UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BÁRBARA RIBEIRO DE ARAUJO

IRRACIONALIDADE DE π^2 E DE POTÊNCIAS DE e

Araguaína
2022

BÁRBARA RIBEIRO DE ARAUJO

IRRACIONALIDADE DE π^2 E DE POTÊNCIAS DE e

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins – Câmpus de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Doutor José Carlos de Oliveira Junior

Araguaína

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A663i Araujo, Bárbara Ribeiro de .
IRRACIONALIDADE DE π^2 E DE POTÊNCIAS DE e. / Bárbara Ribeiro de Araujo. – Araguaína, TO, 2022.
43 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.
Orientador: José Carlos De Oliveira Junior

1. Irracionalidade de π e e. 2. Irracionalidade de π^2 e e^r . 3. Número irracional. 4. Contexto histórico dos números irracionais. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BÁRBARA RIBEIRO DE ARAUJO

IRRACIONALIDADE DE π^2 E DE POTÊNCIAS DE e

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - Câmpus de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Data de aprovação: 30 / 06 / 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT – Orientador

Profa. Dra. Fernanda Vital de Paula, UFNT – Avaliadora

Samara L. Matos da Silva

Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva, UFNT – Avaliadora

Araguaína

2022

Dedico este trabalho aos meus pais e familiares que sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois és o meu alicerce, estando comigo em todos os momentos da minha vida.

A minha família, meus pais, Diana Ribeiro da Silva e Gedeon Silva de Araujo, que são exemplos de determinação para mim, mesmo não podendo estudar na sua idade própria fizeram o possível para proporcionar uma boa educação aos seus filhos, onde mesmo sendo privados de estudar quando criança para cuidar dos irmãos mais novos, guardavam em seu coração o sonho de ver seus filhos com uma boa formação educacional e familiar.

Ao meu digníssimo esposo, Carlos Eduardo Costa Magalhães, que me encorajou durante a escrita deste trabalho e que esteve comigo em momentos adversos.

Aos meus irmãos, Manoel, Beatriz e Miguel, que sempre acreditaram em mim e que acompanharam todo o meu trajeto de luta.

Ao meu orientador Dr. José Carlos de Oliveira Junior, o qual mesmo em finais de semana estava me auxiliando e estudando junto comigo para a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores pelo ensino, em especial ao Davi, Cristiano, Seliomar, Ismael, Fernanda Vital, José Carlos, Álvaro, Renata, Samara, Yukiko, Sinval, Adriano.

À Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), e a todos os meus amigos e colegas de faculdade, em especial: Severino Pereira da Silva, Paulo Henrique Coutinho da Costa Vieira.

RESUMO

Este trabalho tem como tema central apresentar as demonstrações de que π^2 e e^r, são números irracionais. Através da prova de Charles Méray de que os números racionais não eram suficientes para calcular a medida da "quadratura do círculo", percebeu-se que estes não eram expressos pela razão de números inteiros e, daí surgiu-se os chamados números irracionais, onde os mais famosos da Índia e Grécia são os números π e e. Diante do exposto, tem-se a seguinte problemática: ***o que pode ser afirmado a respeito da irracionalidade dos números π^2 e e^r, onde r é um número racional diferente de zero?*** Com isso, propomo-nos abordar alguns conceitos e resultados fundamentais, dentre os quais, destacamos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), conceitos de séries, Testes de Convergência, trazendo exemplos diversos e alguns lemas auxiliares. O nosso objetivo é provar que π^2 e e^r são números irracionais, utilizando como metodologia a pesquisa exploratória, qualitativa e hipotético-dedutivo. Com isso, realizamos de forma breve uma análise histórica sobre os números irracionais π e e, trazendo um aparato de preliminares sobre os conteúdos que nos propomos abordar concluindo que os números π^2 e e^r, são números de fato irracionais através dos teoremas principais deste trabalho.

Palavras-chaves: Irracionalidade de π e e; irracionalidade de π^2 e e^r; número irracional; contexto histórico dos números irracionais.

ABSTRACT

The central theme of this work is to present the proofs that π^2 and e^r, are irrational numbers. Through Charles Méray proof that the rational numbers were not enough to calculate the measure of the "square of the circle", it was noticed that these were not expressed by the ratio of integers and, from there, the so-called irrational numbers emerged, where the most famous in India and Greece are the numbers π and e. Given the above, we have the following problem: what can be said about the irrationality of the numbers π^2 and e^r, where r is a rational number other than zero? With this, we propose to approach some fundamental concepts and results, among which, we highlight the Fundamental Theorem of Calculus (TFC), series concepts, Convergence Tests, bringing different examples and some auxiliary lemmas. Our objective is to prove that π^2 and e^r, are irrational numbers, using exploratory, qualitative and hypothetical-deductive research as a methodology. With this, we briefly carry out a historical analysis of the irrational numbers π and e, bringing an apparatus of preliminaries on the contents that we propose to approach, concluding that the numbers π^2 and e^r, are numbers of irrational facts through the main theorems of this work.

Keywords: Irrationality of π and e; irrationality of π^2 and e^r; irrational number; historical context of irrational numbers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A ideia deste trabalho surgiu a partir de uma atividade realizada na disciplina de Matemática Básica III, ministrada pela Profa. Dra. Fernanda Vital de Paula, na Universidade Federal do Tocantins – (UFT), Câmpus de Araguaína, no ano de 2020; a qual tinha como pergunta norteadora: Qual é a importância dos Números Complexos no ensino básico? Todavia, como relacionei o tema Números Complexos com Números Irracionais?

Vemos que, no ensino básico, durante o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau, quando $\Delta = -9$, por exemplo, é colocado como uma verdade para os alunos que, para raiz quadrada com número negativo, não existe solução no conjunto dos números reais; e de fato é uma verdade! Mas o que não se pergunta é se existe solução em outro conjunto. No conjunto dos Números Complexos (forma algébrica como z = a + bi, sendo "a" a parte real e "b" a parte imaginária) estão contidos todos os números reais (que é a união dos conjuntos dos Números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais) e as raízes quadradas de números negativos.

Durante a disciplina, inúmeras vezes, o número π apareceu em equações, em exemplos e exercícios. Eu sempre me perguntei sobre suas características e sobre curiosidades que envolviam essa importante constante matemática. Até que, na disciplina de TCC 1, meu orientador me sugeriu alguns assuntos de pesquisa dentre os quais havia o tema central deste trabalho como sugestão.

Com isso, através do estudo dos Números Complexos, foi despertada a curiosidade de estudar a respeito da irracionalidade do número π. Ora, se ele é irracional, o que podemos dizer sobre o seu quadrado? Além disso, buscou-se também estudar sobre a irracionalidade da constante e (o número de Euler), sendo conhecido como base dos logaritmos naturais.

Feitas essas considerações, pretendemos apresentar neste trabalho a seguinte indagação norteadora: **o que pode ser afirmado a respeito da irracionalidade dos números π^2 e e^r, onde r é um número racional diferente de zero?**

Para responder essa questão norteadora, vamos organizar o trabalho da seguinte maneira.

No Capítulo 2, apresentaremos a história dos números irracionais, como também alguns conceitos iniciais para a compreensão dos teoremas principais desta pesquisa, trazendo como preliminares e resultados importantes a demonstração da irracionalidade do número e, como também alguns conceitos do Cálculo Diferencial, entre eles, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) sendo importante para nossa pesquisa, pois serão utilizadas as regras de Derivação e Integração; além do mais, de forma breve trouxemos alguns conceitos de séries de números reais e sua definição, e posteriormente alguns exemplos para compreensão de resultados obtidos ao longo de nossa pesquisa. Propomo-nos falar sobre o Teste de Convergência chamado de Teste da Razão, que irá auxiliar nas demonstrações deste trabalho. Também apresentamos lemas auxiliares que serão o nosso ponto de referência para as demonstrações do Capítulo 3.

Já no Capítulo 3, há a prova dos resultados principais desta pesquisa, a saber, as demonstrações da irracionalidade das constantes $e^r, r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, e π^2, como também algumas curiosidades sobre π.

Finalizamos esta monografia com o Capítulo 4, apresentando as considerações finais.

2 HISTÓRIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS, PRELIMINARES E RESULTADOS IMPORTANTES

Para entendermos a respeito dos números irracionais precisamos trazer um panorama histórico sobre eles, pois segundo Rocho (2018), por volta de 3000 a.C. no Egito, surgiram os primeiros indícios do uso de frações através das grandes inundações constantes; o povo que habitava entre as margens do Rio Nilo deveria frequentemente fazer a medição de suas terras e pagavam tributos mediante a área que era cultivada. Devido a essas medições, os cálculos realizados nem sempre eram exatos, pois os moradores utilizavam cordas para medir sendo necessário esticar várias vezes a mesma para demarcar a terra. Isso os levou a buscar novos métodos para medir, que eram chamados de fracionários.

Os números fracionários segundo Rocho (2018), possuíam a forma de $\frac{1}{n}$, tendo em vista que os egípcios expressavam a "soma de frações de numerador 1" diferentemente do modelo babilônico que utilizavam o denominador 60 por ter divisores inteiros assim como os romanos, porém com o denominador 12. Anos depois, descobriu-se que os números racionais não eram suficientes para descrever todos os comprimentos de segmentos.

Houve uma descoberta na escola pitagórica Sá (2018), conhecida como o Teorema de Pitágoras, em que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer é sempre igual à soma dos quadrados dos catetos. Se pegarmos então, um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 u.m. (unidade de medida), sua hipotenusa seria um valor *h* tal que $h^2 = 2$. Mas não existe um número racional *h* que satisfaça tal equação. Por meio disso, houve a necessidade de se criar outro conjunto, chamado de conjunto dos números irracionais.

A descoberta da incomensurabilidade segundo Sá (2018), ocorreu pelos gregos no século V a.C. havendo o declínio dos pitagóricos em acreditar que o único "sistema de filosofia natural" era suficiente para provar que "Tudo é número". Segundo Boyer (1974, p.85), Euclides descreveu em seu livro X conhecido atualmente como os *Elementos de Euclides* possuindo 115 proposições relacionadas a geometria que no tempo em que se tinha apenas o único sistema, este acreditava que estaria relacionado apenas a aritmética, porém tratava-se da "classificação sistemática de segmentos incomensuráveis", assumindo tais formas: $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, se a e b "são da mesma dimensão" então eles são comensuráveis.

Sabendo disso hoje, temos conhecimento de que se tratava dos números irracionais, onde apenas em 1869 por Charles Méray através da sua publicação *Remarques sur la nature dês quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données*[1] conseguiu dar, de maneira satisfatória, a definição dos números irracionais; após três anos, Méray (1872), juntamente com Remarques escrevem outra obra intitulada como *Nouveau précis d'analise infinitésimale*[2], sendo descrito no prefácio o seu principal objetivo que era "acabar com a onda de teorias que nenhum princípio único parece dominar".

Rocho (2018), descreve que Arquimedes foi o primeiro que propôs um método para aproximar o número π, embora já houvesse vestígios sobre uma possível aproximação em um papiro encontrado com a proximidade de 1650 a.C., conhecido como "papiro egípcio de Rhind", descrito pelo historiador matemático Boyer (2012). Estes métodos de aproximação do número π segundo Trzaskacz (2017), ocorreu através da necessidade de se fazer cálculos de uma área no formato de um círculo e para a marcação de terras anteriormente citadas.

Os matemáticos tinham um fascínio pela "figura círculo" descrito por Rocho (2018), onde tinha uma representatividade de perfeição sendo vista como "*o começo e o fim são apenas um*". Tal fator foi preponderante para se medir o comprimento de um círculo por meio do processo de se calcular a "quadratura do círculo", sendo o círculo definido agora como um polígono possuindo infinitos lados. Rocho (2018), ressalta que posteriormente a Arquimedes, outros matemáticos já teriam tentado obter um valor aproximando do número π, e só por volta do século III d.C., Ptolomeu conseguiu calcular o valor de π, sendo representado pela fração $\frac{377}{120} \approx 3{,}1416$. No ano de 1761 Jean Henri Lambert fez a descoberta mais extraordinária do século XVIII, que foi acabar com as proposições de outros matemáticos em fazer uma aproximação do número π de maneira finita (tendo um ponto final ou valor exato), através da prova de que o número π é irracional.

Ainda dentro do cenário de constantes matemáticas importantes e irracionais, uma das primeiras referências segundo Figueiredo (1985), sobre a constante e foi feita por Newton em 1665, onde utilizara a expansão binominal de:

---

[1] TRADUÇÃO: Observações sobre natureza das quantidades definidas pela condição para servir como limites para determinadas variáveis.
[2] TRADUÇÃO: Nova precisão da análise infinitesimal.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

À medida que *n* aumenta, a expressão dentro do limite se aproxima da constante e, assumindo aproximadamente 2,718281828459045235360287. Outra forma de calcular a constante e segundo Figueira (2017), é pela base do logaritmo natural:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots$$

2.1 Irracionalidade do número e

Já é conhecido que o número e é irracional. Apresentamos abaixo a demonstração desse fato de acordo com Silva (1994), Silva (2021) e Diego Marques (2012), seguindo os argumentos dados pelo importante matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Um dos teoremas principais desta monografia generaliza este resultado e, portanto, estamos colocando-o aqui apenas para motivação.

Teorema 2.1: O número e é irracional.

Demonstração: Separamos esta prova em itens que seguem abaixo.
1) Vamos relembrar que a função $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$, pode assumir a seguinte forma de acordo com a Série de Taylor:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

2) Escolheremos o $x=1$, assumindo a seguinte forma em relação ao item 1).

$$e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

Uma observação interessante é que, se pararmos para observar as diversas formas que o e pode assumir, vamos observar também que ele está ligado a problemas de combinatória de acordo com item 2), onde o $n!$ seria o número de permutação de n objetos.

3) Vamos tomar uma soma parcial da série do item 2) e truncar até o termo K, sendo $K \in \mathbb{N}$ que ainda será escolhido. Assim, seja

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} \frac{1}{n!}.$$

4) Utilizaremos o seguinte raciocínio:

Tomaremos o $K!$ e multiplicaremos por e menos o $K!$ vezes a soma parcial S_k. Assim, teremos:

$$K! \cdot e - K! \cdot S_K.$$

5) Por meio disso, vamos notar que

$$K! \cdot e - K! \cdot S_K = K!\,(e - S_K) > 0\ .$$

De fato, analisaremos $e - S_K$. Temos

$$e - S_K = \left[1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{K!} + \tfrac{1}{(K+1)!} + \cdots\right] - \left[1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{K!}\right],$$

anulando as parcelas opostas, teremos:

$$e - S_K = \frac{1}{(K+1)!} + \frac{1}{(K+2)!} + \frac{1}{(K+3)!} + \cdots > 0,$$

como afirmamos. Podemos escrever

$$e - S_K = \sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

6) Voltando para nosso raciocínio anterior, temos que $0 < K! \cdot e - K! \cdot S_K = K!\,(e - S_K)$. Vamos colocar o K! em evidência e multiplicar pelo $\sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ que seria o resultado obtido no item 5), da seguinte forma:

$$K! \sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{K!}{n!}.$$

7) Vamos ordenar os índices do somatório:

$$\sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{K!}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K!}{(K+n+1)!}.$$

8) Observe que

$$\frac{(K+n+1)!}{K!} = \frac{(K+n+1)\cdot(K+n)\cdot(K+n-1)\cdot(K+n-2)\cdots K!}{K!}$$
$$= (K+n+1)\cdot(K+n)\cdot(K+n-1)\cdots(K+1).$$

9) Agora, vamos usar um resultado da Teoria dos Números que diz o seguinte:

Teorema 2.2: O produto de n inteiros positivos consecutivos é múltiplo de $n!$.

Demonstração: Considerando o produto de n inteiros consecutivos, começando de m até o $m+n-1$ (portanto, n inteiros consecutivos), temos

$$p = m(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n-1).$$

Podemos reescrever o número p da seguinte forma:

$$p = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}.$$

Sabendo que $(m-1) < (m+n-1)$, por conta disso o número p pode ser reescrito como:

$$p = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} = n!\binom{n+m-1}{m-1},$$

onde $\binom{i}{j}$ significa o número de combinações simples de i elementos tomados j a j, isto é,

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!\,(i-j)!}.$$

Como $\binom{i}{j}$ é um número inteiro, para quaisquer i, j inteiros com $j < i$, temos que p é um número divisível por $n!$, e isso prova o teorema.

■

$10)$ Vamos trazer um exemplo prático de acordo com a teoria dos números para seguirmos com nossa prova, onde escolheremos alguns números consecutivos. Veja que o Teorema 2.2 é válido para os seguintes casos:

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 = 5! \cdot 324632.$$
$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 6! \cdot 462.$$
$$90 \cdot 91 \cdots 105 = 16! \cdot q.$$

$11)$ Iremos observar o que foi feito anteriormente no item 8). Veja que $(K + n + 1) > K$ e $(K + n) \cdot (K + n - 1) \cdots (K + 1)$ são n inteiros consecutivos multiplicados. Pelo Teorema 2.2, segue que

$$(K + n + 1) \cdot (K + n) \cdot (K + n - 1) \cdots (K + 1) > K \cdot n!.$$

$12)$ Voltando para os itens 5) e 7), temos

$$0 < K! \cdot e - K! \cdot S_K = \sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{K!}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K!}{(K+n+1)!} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{K \cdot n!} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{K} \cdot e.$$

Reescrevendo,

$$0 < K!\,e - K!\,S_K < \frac{e}{K}.$$

$13)$ Por contradição, vamos supor que $e = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ positivos, seja um número racional. Tomaremos $K = \max\{3, q\}$, ficando:

$$0 < K! \cdot \frac{p}{q} - K! \cdot \sum_{n=0}^{K} \frac{1}{n!} < \frac{e}{K}.$$

$14)$ Assim,

$$0 < K! \cdot \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{n!} < \frac{e}{K}.$$

Como o $K!$ é múltiplo de q (já que é maior do que q), a razão $K! \cdot \frac{p}{q}$ é um inteiro, ou seja $K! \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, como também $-\sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{n!} \in \mathbb{Z}$, uma vez $0 \leq n \leq K$ implica que as parcelas dessa soma são números do tipo

$$\frac{k(K-1) \cdot \ (K-2) \cdots n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} \in \mathbb{Z}.$$

$15)$ Da escolha do número $K \in \mathbb{N}$ e visto que $e < 3$, observamos que

$$0 < K! \cdot \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{n!} < \frac{e}{K} < 1.$$

Assim, encontramos um inteiro $T \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$0 < T < 1,$$

o que é um absurdo. Para mais detalhes sobre isso, veja a Seção 1 do Capítulo 1 de Lima (2014).

Esse absurdo mostra que o número e é irracional.

■

2.2 Preliminares: alguns conceitos do Cálculo Diferencial

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos fundamentais para a compreensão das demonstrações da irracionalidade das constantes $e^r, r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, e π^2, resultados principais desta pesquisa.

2.2.1 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

De acordo com Stewart (2010), o método sistemático foi desenvolvido pelos matemáticos Isaac Newton e Leibniz, a qual o Teorema fundamental do cálculo está na interseção do cálculo diferencial e do cálculo integral. É importante ressaltarmos que foi o mentor de Newton em Cambridge, chamado Isaac Barrow (1630-1677) que fez a descoberta de que Derivação e Integração estão interligadas, de forma que são processos inversos. Assim, iremos dividir em duas partes o Teorema Fundamental do Cálculo, a seguir:

Parte I – Se f for contínua em $[a,b]$, então a função h definida por:

$$h(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $h'(x) = f(x)$.

Exemplo 2.3: Encontre a derivada da função $f(x) = \int_a^x \sqrt{2+t^2}\,dt$.

Solução: Dada que a função $f(t) = \sqrt{2+t^2}$ é contínua, pela Parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$f'(x) = \sqrt{2+x^2}.$$

Exemplo 2.4: Encontre $\frac{d}{dx}\int_1^{x^5} \sec t\,dt$.

Solução: Usaremos dois teoremas, a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo Parte I. Se $u = x^5$, então:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^5} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right] \cdot \frac{du}{dx} = \sec\ u\ \frac{du}{dx} = \sec(x^5) \cdot 5x^4.$$

Parte II – Se f for contínua em $[a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a),$$

sendo que F é qualquer primitiva de f, ou seja, é uma função tal que $F' = f$.

Exemplo 2.5: Calcule a integral $\int_1^4 e^x\,dx$.

Solução: A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte, e uma função primitiva de f é $F(x) = e^x$. Pela parte II do Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_1^4 e^x\,dx = F(4) - F(1) = e^4 - e.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo Parte II diz também que nós podemos usar qualquer primitiva F de f. Assim, poderíamos ter tomado também $F(x) = e^x + C$, qualquer que seja a constante C.

Exemplo 2.6: Calcule $\int_4^8 \frac{dx}{x}$.

Solução: A integral dada é uma abreviação para

$$\int_4^8 \frac{1}{x} dx,$$

onde a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $F(x) = \ln\ |x|$ e, como $8 \leq x \leq 4$, podemos escrever $F(x) = \ln\ x$. Logo,

$$\int_4^8 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_4^8 = \ln 8 - \ln 4$$

$$= \ln \frac{8}{4} = \ln 2.$$

2.3 Conceitos importantes de séries

Em algumas partes das demonstrações dos resultados mais importantes deste trabalho, usaremos alguns conceitos de séries de números reais, os quais usamos como referência Figueira (2013), Figueiredo (2008) e Lages (2008), a seguir.

Definição 2.7: Seja (x_n) uma sequência de números reais. A soma infinita dos termos de x_n, denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$, é denominada uma série de números reais, sendo que x_n é chamado de *n-ésimo* termo ou de termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplo 2.8: A seguir, alguns exemplos de série de números reais:

I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$

II) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots,$

III) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$

Definição 2.9: Seja (a_n) uma sequência de números reais, e a partir desta formaremos uma nova sequência (S_n), onde

$$s_1 = a_1, \ s_2 = a_1 + a_2, \cdots, \ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots .$$

Os números s_n são chamados de as reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$.
Se existir o limite $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e $s = \sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ será chamado a soma da série. Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos então que $\sum a_n$ é uma série divergente.

Obs. Às vezes é melhor considerar a séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ou seja, que começam com a_0 em vez de a_1.

Exemplo 2.10: Determine o valor da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Solução: Temos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Fazendo as somas parciais, temos:

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{3}{4}, s_3 = \frac{7}{8}, s_4 = \frac{15}{16}, \cdots, s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} +$$

Temos que, o $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

A sequência das somas parciais converge, sendo o $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Logo, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge para 1.

Vamos estudar alguns testes de convergência agora. O primeiro é chamado de Teste do Termo Geral ou do *n*-ésimo Termo.

Teorema 2.11: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Vamos denotar que S representa a soma da série e $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a n-ésima soma parcial. Se tomarmos n suficientemente grande, que torna S_n e S_{n-1} bem próximos de S, e fazendo a diferença $S_n - S_{n-1} = a_n$ ela estará bem próxima de zero. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Portanto, se a série convergir, (a_n) convergirá para zero. Isso é equivalente a: se (a_n) não convergir a zero, então a série diverge.

■

Exemplo 2.12: Aplique o teste do n-ésimo termo para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

Solução: Como $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe, segue do **Teorema 2.11** que a série diverge. Podemos também provar esse fato da seguinte forma. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots,$$

Fazendo as somas parciais, segue que:

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, S_5 = -1, S_n = \begin{cases} -1, se\ n\ é\ impar \\ \ \ 0, se\ n\ é\ par \end{cases}.$$

Temos que o $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Assim, a sequência das somas parciais diverge. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

A seguir, iremos trazer o Teste de Convergência chamado de teste da razão, onde será fundamental para as demonstrações dos teoremas principais deste trabalho.

2.4 Teste de Convergência chamado de teste da razão

De acordo Lima (2014), Jean Le Round D'Alembert (1717-1783) fez grandes descobertas em vários campos da matemática, onde um dos seus principais estudos era em séries numéricas, tendo feito também o estudo de um dos testes de convergência chamado de teste da razão, que hoje temos conhecimento também como teste de D'Alembert.

Teorema 2.13: Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$$

Então,

$(*)$ a série converge se $d < 1$.
$(**)$ a série diverge se $d > 1$ ou se d for infinito.
$(***)$ o teste é inconclusivo se $d = 1$.

Demonstração: De $(*)$, vamos supor que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d < 1$.
Então, iremos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $d + \varepsilon < 1$. Pelo limite acima segue que $\exists n_0 > 0$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - d\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, ou seja, fixando $n \geq n_0$, temos:

$$0 < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < d + \varepsilon,$$
$$0 < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < d + \varepsilon,$$
$$0 < \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < d + \varepsilon,$$
$$\vdots$$
$$0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < d + \varepsilon.$$

Fazendo a multiplicação de todas as desigualdades acima, obtemos:

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < (d+\varepsilon)^{n-n_0}, \forall n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$0 < a_n < \frac{a_{n_0}}{(d+\varepsilon)^{n_0}} \cdot (d+\varepsilon)^n, \forall n \geq n_0.$$

Logo, como a série $\frac{a_{n_0}}{(d+\varepsilon)^{n_0}} \sum (d+\varepsilon)^n$ é uma série geométrica e de razão $d+\varepsilon < 1$, esta série é convergente e, portanto, pelo Critério de Comparação (veja esse critério na Seção 1 do Capítulo 4, p.39 de Lima (2014)) a série $\sum a_n$ é convergente.

Obs. Como estamos construindo todo um aparato de preliminares para as demonstrações dos teoremas principais, optamos por não trazer a definição do Critério de Comparação em nosso trabalho, já que não iremos utilizá-lo diretamente nas demonstrações dos resultados referidos.

Agora, de $(**)$, vamos supor que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d > 1$.

Então, iremos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $d - \varepsilon > 1$. Pelo limite acima segue que $\exists n_0 > 0$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - d\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, ou seja, fixando $n \geq n_0$, temos:

$$d - \varepsilon < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < 0.$$

Podemos escrever

$$a_{n+1} > (d-\varepsilon)a_n.$$

Assim,

$$a_{n_0+1} > a_{n_0}(d-\varepsilon)$$
$$a_{n_0+2} > a_{n_0+1}(d-\varepsilon) > a_{n_0}(d-\varepsilon)^2$$
$$a_{n_0+3} > a_{n_0+2}(d-\varepsilon) > a_{n_0}(d-\varepsilon)^3$$

$$\vdots$$

Como $d - \varepsilon > 1$, temos que $(d - \varepsilon)^k \to +\infty$ quando $k \to \infty$, diverge. Logo, pelo Teste do termo geral, como (a_{n_0+k}) é divergente, segue que a série diverge.

Para finalizar, de $(***)$, caso $d = 1$, nada poderemos afirmar, pois há séries convergentes e séries divergentes nesse caso. O Teste da Razão pode ser inconclusivo quando $d = 1$, e isso pode ser visto nos dois exemplos a seguir. ■

Exemplo 2.14: Considere a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$, que é divergente.

Note que, se formos aplicar o Teste da Razão, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

onde

$$a_n = \tfrac{1}{n},\ a_{n+1} = \tfrac{1}{n+1}.$$

Uma vez que, substituindo,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot n \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1.$$

Assim, a série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, sendo $d = 1$.

Exemplo 2.15: Considere a série $\sum \frac{1}{n^2}$, que é convergente.

Note que, novamente pelo Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Onde

$$a_n = \frac{1}{n^2},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Uma vez que, substituindo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right| = \lim_{n\to\infty}|1^2| = 1.$$

Assim, a série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, sendo $d = 1$.

O próximo exemplo é um resultado importante para este trabalho que justifica termos colocado um estudo prévio de séries na pesquisa.

Exemplo 2.16: A seguir, iremos estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n+1}}{n!}, s \neq 0$.
Solução: Usando o teste da razão, temos

$$a_n = \frac{s^{2n+1}}{n!},\ a_{n+1} = \frac{s^{2n+1+1}}{(n+1)!}.$$

Substituindo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{s^{2n+1+1}}{(n+1)!}}{\frac{s^{2n+1}}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s^{2n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{s^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s^{2n}\cdot s^2}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{s^{2n}\cdot s^1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s^2}{(n+1)}\cdot\frac{1}{s^1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s^1\cdot s^1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{s^1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{s}{(n+1)}\right| = 0 < 1.$$

Tal resultado aponta que, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n+1}}{n!}$ converge.

Pelo exemplo anterior e pelo Teste do Termo Geral, segue que $\lim_{n\to\infty} \frac{s^{2n+1}}{n!} = 0$. Assim, para n suficientemente grande, $\frac{s^{2n+1}}{n!} \leq 1$, isto é,

$$s^{2n+1} \leq n! \text{ para } n \text{ grande.} \qquad (1)$$

Na próxima seção, iremos trazer um Lema auxiliar e posteriormente um exemplo, os quais são os resultados principais desta pesquisa, que serviram como base para as demonstrações das constantes $e^r, r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, e π^2.

2.5 Lema Auxiliar

Este Lema auxiliar foi retirado do Livro Aigner (2018), sendo este, o nosso referencial para as demonstrações das constantes $e^r, r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Propomo-nos trazer as demonstrações de i), ii) e iii) passo a passo, já que no livro é demonstrado de forma direta.

Lema 2.17: Para $n \geq 1$ fixado, considere a função dada por

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

i) A função $f(x)$ é um polinômio da forma $f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=n}^{2n} c_i \cdot x^i$, onde os $c_i's$ são todos inteiros.
ii) Para $0 < x < 1$, temos $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
iii) As derivadas $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são números inteiros para todo $k \geq 0$.

Demonstração de i): Iremos separar essa demonstração em passos para melhor compreensão.

Passo I: Note que, pelo Binômio de Newton, o fator do numerador $(1-x)^n$ da função $f(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$(1-x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n,$$

onde os $c_i's$ são todos inteiros.

Passo II: Note também que a função $f(x)$ tem como numerador $x^n(1-x)^n$, então podemos reescrever como:

$$
\begin{aligned}
x^n(1-x)^n &= x^n(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) \\
&= (c_0 \cdot x^n + c_1x \cdot x^n + c_2x^2 \cdot x^n + \cdots + c_nx^n \cdot x^n).
\end{aligned}
$$

Assim, renomeando os $c_i's$ apenas para deixarmos no formato do lema, obtemos

$$x^n(1-x)^n = (c_0 \cdot x^n + c_1 \cdot x^{n+1} + c_2x^{n+2} + \cdots + c_nx^{2n}) = \sum_{i=n}^{2n} c_i \cdot x^i.$$

Portanto, observamos que o menor grau dos monômios do polinômio $x^n(1-x)^n$ é em x^n e o maior grau é em x^{2n}, logo podemos concluir a variação do i na série acima como $n \leq i \leq 2n$. Isso demonstra o item i).

■

Demonstração de ii):

Vamos mostrar que $x^n(1-x)^n < 1$. Primeiramente, note que $x^n < 1$, pois $0 < x < 1$. Desse modo, $0 < (1-x)^n < 1$, pois $0 < x < 1$. Do mesmo modo, temos x^n maior que 0 e menor que 1. Assim, $0 < x^n(1-x)^n < 1$, logo $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

■

Demonstração de iii): Observe que, por i), a k-ésima derivada $f^{(k)}$ se anula em $x = 0$ a menos que $n \leq k \leq 2n$, e nesse intervalo, $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$ é um inteiro, uma vez que $k \geq n$. Vamos mostrar que $f(x) = f(1-x)$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x).$$

Agora, como $f(x) = f(1-x)$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para calcularmos e $f^{(k)}(1)$, iremos utilizar a Regra da Cadeia que diz sobre “a derivada de uma função composta”. Segue que

$$f(x) = f(1-x)$$
$$f'(x) = f'(1-x)\cdot(-1)$$
$$f''(x) = (-1)\cdot f''(1-x)\cdot(-1)$$
$$f'''(x) = (-1)\cdot(-1)\cdot f'''(1-x)\cdot(-1)$$
$$f''''(x) = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot f''''(1-x)\cdot(-1)$$

De forma geral, obtemos que $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ para todo x e, daí, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ é um inteiro, pois já provamos que $f^{(k)}(0)$ é um inteiro.

■

Vamos fazer um exemplo específico para uma melhor compreensão do que foi feito no lema anterior.

Exemplo 2.18: Fixe $n = 3$. Qual a expressão da f? Qual a derivada de f? E a segunda derivada? E essas funções aplicadas em $x = 0$?

Solução: Essa resolução será apresentada em passos para melhor compreensão.

Fixando $n = 3$, temos:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{x^3(1-x)^3}{3!} = \frac{x^3(1-x)^3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{x^3(1-x)^3}{6}.$$

Pelo Lema 2.17, faremos seguindo os passos de **i)**, **ii)** e **iii)**.

i) A função $f(x)$ é um polinômio da forma $f(x) = \frac{1}{3!}\cdot\sum_{i=3}^{6} c_i \cdot x^i$, onde os $c_i's$ são todos inteiros.
ii) para $0 < x < 1$, temos $0 < f(x) < \frac{1}{3!}$.
iii) calculando derivada de f, e a segunda derivada de f :

Demonstração de i): Separamos esta demonstração em passos I) e II).

Passo I: Note que, pelo Binômio de Newton, o fator do numerador $(1-x)^3$ da função $f(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$$

(os $c_i's$ são todos inteiros).

Passo II: Note também que a função $f(x)$ tem como numerador $x^3(1-x)^3$, então podemos reescrever como:

$$x^3(1-x)^3 = x^3(1-3x+3x^2-x^3) = x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6.$$

Assim, renomeando os $c_i's$, obtemos

$$x^3(1-x)^3 = (c_0 \cdot x^3 + c_1 \cdot x^4 + c_2x^5 + c_3x^6) = \sum_{i=3}^{6} c_i \cdot x^i.$$

Portanto, observamos que o menor grau do polinômio $x^3(1-x)^3$ é x^3 e o maior grau é x^6, logo podemos concluir a variação do i na série acima como $3 \le i \le 6$. Isso demonstra o item i).

Demonstração de ii):

Vamos mostrar que $x^3(1-x)^3 < 1$. Primeiramente, note que $x^3 < 1$, pois $0 < x < 1$. Desse modo, $0 < (1-x)^3 < 1$, pois $0 < x < 1$. Do mesmo modo, temos x^3 maior que 0 e menor que 1. Assim, $0 < x^3(1-x)^3 < 1$, logo $0 < f(x) < \frac{1}{3!}$.

Demonstração de iii): calculando derivada de f, e a segunda derivada de f.

Observe que, por i), a k-ésima derivada $f^{(k)}$ se anula em $x = 0$ a menos que $3 \le i \le 6$, e nesse intervalo, $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$ é um inteiro, uma vez que $k \ge 3$.

Vamos mostrar que $f(x) = f(1-x)^3$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f(1-x)^3 = \frac{(1-x)^3(1-(1-x))^3}{3!} = \frac{x^3(1-x)^3}{3!} = f(x).$$

Agora, como $f(x) = f(1-x)^3$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para calcularmos e $f^{(k)}(1)$, iremos utilizar a Regra da Cadeia que diz sobre “a derivada de uma função composta”. Segue que

$$f(x) = f(1-x)$$
$$f'(x) = f'(1-x) \cdot (-1)$$
$$f''(x) = (-1) \cdot f''(1-x) \cdot (-1)$$

Pelo Lema 2.17, concluímos que $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ é um inteiro.

■

3 TEOREMAS PRINCIPAIS

A seguir, apresentaremos os Teoremas principais deste trabalho, tendo em vista que, todos os conceitos, exemplos, teoremas e lema auxiliar, servirão para a compreensão das demonstrações da irracionalidade das constantes $e^r, r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, e π^2, onde utilizaremos como referência o Livro Aigner (2018).

3.1 Irracionalidade das constantes $\boldsymbol{e^r, r} \in \mathbb{Q}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, e $\boldsymbol{\pi^2}$

Foi provado no **Teorema 2.1** que o número e é irracional. O Teorema seguinte afirma que o número e^r é irracional e será demonstrado.

Teorema Principal 3.2: O número e^r é irracional para todo $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Demonstração: Vamos mostrar o teorema para e^s, $s \in \mathbb{Z}$ positivo, ou seja, $s > 0$. Para isso, separaremos essa demonstração em $(*)$ e $(**)$ a seguir:

Antes de partirmos para a demonstração, consideramos os seguintes casos para melhor compreensão.

I caso: Se $s < 0$, temos

$$e^s = \frac{1}{e^{-s}}.$$

Como $-s > 0$, e^{-s} é irracional. Assim, $\frac{1}{e^{-s}}$ é também irracional, pois, se não fosse, $\frac{1}{e^{-s}} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, sendo $a, b \neq 0$. Então, $\frac{b}{a} = e^{-s}$. Só que e^{-s} é irracional. Logo, chegamos a um absurdo!

$\blacksquare$

II caso: Se $e^{\frac{p}{q}}$ é irracional. Podemos escrever por contradição $e^{\frac{p}{q}}$ como:

$$e^{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ambos os lados a q,

$$\left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(\frac{a}{b}\right)^q,$$

$$e^p = \frac{a^q}{b^q},$$
$$e^p = \frac{a}{b}.$$

Como provamos no **I caso,** seja $p > 0$ ou $p < 0$, e^p é irracional, o que é um absurdo!

■

Depois de feitos os casos I e II, agora podemos iniciar nossa demonstração.

$(*)$ Por contradição, vamos supor que $e^s = \frac{a}{b}, a, b > 0$ inteiros.

Pelo **Exemplo 2.16** a série $\sum a \cdot \frac{s^{2n+1}}{n!}$ converge (pelo Teste da Razão). Isso quer dizer que, pelo teste do Termo Geral, temos

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{s^{2n+1}}{n!} = 0.$$

Assim, para n suficientemente grande, $a \cdot \frac{s^{2n+1}}{n!} < 1$. Logo, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \cdot s^{2n+1} < n!. \quad (2)$$

$(**)$ Definiremos

$F(x) = s^{2n} \cdot f(x) - s^{2n-1} \cdot f'(x) + s^{2n-2} \cdot f''(x) - \cdots + f^{2n}(x)$, onde f é a função do Lema 2.17.

Vamos calcular $\frac{d}{dx}F(x)$. Temos

$$F'^{(x)} = s^{2n} \cdot f'^{(x)} - s^{2n-1} \cdot f''^{(x)} + s^{2n-2} \cdot f'''^{(x)} - \cdots + \underbrace{f^{(2n+1)}(x)}_{=0}.$$

Obtemos que

$$-sF(x) = -s^{2n+1} \cdot f(x) + \underbrace{s^{2n} \cdot f'(x) - s^{2n-1} \cdot f''(x) + \cdots - s \cdot f^{(2n)}(x)}_{=F'(x)}$$

Portanto,

$$-sF(x) = -s^{2n+1} \cdot f(x) + F'(x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$F'^{(x)} = -sF(x) + s^{2n+1} \cdot f(x).$$

Vamos derivar agora uma função auxiliar, definida por:

$$h(x) = e^{sx} \cdot F(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Temos da Regra do Produto e da Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^{sx} \cdot F(x)] &= \frac{d}{dx}(e^{sx}) \cdot F(x) + e^{sx} \cdot \frac{d}{dx}\big(F(x)\big)\\ &= e^{sx} \cdot s \cdot F(x) + e^{sx} \cdot F'(x)\\ &= e^{sx} \underbrace{(sF(x) + F'(x))}_{=s^{2n+1} \cdot f(x)}\\ &= e^{sx} \cdot s^{2n+1} \cdot f(x).\end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC),

$$\begin{aligned}N &:= b\int_0^1 s^{2n+1} \cdot e^{sx} \cdot f(x)dx\\ &= b \cdot e^{sx} \cdot F(x)\Big|_0^1\\ &= b[e^{s \cdot 1} \cdot F(1) - e^{s \cdot 0} \cdot F(0)]\\ &= b\left[\frac{a}{b} \cdot F(1) - F(0)\right]\\ &= aF(1) - bF(0).\end{aligned}$$

Pelo **Lema 2.17** de **iii),** $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são inteiros. Assim, $F(0)$ e $F(1)$ também são. Portanto, N é um inteiro.

Pelo **Lema 2.17** de **ii)**, segue que:

$$0 < N = b\int_0^1 s^{2n+1} \cdot e^{sx} \cdot f(x)dx \leq b \cdot s^{2n+1} \cdot e^s \cdot \frac{1}{n!}\underbrace{\int_0^1 dx}_{=1}$$

$$= b \cdot s^{2n+1} \cdot e^s \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= b \cdot s^{2n+1} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{a \cdot s^{2n+1}}{n!} < 1.$$

Logo, $0 < N < 1$, sendo N um inteiro entre 0 e 1, o que é um absurdo! Logo, e^s é irracional.

■

Como os métodos utilizados foram bem-sucedidos, iremos utilizá-los novamente para o teorema a seguir.

Teorema Principal 3.3: O número π^2 é irracional.

Demonstração: Vamos supor por contradição que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, para $a, b > 0$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definiremos uma nova função chamada de $G(x)$, nos apoiando em $(**)$:

$$G(x) := b^n \cdot \left(\pi^{2n} \cdot f(x) - \pi^{2n-2} \cdot f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} \cdot f^{(4)}(x) - \pi^{2n-6} \cdot f^{(6)}(x) \cdot (-1)^{n-1} \cdot \right.$$

$$\left. \pi^2 \cdot f^{(2n-2)} + \cdots + (-1)^n \cdot \underbrace{\pi^{2n-2n}}_{=1} \cdot f^{(2n)}(x)\right). \quad (3)$$

Aplicando a derivada em $G(x)$,

$$G'^{(x)} = b^n \cdot \left(\pi^{2n} \cdot f^{(1)}(x) - \pi^{2n-2} \cdot f^{(3)}(x) + \cdots + \underbrace{(-1)^n \cdot f^{(2n+1)}(x)}_{=0}\right).$$

Aplicando novamente a derivada em $G'(x)$, temos

$$G''(x) = b^n \cdot \left(\pi^{2n} \cdot f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} \cdot f^{(4)}(x) + \cdots + \underbrace{(-1)^n \cdot f^{(2n+2)}(x)}_{=0}\right)$$

$$= b^n \cdot \left(\pi^{2n} \cdot f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} \cdot f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} \cdot f^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \pi^2 \cdot f^{(2n)}(x)\right)$$

$$= b^n \cdot \pi^2\left(\pi^{2n-2} \cdot f^{(2)}(x) - \pi^{2n-4} \cdot f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot f^{(2n)}(x)\right)$$

$$= -b^n \cdot \pi^2\underbrace{\left(-\pi^{2n-2} \cdot f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} \cdot f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x)\right)}_{\frac{G(x)}{b^n} - \pi^{2n} \cdot f(x)}$$

$$= -b^n \cdot \pi^2 \left(\frac{G(x)}{b^n} - \pi^{2n} \cdot f(x)\right),$$

Logo

$$G''(x) = -\pi^2 \cdot G(x) + \pi^{2n+2} \cdot b^n \cdot f(x).$$

Pelo **Lema 2.17** de **iii)**, temos que $G(0)$ e $G(1)$ são inteiros. Vamos calcular agora

$$\frac{d}{dx}[G'(x) \cdot sen(\pi x) - \pi G(x) \cdot \cos(\pi x)] \quad (***)$$

Aplicaremos a Regra do Produto, e para um melhor entendimento iremos separar as expressões, como a seguir.

1) Calcularemos primeiro a $\frac{d}{dx}[G'(x) \cdot sen(\pi x)]$.

$$\frac{d}{dx}[G'(x) \cdot sen(\pi x)] = G''(x) \cdot sen(\pi x) + G'(x) \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi.$$

2) Feito isto, calcularemos $\frac{d}{dx} = [\pi G(x) \cdot \cos(\pi x)]$.

$$\frac{d}{dx} = [\pi G(x) \cdot \cos(\pi x)] = \pi(G'(x) \cdot \cos(\pi x) - G(x) \cdot sen(\pi x) \cdot \pi)$$

$$= \pi G'(x) \cdot \cos(\pi x) - G(x) \cdot sen(\pi x) \cdot \pi^2.$$

Por $(***)$,

$$\frac{d}{dx} = [G'(x) \cdot sen(\pi x) - \pi G(x) \cdot \cos(\pi x)]$$
$$= G''(x) \cdot sen(\pi x) + G'^{(x)} \cdot \cos(\pi x)\,\pi - \pi G'(x) \cdot \cos(\pi x) + G(x) \cdot sen(\pi x)\pi^2$$
$$= G''(x) \cdot sen(\pi x) + G(x) \cdot sen(\pi x)\pi^2$$
$$= sen\pi x(G''(x) + \pi^2 G(x)).$$

Definiremos $(****)$,

$$\frac{d}{dx} = [G'(x) \cdot sen(\pi x) - \pi G(x) \cdot \cos(\pi x)]$$
$$= \pi^{2n+2} \cdot b^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x).$$

Como estamos supondo que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, então

$$b = \frac{a}{\pi^2}.$$

Assim, por $(****)$

$$\pi^{2n+2} \cdot b^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x) = \pi^{2n+2} \cdot \left(\frac{a}{\pi^2}\right)^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x)$$
$$= \pi^{2n+2} \cdot \frac{a^n}{\pi^{2n}} \cdot f(x) \cdot sen(\pi x)$$
$$= \pi^2 \cdot a^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC),

$$N := \pi \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x) dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[G'(x) \cdot sen(\pi x) - \pi G(x) \cdot \cos\,(\pi x)]\Big|_0^1$$
$$\frac{1}{\pi} \cdot G'(1) \cdot sen(\pi \cdot 1) - \frac{1}{\pi} \cdot \pi G(1) \cdot \cos(\pi \cdot 1) + \frac{1}{\pi} \cdot G'(0) \cdot sen(\pi \cdot 0) - \frac{1}{\pi} \cdot \pi G(0)$$
$$\cdot \cos(\pi \cdot 0) = G(1) + G(0).$$

∴ Como $G(1)$ e $G(0)$ são inteiros, N é um inteiro.

Pela **Lema 2.17** de **ii)**, reescreveremos a expressão sendo como

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot sen(\pi x) dx.$$

Mas

$$N = \pi \int_0^1 a^n \cdot \underbrace{f(x)}_{<\frac{1}{n!}} \cdot \underbrace{sen(\pi x)}_{\leq 1} dx$$

$$< \pi \cdot a^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot 1 \underbrace{\int_0^1 dx}_{=0}$$

$= \frac{\pi a^n}{n!} < 1$, para n suficientemente grande.

Novamente pelo **Exemplo 2.16**, temos que a série $\sum \frac{\pi a^n}{n!}$ converge, com $\lim_{n \to \infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$. Então, $0 < N < 1$, sendo N um inteiro, logo chegamos a um absurdo!

■

Corolário 3.4: O número π é irracional.

Demonstração: Suponha que $\pi = \frac{a}{b}$, com $a, b > 0$ inteiros. Elevando ao quadrado, chegamos a $\pi^2 = \frac{a^2}{b^2}$ que também é um número racional, o que contradiz o Teorema 3.3. Assim, necessariamente, π é irracional.

■

Teorema 3.5: Para cada inteiro ímpar $n \geq 3$, o número

$$B(n) := \frac{1}{\pi} \, arcos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

é irracional.

Demonstração: Veja a demonstração no Capítulo 8, pág. 72 de Aigner (2018).

■

Após finalizar os teoremas principais deste trabalho, apresentaremos na próxima seção algumas curiosidades envolvendo a constante π.

3.2 Curiosidades sobre π

De forma motivadora, pesquisamos algumas curiosidades do número π, constante que possui algumas características e curiosidades relacionadas ao dia a dia, em um simples cálculo. Para isso, nos basearemos em Dantas (2013, cap.4).

O símbolo $\pi\ \varepsilon\ \ \rho\ \iota\ \phi\ \varepsilon\ \rho\ \iota\ \alpha$ talvez tenha sido inspirado pela letra inicial π, dando sentido a palavra **periferia**. Onde, a sinuosidade de um rio é descrita pelo comprimento da curva, dividido pela distância deste ponto até o oceano, formando uma linha reta. Em média, os rios têm sinuosidade com o valor aproximado de 3,14. Com isso, a constante π tem suas aplicações no estudo da física, como foi visto através da sinuosidade do rio.

Há também uma relação do número π com as mnemônicas. Sendo que, a quantidade de letras de cada palavra se relaciona com o número π, um exemplo é a frase: **Sou o medo e pavor constante do menino vadio.** Observe que a palavra **sou,** possui 3 letras, a vogal **o** possui 1 letra, a palavra **medo** possui 4 letras, a vogal **e** possui 1 letra, a palavra **pavor** possui 5 letras, a palavra **constante** possui 9 letras, a palavra **do** possui 2 letras, a palavra **menino** possui 6 letras, e por fim a palavra **vadio** possuindo 5 letras. Podemos compreender que a frase se relaciona com o π, assumindo a forma **3,14159265**.

Ademais, em nosso trabalho, provamos que π e e são números irracionais, mas algo interessante sobre essas constantes é que não se sabe se π^e ou e^π são números transcendentes ou algébricos, como também há ainda problemas em aberto em relação a π.

Mas quem será maior entre as constantes π^e ou e^π?

Para responder essa questão, Dantas (2013) define uma função chamada $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Calculando a derivada de $f(x)$, nós temos:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \text{ para } x > 0.$$

Com isso, quando $x > e$, tem-se que a derivada $f'(x) < 0$, o que mostra que f é decrescente nesse intervalo. Portanto, sendo $\pi > e$, segue que $f(\pi) < f(e)$. Isto é,

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e \cdot \ln \pi \Leftrightarrow \pi \cdot \ln e.$$

Logo,

$$\ln \pi^e < \ln e^\pi \Leftrightarrow \pi^e < e^\pi.$$

Se tomarmos a soma dos primeiros 144 dígitos de π, sabendo que π possui infinitas casas decimais, temos:

$$\begin{aligned} 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 9 + 2 + 6 + 5 + 3 + 5 + 8 + 9 + 7 + 9 + 3 + 2 + 3 + 8 + 4 + 6 + 2 \\ + 6 + 4 + 3 + 3 + 8 + 3 + 2 + 7 + 9 + 5 + \cdots \\ = 666 \end{aligned}$$

Mas, nós sabemos que 144 é igual a:

$$\begin{aligned} &(6+6) \cdot (6+6) \\ &= 12 \cdot 12 \\ &= 144. \end{aligned}$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, discutimos sobre números irracionais, dando ênfase aos números π e potências de e, tendo como objetivos propostos as demonstrações de π^2 e e^r, onde r é um número racional diferente de zero.

Foi possível cumprir os objetivos que foram propostos no início desta pesquisa, provando que π^2 e e^r, onde r é um número racional diferente de zero, são de fato números irracionais, e concluímos que por consequência o número π. As ferramentas que foram utilizadas recaem no Cálculo Diferencial, com o Teorema Fundamental do Cálculo e com a teoria de séries de números reais.

Durante esta pesquisa, podemos perceber um conjunto de possibilidades em relação aos conceitos, definições, exemplos, lema e corolário. Pois, durante as provas dos Teoremas principais deste trabalho podemos recorrê-las e usarmos os resultados já obtidos. Tendo em vista que tivemos que estudar o Lema auxiliar para conseguirmos obter resultados satisfatórios durante as demonstrações. E como forma motivadora, foram trazidas algumas curiosidades sobre a constante π.

Diante disso, foi enriquecedor estudar o tema deste trabalho, permitindo a compreensão das operações usadas, como todo este estudo realizado pode ser expandido com outras aplicações, já que na matemática pura tem essa possibilidade de dar continuidade no estudo da irracionalidade de outros números.

REFERÊNCIAS

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK**. 6th ed Berlin: Springer-Verlag, 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. - São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

DANTAS, M. R. N. **Sobre o número π.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

FIGUEIRA, Ramon Formiga**. O Número de Euler**. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

FIGUEIREDO D. G. **Números Irracionais e Transcendentes**, Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Coleção Fundamentos da Matemática elementar, 1985.

FIGUEIREDO, D., Análise I, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

FIGUEIRA, Ana Lídia. **SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Instituto De Ciências Exatas e Naturais, Belém-Pará, 2013, p.101.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1. Funções de uma variável.** 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 198 p.: il.; 23 cm. (Coleção Matemática Universitária)

LAGES, E., Curso de Análise vol. 1, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** São Paulo: Atlas, 2003.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. E-book. ISBN 978-85-7717-158-3. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1lp5R-RyTrt6X8UPoq2jJ8gO3UEfM_JJd/view>. Acesso em: mai. 2022.

MÉRAY, C. **Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données**. In Revue des Sociétés Savantes. N.2, v. 4., 1869.

MÉRAY, C. ***Nouveau précis d'analise infinitésimale***. F. Savy (Paris). 1 vol. (XXIII-310 p.); in-8.,1872. Disponível em: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30927834j>. Acessado em: 20 de jun. de 2022.

ROCHO, Valdilene D. R.; SANTOS, Carla Margarete F. S.; MEDEIROS, Margarete F.; BRASIL, Carla S. D.; SILVA, Taís P. S. **História da matemática: e-book - como surgiram alguns conceitos matemáticos?** - Sombrio, p. 66. 2018.

SÁ, Pedro D. E.; LOPES, Adrielle Cristine. M. L. **Aspectos Históricos da Matemática Elementar**. Belém: CCSE-UEPA, 2018, p. 119.

SILVA, Jaime Carvalho e. **Princípios de análise matemática aplicada**. Alfragide: McGraw -Hill de Portugal, 1994.

SILVA, Maria Débora D. O. **Condições Necessárias para a Existência e Convergência das Séries de Fourier: Um Estudo inicial à Análise de Fourier**. XVIII Congresso de Iniciação Científica da Universidade Federal de Campina Grande, UFGG – Campina Grande, p. 1-8. Disponível em: file:///C:/Users/reist/Downloads/2021_09_30_16_30_25_RELATORIO_FINAL_1__1_.pdf. Acesso em: 20 de jun. de 2022.

STEWART, James. **Cálculo**. 6ª edição, volume 1. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TRZASKACZ, Alcides José.; HRENTCHECHEN, Karolina B. R. D.; **Irracionais na história da matemática.** Vol. 38 (Nº 60), p.2. 2017.

IRRACIONALIDADE DA CONSTANTE DE EULER e = 2.71828... (06/11/2012). Produção: Diego Marques. Youtube, 2012. 1 vídeo (54 min e 18 s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PcmE5Igg_J4>. Acessado em: 15 de maio de 2022.