



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELISSAMA BIRZAVITE RAMOS DE PAULA

INTEGRAL DUPLA E SUAS APLICAÇÕES

ARAGUAÍNA
2020

ELISSAMA BIRZAVITE RAMOS DE PAULA

INTEGRAL DUPLA E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Samara Leandro Matos da Silva.

ARAGUAÍNA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P324i Paula, Elissama Birzavite Ramos de .
Integral dupla e suas aplicações . / Elissama Birzavite Ramos de Paula. –
Araguaína, TO, 2020.
35 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus
Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2020.
Orientadora : Samara Leandro Matos da Silva

1. Integral dupla. 2. Integral iterada. 3. Teorema de Fubini. 4. Aplicação . I.
Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ELISSAMA BIRZAVITE RAMOS DE PAULA

INTEGRAL DUPLA E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Samara Leandro Matos da Silva.

Aprovada em: 17 / 12 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Samara L. Matos da Silva

Prof^ª. Dr^ª Samara Leandro Matos da Silva (orientadora)

Fernanda Vital de Paula

Prof^ª. Dr^ª Fernanda Vital de Paula



Prof. Me. André Luiz Ortiz da Silva

Dedico este trabalho primeiramente à Deus por ter me dado forças para chegar até aqui, à minha família por me incentivar, aos meus amigos que estavam sempre na torcida e à minha Professora orientadora Samara Leandro Matos da Silva, pelo seu apoio e orientação que me conduziram a elaboração do trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me abençoar e iluminar durante esse ciclo.

À minha família pelo incentivo aos estudos e pelo apoio incondicional.

À todos os meus amigos, aos antigos e aos novos que conquistei no curso de graduação, por compartilharem dos inúmeros momentos de alegria e de desafios que enfrentamos, sempre com o espírito colaborativo. Agradeço, em especial, a Ariane Andressa N. de S. Miranda, que sempre esteve ao meu lado partilhando dos momentos bons e ruins.

À minha orientadora Samara Leandro Matos da Silva, pela sua paciência e dedicação durante o projeto. Obrigado por me manter motivada durante todo esse processo.

Por fim, sou grata a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, participaram da realização desse projeto.

“ Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho trata das integrais duplas com uma linguagem aprazível para fácil compreensão da mesma na resolução de problemas. Através dela iremos realizar algumas aplicações utilizando o cálculo de área, volume, centro de massa, massa e momento de inércia. Desta maneira, é crucial ter o entendimento da sua utilização, seja na Matemática, na Física ou em outras ciências. Diante disso, temos o propósito de resgatar, desenvolver e expor alguns conceitos essenciais de integrais duplas em funções de duas variáveis reais por meio de interpretações algébricas, geométricas e de problemas comuns para fácil resolução. À vista disso, o intuito desse trabalho é mostrar a usabilidade das integrais duplas e sua importância na aplicação dos cálculos citados anteriormente.

Palavras-chave: Integral Dupla. Integral Iterada. Teorema de Fubini. Aplicação.

ABSTRACT

This work talks about double integrals with a pleasant language for easy understanding of it in solving problems. Through it we will perform some applications using the calculation of area, volume, center of mass, mass and moment of inertia. Thus, it is crucial to have an understanding of its use, whether in mathematics, physics or other sciences. Therefore, we have the purpose of rescuing, developing and exposing some essential concepts of double integrals in functions of two real variables through algebraic, geometric interpretations and common problems for easy resolution. In view of this, the purpose of this work is to show the usability of double integrals and their importance in the application of the calculations mentioned above.

Keywords: Double Integral. Iterated Integral. Fubini's theorem. Application.

Lista de Figuras

2.1	A soma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(Q_k)\Delta x_k$ é a soma das áreas de retângulos.	14
2.2	Região fechada e limitada R.	14
2.3	Grade retangular particionando a região R.	15
2.4	Região fechada.	17
3.1	Tipo de regiões (R_x ou R_y) de integração dupla.	21
3.2	Região limitada pelas parábolas.	21
3.3	Região limitada pela parábola e pela reta	22
3.4	Área de uma seção transversa.	24
3.5	Prisma com base triangular no plano xy	25
3.6	Área de pequeno retângulo contendo (x,y)	26
3.7	Divisão do retângulo R contendo D em sub-retângulos.	26
3.8	Triângulo isósceles.	27
3.9	Retângulo pequeno na região D	28
3.10	Lâmina de região triangular.	28
3.11	Região retangular D com cargas puntiformes	30

Sumário

1	Introdução	12
2	Integrais Duplas	13
2.1	Revisão da Integral Definida	13
2.2	Integral Dupla	14
2.3	Interpretação Geométrica	16
2.3.1	Propriedades da Integral Dupla	16
2.4	Integral Iterada	17
2.4.1	Teorema de Fubini	19
3	Aplicações das Integrais Duplas	20
3.1	Área	20
3.2	Volume	24
3.3	Densidade e Massa	25
3.4	Momentos e Centros de Massa	27
3.5	Carga	30
3.6	Momento da Inércia	31
4	Considerações Finais	33
	Referências	34

Capítulo 1

Introdução

Segundo Eves (1994), as dúvidas relacionadas com os conceitos de área, comprimento e volume nos relembra o tempo dos egípcios há mais de 4000 anos, quando os problemas como cálculo de áreas de campos e volumes de grãos começaram a ter importância. No decorrer do progresso histórico da humanidade e também da matemática, inúmeras barreiras foram sendo ultrapassadas e com isso muitos conceitos foram concebidos, e uma delas foi a do Cálculo Integral criada por Leibniz. Através dessa descoberta diversas ferramentas surgiram para contribuir solucionando dúvidas que até então não haviam respostas.

A Integral Dupla é uma das ferramentas que surgiu a partir da expansão dos conceitos e propriedades das integrais simples, através dela alguns problemas geométricos foram resolvidos, por exemplo os problemas de área e volume e tendo uma grande contribuição na física, possibilitando a solução de questões envolvendo massa, centro de massa, momento da inércia e muitos outros.

Este trabalho tem como objetivo geral auxiliar o público acadêmico a ter um fácil entendimento no estudo às integrais duplas, suas definições, propriedades e aplicações, mostrando o melhor meio para fazer uma interpretação seja algébrica e/ou geométrica e sua importância em situações simples.

Deste modo, organizamos o trabalho, além da introdução e das considerações finais, em dois capítulos. No capítulo 2, mostramos a revisão de integral simples estendida para integral dupla onde abordaremos a definição e suas propriedades, além de exibir a soma de Riemann, as integrais iteradas e os cálculos para resolução das integrais duplas. No terceiro capítulo, veremos algumas aplicações das integrais duplas, usando as formulas de área e volume com funções de duas variáveis que ajudaram a resolver cálculos de problemas como massa, centro de massa, momento da inércia.

Capítulo 2

Integrais Duplas

Neste capítulo, expandimos a noção da integral definida de uma função simples para funções de duas variáveis. Na primeira seção, iremos fazer uma revisão rápida de integral definida para funções de uma variável. Na segunda seção, iremos definir as Integrais Duplas e destacaremos algumas propriedades, para um bom entendimento é preciso ter o conhecimento de algumas definições tais como, a integral de Riemann, continuidade, limite e o Teorema Fundamental do Calculo. Para este estudo estamos utilizando como referência as obras de Leithold (1994), Thomas (2009), Stewart (2007), Flemming (2007).

2.1 Revisão da Integral Definida

Iremos iniciar revisando a construção da **integral definida** $\int_a^b f(x)dx$, de uma função $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua definida no intervalo $I = [a,b]$ no conjunto \mathbb{R} dos números reais tais que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, dividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos escolhendo $n - 1$ pontos, digamos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} entre a e b semelhantes a seguinte condição $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$. Para tornar a notação coerente, consideremos $a = x_0$ e $b = x_n$.

O conjunto $P = x_0, x_1, \dots, x_n$ é chamado partição de $[a,b]$. A partição P define n intervalos fechados:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

O subintervalo fechado da forma $[x_{k-1}, x_k]$ é chamado k -ésimo subintervalo de P . Para cada $0 \leq k \leq n$ selecionamos um número Q_k no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Assim, formando a soma de Riemann:

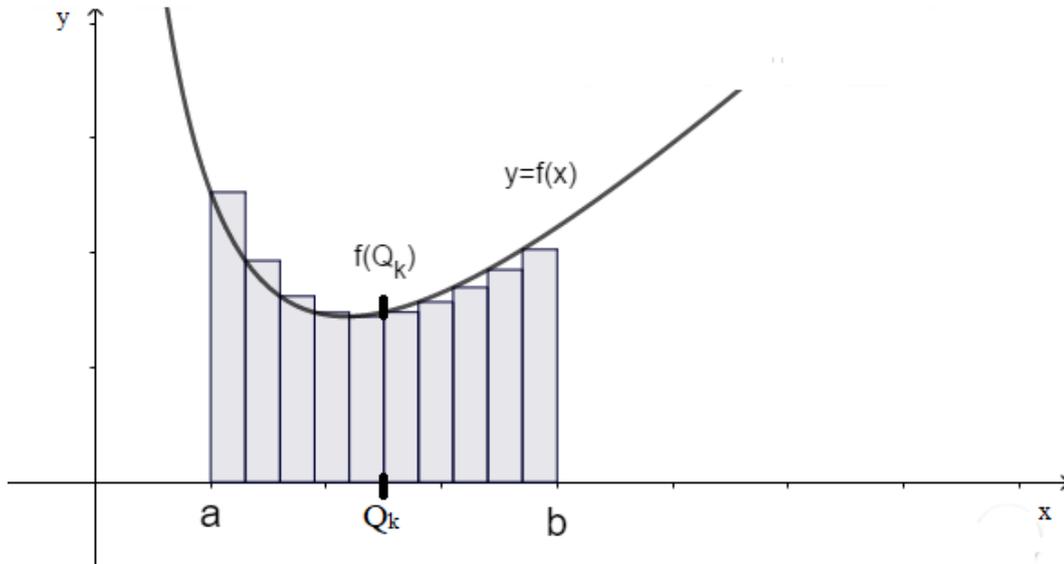
$$S = \sum_{k=1}^n f(Q_k) \Delta x_k,$$

no qual $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ é o comprimento do k -ésimo subintervalo.

Se $\|P\|$ é a norma da partição considerada (ou seja, o maior dos Δx_k), então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(Q_k)\Delta x_k$$

Figura 2.1: A soma de Riemann $\sum_{k=1}^n f(Q_k)\Delta x_k$ é a soma das áreas de retângulos.

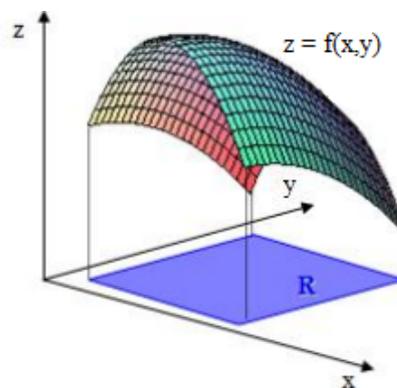


Fonte: Própria autora.

2.2 Integral Dupla

Consideremos uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis reais definida numa região fechada e limitada \mathbf{R} do plano xy , onde toda a região \mathbf{R} está contida em uma região retangular D , como mostra a Figura 2.2.

Figura 2.2: Região fechada e limitada \mathbf{R} .

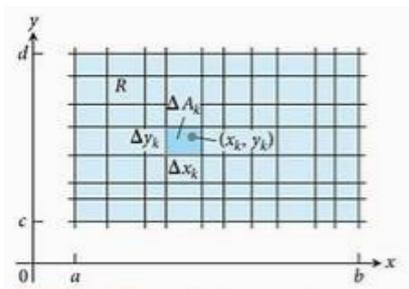


Fonte: <http://www.dex.ufla.br/Ivana/integracaomultipla/dupla.htm>.

Se traçarmos retas paralelas aos eixos coordenados x e y , iremos dividir D em sub-regiões retangulares, os quais irá delimitar os intervalos fechados de $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$, reves-

tindo \mathbf{R} por pequenos retângulos. Essas sub-regiões fechadas retangulares dentro da região \mathbf{R} constituirão uma partição interior chamada P de \mathbf{R} . Essas partições são representadas por R_k e enumeradas de R_1 a R_n . A diagonal com o maior comprimento de todas as R_k é a norma $\|P\|$ da partição. ΔA_k é o símbolo usado para indicar a área de R_k , ou seja, $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ é a área do retângulo R_k . Na Figura 2.3 temos que, para cada k selecionamos um ponto arbitrário (x_k, y_k) em R_k . Dessa maneira podemos definir as somas de Riemann.

Figura 2.3: Grade retangular particionando a região \mathbf{R} .



Fonte: Stewart (2007, p.406).

Definição 2.1. *Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região \mathbf{R} , e seja $P = R_k$ uma partição interior de \mathbf{R} . Uma soma de Riemann de f para P é qualquer soma da forma*

$$\sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

em que (x_k, y_k) é um ponto de R_k e ΔA_k é a área de R_k . A somatória se estende a todas as sub-regiões R_1, R_2, \dots, R_n de P .

Se traçarmos mais retas paralelas aos eixos coordenados x e y , as dimensões dos retângulos tornam-se cada vez menores fazendo a diagonal máxima dos retângulos na região \mathbf{R} tender a zero quando n tende ao infinito. Se f é contínua em \mathbf{R} , as somas de Riemann tendem a um número real L quando $\|P\| \rightarrow 0$, independente dos intervalos (x_k, y_k) escolhidos nas sub-regiões de R_k . Abaixo, iremos ver uma definição precisa de limite de somas de Riemann.

Definição 2.2. *Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região \mathbf{R} , e seja L um número real. A afirmação,*

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k = L,$$

significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição $P = R_k$, para a qual $\|P\| < \delta$, então

$$\left| \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k - L \right| < \varepsilon$$

para toda escolha de (x_k, y_k) em R_k .

Essa definição nos afirma que podemos tornar toda soma de Riemann tão próxima de L quanto quisermos, selecionando uma partição interior com norma $\|P\|$ pequena. Dessa maneira, podemos definir a integral dupla de f .

Definição 2.3. *Uma função f de duas variáveis será dita integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L existir. Esse número L será chamado de integral dupla de f em R , e escrevemos*

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

Outras notações usadas para integral dupla de f em R são

$$\iint_R f(x, y) dx dy \text{ e } \iint_R f(x, y) dy dx.$$

O Teorema 1 exibe uma condição suficiente para que uma função f de duas variáveis seja integrável.

Teorema 1. *Se uma função de duas variáveis for contínua numa região fechada R , então R será integrável em R*

2.3 Interpretação Geométrica

Suponhamos que, f seja contínua e tenha-se $z = f(x, y) \geq 0$ em toda região R . Indiquemos por U o gráfico de f e por T o sólido localizado abaixo de U sobre R , como mostra a Figura 2.4, e seja $P_k(x_k, y_k, 0)$ um ponto na sub-região R_k de uma partição interior P de R . Logo $f(x_k, y_k)$ será a distância do plano xy ao ponto Q_k em U , acima de P_k .

O produto $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ representa o volume de um prisma reto de base retangular de área ΔA_k . A soma do volume de todos os prismas é uma aproximação do volume V de T . Como esta aproximação melhora fazendo $\|P\|$ tender à zero, definimos V como limite de somas dos números $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ e aplicando a Definição 2.1, temos:

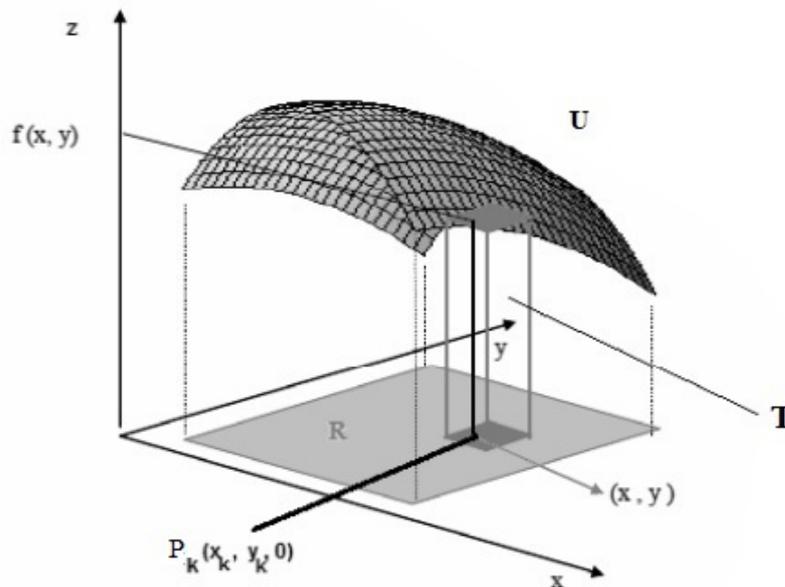
Definição 2.4. *Seja f uma função contínua de duas variáveis tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em uma região R . O volume V do sólido localizado entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de R é*

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

2.3.1 Propriedades da Integral Dupla

Para mostrar as propriedades que seguem, estamos supondo que a fronteira da região de integração R é formada por um número finito de arcos de curvas suaves e que as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são contínuas sobre a região R . Dessa forma, temos a garantia da existência das integrais duplas envolvidas.

Figura 2.4: Região fechada.



Fonte: Stewart (2007, p.406).

Proposição 2.5. *Sejam f e g funções contínuas, então:*

I) *Múltiplo constante:*
$$\iint_R cf(x, y)dA = c \iint_R f(x, y)dA \text{ (para todo } c \text{ constante);}$$

II) *Soma e diferença:*
$$\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]dA = \iint_R f(x, y)dA \pm \iint_R g(x, y)dA;$$

III) *Dominação:*

(a)
$$\iint_R f(x, y)dA \geq 0 \text{ se } f(x, y) \geq 0 \text{ em } \mathbb{R};$$

(b)
$$\iint_R f(x, y)dA \geq \iint_R g(x, y)dA; \text{ se } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ em } \mathbb{R}$$

IV) *Aditividade:*
$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA \text{ se } R \text{ for a união de dois retângulos não sobrepostos } R_1 \text{ e } R_2.$$

2.4 Integral Iterada

Determinar o valor da integral dupla em alguns casos a partir da Definição 2.1 pode ser muito complexo. Nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla por meio de duas integrais sucessivas, onde cada uma envolve apenas uma variável independente. Dessa maneira, veremos abaixo um teorema que será útil para o cálculo de integrais duplas.

Definição 2.6. *Seja f uma função contínua*

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad & \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx; \\
 \text{II)} \quad & \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.
 \end{aligned}$$

Iremos fazer uma integração parcial, primeiro em relação a y (I), onde substituiremos y por $g_1(x)$ e $g_2(x)$ e depois integramos a expressão resultante em x de a e b . Na definição (II), integramos primeiro em relação a x , onde x será trocado por $h_1(y)$ e $h_2(y)$, integramos a expressão resultante em relação a y de c e d .

Exemplo 2.7. Encontre

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx.$$

Solução: Usando a definição 2.6 (I) a integral é igual a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right] dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 4 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
 & = \int_0^2 \left[x^3 \cdot 2x + 4 \left(\frac{2x}{2} \right)^2 - \left(x^3 \cdot x^2 + 4 \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right) \right] dx \\
 & = \int_0^2 (2x^4 + 8x^2 - x^6 - 2x^4) dx = \int_0^2 (8x^2 - x^6) dx \\
 & = \left[\frac{8x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{8 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^6}{6} \right] \\
 & = \frac{64}{3} - \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.8. Encontre

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx dy.$$

Solução: Usando a Definição 2.6 (II), temos que a integral é igual a

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx \right] dy = \int_1^3 2y [\operatorname{sen} x]_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=y^2} dy \\
 & = \int_1^3 2y \left(\operatorname{sen} y^2 - \frac{1}{2} \right) dy = \int_1^3 (2y \operatorname{sen} y^2 - y) dy \\
 & = [-\operatorname{cos} y^2 - y]_{y=1}^{y=3} = \left[\left(-\operatorname{cos} 9 - \frac{9}{2} \right) - \left(-\operatorname{cos} 1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 & = -\operatorname{cos} 9 + \operatorname{cos} 1 - 4 = -2,55.
 \end{aligned}$$

Observação: Não temos como prever que ordem de integração será melhor. Se a ordem pela qual escolher não funcionar, tente com a outra. Às vezes, nenhuma ordem funciona e temos de utilizar aproximações numéricas.

2.4.1 Teorema de Fubini

Teorema 2 (Primeira forma). *Se f for contínua no retângulo $R = [(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d]$, então*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

O Teorema 2 diz que as integrais duplas

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \text{ e } \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

são integrais iteradas ou integrais repetidas de $f(x, y)$ sobre o retângulo \mathbf{R} e nelas a ordem de integração está especificada. Por exemplo, na integral iterada

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a y , considerando x temporariamente como constante. Após substituir y pelos limites de integração c e d , integramos o resultado em relação a x no intervalo a e b .

Observe que as integrais iteradas são solucionadas de dentro para fora.

Exemplo 2.9. *Encontre o valor da integral $\iint_R xy^2 dA$, onde $\mathbf{R} = [(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2]$.*

Solução:

Conforme o Teorema de Fubini, a integral dada é igual a

$$\begin{aligned} \iint_R xy^2 dA &= \int_0^2 \left[\int_0^3 xy^2 dx \right] dy = \int_0^2 y^2 \left[\int_0^3 x dx \right] dy \\ &= \int_0^2 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 \frac{9}{2} y^2 dy \\ &= \frac{9}{2} \int_0^2 y^2 dy = \frac{9}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= \frac{9}{2} \left[\frac{2^3}{3} \right] = \frac{9}{2} \left[\frac{8}{3} \right] = \frac{72}{6} = 12. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \iint_R xy^2 dA &= \int_0^3 \left[\int_0^2 xy^2 dy \right] dx = \int_0^3 x \left[\int_0^2 y^2 dy \right] dx \\ &= \int_0^3 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^3 \frac{8}{3} x dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^3 x dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{8}{3} \left[\frac{3^2}{2} \right] = \frac{8}{3} \left[\frac{9}{2} \right] = \frac{72}{6} = 12. \end{aligned}$$

Observação: *O exemplo das integrais iteradas serem iguais não é coincidência, pois se f é contínua, então as duas integrais iteradas serão sempre iguais.*

Capítulo 3

Aplicações das Integrais Duplas

Nesta seção, mostraremos algumas aplicações da integral dupla, seja para calcular as áreas e volumes de inúmeras regiões limitadas no plano, ou até mesmo para calcular massa, centro de massa e momento da inércia na área da Física. Para isso faremos uso das obras de Halliday (2016), Thomas (2009), Stewart (2007), Flemming (2007).

3.1 Área

Se tomamos $f(x, y) = 1$ na Definição 2.1. da integral dupla sobre uma região \mathbf{R} e se \mathbf{R} é a região R_x (Figura 3.1), então, pelo Teorema 2 de integral iterada,

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx \quad (3.1)$$

é igual à área A de \mathbf{R} . Dessa forma, vale de maneira análoga se \mathbf{R} é uma região R_y (Figura 3.1),

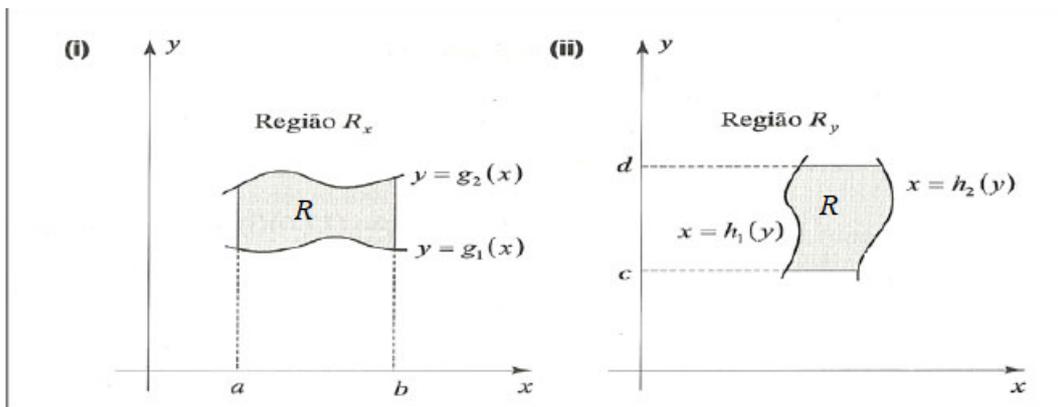
$$\iint_R dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} 1 dx dy = \int_c^d [x]_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)] dy. \quad (3.2)$$

Tal fato também é evidente pela definição de Integral Dupla, visto que se $f(x, y) = 1$ em toda a região \mathbf{R} , então a soma de Riemann da Definição 2.1 é uma soma de áreas de retângulos em uma partição interior P de \mathbf{R} . No momento que a norma $\|P\|$ tende para zero, esses retângulos cobrem mais e mais a região \mathbf{R} e o limite é análogo à área de \mathbf{R} . Podemos usar uma integral iterada para encontrar uma área, tendo em consideração, como limite de somas duplas de maneira semelhante ao caso de volume, como na definição 3.4 de volume como limite de somas duplas, com $f(x, y) = 1$. Dessa forma, contamos com o seguinte resultado.

Definição 3.1. *A área de uma região R fechada e limitada é*

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j \Delta x_k = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx.$$

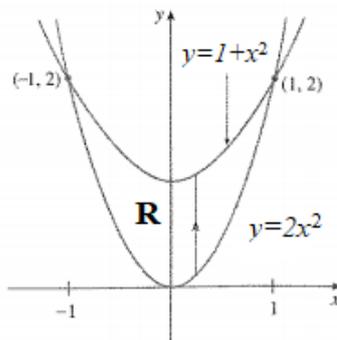
Figura 3.1: Tipo de regiões (R_x ou R_y) de integração dupla.



Fonte: Swokowski (1994, p.466).

Exemplo 3.2. (Stewart, 2007) Calcule $\iint_R (x + 2y)dA$, onde R é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Figura 3.2: Região limitada pelas parábolas.



Fonte: Stewart (2007, p.437).

Solução: Observamos que R , ilustrada na figura 3.2, é uma região R_x , e podemos transcrever que

$$R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}.$$

como a fronteira abaixo é $y = 2x^2$ e a de cima é $y = 1 + x^2$, e usando a equação (3.1),

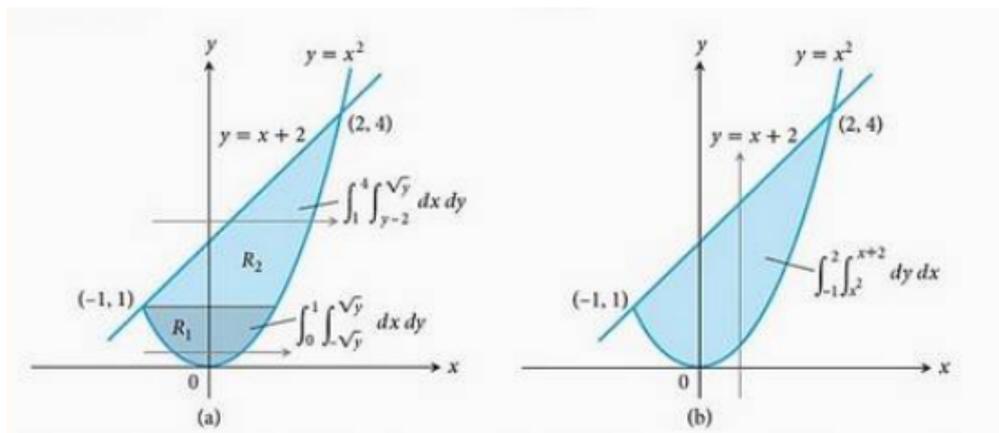
temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x + 2y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 [x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx \\
 &= \left[-\frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{x=-1}^{x=1} \\
 &= \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) \\
 &= -\frac{6}{5} + \frac{4}{3} + 2 \\
 &= \frac{-18 + 20 + 30}{15} \\
 &= \frac{32}{15} u.a.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. (Thomas, 2007) Encontre a área da região R limitada pela $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$.

Solução: Se dividirmos R em regiões R_1 e R_2 , como mostra a figura 3.3(a), e usando a

Figura 3.3: Região limitada pela parábola e pela reta



Fonte: Thomas (2007, p.420).

propriedade da aditividade (2.5), podemos calcular a área como

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA \\
 &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy \\
 &= \int_0^1 [x]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^4 [x]_{x=y-2}^{x=\sqrt{y}} dy \\
 &= \int_0^1 2\sqrt{y} dy + \int_1^4 \sqrt{y} - y + 2 dy \\
 &= \left[\frac{4\sqrt{y^3}}{3} \right]_{y=0}^{y=1} + \left[\frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_1^4 \\
 &= \left(\frac{4\sqrt{1^3}}{3} \right) + \left[\left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{4^2}{2} + 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) \right] \\
 &= \left(\frac{4}{3} \right) + \left[\left(\frac{16}{3} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right] \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \\
 &= \frac{18}{3} + \frac{1}{2} - 2 \\
 &= \frac{36 + 3 - 12}{6} \\
 &= \frac{9}{2} u.a.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, invertendo a ordem de integrando em relação a y (figura 3.3 b), temos

$$A = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx.$$

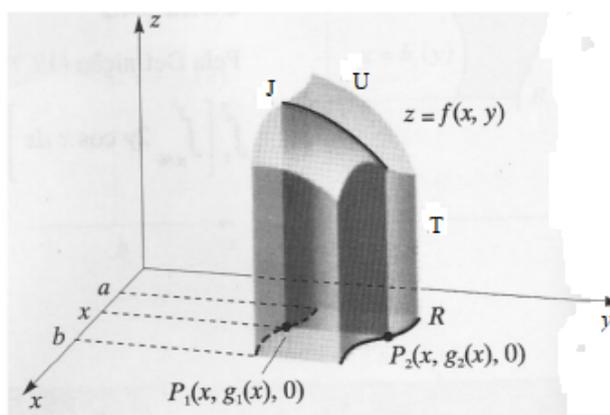
Esse segundo resultado, irá requerer apenas uma integração dupla de maneira simples. A área é

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 [y]_{y=x^2}^{y=x+2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=2} \\
 &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= 5 - \frac{1}{2} = \frac{10 - 1}{2} \\
 &= \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

3.2 Volume

Suponhamos que $f(x, y) \geq 0$ em toda região R_x ilustrada na Figura 3.1(i), e seja U o gráfico de f . T o sólido localizado sob U e sobre R e V o volume de T . Vejamos o plano que é paralelo ao plano yz e intercepta o eixo x no $(x, 0, 0)$, com $a \leq x \leq b$, e seja J o traço de U nesse plano (ver figura 3.4). Este plano intercepta as fronteiras da região $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ em $P_1(x, g_1(x), 0)$ e $P_2(x, g_2(x), 0)$.

Figura 3.4: Área de uma seção transversa.



Fonte: Thomas (2007, p.420).

Contudo, sabemos que a área $A(x)$ do plano xy é

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Visto que, $A(x)$ é a área de uma seção transversa de T , podemos proceder de acordo para o calculo do volume que é:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

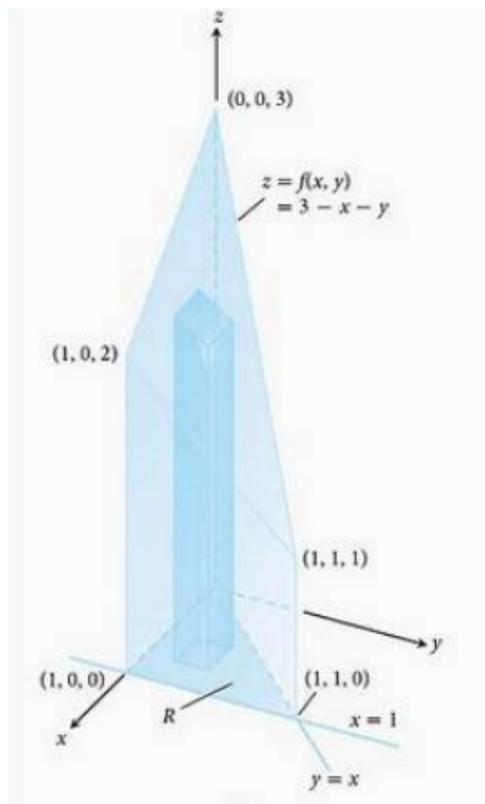
Definição 3.4. *Volume como limite de somas duplas:*

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(x_k, x_j) \Delta y_j \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Exemplo 3.5. (Thomas, 2007) *Encontre o volume do prisma cuja base é o triângulo no plano xy limitado pelo eixo x e pelas retas $y = x$ e $x = 1$ e o topo está no plano $z = f(x, y) = 3 - x - y$.*

Solução: *Veja a Figura 3.5. Para qualquer x entre 0 e 1, y pode variar de $y = 0$ a $y = x$. Assim,*

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1. \end{aligned}$$

Figura 3.5: Prisma com base triangular no plano xy .

Fonte: Thomas (2007, p.412).

3.3 Densidade e Massa

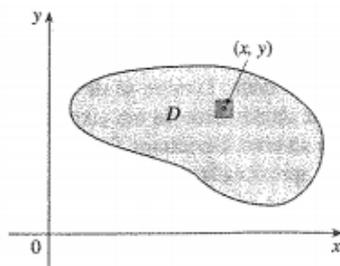
Stewart (2007), mostra como são calculado momentos e centros de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante, usando integrais de funções de uma variável real. Neste momento, com o auxílio das integrais duplas, podemos considerar as lâminas com densidade variável.

Suponhamos que uma lâmina seja colocada em uma região D do plano xy cuja densidade (em unidades de massa/unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D e é definida por

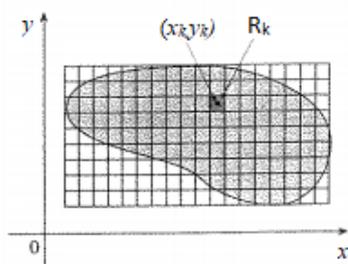
$$\rho(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k},$$

onde Δm_k e ΔA_k determinam a massa e a área de um pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões de desse retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 3.6).

Para definir a massa total m dessa lâmina, teremos que dividir o retângulo \mathbf{R} contendo D em sub-retângulos R_k e considerando $\rho(x, y)$ como 0 fora da região D . Se usarmos um ponto (x_k, y_k) em R_k , então uma aproximação da medida da massa do k -ésimo retângulo é dada por $\rho(x_k, y_k)\Delta A_k$, e a medida da massa total da lâmina é aproximada por

Figura 3.6: Área de pequeno retângulo contendo (x,y) .

Fonte: Stewart (2007, p.450).

Figura 3.7: Divisão do retângulo R contendo D em sub-retângulos.

Fonte: Stewart (2007, p.450).

$$m = \sum_k \rho(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

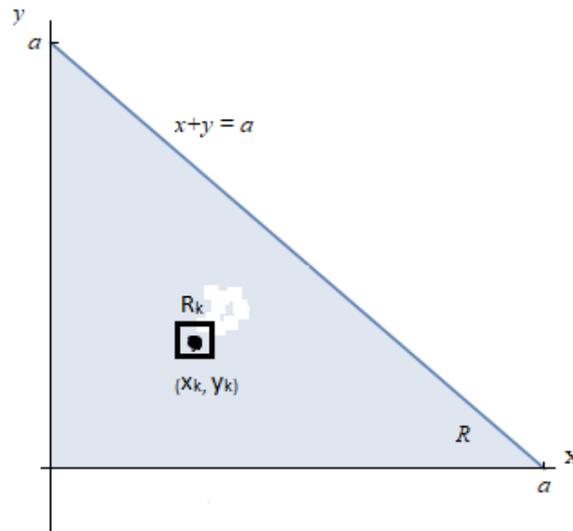
Tomando o limite da soma acima, quando a norma $\|\Delta A_k\|$ tende a zero, e assim expressamos a medida da massa total por

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA = \iint_R \rho(x, y) dx dy.$$

Exemplo 3.6. (Leithold, 1994) Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, cujo os lados são iguais e de comprimento a . Calcule a massa, se a densidade de massa por área em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.

Solução: Com o vértice na origem e a hipotenusa do retângulo ao longo da reta $x + y = a$. A figura 3.8 exibe também um retângulo típico R_k (de área ΔA_k) de uma partição interior com um ponto (x_k, y_k) no retângulo. Por hipótese, a densidade de massa por área em (x, y) é

Figura 3.8: Triângulo isósceles.



Fonte: Leithold (1994, p.367).

$\rho(x, y) = c(x^2 + y^2)$ para uma constante c . Logo, a massa é

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_R c(x^2 + y^2) dA \\
 &= \int_0^a \int_0^{a-x} c(x^2 + y^2) dy dx \\
 &= c \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{a-x} dx \\
 &= c \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{ka^4}{6}.
 \end{aligned}$$

3.4 Momentos e Centros de Massa

Stewart (2007), define o momento de uma partícula em torno de um eixo como o produto de sua massa pela distância ao eixo. Suponha que uma lâmina ocupe uma região e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Se dividirmos essa região em sub-retângulos como vimos na figura 3.7, teremos que a massa de R_k é aproximadamente $\rho(x_k, y_k)\Delta A_k$, onde podemos aproximar o momento R_k com relação ao eixo x por

$$[\rho(x_k, y_k)\Delta A_k] y_k.$$

A soma das medidas dos momentos de massa dos sub-retângulos em relação ao eixo x é, então, aproximada pela soma desses sub-retângulos. A medida m_x do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina toda é dada por

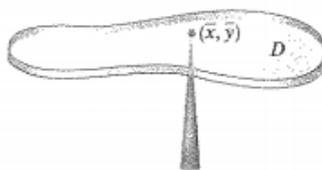
$$m_x = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k y_k \rho(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y \rho(x, y) dA.$$

Da mesma forma, a medida m_y do momento em relação ao eixo y é dada por

$$m_y = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k x_k \rho(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x \rho(x, y) dA.$$

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é definido de modo que $m\bar{x} = m_y$ e $m\bar{y} = m_x$. Na física, isso significa que a lâmina se comporta como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Dessa maneira, a lâmina permanece horizontal quando equilibrada em seu centro de massa (veja a Figura 3.9).

Figura 3.9: Retângulo pequeno na região D



Fonte: Stewart (2007, p.451).

Definição 3.7. As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa de uma lâmina ocupando uma região e tendo função densidade $\rho(x, y)$ são

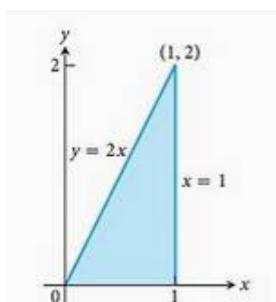
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_R x \rho(x, y) dA \\ \bar{y} &= \frac{m_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_R y \rho(x, y) dA, \end{aligned}$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA.$$

Exemplo 3.8. (Thomas, 2007) Seja uma lâmina com região triangular limitada pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $y = 2x$ no primeiro quadrante. A densidade da lâmina no ponto (x, y) é $\rho(x, y) = 6x + 6y + 6$. Encontre a massa da lâmina, os primeiros momentos e o centro de massa em relação aos eixos coordenados. **Solução:** Na figura 3.10 esboçamos a lâmina e detalhes

Figura 3.10: Lâmina de região triangular.



Fonte: Thomas (2007, p.422).

suficientes para determinar os limites de integração para as integrais que temos de calcular. A massa da lâmina é

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^1 \int_0^{2x} \rho(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx \\
 &= \int_0^1 [6xy + 3y^2 + 6y]_{y=0}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx \\
 &= [8x^3 + 6x^2]_{x=0}^{x=1} = 14.
 \end{aligned}$$

O primeiro momento em relação ao eixo x é

$$\begin{aligned}
 m_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\rho(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx \\
 &= \int_0^1 [3xy^2 + 2y^3 + 3y^2]_{y=0}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^1 (28x^3 + 12x^2) dx \\
 &= [7x^4 + 4x^3]_{x=0}^{x=1} = 11.
 \end{aligned}$$

O segundo momento em relação ao eixo y é

$$\begin{aligned}
 m_y &= \int_0^1 \int_0^{2x} x\rho(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6x^2 + 6xy + 6x) dy dx \\
 &= \int_0^1 [3yx^2 + 3xy^2 + 6xy]_{y=0}^{y=2x} dx \\
 &= \int_0^1 (24x^4 + 12x^2) dx \\
 &= [6x^5 + 4x^3]_{x=0}^{x=1} = 10.
 \end{aligned}$$

As coordenadas do centro de massa são, portanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{m_y}{m} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \\
 e \\
 \bar{y} &= \frac{m_x}{m} = \frac{11}{14}.
 \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa da lâmina é o ponto $(\frac{5}{7}, \frac{11}{14})$.

3.5 Carga

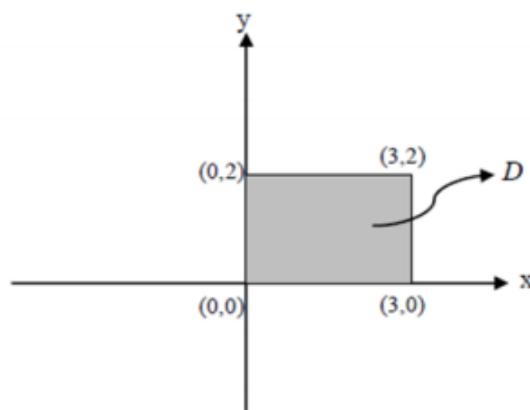
Se uma carga elétrica estiver distribuída sobre uma região D e a densidade dessa carga (em unidades de carga por área) for dada por $\rho(x, y)$ num ponto (x, y) em D , então a carga total q é

$$\iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Exemplo 3.9. (Freire, 2014) Uma carga é distribuída sobre uma região D pelo retângulo de vértices $(3,2)$, $(0,2)$, $(3,0)$ e $(0,0)$ de modo que a densidade da carga em um certo ponto (x, y) seja $\rho(x, y) = x^2y$, medida em coulomb por metro quadrado. **Solução:** Para calcular a carga total iremos precisar primeiro da representação da região D limitada por um retângulo. Observe a Figura 3.11 Dessa maneira, temos que a região D é dada por

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2$$

Figura 3.11: Região retangular D com cargas puntiformes



Fonte: Freire (2014, p.38)

e a carga total é

$$\begin{aligned}
 q &= \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[\int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_0^2 \left[y \int_0^3 x^2 dx \right] dy \\
 &= \int_0^2 \left[\frac{yx^3}{3} \right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_0^2 9y dy \\
 &= \left(\frac{9y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=2} = 18.
 \end{aligned}$$

Logo, a carga total distribuída ao longo de D é de 18 coulombs.

3.6 Momento da Inércia

Também conhecido como **segundo momento**, o momento da inércia de uma partícula de massa m em torno de um eixo é definido como mr^2 , onde r é a distância da partícula ao eixo. Estendendo esse conceito à uma lâmina com função densidade $\rho(x, y)$ e ocupando uma região pelo mesmo processo que realizamos anteriormente para momentos simples. Dividindo a região em sub-retângulos, aproximamos o momento de inércia de cada sub-retângulo em torno do eixo x e tomamos o limite da soma quando o número de sub-retângulos aumenta indefinidamente. O resultado é o momento de inércia da lâmina em torno do eixo x definida por

$$I_x = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k y_k^2 \rho(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA.$$

E da mesma forma, para o momento de inércia em torno do eixo y :

$$I_y = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k x_k^2 \rho(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA.$$

E também, considerando o momento de inércia em torno da origem, que pode ser chamado de momento polar de inércia, temos:

$$I_0 = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k [(x_k)^2 + (y_k)^2] \rho(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = I_x + I_y.$$

Exemplo 3.10. (Halliday) Seja uma lâmina contendo o formato da região $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante. Determine o momento de inércia I_x e I_y da lâmina D , se a densidade em um ponto (x, y) da lâmina é $\rho(x, y) = xy$.

Solução: Determinando primeiro o momento I_x , temos

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy = \iint_D xy^3 dy dx \\
 &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^3 dy \right] dx = \int_0^a \left[x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^3 dy \right] dx \\
 &= \int_0^a \left[\frac{xy^4}{4} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^a (x^5 - 2a^2x^3) + a^4x dx \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x^6}{6} - \frac{2a^2x^4}{4} + \frac{a^4x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=a} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{a^6}{6} - \frac{a^2x^4}{2} + \frac{a^4x^2}{2} \right) \\
 &= \frac{a^6}{24}.
 \end{aligned}$$

Agora, determinando o momento I_y ,

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy = \iint_D yx^3 dy dx \\
 &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} yx^3 dy \right] dx = \int_0^a \left[x^3 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy \right] dx \\
 &= \int_0^a \left[\frac{x^3y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2x^3 - x^5) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right)_{x=0}^{x=a} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^6}{4} - \frac{a^6}{6} \right) \\
 &= \frac{a^6}{24}.
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho, ficou claro que a integral dupla é essencial para diversas áreas do conhecimento. Ela proporcionou o avanço e a evolução de várias ciências que necessitavam de uma ferramenta eficaz para encontrar soluções de problemas que até então continuavam sem respostas.

Ficou visível que o estudo das integrais duplas pode nos capacitar a expandir nossos conhecimentos não apenas na área matemática, mas também em diversas áreas das ciências exatas e tecnológicas. Sendo assim, a integral dupla não pode ser mais vista como uma ferramenta de difícil entendimento, visto que mesmo com grau de complexidade, ela facilita em algumas aplicações.

Almeja-se que este Trabalho de Conclusão de Curso tenha atingido os devidos objetivos e propósitos traçados no decorrer dos estudos realizados e que o mesmo possa futuramente servir de referencial teórico para o público que desejar buscar conhecimento sobre este tema.

Referências

- [1] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994. 2 v.
- [2] FLEMMING, Diva M. GONÇALVES, Mirian B. **Cálculo B**. 2.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Unicamp, Campinas, 1997.
- [4] CAMPOS, Aldelânia Pereira. **Integrais Duplas e Aplicações**. 2016. 60 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Paraíba, Monteiro, 2016.
- [5] STEWART, James. **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. 2 v.
- [6] THOMAS, George B. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v.
- [7] HALLIDAY, David. RESNICK, Roberto. WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 1 v.