UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TAINARA LIMA DE SOUSA

ANÁLISE COMPLEXA: DISTINÇÕES ENTRE O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E O CORPO DOS NÚMEROS REAIS

ARAGUAÍNA
2022

TAINARA LIMA DE SOUSA

ANÁLISE COMPLEXA: DISTINÇÕES ENTRE O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E O CORPO DOS NÚMEROS REAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S725a Sousa, Tainara Lima de.

Análise Complexa: distinções entre o corpo dos números complexos e o corpo dos números reais . / Tainara Lima de Sousa. – Araguaína, TO, 2022.

55 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.

Orientador: José Carlos De Oliveira Junior

1. Números complexos. 2. Função holomorfa. 3. Função analítica . 4. Equações de Cauchy-Riemann. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

TAINARA LIMA DE SOUSA

ANÁLISE COMPLEXA: DISTINÇÕES ENTRE O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E O CORPO DOS NÚMEROS REAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: 27 / 06 / 2022 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Renata A. da Silva

Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que me abençoou fazendo com que meus objetivos fossem alcançados, permitindo que eu realizasse esse sonho e me dando sabedoria, persistência e coragem durante todos os anos de estudo.

Agradeço, de modo especial, aos meus maiores incentivadores, meus pais, Ivanete Lima da Costa e Gilvan Martins de Sousa, que sempre me apoiaram desde de o início dos meus estudos, fazendo o possível para que eu tivesse tempo e conforto para me dedicar às atividades do curso, por estarem do meu lado em momentos bons e difíceis, por todo carinho e cuidado que sempre tiveram comigo.

Agradeço, em geral, à minha família por torcerem por mim. Ao meu companheiro e amigo Maycon, meus irmãos Thayson e Leticia, que também me instigaram e acreditaram que eu poderia produzir este trabalho.

Agradeço, imensamente, ao meu orientador José Carlos de Oliveira Junior, por todo aprendizado durante a graduação e durante a produção deste trabalho. Agradeço pelo apoio, paciência, incentivo e por estar sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas. Sempre me ajudou com sua vasta experiência desde o início deste projeto e é uma inspiração como professor.

Além disso, agradeço a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática da UFT por todo aprendizado. É uma honra conhecer professores tão experientes e dedicados.

Agradeço aos meus professores de matemática do ensino médio que foram motivação para mim, pois fizeram eu me apaixonar pela Matemática e tiveram grande influência quando decidi ingressar nesse curso.

Às minhas queridas amigas Orlene e Jennifer, pelo incentivo e torcida, por me acompanharem desde o ensino médio nessa caminhada, encorajando-me.

Enfim, sou grata a todos que fizeram parte dessa caminhada e da realização desse sonho.

Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco poeta.

(Karl Weierstrass)

RESUMO

Esta monografia apresenta um estudo fundamentado sobre os números complexos, apresentando de forma bem detalhada os principais conceitos, definições, propriedades, proposições e teoremas relacionados a esse corpo. Este estudo tem como objetivo construir uma narrativa do ponto de vista histórico, onde a história dos números complexos permite visualizar como e por que surgiu esse corpo. Esta pesquisa discute a diferenciabilidade no conjunto dos números complexos, em contraste com a diferenciabilidade no conjunto dos números reais. O Teorema Fundamental da Álgebra e as Equações de Cauchy-Riemann também são apresentados no texto. Além do objetivo exposto acima, esta pesquisa explicita de forma rigorosa as diferenças essenciais que há entre os dois corpos: dos números complexos e dos números reais. Na abordagem metodológica foi adotada a pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico.

Palavras-chave: Números Complexos. Funções holomorfas. Funções analíticas. Equações de Cauchy-Riemann.

ABSTRACT

This monograph presents a study based on complex numbers, presenting in a very detailed way the main concepts, definitions, properties, propositions and theorems related to this field. This study aims to build a narrative from a historical point of view, where the history of complex numbers allows us to visualize how and why this field came about. This research discussed the differentiability in the set of complex numbers, in contrast to the differentiability in the set of real numbers. The Fundamental Theorem of Algebra and the Cauchy-Riemann Equations are also presented in the text. In addition to the above objective, this research rigorously explains the essential differences between the two fields: complex numbers and real numbers. In the methodological approach, a qualitative bibliographic research was adopted.

Keywords: Complex Numbers. Holomorphic functions. Analytic functions. Cauchy-Riemann Equations.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1
Introdução

Neste trabalho analisamos os números complexos e as funções de variável complexa. A teoria das funções de variável complexa é uma das mais relevantes no cenário global da matemática, segundo [12]. Conceitos estudados no cálculo de funções de variáveis reais já são abordados no plano complexo e existem distinções excepcionais na diferenciabilidade de funções contidas no corpo dos números complexos se compararmos com a diferenciabilidade em $\mathbb{R}$.

A abordagem do conteúdo de números complexos, assim como a abordagem de todo conteúdo, tanto nas escolas quanto no ensino superior, deve ser feita com o objetivo de atingir uma aprendizagem significativa e uma boa formação para os alunos. Por isso, neste trabalho apresentamos esses números destacando sua relevância teórica e prática.

Abordando esses números de tal forma, acreditamos que é possível inspirar outros professores a tratarem esses números da mesma maneira e a trabalharem em sala de aula objetivando uma aprendizagem significativa, a qual pode transformar a vida dos alunos e produzir bons resultados durante a formação dos mesmos.

Como conceitua Rogers (2001), sobre aprendizagem significativa:

> Por aprendizagem significativa entendo uma aprendizagem que é mais do que uma acumulação de fatos. É uma aprendizagem que provoca uma modificação, quer seja no comportamento do indivíduo, na orientação futura que escolhe ou nas suas atitudes e personalidade. É uma aprendizagem penetrante, que não se limita a um aumento de conhecimento, mas que penetra profundamente todas as parcelas da sua existência. (ROGERS, 2001)

Apenas no curso de Licenciatura em Matemática, como ementa da disciplina de Matemática Básica III, tive contato com os números complexos, até então desconhecidos para mim. No Ensino Médio mesmo sendo um conteúdo obrigatório, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que estavam em vigor quando cursei os últimos anos, de 2014 até 2016, os números complexos não me foram apresentados.

Antes de conhecer esse conjunto numérico não tinha me ocorrido o pensamento de que poderia existir um conjunto que estivesse além do conjunto dos números reais. Assim que me foi apresentado o conteúdo de números complexos na disciplina de Matemática Básica III, não consegui assimilar a existência de tais números, mas no decorrer da disciplina, conhecendo sua história e suas aplicações, tais números foram se tornando familiares, assim como os números de conjuntos já conhecidos, ou seja, como os números inteiros, os racionais e os reais.

Sobre a falta de assimilação da existência dos números complexos, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o maior matemático do século XIX e um dos percursores da história dos números complexos, declara no livro Teoria dos Resíduos Quadráticos:

> Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que provou que eles têm um significado tão real quanto o dos números negativos. (GAUSS, 1831)

Conhecer as outras formas de representação desses números e resolver problemas que exigem o uso de uma dessas formas é muito relevante, pois a construção das formas algébrica e polar dos números complexos envolvem conteúdos interdisciplinares, e isso mostra como esses números não estão distantes de outros conteúdos básicos da Matemática, como muitos julgam.

Se tivermos um problema a respeito de números complexos no qual os números estejam representados de forma algébrica, podemos resolvê-lo convertendo esse número para a forma polar, se assim for apropriado.

Os números complexos são importantes não só por serem solução de equações do 2° grau quando Δ é negativo. Quando relacionados com outros tópicos da matemática, esses números promovem a utilização de técnicas de demonstração, resolução de problemas, além de resgatar resultados clássicos de conteúdos matemáticos.

Assim como os números complexos, a teoria das funções de variável complexa tem se mostrado uma das mais importantes no contexto global da Matemática. Através dessa teoria, é possível compreender melhor as funções definidas por séries de potências e por produtos infinitos. Também é uma teoria necessária quando estudamos fenômenos relacionados à teoria de transmissão do calor, à mecânica dos fluídos e à eletricidade.

Dentre os matemáticos importantes que contribuíram para o avanço dessa teoria citamos Euler, Cauchy, Weierstrass, Goursat, Mittag-Leffler, entre outros. Com o objetivo de desenvolver essa teoria foram introduzidos novos conceitos e teorias que estão inseridos no contexto da Teoria dos Números, da Topologia Algébrica, da Geometria Algébrica, etc.

Já sabemos que teoremas e definições que são fundamentais no cálculo de funções de variável real se aplicam no cálculo de funções de variável complexa, de acordo com suas especificidades. Mas quando trabalhamos com números complexos e com as funções que provém desses números, observamos algumas distinções que são excepcionais.

Neste trabalho pretendemos compreender essas diferenças. Sabemos que $i \in \mathbb{C}$, mas $i \notin \mathbb{R}$, pois não é possível que $i^2 = -1$ em $\mathbb{R}$, no entanto, essa distinção é clara. Nesse trabalho deixamos de lado distinções que são claras e nos questionamos quais são as diferenças existentes na estrutura algébrica de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e o quanto o corpo dos números complexos está além de $\mathbb{R}$, principalmente no que diz respeito a diferenciabilidade.

Se o contraste fosse feito entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, por exemplo, não estudaríamos diferenças como o fato de $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pois essa distinção é clara e não requer estudos. Porém, distinções na estrutura algébrica desses dois conjuntos poderiam ser amplamente discutidas, como o fato do Axioma Fundamental da Análise, se aplicar em $\mathbb{R}$, mas não se aplicar em $\mathbb{Q}$. Veja o axioma relacionado a completude de $\mathbb{R}$ em [5, página 80].

Esse axioma diz que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente, possui supremo. Porém, existem subconjuntos não vazios em $\mathbb{Q}$ e limitados superiormente, mas que não possuem supremo. O conjunto $X = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\right\}$ apesar de possuir limite superior e estar contido em $\mathbb{Q}$, não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Isso ocorre devido a uma diferença na estrutura algébrica desses dois conjuntos, pois $\mathbb{R}$ é completo diferentemente de $\mathbb{Q}$. São diferenças como essas que buscamos entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Denotamos o conjunto de todos os números reais por $\mathbb{R}$. Em particular, assumimos um conhecimento prévio das definições e propriedades que envolvem limites, diferenciabilidade e continuidade de funções em $\mathbb{R}$. Como diz [2], ninguém deve empreender um estudo de variáveis complexas a menos que tenha um conhecimento profundo das funções de variável real.

Esta monografia desenvolve um estudo com delineamento de uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa. A abordagem qualitativa é indicada, principalmente, quando há necessidade de entender um fenômeno em profundidade, de forma detalhada. De acordo com [3], o objetivo dela não é simplesmente testar o que já é conhecido, mas descobrir o novo e desenvolver teorias fundamentadas. Como embasamento da metodologia, utilizamos [3] e [4]. Agora veremos a estrutura definida da monografia.

Em *História dos Números Complexos*, apresentamos a história do surgimento dos números complexos e os matemáticos que foram percursores nessa história, descobrindo esses números.

Em *Noções Preliminares*, encontra-se a construção dos números complexos, segundo [2]. Nesse capítulo mostramos as formas de representação desses números e interpretamos as operações realizadas com os mesmos.

Em *Funções Complexas*, discutimos o conceito de função complexa e apresentamos as funções exponencial e logarítmica em $\mathbb{C}$. Nesse capítulo encontra-se o resultado mais intrigante deste trabalho, pois nele apresentamos uma diferença crucial entre a diferenciabilidade de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, nele mostramos que a diferenciabilidade em $\mathbb{C}$ não é simplesmente uma extensão da diferenciabilidade em $\mathbb{R}$. Veremos também as funções analíticas, que fazem parte da construção desse resultado que é a essência deste trabalho.

Por fim, em *Teorema Fundamental da Álgebra*, apresentamos as funções polinomiais, a construção e história do Teorema Fundamental da Álgebra e o fato do corpo dos números complexos ser algebricamente fechado.

Capítulo 2

História dos Números Complexos

Ouvir a expressão números complexos ou números imaginários pode fazer os alunos pensarem que se tratam de números complicados ou números que não existem e não precisam ser estudados. No entanto, esses números são tão reais quanto todos os outros e estão intimamente ligados a diversos conteúdos matemáticos.

Dada a equação quadrática $a^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a fórmula de Bhaskara garante que as raízes são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ pode ser negativo. Mas para os antigos matemáticos isso não era um problema, nesse caso eles apenas consideravam que a equação a ser resolvida não possuía solução.

Em 1700 a.c., os babilônicos já conseguiam resolver equações do segundo grau. Mas apenas no final do século XV, a equação do terceiro grau foi estudada de forma efetiva na Europa. O livro *Summa de Aritmética e Geometria*, impresso em 1494 por Frei Luca Pacioli, afirmava que não era possível existir uma regra para resolver uma equação cúbica do tipo $x^3 - px = q$. Veja mais sobre essa história em [19, página 14].

No entanto, Scipione del Ferro (1465 - 1526), professor da Universidade de Bolanha, foi o primeiro a resolver a equação de terceiro grau. Ele nunca publicou seu resultado, apenas comunicou a regra encontrada para seu genro, Annibale Della Nave e também a Antonio Maria Fiore, que recebeu a regra sem a demonstração.

Anos depois, Nicolo Fontana (1500 - 1557), conhecido com Tartaglia, anuncia ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 - px^2 = q$, veja [7, páginas 302-303].

Tartaglia foi autodidata, com uma capacidade extraordinária para resolver problemas matemáticos. Ele foi professor de matemática em Veneza e gradualmente adquiriu reputação de auspicioso matemático, participando com sucesso de um grande número de debates.

Fiore que tinha posse da solução de Del Ferro, desafia Tartaglia, pois acreditava que ele estava blefando. Desafios pela resolução de problemas matemáticos eram comuns naquela época. Como Fiore tinha apenas o resultado de Del Ferro, sem sua demonstração e não conseguiu resolver os problemas propostos por Tartaglia, perdeu a disputa.

Passado algum tempo Girolamo Cardano (1501 - 1576) consegue a regra para resolver a equação do terceiro grau, de acordo com os resultados de Tartaglia, mas prometeu que não divulgaria tal regra. Estudando essa regra, Cardano e seu discípulo, Ludovico Ferrari (1522 - 1557), conseguem demonstrar o resultado de Tartaglia.

Em 1545 Girolamo Cardano quebra a promessa que fez a Tartaglia publicando o trabalho intitulado Ars Magna (em Latim, Grande Arte), no qual discorre sobre a solução das equações polinomiais cúbicas. Nesse trabalho ele encontra uma solução geral para equações polinomiais cúbicas do tipo $x^3 = ax + b$, que é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Tempos depois outro matemático, Rafael Bombelli, resolve aplicar o resultado de Cardano à equação $x^3 = 15x + 4$, obtendo que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli já sabia que 4 era solução da equação, mas o que o impressionava era o fato de ter encontrado que $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$, segundo a solução geral de Cardano. Pois ele viu que tinha operado com coisas que não existiam, a $\sqrt{-1}$, para encontrar algo que existia, a raiz da equação que é 4. Este trabalho de Bombelli deu início ao estudo dos números complexos, que atualmente conhecemos.

A construção axiomática dos números complexos foi concluída em 1833, pelo matemático irlandês William R. Hamilton. Ele considerou que os conhecimentos sobre os números reais eram sólidos e formalizou a construção dos números complexos a partir dos números reais. No entanto, neste trabalho faremos a construção dos números complexos de acordo com [2].

Para os leitores que queiram conhecer mais um pouco sobre a história dos números complexos, consulte as referências [7] e [8].

Capítulo 3

Noções Preliminares

Neste capítulo estudaremos os principais conceitos e definições que envolvem os números complexos. Veremos também algumas das suas formas de representação e como podemos interpretar a multiplicação de números complexos no plano de Argand-Gauss. Para a construção dos conceitos preliminares, serão utilizadas as seguintes referências bibliográficas [2, 9, 11, 15].

3.1 Construção dos Números Complexos

Definição 3.1. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, como o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde a e b são números reais e as operações de igualdade, adição e multiplicação estão dadas por:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad e \quad b = d,$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Observação 3.2. Podemos notar que com essas definições, $\mathbb{C}$ satisfaz todos os axiomas para ser um corpo. Ou seja, $\mathbb{C}$ satisfaz as propriedades associativa, comutativa e distributiva da adição e da multiplicação. $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são identidades para adição e multiplicação respectivamente, e existem os inversos aditivos e multiplicativos para cada elemento diferente de zero em $\mathbb{C}$.

É usual representar cada elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ com o símbolo z, portanto:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (a, b) \quad \text{sendo} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Vamos escrever a para o número complexo $(a, 0)$. Definimos a unidade imaginária como $i = (0, 1)$, note que, pela definição de produto $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. O mapeamento de $a \to (a, b)$ define um isomorfismo de campo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$, se considerarmos que $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Sabemos que $i^2 = -1$, assim a equação $z^2 + 1 = 0$, tem uma raiz em $\mathbb{C}$. Na verdade, para cada $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z + i)(z - i)$. De maneira mais geral, se z e w são números complexos, obtemos $z^2 + w^2 = (z + wi)(z - wi)$.

Tratando z e w como números reais a e b, podemos obter que (com a e b diferentes de zero),

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}.$$

Quando escrevemos $z = a + bi$, chamamos a e b de partes real e imaginária de z respectivamente e definimos $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Agora veremos duas operações em $\mathbb{C}$ que não são operações de corpo. Sejam x, y reais, se $z = x + iy$, definimos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, como o módulo de z e $\bar{z} = x - iy$, como conjugado de z. Observe que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Em particular se $z \neq 0$, então

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Sejam z e w números complexos. Vale a propriedade

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2Re[\bar{z}w] + |w|^2. \tag{3.1}$$

Outras propriedades do módulo de z, são

(i) $|\alpha z| = \alpha|z|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $|\bar{z}| = |z|$.

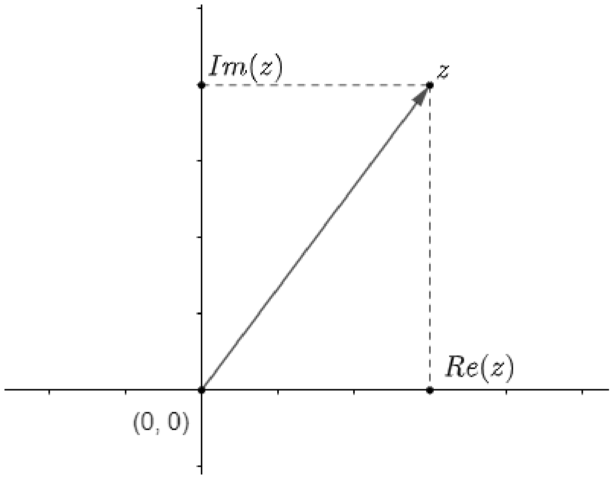
(iii) $|zw| = |z||w|$.

(iv) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, em que $w \neq 0$.

O plano complexo também conhecido como plano de Argand-Gauss torna as noções de módulo e argumento mais concretas, pois nele podemos representar os números complexos (a, b), por meio de pontos do plano cartesiano, no qual a parte real é representada pelo eixo x e a parte imaginária é representada pelo eixo y.

A partir da definição de números complexos, podemos notar que z pode ser visto como um único ponto $(Re(z), Im(z))$, no plano $\mathbb{R}^2$. Para plotar z, basta traçar uma linha do ponto $(Re(z), Im(z))$, até a origem do plano cartesiano $(0, 0)$, o mesmo serve para w.

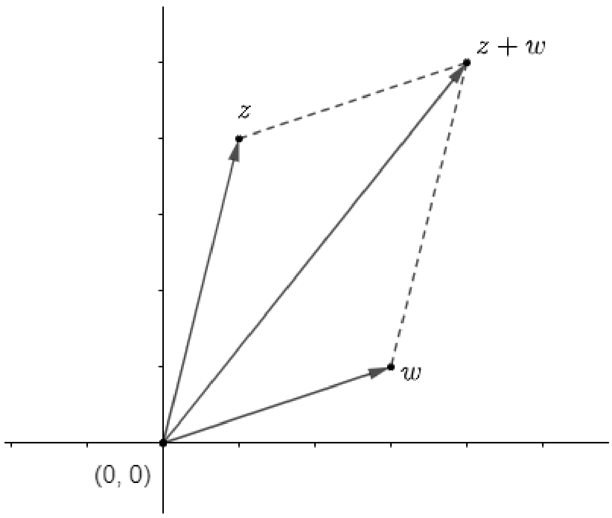
Figura 3.1. Plano complexo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Ao plotar z e w, temos dois vetores $\vec{z}$ e $\vec{w}$ que possuem origem em $(0,0)$ e extremidades nos pontos que determinam z e w. Esses vetores demarcam um paralelogramo que tem vértices em z, w e $(0,0)$. A adição de números complexos é exatamente igual a lei de adição do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. O quarto vértice do paralelogramo está determinado pela soma $z+w$, como mostra o gráfico a seguir:

Figura 3.2. Soma de números complexos.



Fonte: Arquivo pessoal.

Uma propriedade importante que se aplica ao módulo da distância entre z e w é a desigualdade triangular. Para quaisquer números complexos z e w, temos

$$|z+w| \leq |z| + |w|. \tag{3.2}$$

A desigualdade $|z+w| \geq ||z| - |w||$ também vale para os números complexos z e w.

3.2 $\mathbb{R}$ como Subconjunto de $\mathbb{C}$

Considere o subconjunto $\mathbb{R}' \subset \mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$$\mathbb{R}' = \big\{(a,b) \in \mathbb{C} \ | \ b = 0\big\}.$$

Os pares $(0,0)$, $(1,0)$, $(a,0)$, $(b,0)$, $(a+b,0)$ e $(a.b,0)$, pertencem a $\mathbb{R}'$. Considere também a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, $f : x \to (x,0)$. f possui as seguintes propriedades:

(a) é bijetora, pois

(i) Todo par $(x,0) \in \mathbb{R}'$ é o correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$. Assim, f é sobrejetora.

(ii) Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x,0) \in \mathbb{R}'$ e $(x',0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados. Assim, f é injetora.

(b) conserva as operações de adição e multiplicação, pois

(i) À soma $a+b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a+b,0)$, que é a soma dos pares $(a,0)$ e $(b,0)$, correspondentes de a e b, respectivamente. Assim,

$$f(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = f(a) + f(b).$$

(ii) Ao produto $a.b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a.b,0)$, que é o produto dos pares $(a,0)$ e $(b,0)$, correspondentes de a e b, respectivamente. Assim,

$$f(a.b) = (a.b,0) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (a,0).(b,0) = f(a).f(b).$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ é uma aplicação bijetora que conserva as operações de adição e multiplicação, portanto dizemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ são isomorfos.

Devido ao isomorfismo, operar com $(x,0)$ leva a resultados análogos aos obtidos quando operamos com x, o que justifica a igualdade,

$$x = (x,0), \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Admitindo esta igualdade, temos em particular que $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$ e $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$. Assim, temos que o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é um subconjunto do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3.3 Representação Polar de z

Considere o ponto $z = x + iy$ no plano complexo $\mathbb{C}$. Esse ponto possui coordenadas polares $(r, \theta) : x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$ $r = |z|$, e o ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, é o ângulo entre a parte positiva do eixo real e o vetor $\vec{z}$. Observe que qualquer do tipo $\theta + 2k\pi$, com k inteiro, pode ser substituído por θ nas equações acima. O ângulo θ é chamado de argumento de z e é denotado por, $\theta = arg(z)$. O módulo e o argumento de z estão relacionados da seguinte forma: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ e $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$.

Dessa forma, introduzimos a representação polar do complexo z:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Essa representação é muito importante quando precisamos calcular potências e raízes de números complexos. Para todos os inteiros n, com $z \neq 0$ é possível obter um caso especial da *Fórmula de Moivre's*, veja [9, página 30]:

$$z^n = r^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \Rightarrow$$

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{3.3}$$

Exemplo 3.3. Para $z = \sqrt{3} + i$, temos a seguinte representação polar:

$$z = \sqrt{3} + i \rightarrow r = 2 \Rightarrow$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

Exemplo 3.4. Determine $w = z^3$, para $z = \sqrt{3} + i$.

$$z = \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$z^3 = (\sqrt{3} + i)^3 = 2^3(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}) \Rightarrow$$
$$w = z^3 = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$
$$w = z^3 = 8(0 + i)$$
$$w = 8i.$$

Definição 3.5. Dado um número complexo z, chama-se raiz enésima de z, e denota-se $\sqrt[n]{z}$, ao número complexo w tal que $w^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = w \Rightarrow w^n = z.$$

Dados o número complexo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e o número natural $n \geq 2$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma

$$w_K = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + K\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + K\frac{2\pi}{n}\right)\right], \tag{3.4}$$

onde $\sqrt[n]{r}$ pertence aos reais positivos e $K = 0, 1, 2, ..., n-1$. A e equação (3.4) é conhecida como a *Segunda Fórmula de Moivre's*.

Exemplo 3.6. Determine as raízes cúbicas de 8, de acordo com o resultado (3.4).

$$n = 3, z = 8, r = 8, \theta = 0 \Rightarrow w_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(K\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(K\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

$$K = 0 \Rightarrow w_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$

$$K = 1 \Rightarrow w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$K = 2 \Rightarrow w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Encontramos $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + i\sqrt{3}$ e $w_2 = -1 - i\sqrt{3}$, que são as raízes cúbicas de $z = 8$.

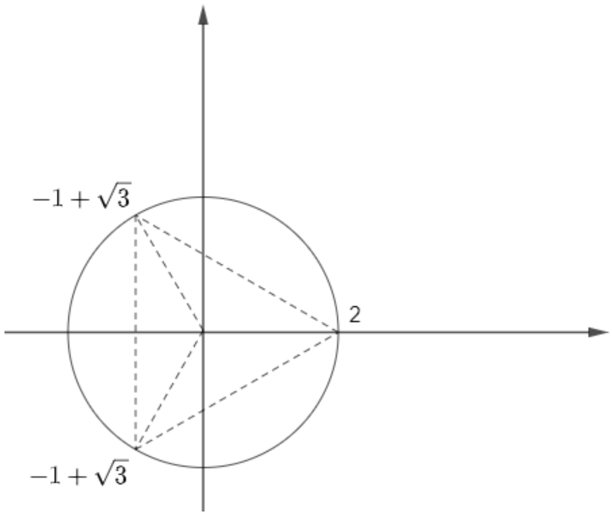
3.4 Interpretação Geométrica

A $\sqrt[n]{z}$ pode assumir n valores distintos, porém todos com o mesmo módulo. Assim, os afixos das n raízes enésimas de z são pontos da mesma circunferência, com centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio $\sqrt[n]{|z|}$.

Compreendemos também que os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$, formam uma progressão aritmética que começa com $\dfrac{\theta}{n}$ e tem razão $\dfrac{2\pi}{n}$. Assim, os afixos das n raízes enésimas de z dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt[n]{|z|}$ em n partes congruentes. Por exemplo: se $n = 2$, as raízes são pontos diametralmente opostos ou se $n \geq 3$, as raízes são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência.

No caso das raízes cúbicas de 8, temos $w_K = 2\left[\cos\left(K\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(K\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$, em que $K = 0, 1, 2$. Os afixos de $\sqrt[3]{8}$, dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2 em três partes congruentes.

Figura 3.3. Raízes cúbicas de 8.



Fonte: Arquivo pessoal.

3.4.1 Interpretação geométrica da multiplicação

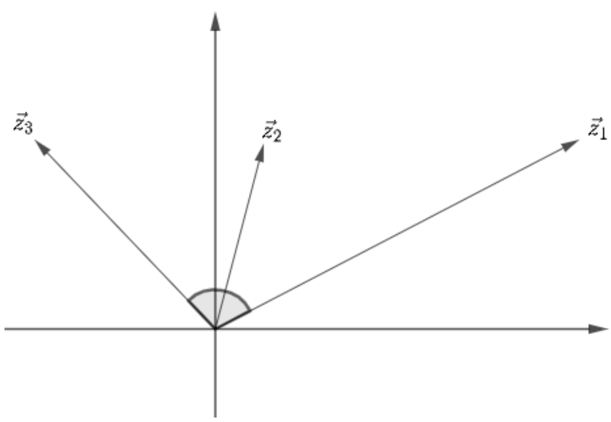
Considere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cujas formas trigonométricas são

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad e \quad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

O produto $w = z_1.z_2$, é dado por $w = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$.

Portanto se $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ são, respectivamente, as representações vetoriais de valores distintos, de z_1 e z_2, a multiplicação de z_1 por z_2 equivale a realizar uma rotação de um ângulo θ_2 em $\vec{z}_1$ no sentido anti-horário, seguida de uma multiplicação do módulo de $\vec{z}_1$ por $|\vec{z}_2|$, resultando em $\vec{z}_3$, representação vetorial de $w = z_1.z_2$.

Figura 3.4. Produto de números complexos.



Fonte: Arquivo pessoal.

A eficácia do uso de números complexos na descrição de rotação no $\mathbb{R}^2$ levou William R. Hamilton a procurar uma possível generalização dos números complexos que fizesse o mesmo para rotações no espaço. Assim, nasceram os *quatérnions*[1].

[1]As primeiras tentativas de Hamilton envolveram apenas rotações com elementos de $\mathbb{R}^3$. Mas em 1843 ele constatou que precisava operar com elementos de $\mathbb{R}^4$. O sistema numérico criado por ele é uma extensão dos números complexos, é chamado de quatérnions e é representado por $\mathbb{H}$.

Capítulo 4
Funções Complexas

Nesta seção apresentaremos a ideia de função complexa e os principais modelos de funções em $\mathbb{C}$. Veremos os conceitos de função exponencial, função logarítmica e também as funções analíticas, a partir das quais exibiremos o principal resultado deste trabalho. Faremos a construção dessas funções e a apresentação desse resultado de acordo com o texto dos autores [2, 11, 12, 13, 19].

Vamos relembrar que uma função f do conjunto D no conjunto B, é uma regra bem definida que permite associar, a cada elemento de D um único elemento de B. Utilizaremos a notação $f : D \to B$, para representar uma função f do conjunto D no conjunto B. O conjunto D é chamado domínio da função e é denotado por $Dm(f)$. O conjunto B é chamado contradomínio da função.

Dada uma função $f : D \to B$, se $X \subseteq D$, a imagem de X pela função f, que denotaremos por $f(X)$, é o conjunto $f(X) = \big\{f(x) \ | \ x \in X\big\}$. Em particular, a imagem da função, que será representada por $Img(f)$, é o conjunto $f(D)$. Note que a imagem é um subconjunto do contradomínio.

Quando $B = Img(f)$, a função é sobrejetora. Se $f : D \to B$ é tal que $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, a função é dita injetora e, caso f seja injetora e sobrejetora, ela é denominada bijetora. Neste capítulo veremos funções $f : D \to \mathbb{C}$, com $D \subseteq \mathbb{C}$, ou seja, funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$ e que assumem valores em $\mathbb{C}$.

Dizemos que f é uma função complexa de variável complexa, quando o número complexo z é associado a um único $w \in \mathbb{C}$, chamado a imagem de z por f. Escrevemos $w = f(z)$. Não é suficiente apenas fornecer a lei de formação da função, é necessário definir seu domínio.

Seja $D \subset \mathbb{C}$. Uma aplicação $f : D \to \mathbb{C}$, é chamada função de variável complexa. Essas funções podem ser vistas como funções de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se:

$$z = x + iy \quad e \quad f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + i(v(x, y)),$$

então podemos ver $f : (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$. As funções u e v, são chamadas de partes real e imaginária de f, respectivamente, e são denotadas por $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$. Note que u e v são funções de um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.1. Considere $f(z) = z^2 + 1$, para $z = x + iy$, temos

$$f(z) = z^2 + 1 \Rightarrow$$

$$f(z) = (x + iy)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$f(z) = x^2 + 2xyi + i^2y^2 + 1 \Rightarrow$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 1 + (2xy)i \Rightarrow$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 1 + (2xy)i \Rightarrow$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \;\; v(x, y) = (2xy)i.$$

O corpo dos números complexos é naturalmente identificado como o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Podemos, portanto, estender à $\mathbb{C}$, as propriedades métricas e topológicas do $\mathbb{R}^2$. Veremos a seguir as noções de limite, continuidade e diferenciabilidade em $\mathbb{C}$.

Para funções de variável real, L é o limite da função $f(x)$, quando x tende a a, se podemos tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L desde que tomemos x suficientemente próximo de a. Temos o limite, $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Para o caso complexo, a noção de limite é semelhante, veja a seguir.

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. As noções de limite e continuidade da função $f : D \to \mathbb{C}$, coincidem com aquelas da mesma função interpretada como uma função de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Definição 4.2. (Limite) : Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função definida em uma bola aberta D que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f quando z tende a a é W, e escrevemos

$$\lim_{z\to a} f(z) = W,$$

se para todo número $\varepsilon > 0$, houver um número $\delta > 0$, tal que

$$se \;\; 0 < |z - a| < \delta \;\; \text{então} \;\; |f(z) - W| < \varepsilon.$$

Exemplo 4.3. Dado $f(z) = z + 2$, aplicando a definição de limite vamos mostrar que o limite de $f(z)$ quando z tende a $a = 1$ é 3.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$. Assim,

$$0 < |z - 1| < \delta \Rightarrow |f(z) - 3| = |z + 2 - 3| = |z - 1| < \delta = \varepsilon.$$

Definição 4.4. (Existência de limite): Sejam $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy$ e $a = x_0+iy_0$. Então, o limite de f existe em a e é igual a $u_0 + iv_0$ se, e somente se, os limites de u e v existem em (x_0, v_0) e são iguais a u_0 e v_0 respectivamente, ou seja,

$$\lim_{z\to a} f(z) = u_0 + iv_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,v_0)} u(x,y) = u_0, \lim_{(x,y)\to(x_0,v_0)} v(x,y) = v_0.$$

Definição 4.5. Sejam $D \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : B \to \mathbb{C}$ e $a \in D \cap B$. Se $\lim\limits_{z\to a} f(z) = L$ e $\lim\limits_{z\to a} g(z) = M$, então as seguintes propriedades são válidas:

(i) Se $w \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z) + wg(z) = \lim\limits_{z\to a} f(z) + w \lim\limits_{z\to a} g(z) = L + wM$.

(ii) $\lim\limits_{z\to a} f(z).g(z) = \lim\limits_{z\to a} f(z). \lim\limits_{z\to a} g(z) = LM$.

(iii) Se $\lim\limits_{z\to a} g(z) = M \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{z\to a} g(z)} = \dfrac{1}{M}$.

(iv) Se $\lim\limits_{z\to a} g(z) = M \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to a} f(z)}{\lim\limits_{z\to a} g(z)} = \dfrac{L}{M}$.

Para funções de variável real, uma função $f(x)$ é contínua em a, se podemos tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que tomemos x suficientemente próximo de a. A definição de continuidade em $\mathbb{R}$, envolvendo limites, diz que uma função f é contínua em um número a se,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Definição 4.6. (Definição de continuidade em $\mathbb{C}$) : Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. A função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ é contínua em um ponto $a \in D$ se

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Quando f é continua em todos os pontos de D, dizemos apenas que f é contínua.

Note que essa definição requer três fatos para a continuidade de f em a:

(i) $f(a)$ está definida,

(ii) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ existe e

(iii) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.

Também podemos dizer que, f é contínua em a, se pra todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon. \tag{4.1}$$

Exemplo 4.7. Considere $f(z) = \dfrac{(z+4i)}{3}$. Aplicando a definição de continuidade vamos mostrar que $f(z)$ é contínua em todo $a \in \mathbb{C}$.

Dado $\epsilon > 0$ tomemos $\delta = 3\epsilon$. Se $|z-a| < \delta$ então,

$$|f(z) - f(a)| = \left|\frac{(z+i4)}{3} - \frac{(a+i4)}{3}\right| \Rightarrow$$

$$|f(z) - f(a)| = \left|\frac{(z-a)}{3}\right| \Rightarrow$$

$$|f(z) - f(a)| = \frac{1}{3}\ |z-a|\ \leq\ \frac{1}{3}\ \delta = \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em $\mathbb{C}$.

Teorema 4.8. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$. Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, então $f(z)$ é contínua em $a = x_0 + iy_0$ se, e somente se, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas em (x_0, y_0).
Demonstração: [11, página 66].

Teorema 4.9. Sejam $D \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : B \to \mathbb{C}$ e $a \in D \cap B$. Se $f(z)$ e $g(z)$ são funções contínuas em a, então as funções $f+g$, $f.g$, wf, $w \in \mathbb{C}$, são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.
Demonstração: Cada uma das quatro partes desse teorema segue da correspondente propriedade de limites dadas na definição 4.5. Por exemplo, vamos demonstrar que $f+g$ é contínua. Como f e g são contínuas em a, temos

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) \quad e \quad \lim_{z\to a} g(z) = f(a) \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to a}(f+g)(z) = \lim_{z\to a}[f(z) + g(z)] \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to a}(f+g)(z) = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z) \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to a}(f+g)(z) = f(a) + g(a) \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to a}(f+g)(z) = (f+g)(a).$$

Isso mostra que $f+g$ é contínua em a. $\square$

Teorema 4.10. Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g = f(g(z))$ é contínua em a. Esse teorema é comumente expresso de maneira informal, como "uma função contínua composta de outra função contínua também é contínua".
Demonstração: Uma vez que g é contínua em a, temos

$$\lim_{z\to a} g(z) = g(a).$$

Uma vez que f é contínua em $b = g(a)$, obtemos que

$$\lim_{z \to a} f(g(z)) = f(g(a)),$$

que é precisamente a afirmação de que a função $h(z) = f(g(z))$ é contínua em a; isto é $f \circ g$ é contínua em a. $\square$

Corolário 4.11. Em $\mathbb{C}$ as funções polinomiais são contínuas em toda parte e as funções racionais são contínuas sempre que estiverem definidas, ou seja, são contínuas em seu domínio.

A definição de derivada em $\mathbb{C}$ é semelhante à definição de derivada de funções reais de variável real. Porém existem algumas distinções quando aplicamos essa definição a funções específicas e resultados que se aplicam somente em $\mathbb{C}$, os quais veremos no fim deste capítulo.

Definição 4.12. (Derivada): Se D é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$, então f é diferenciável em um ponto $a \in D$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

existe. O valor desse limite é denotado por $f'(a)$ e é chamado de derivada de f em a.

Esse limite também pode ser entendido como,

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

se $h = z - a$, $z = h + a$, $h \to a - a = 0$, e também é válido para determinar se uma função é diferenciável.

Se f é diferenciável em cada ponto de D, dizemos que f é diferenciável em D. Note que se f é diferenciável em D então $f(a)$ define uma função $f' : D \to \mathbb{C}$.

Definição 4.13. Se f' é contínua, dizemos que f é continuamente diferenciável.

Definição 4.14. Se f' é diferenciável, então f pode ser derivada duas vezes. Uma função diferenciável de tal forma que cada derivada sucessiva é novamente diferenciável é chamada infinitamente diferenciável.

Exemplo 4.15. Dada a função polinomial $f(z) = z^2 + 2z$, mostre que $f(z)$ é contínua e pode ser derivada duas vezes.

Como $f(z)$ não possui nenhuma restrição em $\mathbb{C}$, então para qualquer $a \in \mathbb{C}$, temos $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, logo $f(z)$ é contínua. A derivada de primeira ordem é dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 + 2(a+h) - (a^2 + 2a)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2+2a+2h-a^2-2a}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2+2h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} 2a+h+2 = 2a+2 \Rightarrow$$

$$f'(z) = 2z+2.$$

A derivada de segunda ordem será dada a partir de $f'(z) = 2z+2$, assim

$$\lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)+2-(2a+2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2a+2h+2-2a-2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2 \Rightarrow$$

$$f''(z) = 2.$$

f é diferenciável, ou seja, continuamente diferenciável e pode ser derivada duas vezes. $f''(z) = 2$ é uma função constante, a qual é infinitamente diferenciável, veja o exemplo 4.19, portanto $f(z)$ é infinitamente diferenciável.

Exemplo 4.16. Dada a função polinomial $f(z) = -3z^2$, mostre que $f(z)$ é contínua e pode ser derivada duas vezes.

Como $f(z)$ não possui nenhuma restrição em $\mathbb{C}$, então para qualquer $a \in \mathbb{C}$, temos $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$, logo $f(z)$ é contínua. A derivada de primeira ordem é dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{-3(a+h)^2-(-3a^2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-3(a^2+2ah+h^2)+3a^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-3a^2-6ah-3h^2+3a^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-6ah-3h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} -6a-3h = -6a \Rightarrow$$

$$f'(z) = -6a$$

.

A derivada de segunda ordem será dada a partir de $f'(z) = -6a$, assim

$$\lim_{h \to 0} \frac{-6(a+h) - (-6a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-6a - 6h + 6a}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-6h}{h} = 2$$

$$\lim_{h \to 0} -6 = -6 \Rightarrow$$

$$f''(z) = -6$$

.

f é diferenciável, ou seja, continuamente diferenciável e pode ser derivada duas vezes. $f''(z) = -6$ é uma função constante, a qual é infinitamente diferenciável, veja o exemplo 4.19, portanto $f(z)$ é infinitamente diferenciável.

Proposição 4.17. Se $f : D \to \mathbb{C}$ é diferenciável em um ponto $a \in D$ então, f é contínua em a.
Demonstração:

$$\lim_{z \to a} |f(z) - f(a)| = \left[\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} \right] . \left[\lim_{z \to a} |z - a| \right] = f'(a).0 = 0.$$

□

Exemplo 4.18. Determine a derivada da função complexa $f(z) = z^2 + 6z$, no ponto $a \in \mathbb{C}$. Temos,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 + 6(a+h) - (a^2 + 6a)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) + 6a + 6h - a^2 - 6a}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \lim_{z \to a} \frac{2ah + h^2 + 6h}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \lim_{z \to a} 2a + h + 6 \Rightarrow$$

$$f'(z) = 2a + 6.$$

Exemplo 4.19. A função constante $f(z) = w$, definida em um conjunto aberto de $\mathbb{C}$, é diferenciável em todos os pontos de seu domínio e $f'(a) = 0$. Além disso, ela é infinitamente diferenciável.

Exemplo 4.20. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. $f(z)$ não é diferenciável em $\mathbb{C}$, pois o $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a}$ não existe para todo $a \in \mathbb{C}$.

$$z = x + yi, a = x_0 + y_0 i \Rightarrow$$

$$f'(z) = \lim_{z \to a} \frac{\overline{z} - \overline{a}}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{\overline{z - a}}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{(\overline{z - a})^2}{|z - a|^2} \Rightarrow$$

$$f'(z) = \frac{(x - x_0 - (y - y_0)i)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \to a} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0 - (y - y_0)i)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Sejam $X = \{x_0 + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{t + y_0 i \mid t \in \mathbb{R}\}$. Temos

$$\lim_{z \to a} f'(z)_{|X} = \lim_{t \to y_0} \frac{-(t - y_0)^2}{(t - y_0)^2} = -1 \quad e$$

$$\lim_{z \to a} f'(z)_{|Y} = \lim_{t \to x_0} \frac{(t - y_0)^2}{(t - y_0)^2} = 1.$$

Vemos que $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a}$ não existe, ou seja, $f(z)$ não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

Definição 4.21. As derivadas de ordem superior são obtidas a partir das derivadas anteriores. $f'(z)$ é denominada derivada de primeira ordem de $f(z)$ e $f''(z)$ é denominada derivada de segunda ordem de $f(z)$, a qual é obtida a partir da derivada de $f'(z)$. $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada de f, ou seja, a derivada de ordem n de f.

Definição 4.22. $C^1(D, C)$ é o conjunto das funções cuja primeira derivada é contínua, D é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e C é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O mesmo vale para $C^2(D, C)$, o conjunto das funções cuja derivada de ordem dois é contínua. Quando $D \subset \mathbb{R}$, C^1 e C^2 designam o conjunto das funções reais que possuem a primeira derivada contínua e a derivada de ordem dois contínua, respectivamente.

A seguir, apresentamos um teorema que é famoso no cálculo diferencial de funções reais. Aqui, ele será apenas utilizado. Sua demonstração pode ser encontrada em [11, página 71].

Teorema 4.23. (Regra da cadeia) : Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$, funções complexas tais que $f(D) \subset B$. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a, e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \tag{4.2}$$

4.1 Função Exponencial

No caso de funções de variável real, a expansão em série de Taylor centrada em x_0 da função $f(x) = e^x$ é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Em $\mathbb{R}$ as expansões das funções seno e cosseno são dadas por

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad e$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Substituindo x por xi, obtemos que

$$e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ...$$

$$e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + ... + \frac{(xi)^n}{n!} + ...$$

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)$$

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \tag{4.3}$$

A igualdade (4.3) é importantíssima na matemática e é chamada Fórmula de Euler. Ao substituir x por π, temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i.0 = -1,$$

o que implica a identidade

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

chamada identidade de Euler.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, definimos a exponencial de z que está dada por:

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)), \tag{4.4}$$

na qual $u(x, y) = e^x \cos(y)$ e $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

Esta função é denominada exponencial pois ela generaliza a função exponencial de variável real quando $z = x + i0$. Com a parte imaginária de z nula, temos

$$e^{x+i0} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x.$$

Exemplo 4.24. Escreva a função $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, como $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$z = x + yi \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}} = e^{\frac{\bar{z}}{|z|^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} \Rightarrow$$
$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left[\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \Rightarrow$$
$$u(x, y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad e \quad v(x, y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Uma diferença importante entre a função exponencial complexa e a função exponencial real é que a primeira é periódica, com período puramente imaginário de $2\pi i$, além de ser uma função sobrejetora. No caso real a função logarítmica é a função inversa da função exponencial, mas como a exponencial complexa é periódica, existe mais de uma função satisfazendo:

$$\exp(f(z)) = z.$$

A partir daqui também concluímos que a função exponencial complexa não é injetora, pois ela associa dois elementos distintos pertencentes ao domínio de f a uma única imagem. Por exemplo $f(z) = \exp(z)$ e $f(z + 2\pi) = \exp(z)$, pois $\exp(z)$ é periódica de período 2π.

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = z_1 + iz_2.$$

Se $w = iy$, então $\exp(w) = \exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$. Logo a forma polar de um número complexo pode ser dada por

$$z = r\exp(i\theta), \quad \text{sendo } r \text{ o módulo de } z \text{ e } \theta \text{ seu argumento.}$$

Como todo número complexo pode ser representado por sua forma polar e essa forma pode ser escrita a partir da exponencial complexa, implica que a exponencial complexa é sobrejetora. Apesar de ser sobrejetora, a exponencial complexa não é injetora, como vimos anteriormente, logo ela também não é bijetora.

Outra distinção é que no caso real $e^x > 0$, porém a exponencial complexa pode assumir imagens negativas (além disso, não existe ordem no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$; portanto, a expressão $\exp(z) > 0$ não faz sentido). Considere $z = \pi i$, então $e^z = e^{\pi i} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi) = -1 + 0 = -1 < 0$.

A seguir temos três propriedades da função exponencial de variável complexa que se assemelham com as propriedades respectivas da exponencial real. Dados $z = x_1 + iy_1$ e $w =$

$x_2 + iy_2$ contidos em $\mathbb{C}$,

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

(iii) Para $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$, temos que $(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = [e^x(\cos y + i \sin y)]^n = e^{nz}$. Vamos provar (iii). De fato, segundo a equação (3.3), temos

$$[e^x(\cos y + i \sin y)]^n = e^{nx}[\cos(ny) + i \sin(ny)] \Rightarrow$$

$$[e^x(\cos y + i \sin y)]^n = e^{nx}e^{iny} \Rightarrow$$

$$[e^x(\cos y + i \sin y)]^n = e^{n(x+iy)} \Rightarrow$$

$$[e^x(\cos y + i \sin y)]^n = e^{nz}.$$

Além disso, $(\exp(z))' = \exp(z)$. A derivada da função exponencial complexa é a própria função exponencial de variável complexa, resultado semelhante ao que temos para o caso de função exponencial em $\mathbb{R}$.

As três propriedades vistas acima também se verificaram para funções exponenciais de variável real. Observe que mesmo possuindo propriedades semelhantes às propriedades de função exponencial real, a exponencial complexa se distingue por assumir valores negativos, por ser uma função periódica e por não ser uma bijeção.

4.2 Função Logarítmica

Vimos que a maior parte das definições e teoremas que envolvem funções de variável complexa são semelhantes as definições e teoremas que envolvem as funções de variável real. Porém, quando trabalhamos com a função logarítmica, notamos algumas distinções em relação ao uso dela no corpo dos números reais.

A função exponencial real $f(x) = e^x$ é bijetora e possui inversa $f^{-1}(x) = \ln x$, que é o logaritmo natural de x. Porém, como vimos no tópico anterior, a exponencial complexa não é definida univocamente em $\mathbb{C}$ e não admite inversa em $\mathbb{C}$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, queremos definir o logaritmo de z por

$$z = e^w \Rightarrow w = \log(z).$$

Se escrevemos $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $w = u + iv$ e r o módulo de z, obtemos que

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}. \tag{4.5}$$

Como $|z| = |e^{u+iv}|$, então

$$r = e^u, \tag{4.6}$$

e temos a solução única

$$u = \log(r),$$

na qual log é o logaritmo natural real. Das equações (4.5) e (4.6) temos que

$$e^{i\theta} = e^{iv} \Rightarrow v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$w = \log(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow$$

$$\log(z) = \ln|z| + arg(z)i,$$

onde $\ln|z|$ é o logaritmo de $|z|$. Como existe um número infinito de logaritmos de z, podemos afirmar que a equação $z = e^w$ admite infinitas soluções em $\mathbb{C}$.

Definição 4.25. Seja $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$. O logaritmo complexo de z é denotado por $\log(z)$ e é definido por

$$\log(z) = \ln|z| + arg(z)i.$$

Cada $z \neq 0$ tem uma infinidade de logaritmos, todos com parte real $\ln|z|$, se distinguindo uns dos outros por serem múltiplos de $2\pi i$. Dado $z = re^{i\theta}$, então $\log(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Assim como acontece com o logaritmo real, o logaritmo complexo possui propriedades algébricas. A seguir temos três propriedades da função logarítmica complexa. Sejam z e w são números complexos não nulos e $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $\log(z) + \log(w) = \log(zw)$.

(ii) $\log(z) - \log(w) = \log\left(\frac{z}{w}\right)$.

(iii) $\log(z^n) = n\log(z)$.

Já discutimos que o logaritmo complexo assume infinitos valores. Por exemplo, logaritmo de 7, $\log(7)$, é o conjunto de valores $1,9459 + 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$. Já o logaritmo real de 7, $\ln 7$, é único e vale aproximadamente, $1,9459$. A notação $Log(z)$ é utilizada para denotar o valor do logaritmo complexo determinado a partir do argumento principal de z, $Arg(z)$, ou seja, quando $k = 0$. A relação $f(z) = Log(z)$ define uma função em $\mathbb{C}$ e

$$Log(z) = \ln|z| + Arg(z)i.$$

Exemplo 4.26. Determine as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tais que $f(z) = Log(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Se $z \neq 0$, temos

$$f(z) = Log(z) = \ln|z| + Arg(z)i.$$

Logo,

$$u(x,y) = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \quad e \quad v(x,y) = Arg(z).$$

A função $Arg(z)$ pode ser definida como,

$$\frac{\pi}{2} \quad se \quad x = 0 \quad e \quad y > 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad se \quad x = 0 \quad e \quad y < 0,$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad z \in 1^\circ \quad \text{ou} \quad z \in 4^\circ \quad \text{quadrante},$$

$$\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad z \in 2^\circ \quad \text{quadrante},$$

$$-\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad z \in 3^\circ \quad q\text{quadrante}.$$

As principais distinções que vemos entre o logaritmo complexo e o logaritmo real são que o primeiro não é a função inversa da função exponencial complexa e que um número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos, se destacando do caso real, pois um número real positivo possui um único logaritmo natural.

4.3 Função Analítica

Nesta seção, apresentaremos o resultado mais relevante deste trabalho, o qual distingue fortemente a diferenciabilidade das funções de variável complexa em relação a mesma propriedade das funções de variável real. Mostraremos exemplos e proposições que reforçam a aplicabilidade desse resultado, que será apresentado como teorema. As definições a seguir podem ser encontradas em [2], no capítulo *"Elementary properties and examples of analytic functions"*.

Definição 4.27. Um conjunto $G \subset X$ é dito aberto se para cada x em G há um $\epsilon > 0$ de tal forma que $B(x,\epsilon) \subset G$.

Assim, um conjunto em $\mathbb{C}$ é aberto se não tiver 'borda'. Por exemplo, $G = \{z \in \mathbb{C} : a < Re(z) < b\}$ é aberto; mas $\{z : Re(z) < 0\} \cup \{0\}$ não é aberto porque $B(0,\epsilon)$ não está contido neste conjunto, não importa quão pequenos escolhamos ϵ.

Definição 4.28. Sejam $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é analítica em a se f for diferenciável neste ponto e em todo ponto numa vizinhança de a. De outro modo, diz-se que f é analítica em a quando existe $R > 0$ tal que o disco de centro a e raio R $D(a, R) \subset G$ e f é diferenciável em todo ponto de $D(a, R)$.

Definição 4.29. A função $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica se f é continuamente diferenciável em G.

Teorema 4.30. Sejam u e v funções de valor real definidas em uma região G. Se u e v têm derivadas parciais contínuas, então $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(z) + iv(z)$ é analítica se u e v satisfazem as equações abaixo para todo ponto a em G:

$$\frac{du}{dx}(a) = \frac{dv}{dy}(a), \tag{4.7}$$

$$\frac{du}{dy}(a) = -\frac{dv}{dx}(a). \tag{4.8}$$

Demonstração: Da diferenciabilidade de f em $a = x_0 + iy_0$, temos que o limite

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. No limite acima não há restrição sobre a maneira como z se aproxima de a no plano complexo. Façamos, primeiramente, z tender a a por meio da reta vertical $x = x_0$. Assim,

$$f'(a) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{iy - iy_0}$$

$$f'(a) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)}$$

$$f'(a) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)}$$

$$f'(a) = \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$f'(a) = \frac{dv}{dy}(a) - i\frac{du}{dy}(a).$$

Façamos agora z tender a por meio da reta horizontal $y = y_0$. Logo,

$$f'(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f'(a) = \frac{du}{dx}(a) + i\frac{dv}{dx}(a).$$

Concluímos que $f'(a) = \dfrac{dv}{dy}(a) - i\dfrac{du}{dy}(a)$ e $f'(a) = \dfrac{du}{dx}(a) + i\dfrac{dv}{dx}(a)$. Comparando as duas expressões de $f'(a)$, obtemos que

$$\frac{du}{dx}(a) = \frac{dv}{dy}(a) \quad e \quad \frac{du}{dy}(a) = -\frac{dv}{dx}(a).$$

As equações (4.7) e (4.8) são denominadas Equações de Cauchy-Riemann. □

Observação 4.31. Note que na Definição 4.12, f é diferenciável em um dado ponto $a \in D$ se o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existir, ou seja, f precisa verificar apenas essa condição. Já na Definição 4.28, temos que f é analítica em a se for diferenciável nesse ponto e em todo ponto numa vizinha de a, aqui f precisa verificar duas condições. Isso mostra que quando uma função de variável complexa é analítica pontualmente em a ela verifica uma condição mais restrita se comparada com a condição estabelecida para ser apenas diferenciável.

As funções analíticas também estão definidas em $\mathbb{R}$, no entanto, em $\mathbb{R}$, elas não permitem a aplicação das mesmas propriedades que existem para funções analíticas definidas em $\mathbb{C}$. Todas as definições relacionadas ao cálculo diferencial de funções de variável complexa é feita em um aberto, fizemos o uso dos abertos D e G, até aqui. Portanto, como em $\mathbb{C}$ trabalhamos continuidade, limite e derivada a partir de um conjunto aberto em $\mathbb{C}$, temos resultados que não se aplicam em $\mathbb{R}$, pois nele esses conceitos são trabalhados a partir de intervalos abertos.

Exemplo 4.32. Considere $f(z) = |z| + 3 = \sqrt{x^2 + y^2} + 3$, com partes real e imaginária $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 3$ e $v(x, y) = 0$. Assim,

$$\frac{du}{dx}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e$$

$$\frac{dv}{dy}(x, y) = 0,$$

para qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$. Portanto, $f(z)$ não é analítica pois $\dfrac{du}{dx}(x, y) \neq \dfrac{dv}{dy}(x, y)$.

Para que as equações (4.7) e (4.8) sejam condições suficientes para determinar a diferenciabilidade de uma função f em um ponto a, é preciso definir derivadas parciais de primeira ordem de u e v que sejam contínuas em a.

Vimos que a função exponencial complexa está dada por

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

na qual $u(x, y) = e^x\cos(y)$ e $v(x, y) = e^x\sin(y)$.

Aplicando as equações (4.7) e (4.8), temos que:

$$\frac{du}{dx} = e^x \cos(y) = \frac{dv}{dy} = e^x \cos(y)$$

$$\frac{du}{dy} = -e^x \sin(y) = -\frac{dv}{dx} = -(e^x \sin(y))$$

Como as derivadas parciais são contínuas e satisfazem as equações (4.7) e (4.8), temos que a função $\exp(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$.

De acordo com as definições que vimos no início do capítulo, envolvendo os conceitos de função complexa, continuidade, limite e diferenciabilidade em $\mathbb{C}$, podemos até acreditar que o cálculo diferencial aplicado ao corpo dos números complexos é apenas uma generalização do cálculo diferencial aplicado em $\mathbb{R}$.

No entanto existem duas distinções profundas relacionadas a diferenciabilidade desses dois corpos. A primeira distinção diz respeito a analiticidade de funções em $\mathbb{C}$, nesse corpo se uma função é continuamente diferenciável então ela também é analítica, como vimos a partir do Teorema (4.30). Esse resultado é crucial em $\mathbb{C}$, todavia não existe resultado semelhante que se aplique à teoria de funções reais de variável real.

A segunda distinção igualmente notável é que toda função analítica é infinitamente diferenciável e, além disso, tem uma expansão em série de potências em torno de cada ponto de seu domínio. Considerando a definição de derivada 4.12, podemos compreender o que gera esse resultado, pois o fato de f ter derivada em um aberto G permite que $f : G \to \mathbb{C}$ tenha muitas outras propriedades se comparada com funções de variável real.

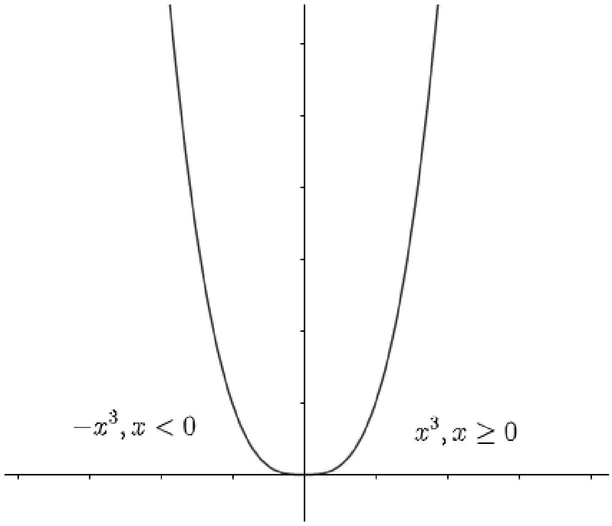
Note que na Definição 4.12, h pode se avizinhar de 0, de qualquer maneira. Ou seja, no caso complexo há uma infinidade de direções nas quais uma variável pode se aproximar de um determinado ponto. No entanto, no caso real, existem apenas duas vias de abordagem. A continuidade, por exemplo, de uma função f definida em $\mathbb{R}$, pode ser discutida somente conforme a continuidade à direita ou à esquerda de f em um ponto dado.

Por isso a afirmação de que uma função complexa possui derivada é mais forte do que a mesma afirmação sobre uma função de variável real. Considere por exemplo, f definida em $D \subset \mathbb{C}$, função de duas variáveis reais, de forma que $g(x, y) = f(x + iy)$, para $(x, y) \in D$. Exigir que f seja diferenciável não garantirá que f seja analítica.

A seguir apresentamos exemplos que mostram que em $\mathbb{R}$ uma função pode ser diferenciável, possuindo derivada de primeira ordem, segunda ordem ou n-ésima ordem, porém esse fato não implica que tal função possa ser derivada infinitas vezes.

Exemplo 4.33. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2|x|$. Mostre que $f'''(0)$ não existe.

Figura 4.1. $f(x) = x^2|x|$.



Fonte: Arquivo pessoal.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, x \geq 0, \\ -x^3, x < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, x > 0, \\ -3x^2, x < 0, \\ 0, \ \ x = 0. \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{pois}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^3 - 0}{x - 0}.$$

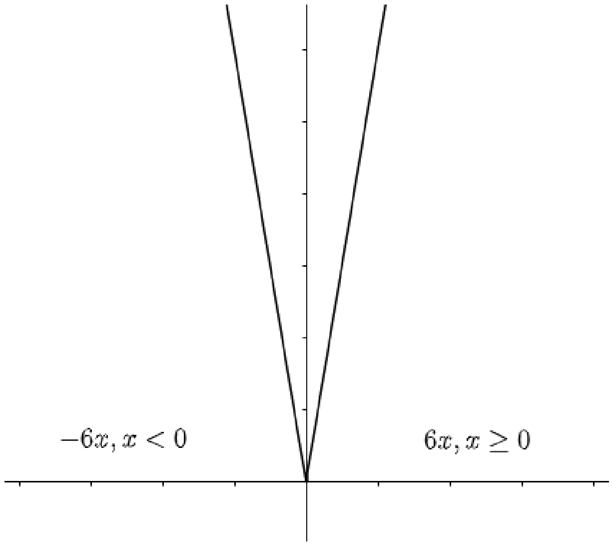
Calculando a derivada de segunda ordem, temos

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, x > 0, \\ -6x, x < 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{pois}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{-3x^2 - 0}{x - 0}.$$

Figura 4.2. $f''(x)$.



Fonte: Arquivo pessoal.

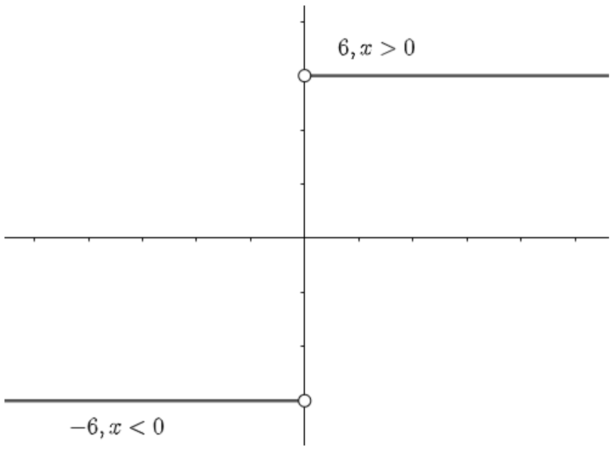
Calculando a derivada de terceira ordem, temos

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, x > 0, \\ -6, x < 0, \\ \nexists, x = 0. \end{cases}$$

$f'''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x) - f''(0)}{x - 0}$ não existe, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{6x - 0}{x - 0} = 6 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-6x - 0}{x - 0} = -6.$

$f'''(x)$ não é diferenciável, pois é descontínua em $x = 0$ e não possuí derivada nesse ponto. Visualize os limites laterais abaixo.

Figura 4.3. $f'''(x)$.



Fonte: Arquivo pessoal.

f não possui derivada de terceira ordem em $x = 0$.

Nesse exemplo vimos que a função $f(x) = x^2|x|$ possui derivada de primeira ordem e derivada de segunda ordem em $x = 0$, mas ao derivar essa função pela terceira vez, vimos que $f''(x)$ é descontínua em $x = 0$, o que torna impossível encontrar $f'''(0)$. A seguir apresentamos um exemplo que contém uma função que pode ser derivada n vezes, mas não possui a derivada de ordem $n + 1$.

Exemplo 4.34. Mostre que $g(x) = x^n|x| = \begin{cases} x^{n+1}, x \geq 0, \\ -x^{n+1}, x < 0. \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, tem n derivadas, mas não possui a derivada de ordem $n + 1$.

Faremos a prova através do método de indução matemática.

Parte ***(I)***: Se $n = 1$, $g(x) = x|x|$, temos

$$g(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x, x > 0 \\ -2x, x < 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{pois} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0}.$$

Calculando a derivada de segunda ordem, temos

$$g''(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ -2, x < 0 \\ \nexists, x = 0 \end{cases}$$

$$g''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{pois} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{2x - 0}{x - 0} = 2 \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x - 0}{x - 0} = -2.$$

$g''(x)$ não é diferenciável, pois é descontínua em $x = 0$ e não possui derivada nesse ponto. Portanto, $x|x| \in C^1$ mas $x|x| \notin C^2$, o que verifica a hipótese.

Parte ***(II)***: Suponha que $g(x) = x^n|x|$ não possui a $n+1$ - ésima derivada. A partir daqui vamos provar que $f(x) = x^{n+1}|x|$ não possui a $n + 2$ - ésima derivada. Temos

$$f(x) = x^{n+1}|x| = \begin{cases} x^{n+2}, x \geq 0, \\ -x^{n+2}, x < 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1}, x > 0, \\ -(n+2)x^{n+1}, x < 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Calculando a derivada de primeira ordem no ponto $x = 0$, temos

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \quad pois$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{n+2} - 0}{x - 0} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^{n+2} - 0}{x - 0} = 0.$$

Note que $f'(x)$ pode ser escrita como

$$f'(x) = (n+2)x^n|x| \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (n+2)g(x).$$

Por hipótese, $g(x)$ não possui a $n+1$ - ésima derivada, logo $f'(x) = (n+2)g(x)$ não é diferenciável, como queríamos mostrar.

Em $\mathbb{R}$, por mais que uma função seja diferenciável e possua derivada de segunda, terceira ou n-ésima ordem, existem exemplos tais que, derivando essa função n vezes chegaremos num ponto no qual não é possível obter a derivada de ordem $n+1$, como vimos no exemplo acima. Mas em $\mathbb{C}$, as funções que são analíticas, podem ser derivadas infinitas vezes, como mostraremos a partir dos corolários a seguir.

Nos resultados abaixo consideramos apenas funções complexas que podem ser expressas como série de potências, ou seja, funções do tipo $f(z) = \sum_{n-0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Não abordaremos os conceitos e definições que envolvem a teoria das séries de potências, mas consideramos as definições estabelecidas por [2], a partir da página 30.

Corolário 4.35. Se $f : D \to \mathbb{C}$ é analítica e $a \in D$, então $f(z) = \sum_{n-0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, para $|z-a| < R$, onde $R = d(a, \partial D)$ (isto é, R é a distância do ponto a à fronteira de D). Veja a demonstração em [2, página 73]

Ou seja, se $f(z)$ é analítica, $f(z)$ pode ser escrita como uma série de potência. Apenas uma função “bem comportada"pode ser representada por uma série de potências; isto é, se uma função f não possuir derivadas de todas as ordens em um intervalo $(a-R, a+R)$, então a função não pode ser representada por uma série de potências em $z-a$, naquele intervalo.

Corolário 4.36. Se $f : D \to \mathbb{C}$ é analítica, então f é *infinitamente diferenciável*. Veja a demonstração em [2, página 73].

Exemplo 4.37. Quase todas as funções familiares do cálculo são analíticas nos pontos em que são definidas:

(i) A função exponencial complexa $\exp(z)$ é analítica e pode ser escrita como a série de potência

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

(ii) As funções trigonométricas $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$, são funções analíticas, e podem ser representadas como séries de potências.

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}, \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(iii) As funções polinomiais são analíticas e qualquer função racional, do tipo $\frac{P(z)}{Q(z)}$, onde P e $Q \neq 0$ são polinômios, é analítica.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = \sum_{n-0}^{\infty} a_n z^n.$$

Exemplo 4.38. Vamos verificar se a função $f(z) = \frac{1}{3-z}$ é analítica. Se $f(z)$ for analítica vamos expressá-la como uma série de potência.

Para $z = x + iy$,

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3-(x+iy)} = \frac{1}{3-x-iy} = \frac{1}{(3-x)-iy} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{(3-x)-iy} \cdot \frac{(3-x)+iy}{(3-x)+iy} = \frac{(3-x)+iy}{9-6x+x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{(3-x)}{9-6x+x^2+y^2} + i\left(\frac{y}{9-6x+x^2+y^2}\right) \Rightarrow$$

$u(x,y) = \frac{(3-x)}{9-6x+x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{y}{9-6x+x^2+y^2}$, definidas em $C \backslash \{3\}$, um aberto.

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{x^2+6x+9-y^2}{(9-6x+x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} = \frac{-2y(3-x)}{(9-6x+x^2+y^2)^2}.$$

As equações acima estão de acordo com o Teorema 4.30, logo $f(z)$ é função analítica e pode ser representada através de uma série de potência. Vamos expandir em série de potência a função $f(z) = \frac{1}{3-z}$, centrada em $a = 2i$. Temos

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3-z+2i-2i} = \frac{1}{3-2i-(z-2i)} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}}$$

Para $z \neq 1$, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$, substituindo z por $\frac{z-2i}{3-2i}$, temos

$$\frac{1}{3-2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}} = \frac{1}{3-2i}\left[1 + \frac{z-2i}{3-2i} + \left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^3 + ...\right] =$$

$$\frac{1}{3-2i} + \frac{1}{(3-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(3-2i)^3}(z-2i)^2 + ... + \frac{1}{(3-2i)^{n+1}}(z-2i)^n + ...$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{1}{(3-2i)^{n+1}}(z-2i)^n.$$

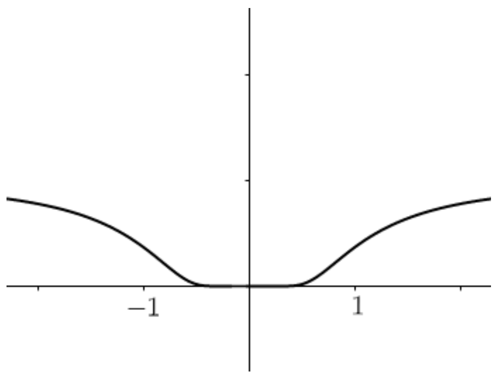
A partir dessa igualdade vemos que para o intervalo $(-R, R)$, existem sucessivas derivadas de $f(z)$, pois as séries de potências de Taylor são infinitamente diferenciáveis. Assim teríamos a derivada de primeira ordem contínua, a derivada de segunda ordem contínua, e assim por diante. Portanto, $f(z)$ é analítica e infinitamente diferenciável.

Em $\mathbb{R}$ existem muitas funções que apesar de serem infinitamente diferenciáveis, não podem ser escritas como uma série de potências. É o caso da função real

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Essa função é infinitamente diferenciável, ou seja, é diferenciável em $x = 0$ e possui todas as derivadas em $x = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$. Observe seu gráfico abaixo

Figura 4.4. $f(x)$.



Fonte: Arquivo pessoal.

No entanto, é possível mostrar que ela não pode ser escrita como uma série de potências, pois o gráfico da série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, se distingue do gráfico da própria $f(x)$ em torno do ponto zero. Esse exemplo nos mostra que em $\mathbb{R}$ o fato de uma função ser infinitamente diferenciável não garante que ela possa ser escrita como uma série de potências.

Capítulo 5
Teorema Fundamental da Álgebra

A seguir veremos um resultado conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra, o qual foi provado inicialmente por Karl Friederich Gauss em 1848, e mostra que em $\mathbb{C}$ todo polinômio possui pelo menos uma raiz complexa. Mas antes conheceremos o conceito de função polinomial complexa.

5.1 Função Polinomial

Uma função polinomial com coeficientes reais na variável x é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0,$$

onde $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$ são números reais, denominados coeficientes do polinômio. O coeficiente b_0 é o termo constante.

Definição 5.1. Uma função complexa da forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, onde n denota um número inteiro maior ou igual a zero e $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, é chamada polinômio ou função polinomial complexa.

Os números $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são chamados coeficientes, a_n é chamado coeficiente líder e a_0 é o termo independente. Quando $a_n = 1$, o polinômio é chamado mônico, quando $p(z) = a_0$, dizemos que o polinômio é constante e, em particular, se $a_0 = 0$, $p(z) = 0$ é chamado polinômio identicamente nulo. O conjunto de todos os polinômios complexos será denotado por $\mathbb{C}_{[z]}$.

Definição 5.2. Se $p(z) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$ então o grau de $p(z)$, que representaremos por $gr(p)$, é o inteiro não negativo n. Quando $p(z)$ é um polinômio identicamente nulo ou um polinômio constante, ou seja, $p(z) = a_0$, então $gr(p) = 0$.

Da definição de grau de polinômio decorre que se $p(z)$ e $g(z)$ pertencem a $\mathbb{C}_{[z]}$ e ambos não são identicamente nulos, então:

(i) Se $h(z) = p(z) + g(z)$, então $gr(h) \leq \max\{gr(p), gr(g)\}$.

(ii) Se $h(z) = p(z)g(z)$, então $gr(h) = gr(p) + gr(g)$.

Seja um polinômio complexo de grau $n \geq 0$,

$$p(z) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \neq 0,$$

e $z_0 \in \mathbb{C}$ um número fixo. Considere as seguintes propriedades relativas a $p(z + z_0)$:

(i) É um polinômio na variável z.

(ii) O termo dominante é a_n, também de grau n.

(iii) É um polinômio com termo independente $p(z_0)$.

Expandindo $p(z + z_0)$, temos

$$p(z + z_0) = a_n(z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + ... + a_1(z + z_0) + a_0.$$

Dessa expressão verificamos que o coeficiente do monômio z^n de maior grau é a_n. Além disso, colocando $z = 0$ em $p(z + z_0)$, obtemos $p(z_0)$, que é o termo independente.

Exemplo 5.3. Dado $p(z) = 4z^3 + 2z^2 + 3z + 5$ e $z_0 = 2$, determine o grau e o termo independente de $p(z + z_0)$.

$$p(z + z_0) = p(z + 2) = 4(z + 2)^3 + 2(z + 2)^2 + 3(z + 2) + 5 \Rightarrow$$

$$p(z + z_0) = p(z + 2) = 4z^3 + 26z^2 + 59z + 51,$$

$p(z + 2)$ é um polinômio com termo dominante $a_n = a_3 = 4$, de grau 3 e o termo independente, para $z = 0$, é $p(0 + 2) = p(2) = p(z_0) = 51$.

Dado $p(z) \in \mathbb{C}_{[z]}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ é chamado raiz de $p(z)$ se $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 5.4. Mostre que $\alpha = i$ é raiz de $p(z) = z^6 + z^3 + 2z^2 + z + 3$.

$$p(i) = i^6 + i^3 + 2i^2 + i + 3 = -1 - i - 2 + i + 3 = 0.$$

Teorema 5.5. Seja $p(z)$ um polinômio com coeficientes complexos. Se o número complexo $z = a + bi$ é uma raiz do polinômio p, então seu conjugado $z = a - bi$ também é uma raiz de p. Veja a demonstração em [9, página 108].

5.2 História do Teorema Fundamental da Álgebra

Encontrar soluções para equações de grau superior a quatro, determinar o tipo de número que deveria ser considerado solução, ou raiz legítima de uma equação e principalmente compreender o número de soluções para uma dada equação polinomial, eram problemas matemáticos discutidos continuamente entre os estudiosos.

Durante anos, diversos matemáticos buscaram a honra de serem os primeiros a demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Dos quais os mais conhecidos são d'Alembert (1746), Euler (1749), de Foncenex (1759), Lagrange (1772) e Laplace (1795), que não obtiveram sucesso, pois suas provas sempre tinham alguma falha ou estavam incompletas.

A primeira aparição registrada da ideia desse resultado aconteceu apenas em 1608, no livro *Arithmetica Philosofica* de Peter Rothe, que afirmou que equações polinomiais de grau n possuem n raízes. Uma demonstração primária do teorema também foi dada pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss em sua tese de doutorado em 1799, porém a mesma também tinha falhas, que foram corrigidas mais tarde pelo matemático Alexander Ostrowski, matemático ucraniano (1893 – 1986).

Gauss apresentou três provas iniciais do teorema, entre 1799 e 1816. Até que em 1849 expõe uma quarta demonstração, desta vez o enunciado é para polinômios com variável e coeficientes complexos.

Desde que Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra em sua tese de doutorado, apareceram muitas outras demonstrações desse teorema. Muitas das demonstrações modernas do Teorema Fundamental da Álgebra utilizam ferramentas da análise complexa, tais como Teorema de Liouville, Teorema de Cauchy, Teorema de Picard, Princípio do Módulo Máximo, Raio de Convergência, etc.

O primeiro manual universitário a conter a demonstração formal desse teorema só foi publicado em 1821, pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy. Augustin-Louis Cauchy se dedicou a análise matemática, área na qual ele publicou o artigo: *Integrais definidas com limites de números complexos*, que consagrou sua carreira e o eternizou na matemática. Outro resultado seu muito utilizado é a integral de Cauchy, que é um dos teoremas centrais da análise complexa.

As equações sempre nutriram o pensamento dos matemáticos ao longo dos séculos, por isso o Teorema Fundamental da Álgebra foi ganhando forma lentamente. No século XIX a álgebra era compreendida como a teoria dos polinômios com coeficientes reais ou complexos, o que implica na nomenclatura do teorema. Além disso, uma teoria fundamental para a construção do resultado dado por esse teorema é a teoria das equações algébricas.

5.3 Prova do Teorema Fundamental da Álgebra

Neste item demonstraremos o Teorema Fundamental da Álgebra de acordo com [17, 20]. A prova desse resultado assume a continuidade dos polinômios complexos e a completude de $\mathbb{R}$. Outras demonstrações podem ser encontradas em [18, 19, 11].

Considere um polinômio complexo de grau n.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

no qual $a_i \in \mathbb{C}$, $i = \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $a_n \neq 0$. Aplicando o módulo à equação acima, temos

$$|p(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0|,$$

utilizando a desigualdade $|z + w| \geq ||z| - |w||$ estendida para números complexos, que pode ser demonstrada por meio da desigualdade triangular, obtemos

$$|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| \Rightarrow$$

$$|p(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| \Rightarrow$$

$$|p(z)| \geq |a_n||z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| - ... - |a_1||z| - |a_0| \Rightarrow$$

$$\lim_{|z| \to +\infty} (|a_n||z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| - ... - |a_1||z| - |a_0|) = +\infty$$

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty. \tag{5.1}$$

Já que $|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_0|$ e $|z|$ são reais e positivos e $|a_n|$ é estritamente positivo. A prova a ser apresentada exige alguns axiomas e teoremas que estão enunciados abaixo.

Axioma 5.6. (Completeza): Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.

Definição 5.7. Dado um ponto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, o conjunto dos pontos do plano, cuja distância ao ponto P é menor ou igual a R é chamado de disco compacto de centro (a, b) e raio R,

$$D[P, R] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}.$$

O teorema abaixo garante que toda função contínua $f : D \to \mathbb{R}$, na qual D é um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, assume mínimo em D.

Teorema 5.8. (Weierstrass): Toda função contínua definida em um compacto possui mínimo.

A demonstração pode ser encontrada em [16, páginas 57-58].

Teorema 5.9. (Teorema Fundamental da Álgebra): Todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração a seguir assume a continuidade dos polinômios complexos e a completude de $\mathbb{R}$ aplicada a função $f : D \to \mathbb{R}$, na qual D é um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, que assume mínimo em D. Vamos considerar o polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, no qual $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Provaremos que:

(I) Existe um ponto w no plano complexo tal que $|p(z)| \geq |p(w)|$.

(II) Se w é o ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $p(w) = 0$.

Demonstração: Parte ***(I)***

Vimos em (5.1) que $|p(z)| \to +\infty$ se $|z| \to +\infty$. Portanto, pela definição dada em 5.1, existe um raio $R > 0$, tal que $|p(z)| > |p(0)|$ se $|z| > R$ e, como $|p(z)|$ é uma função contínua no disco compacto centrado na origem $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : z \leq R\}$, pelo Teorema 5.8, segue que a função $|p(z)|$ restrita ao disco $D[0, R]$, assume um valor mínimo em um ponto $w \in D[0, R]$.

Temos $|p(z)| \geq |p(w)|$, para todo $z \in D[0, R]$. No entanto, também temos $|p(0)| \geq |p(w)|$ já que $0 \in D[0, R]$. Dessas desigualdades, segue que

$$|p(z)| \geq |p(w)|, \forall \ z \in D[0, R],$$

$$|p(z)| \geq |p(0)|, \forall \ z \in \mathbb{C}, \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad |z| > R \quad \text{e}$$

$$|p(0)| \geq |p(w)|.$$

Portanto $|p(z)| \geq |p(w)|$, $\forall \ z \in \mathbb{C}$, ou seja, w é ponto de mínimo global da função $|p(z)|$. Seja $m(z) = p(z + w)$ um polinômio de grau n no qual o coeficiente dominante é a_n e o termo independente é $m(0) = p(w)$, temos

$$p(z + w) = p(w) + b_1 z + ... + b_{n-1}z^{n-1} + b_n z^n, \quad \text{com} \quad b_j's \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad b_n = a_n \neq 0.$$

Supondo que o valor $p(w)$ é assumido em $z = 0$, podemos assumir sem perder a generalidade que $w = 0$. De fato, note que, se $w \neq 0$, basta considerarmos na demonstração o polinômio m no lugar de p. O que vamos obter é que $p(0) = 0$, e o que obteríamos é que $m(0) = p(w) = 0$, sem perder a generalidade. Elevando ao quadrado a expressão, obtemos ao substituir w por 0 que:

$$|p(z)|^2 \geq |p(0)|^2, \forall \ z \in \mathbb{C}. \tag{5.2}$$

Sendo $b_n = a_n \neq 0$, existe o menor $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que o coeficiente do monômio z^k, b_k, é diferente de zero. Evidenciando z^k simplificamos o polinômio $p(z)$:

$$p(z) = p(0) + z^k q(z), \tag{5.3}$$

no qual q é um polinômio e $q(0) = b_k \neq 0$.

Parte ***(II)***

Considere $L^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, o círculo unitário centrado na origem. Para todo $r \geq 0$ e $w \in L^1$, de (5.2), temos que

$$|p(rw)|^2 \geq |p(0)|^2 \Rightarrow |p(rw)|^2 - |p(0)|^2 \geq 0. \tag{5.4}$$

Considerando (5.3), obtemos $p(rw) = p(0)+r^k w^k q(rw)$. Substituindo em (5.4), temos:

$$|p(0) + r^k w^k m(rw)|^2 - |p(0)|^2 \geq 0.$$

Aplicando a equação (3.1), na inequação acima, obtemos que

$$|p(0)|^2 + 2Re[\overline{p(0)}r^k w^k m(rw)] + |r^k w^k m(rw)|^2 - |p(0)|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$2Re[\overline{p(0)}r^k w^k m(rw)] + |r^k w^k m(rw)|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$2r^k Re[\overline{p(0)}m(rw)w^k] + r^{2k}|w^k m(rw)|^2 \geq 0, \forall\ r \geq 0, \forall\ w \in L^1.$$

Dividindo por $r^k > 0$ e fixando $w \in L^1$, temos:

$$2Re[\overline{p(0)}m(rw)w^k] + r^k|w^k m(rw)|^2 \geq 0, \forall\ r > 0.$$

Como a esquerda da desigualdade é contínua em $r \in [0, +\infty)$, substituindo $r = 0$, obtemos

$$2Re[\overline{p(0)}m(0.w)w^k] + 0^k|w^k m(0.w)|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$2Re[\overline{p(0)}m(0)w^k] \geq 0, w \ \ arbitr\acute{a}rio \ \ em \ \ L^1. \tag{5.5}$$

Seja $w = \cos\theta + i\sin\theta \in L^1$, aplicando a fórmula De Moivre, temos: $w^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$, e como definimos $|w| = 1$, sabendo que $|w^k| = 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, escolheremos alguns representantes de w^k. Considere $w^k = \pm 1$ e $w^k = \pm i$, cujos afixos são imagens na circunferência definida acima, escrevendo $\overline{p(0)}m(0) = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, se substituirmos em (5.5), temos

$$2Re[(a + bi)(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))] \geq 0 \Rightarrow$$

$$2Re[a\cos(k\theta) - b\sin(k\theta) + (asin(k\theta) + b\cos(k\theta))i] \geq 0 \Rightarrow$$

$$2[a\cos(k\theta) - b\sin(k\theta)] \geq 0. \tag{5.6}$$

Analisando cada caso:

Para $w^k = 1$, temos
$\cos k\theta = 1$ e $\sin k\theta = 0$. Logo, $k\theta = 0$ e $2[a\cos(0) - b\sin(0)] \geq 0 \Rightarrow 2a\cos 0 \geq 0$. Logo, $a \geq 0$.

Para $w^k = -1$, temos
$\cos k\theta = -1$ e $\sin k\theta = 0$. Logo, $k\theta = \pi$ e $2[a\cos(\pi) - b\sin(\pi)] \geq 0 \Rightarrow 2a\cos\pi \geq 0$. Logo, $a \leq 0$. Como $a \geq 0$ e $a \leq 0$, então $a = 0$.

Para $w^k = i$,
temos $\cos k\theta = 0$ e $\sin k\theta = 1$. Logo, $k\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $2[a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)] \geq 0 \Rightarrow -2b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. Logo, $b \leq 0$.

Para $w^k = -i$,
temos $\cos k\theta = 0$ e $\sin k\theta = -1$. Logo, $k\theta = \left(\frac{3\pi}{2}\right)$ e $2[a\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)] \geq 0 \Rightarrow -2b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \geq 0$. Logo, $a \geq 0$. Como $a \geq 0$ e $b \leq 0$, então $b = 0$.

Logo, $\overline{p(0)}q(0) = a + bi = 0$ e lembrando que $q(0) = b_k \neq 0$, segue que $\overline{p(0)} = 0$, portanto $p(0) = 0$.

Concluímos aqui a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, pois provamos que as afirmações ***(I)*** e ***(II)*** são verdadeiras. Portanto todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa. $\square$

Definição 5.10. Um corpo $\mathbb{K}$ é dito algebricamente fechado se qualquer polinômio $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, com grau $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{K}$.

Diante dessa definição concluímos que $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado. No entanto $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado, pois quando o polinômio $p(z)$ tem coeficientes reais, é possível que nenhum $\alpha \in \mathbb{R}$ seja raiz de $p(z)$. Considere por exemplo, $p(z) = z^2 + 1$, ou qualquer $p(z) = az^2 + bz + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Capítulo 6
Conclusões

No decorrer do texto destacamos a história do surgimento do corpo dos números complexos, conhecemos as representações e operações feitas com um número em $\mathbb{C}$. Conhecemos também as funções de variável complexa e algumas definições importantes para trabalharmos a diferenciabilidade dessas funções, como as definições de limite e continuidade e a regra da cadeia. Vimos que essas definições são análogas as definições que já conhecemos para o caso de funções de variável real, no entanto em $\mathbb{C}$, encontramos propriedades que vão mais além.

No início da pesquisa pretendíamos compreender as diferenças principais entre a estrutura algébrica de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Deixando de lado diferenças claras, nos questionamos: quais propriedades do corpo dos números complexos o distinguem do corpo dos números reais? Quais são as principais diferenças entre esses dois corpos? E quais as principais distinções entre a diferenciabilidade de funções complexas e funções reais de variável real?

Nosso objetivo geral era apresentar os números complexos e as funções de variável complexa, a fim de explicitar as diferenças cruciais que há entre os dois corpos: dos números complexos e dos números reais. O estudo foi desenvolvido com o delineamento de pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa. A teoria dos números complexos e das funções de variável complexa está fortemente envolvida neste trabalho, pois foram nosso objeto de estudo.

Essas duas teorias são campos abrangentes de estudo, por isso permitem a realização de outras pesquisas. Nos dedicamos apenas em apresentar os números complexos e suas funções, pois essa teoria já possibilita trabalhar com derivadas em $\mathbb{C}$. Mas outros objetos poderiam ser abordados, como as sequências e séries de números complexos e os produtos infinitos, além dos inúmeros teoremas que estão envolvidos na teoria de funções de variável complexa.

Grande parte dos objetivos estabelecidos foram contemplados, pois mostramos a construção rigorosa dos números complexos, relatamos a história do seu surgimento, analisamos as funções de variável complexa e as funções analíticas, funções que estão diretamente ligadas ao principal resultado deste trabalho. Apresentamos o teorema fundamental da álgebra e em cada etapa, mostramos as diferenças entre o respectivo conceito no caso real.

Os resultados encontrados mostram que existem sim diferenças na estrutura algébrica desses dois corpos. Em cada função que analisamos encontramos distinções. Estudando as funções analíticas, nos deparamos com um resultado que é essencial, pois os Corolários 4.35 e 4.36, afirmam que toda função analítica pode ser representada através de uma série de potências e é infinitamente diferenciável.

Esses corolários exibem um resultado importantíssimo, pois nos permitem compreender quais funções complexas podem ser escritas como série de potências e podem ser derivadas infinitas vezes. Em $\mathbb{R}$ não existe resultado semelhante, não podemos generalizar um resultado que se aplique em $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$ temos, por exemplo, as funções polinomial e exponencial que podem ser derivadas quantas vezes se desejar, mas não existe resultado como o do Corolário 4.35, que generalize funções de variável real e nos permita determinar quais funções reais são ou não infinitamente diferenciáveis.

Esse resultado é notável, por isso foi fortemente destacado neste trabalho. Tivemos dificuldade em encontrar materiais que ressaltassem as distinções na estrutura algébrica de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. No entanto, este fato torna nosso trabalho ainda mais significativo, pois estamos contribuindo para uma área da análise complexa que ainda requer muitos estudos. Outros resultados que também são importantes estão relacionados às funções funções exponencial, logarítmica e polinomial complexa.

Apesar de possuírem propriedades algébricas semelhantes as de funções de variável real, encontramos distinções quando trabalhamos com funções logarítmicas e exponenciais complexas. Em $\mathbb{C}$, essas funções não são a inversa uma da outra, como acontece no caso real. A função exponencial complexa é periódica e não é uma bijeção, ou seja, existe mais de uma função satisfazendo $\exp(f(z)) = z$. Além disso, em $\mathbb{R}$, $e^x > 0$, mas a exponencial complexa pode assumir imagens negativas. Compreendemos também que um número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos, no que se distingue do caso real, pois um número real positivo possui um único logaritmo.

Apresentamos e demonstramos o Teorema Fundamental da Álgebra, o qual afirma que todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa e revela uma propriedade única do corpo dos números complexos, ou seja, que ele é um corpo algebricamente fechado. $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado, pois um polinômio de coeficientes reais pode não possuir raiz $\alpha \in \mathbb{R}$.

Acreditamos que a maneira utilizada para apresentar os números complexos e a sua história, e o contraste feito entre as funções de variável complexa e as funções de variável real, destaca a importância das teorias envolvidas neste trabalho. O estudo dos números complexos é indispensável não só para matemáticos, mas também para pesquisadores de outras áreas. Conhecer os resultados encontrados a partir desses números, todo trabalho feito até a construção deles e compreender o quanto estão além de $\mathbb{R}$, nos faz admitir isso.

Referências

[1] ROGERS, Carl R. **Tornar-se pessoa**. 5. ed. São Paulo: Martins, 2001.

[2] CONWAY, John B. **Functions of one complex variable**. New York: Springer-Verlag, 1978.

[3] LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

[4] SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, S. O.; ALVES, L H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, v.20, n.43, 2021, p.64-83. Disponível em: <https ://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/download/2336/1441>. Acesso em 27/09/2021.

[5] LIMA, Elon L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[6] CERRI C.; MONTEIRO M. S. História dos Números Complexos. **CAEM** - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/ martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 20/10/2012.

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[8] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.

[9] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. 2. Ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

[10] ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. **A first course in complex analysis with applications**. Mississauga: Jones and Bartlett Publishers, 2003.

[11] SILVA, Marcos A. **Análise complexa e aplicações**. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

[12] BOTÓS, H. C. **Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais**. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós-graduação em Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

[13] LOUREIRO, Ana M. **Funções holomorfas com condições pré-definidas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade do Minho, Braga.

[14] OLIVEIRA, E.C.; RODRIGUES, E.C. **Funções analíticas com aplicações**. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[15] STEWART, James. **Cauculus: early transcendentals**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[16] NERI, C. **Curso de ánalise real**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.

[17] Costa, Allan I. **Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

[18] FILE, Dan; MILLER, Steven. **Fundamental Theorem of Algebra**: Lecture notes from the Reading Classics (Euler). Autumm: Working Group, 2003.

[19] PIANOSCHI, Thaisa A. **Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

[20] ROCHA, Vital J. **Números complexos e o teorema fundamental da álgebra**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Goiás, Goiânia.

[21] SANTOS, D. J. **A Álgebra dos complexos/quatérnios/octônios e a construção de Cayley-Dickson**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ma- temática e Tecnologia, Catalão.

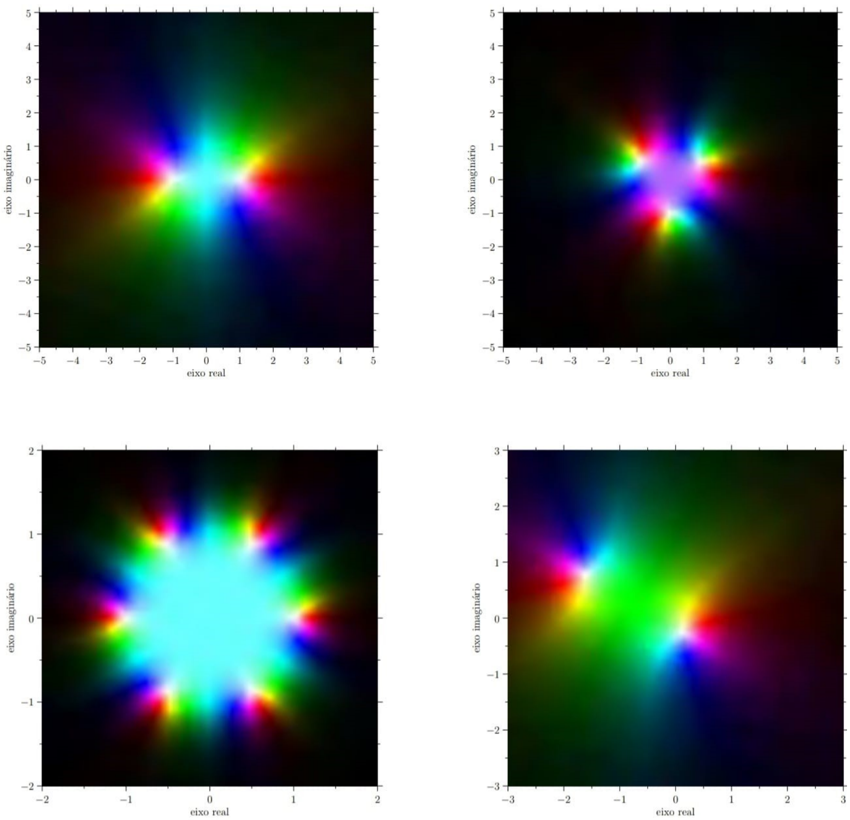
Anexos

O padrão de cores RGB é um modelo de cores aditivas formado pelas cores primárias, vermelho, azul e verde. Nesse modelo o sistema de coordenadas cartesianas é tridimensional, nele cada eixo coordenado representa uma cor primária. O eixo real está representado pela cor vermelha, o eixo imaginário está representado pela cor verde e o eixo das cotas está representado pela cor azul.

As figuras abaixo estão representadas pelo modelo de padrão de cores HSV, que é construído a partir de uma transformação linear do modelo de padrão de cores RGB. As diferentes cores reproduzidas nas figuras são todos os pontos da função e se estendem a partir da origem.

As raízes da função polinomial estão na cor branca. Começando do canto superior esquerdo temos as funções, $f(z) = z^2 - 1$, $f(z) = z^3 - i$, $f(z) = z^6 - 1$ e $f(z) = 2z^2 + (3 - i)z + i$.

Figura 6.1. Visualização das raízes de funções polinomiais.



Fonte: Pianoschi, 2013.