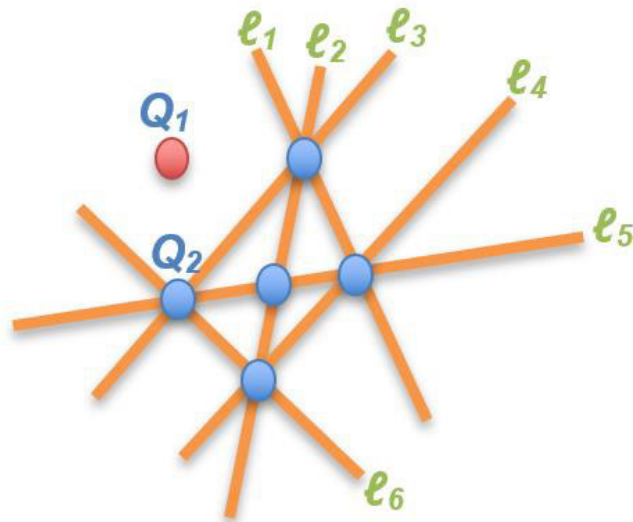
Figura 18 – Representação de \mathcal{P}' quando os pontos não são colineares.



Fonte: Compilação do autor.

Por indução temos que o $\#L' \geq n$. Então, pode-se observar na **Figura 18** que reta ℓ_0 não está contida em L' . Chegando assim a uma afirmação: $\ell_0 \notin L'$.

Figura 19 – Representação de \mathcal{L}' .



Fonte: Compilação do autor.

De fato, pelo **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**, ℓ_0 só possui dois pontos de \mathcal{P} que são Q_1 e Q_2 . Então dizer que $\ell_0 \in \mathcal{L}'$ é dizer que essa reta passa por pelo menos dois pontos (pontos diferentes de Q_1) de $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q_1\}$. Assim, ℓ_0 tem três pontos que são $Q_1 \in \ell_0$ e os outros dois que estão em \mathcal{P}' , o que contradiz a construção de ℓ_0 , sendo assim um absurdo. Portanto, nossa afirmação que $\ell_0 \notin \mathcal{L}'$ está provada. Logo $\#\mathcal{L} \geq n + 1$, sendo n o número de elementos do conjunto \mathcal{L}' e o “1” produzido pela reta ℓ_0 .

■

4 CURIOSIDADES E PROBLEMAS EM ABERTO

Os resultados obtidos no decorrer deste trabalho nos levaram a alguns questionamentos, gerando problemas. Devido a isso, neste capítulo serão apresentadas algumas curiosidades que ocorreram no decorrer das demonstrações dos resultados dos **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**: “*Dada qualquer configuração de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que contém exatamente dois dos pontos.*” e **Teorema 2**: “*Seja \mathcal{P} um conjunto de $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Então o conjunto IL de retas passando por, pelo menos, dois pontos contem no mínimo, n retas.*”

4.1 Problema 1

Começamos com o primeiro problema que surgiu no decorrer da demonstração do **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**, que como mostrado este resultado vale para finitos pontos, então veio o questionamento, “será que este teorema vale para infinitos pontos?”. Veja a seguir alguns resultados envolvendo esse problema.

Problema 1: O **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)** vale para uma configuração de pontos \mathcal{P} contido no \mathbb{R}^2 tal que \mathcal{P} seja enumerável?

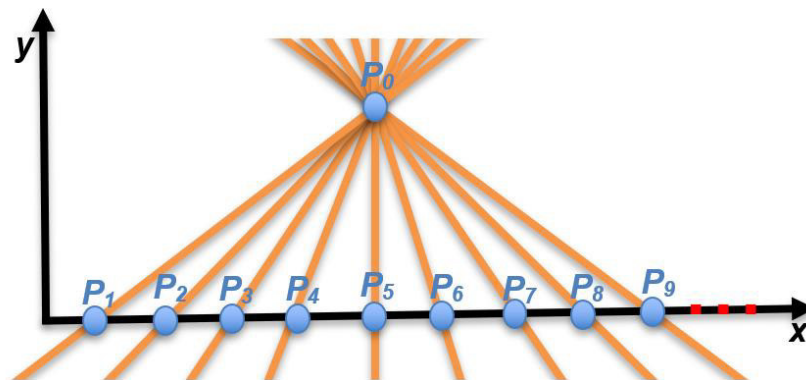
Observação: *Enumerável* aqui significa que podemos *contar* os elementos de \mathcal{P} . Veja os detalhes em (LIMA, 2014 p.7). Exemplos de conjuntos enumeráveis são $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

De modo geral, não vale, mas podemos atribuir alguns casos em que essa afirmação possa ser verdadeira.

Caso 1: Se \mathcal{P} é um conjunto finito (portanto, enumerável) de pontos, o **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)** já mostra que é verdadeiro.

Caso 2: Quando temos uma configuração de infinitos pontos de \mathcal{P} presente em uma reta, e um ponto fora dela, como mostra o exemplo da **Figura 19** a seguir, onde se pega todos os pontos presentes na reta de “ x ” do \mathbb{R}^2 e um ponto fora desta reta, que neste caso está representado por P_0 , o teorema é válido.

Figura 20 – Uma configuração de \mathcal{P} .

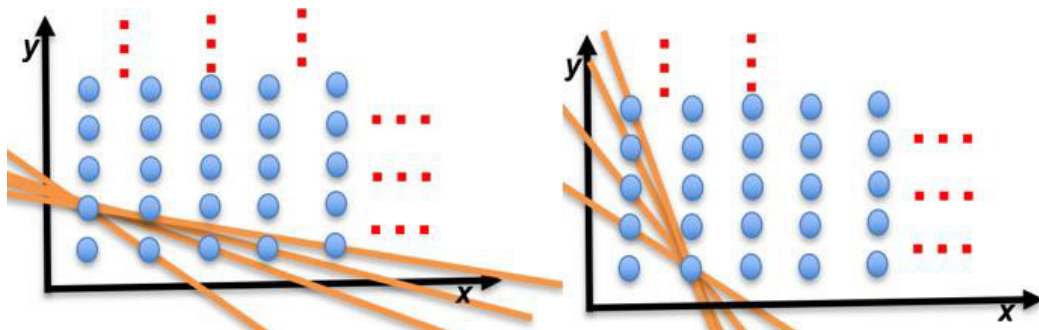


Fonte: Compilação do autor.

Note que será criado um conjunto \mathcal{P} , tendo como elementos os números naturais presentes na reta mais o ponto P_0 ($\mathcal{P} = \mathbb{N} \cup \{P_0\}$), assim podendo construir infinitas retas ℓ_0 ligando esses pontos a P_0 .

Caso 3: Quando temos $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, também vale o teorema, pois veja que podemos cair em algo semelhante ao caso 2 (observe a **Figura 20**).

Figura 21 – Conjunto $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



Fonte: Compilação do autor.

Veja que, quando temos $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será usado o mesmo raciocínio do caso 2, pois vamos ter um ponto em que passa infinitas ℓ_0 , veja nos dois exemplos da **Figura 19**. Pode-se observar outras ℓ_0 presentes nesse cenário.

Por exemplo, uma equação para uma reta ℓ_0 , é dada por $y = -x + 3$ que passa pelos pontos (2,1) e (1,2). Veja que:

Para $x = 1$ temos

$$y = -1 + 3$$

$$y = 2.$$

Para $x = 2$ temos

$$y = -2 + 3$$

$$y = 1.$$

Para $x = 3$ temos

$$y = -3 + 3$$

$$y = 0.$$

Veja que o ponto $(3,0)$ não pertence a $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; note que todos os valores para x devem ser menores que três, pois sempre que tivermos um valor para $x \geq 3$, y ou é zero, ou é um número negativo, que por sua vez, também não pertence a $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Um outro resultado que obtivemos nesse caso é o seguinte: Se $\ell_1: y = ax + b$ é uma reta que passa por dois pontos distintos de $\mathcal{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $a > 0$, então a reta ℓ_1 nunca será uma reta do tipo ℓ_0 . De fato, pois essas retas serão retas crescentes e assim terá infinitos pontos de \mathcal{P} na reta, assim, não satisfazendo o quesito em que a reta ℓ_0 passa por apenas dois pontos. A demonstração a seguir nos mostra esse resultado.

Sejam dois pontos distintos $P_1 = (t_1, t_2)$ e $P_2 = (s_1, s_2)$ pertencentes a \mathcal{P} . Devemos encontrar a equação da reta no formato $y = ax + b$, sendo $a > 0$.

Substituindo os valores dos dois pontos na equação da reta, vamos obter duas equações:

$$\begin{cases} t_2 = at_1 + b & (\text{Eq. 1}) \\ s_2 = as_1 + b & (\text{Eq. 2}) \end{cases}$$

Então, subtraindo a (Eq. 2) da (Eq. 1), vamos obter a seguinte situação:

$$t_2 - s_2 = at_1 - as_1 + b - b.$$

Colocar os termos semelhantes em evidência para chegarmos a:

$$t_2 - s_2 = a(t_1 - s_1). \quad (\text{Eq. 3})$$

Como $t_1 \neq s_1$ (pois os dois pontos não estão em uma mesma reta vertical), sabe-se que sua diferença será diferente de zero, então, dividindo toda a equação por $(t_1 - s_1)$, temos que:

$$\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} = a.$$

Sabendo o valor de a podemos substituí-lo na (Eq. 1) para obter:

$$t_2 = \frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} t_1 + b,$$

Então temos que

$$b = t_2 - t_1 \left(\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \right).$$

Agora, substituindo os valores de a e b na equação da reta

$$y = \frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} x + t_2 - t_1 \left(\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \right).$$

Colocando os termos semelhantes em evidência, tem-se:

$$y = \left(\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \right) (x - t_1) + t_2.$$

Como $a > 0$, então

$$\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} > 0.$$

Podemos supor, sem perder a generalidade, que $t_1 - s_1 > 0$. Com isso, a desigualdade acima nos diz que $t_2 - s_2 > 0$. Portanto, escolhendo $x \in \mathbb{N}$ como sendo

$$x = t_1 + j(t_1 - s_1) \in \mathbb{N},$$

com $j \in \mathbb{N}$ qualquer, obtemos

$$y = \left(\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \right) (x - t_1) + t_2 = \left(\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \right) [j(t_1 - s_1)] + t_2 = j(t_2 - s_2) + t_2,$$

que pertence ao conjunto \mathbb{N} , uma vez que $j(t_2 - s_2) > 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso mostra que ℓ_1 não pode ser do tipo ℓ_0 . ■

Caso 4: Quando o conjunto \mathcal{P} é o plano dos racionais ($\mathcal{P} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). Vamos mostrar que não existe ℓ_0 dada pelo Teorema 1. Mais especificamente, vamos mostrar que qualquer reta que passa por dois pontos distintos de \mathcal{P} possui infinitos pontos de \mathcal{P} .

Demonstração: Note, primeiramente, que as retas perpendiculares ao eixo x possuem equação da forma $x = c, c \in \mathbb{R}$. Se $c \in \mathbb{Q}$, então os infinitos pontos $(c, c + n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, com $n \in \mathbb{N}$, pertencem a reta em questão. Agora, se $c \notin \mathbb{Q}$, então não existe ponto $(c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Isso mostra que, se uma reta vertical possui um ponto no conjunto \mathcal{P} , então ela possui outros infinitos, o que mostra nossa afirmação.

Desconsiderando as retas verticais, sejam dois pontos distintos $P_1 = (r_1, r_2)$ e $P_2 = (t_1, t_2)$ pertencentes a \mathcal{P} . Devemos encontrar a equação da reta no formato:

$$y = ax + b.$$

Substituindo os valores dos dois pontos na equação da reta, assim vamos obter duas equações.

$$\begin{cases} r_2 = ar_1 + b & (\text{Eq. 1}) \\ t_2 = at_1 + b & (\text{Eq. 2}) \end{cases}$$

Então, subtraindo a (Eq. 2) da (Eq. 1), vamos obter a seguinte situação:

$$r_2 - t_2 = ar_1 - at_1 + b - b.$$

Colocar os termos semelhantes em evidência para chegarmos a:

$$r_2 - t_2 = a(r_1 - t_1). \quad (\text{Eq. 3})$$

Como $r_1 \neq t_1$ (pois os dois pontos não estão em uma mesma reta vertical), então, dividindo toda a equação por $(r_1 - t_1)$, temos que:

$$\frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} = a.$$

Sabendo o valor de a podemos substituí-lo na (Eq. 1) para obter:

$$r_2 = \frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} r_1 + b,$$

mostrando que

$$b = r_2 - r_1 \left(\frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} \right).$$

Agora, substituindo os valores de a e b na equação da reta, segue que

$$y = \frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} x + r_2 - r_1 \left(\frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} \right).$$

Colocando os termos semelhantes em evidência tem-se:

$$y = \left(\frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} \right) (x - r_1) + r_2.$$

Assim, veja que para qualquer valor de “ x ” pertencente aos racionais, teremos que a expressão

$$y = \left(\frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} \right) (x - r_1) + r_2$$

é um número racional. Concluímos que, se uma reta passa por dois pontos do plano racional (P_1 e P_2), então tem-se infinitos pontos com coordenadas racionais nessa mesma reta, desfazendo assim a condição de ℓ_0 , que deveria conter apenas dois pontos pertencentes ao plano racional. ■

4.2 Problema 2

Sobre o Teorema 2, surgiu uma questão de contagem. Note que as retas analisadas e contadas neste teorema contêm pelo menos dois pontos. E se a reta

contiver somente dois pontos, tornando-as, assim, retas do tipo ℓ_0 , quantas retas teríamos?

Após análises de vários exemplos, foi conjecturado que, para todo $n \geq 2$,

$$\#\mathbb{L}_0 \geq n - 1,$$

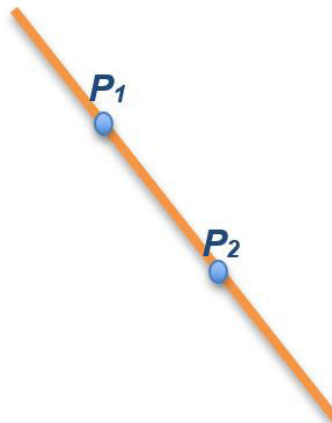
onde \mathbb{L}_0 é o conjunto de retas que passam por exatamente dois pontos de \mathcal{P} .

Ou seja, o número de retas do tipo ℓ_0 será maior ou igual ao número de pontos menos um, para todo n maior ou igual a dois. (veja a demonstração deste resultado seguir).

Demonstração: Pode-se chegar à comprovação deste resultado, usando o primeiro princípio de indução, para isso vamos verificar se vale para $n = 2$.

Então vamos provar para $n = 2$, para isso criaremos o conjunto \mathcal{P} , com dois pontos como mostra a **Figura 21** a seguir.

Figura 22 – Representação gráfica de uma reta que passa exatamente por dois pontos.



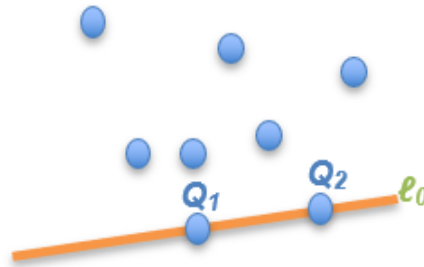
Fonte: Compilação do autor.

Veja que para $n = 2$ o conjunto \mathcal{P} será composto pelos dois pontos presentes na **Figura 21**, obtendo $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$. Então, ao ser traçada a reta que passa por exatamente dois pontos, é criado um conjunto \mathbb{L}_0 , que será composto por esta reta, sendo assim $\mathbb{L}_0 = \{\ell_1\}$. Esse conjunto contém somente um elemento, assim $\#\mathbb{L}_0 = 1$, sabemos $n = 2$, então $\#\mathbb{L}_0 = 1 \geq 2 - 1 = 1$, mostrando que $\#\mathbb{L}_0 \geq n - 1$ e satisfazendo a nossa tese de indução.

Admitindo, assim, que o teorema seja válido para n , agora devemos estendê-lo para $n + 1$ tendo então $\#\mathbb{L}_0 \geq n + 1 - 1$. Sabemos, pelo **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)**, que existe uma reta $\ell_0 \in \mathbb{L}_0$, contendo exatamente dois pontos, digamos que

os pontos Q_1 e Q_2 pertencentes a \mathcal{P} , sendo $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_{n+1}\}$, veja a representação na **Figura 22**.

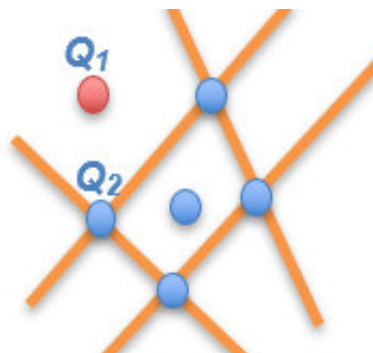
Figura 23 – representação dos pontos do conjunto \mathcal{P} , entre eles o Q_1 e Q_2 por onde passa a reta ℓ_0 .



Fonte: Compilação do autor.

Então, retira-se de \mathcal{P} o ponto Q_1 , teremos o conjunto $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q_1\}$ ou seja, \mathcal{P}' terá todos os elementos de \mathcal{P} exceto Q_1 . Ao retirar o Q_1 chegará que o número de elementos de \mathcal{P} , que é $(n + 1)$, menos esse ponto Q_1 , ou seja, menos um elemento, então temos $\#\mathcal{P}' = (n + 1) - 1 = n$. Assim, usando a hipótese de indução, obtemos que o conjunto $\mathbb{L}_0' = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \dots, \ell_{n-1}, \dots, \ell_k\}$ possui um número maior ou igual a $n - 1$ elementos, onde esses elementos são todas as retas que passam por exatamente dois pontos de \mathcal{P}' , como mostra a **Figura 23**.

Figura 24 – Representação do conjunto \mathbb{L}_0' .



Fonte: Compilação do autor.

Em símbolos, $\#\mathbb{L}_0' \geq n - 1$. Então, pode-se observar na **Figura 23** que a reta ℓ_0 não está contida em \mathbb{L}_0' . Chegando assim a uma afirmação: $\ell_0 \notin \mathbb{L}_0'$. De fato,

seguindo o mesmo raciocínio do **Teorema 2**, ℓ_0 só possui dois pontos de \mathcal{P} , sendo eles Q_1 e Q_2 . Então dizer que $\ell_0 \in \mathbb{L}_0'$ é afirmar que essa reta passa exatamente por dois pontos, que não sejam o Q_1 , de $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q_1\}$. Assim, ℓ_0 tem três pontos que são $Q_1 \in \ell_0$ e os outros dois que estão em \mathcal{P}' , o que contradiz a definição de ℓ_0 , que passa por exatamente dois pontos. Portanto, nossa afirmação que $\ell_0 \notin \mathbb{L}_0'$ está provada. Logo $\#\mathbb{L}_0 \geq n - 1 + 1$, com $n - 1$ o número de elementos do conjunto \mathbb{L}_0' e o "1" sendo a ℓ_0 .

■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria, em geral, nos dá um amplo conjunto de material de estudo, tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Além disso, nos fornece a possibilidade de analisar objetos reais, como por exemplo a cerâmica de uma casa, onde pode ser analisado como um quadrado perfeito, até as medidas de um campo de futebol, onde pode-se analisar todos os dados geométricos presentes neles, por exemplo: retas, segmentos de reta, circunferências, semicircunferências, etc..

Neste trabalho, faz-se o uso da Geometria Plana, porém com uma análise usando aspectos da Geometria Analítica, como as distâncias entre pontos e a distância entre pontos e retas. Na demonstração original do teorema principal deste trabalho (contida em Aigner e Ziegler (2018 p.77)), foram usados, para a análise dos dados, axiomas, nos quais são definidos alguns resultados, sem a necessidade de comprovação de validade, apenas assume o axioma como verdade e assim faz o seu uso. Chegou-se a uma conclusão que, ao fazer o uso desses axiomas, a demonstração continuaria bem abstrata, então decidiu-se usar os conceitos da Geometria Analítica buscando esclarecer os conceitos para um melhor entendimento do leitor.

Para solucionar a questão problema desta monografia, foram apresentados definições, figuras didáticas, uma linguagem clara e sucinta, além de um panorama histórico dos matemáticos Joseph Sylvester e Tibor Gallai, responsáveis pelos resultados principais contidos neste trabalho.

No decorrer da pesquisa, solucionamos alguns problemas que nós mesmos levantamos, que foram: “Existe ℓ_0 quando se tem infinitos pontos enumeráveis?”. Essa pergunta teve sua solução dividida em casos, sendo esses, alguns conjuntos numéricos. Outra pergunta respondida neste trabalho foi uma questão de contagem, que é: “Dado um conjunto de pontos não colineares, quantas ℓ_0 podemos formar?”, que teve sua solução, através de uma conjectura feita por tentativas e erros, onde teve sua comprovação através da demonstração fundamentada no Primeiro Princípio da Indução Finita.

Como trabalhos futuros, pretendemos realizar uma pesquisa voltada a mais uma aplicação do **Teorema 1 (Sylvester-Gallai)** que seria uma generalização dos teoremas principais deste trabalho que tem como enunciado:

“Seja X um conjunto com $n \geq 3$ elementos, e sejam A_1, \dots, A_m subconjuntos próprios de X tais que todo par de elementos de X está contido em, precisamente, um conjunto A_i . Então é verdade que $m \geq n$ ” (AIGNER E ZIEGLER 2018 p.78).

REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin; M. ZIEGLER, Gunter. Lines in the plane and decompositions of graphs: Question for solution. In: **PROOFS from THE BOOK**. Sixth Edition. ed. [S. l.]: Springer, 2018.

BABAI, László; T SÓS, Vera. Tibor Gallai, 1912-1992. **Combinatória**, v. 12, n. 4, 1992.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

IEZZI, Gelson. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 7**: geometria analítica. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

James Joseph Sylvester em Só Matemática. Virtuoso Tecnologia da Informação, 1998-2022. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/sylvester.php> . Acesso em: 16 mar. 2022

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**: funções de uma variável. Rio de Janeiro: Impa, 2014.

O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, Ef. Tibor Gallai: biografia. Escócia: Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews, 2020. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gallai/>. Acesso em: 20 mar. 2022.

O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, Ef. James Joseph Silvestre: biografia. Escócia: Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews, 2005. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/>. Acesso em: 18 mar. 2022.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de história da matemática. 2012.

Santos, Almir Rogério Silva. Geometria euclidiana plana / Almir Rogério Silva Santos, Humberto Henrique de Barros Viglioni -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

SYLVESTER, James Joseph. James Joseph Sylvester. Disponível em: https://www.dasbestlexikon.de/wiki/James_Joseph_Sylvester. Acesso em: 16 mar. 2022.