



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**THIAGO RODRIGUES FURTADO**

**MODELO DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: UMA APLICAÇÃO DE  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM**

**Arraias/TO**

**2022**

**THIAGO RODRIGUES FURTADO**

**MODELO DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: UMA APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM**

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins - Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática para a obtenção do título de licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Prof. Me. Adriano Rodrigues.

**Arraias/TO**

**2022**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

F992m Furtado, Thiago Rodrigues.  
Modelo de resfriamento de Newton: uma aplicação de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. / Thiago Rodrigues Furtado. – Arraias, TO, 2022.  
42 f.  
  
Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.  
Orientador: Adriano Rodrigues  
  
1. Equações diferenciais. 2. Temperatura e calor 3. Modelo de resfriamento de Newton. 4. Experimento . I. Título

**CDD 510**

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

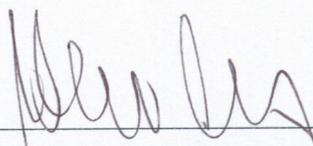
**THIAGO RODRIGUES FURTADO**

**MODELO DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: UMA  
APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS  
DE PRIMEIRA ORDEM**

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática foi avaliada para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

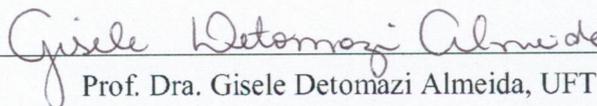
Data de aprovação 30 / 06 / 2022

Banca Examinadora



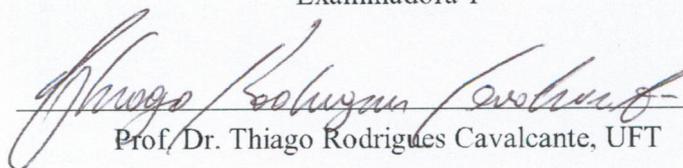
Prof. Me. Adriano Rodrigues, UFT

Orientador



Prof. Dra. Gisele Detomazi Almeida, UFT

Examinadora 1



Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, UFT

Examinador 2

*Dedico esta monografia à minha mãe Ocidália Rodrigues Neto, meu pai Jason Onei Dias Furtado, minha avó Idália Rodrigues Neto e meus irmãos Jefferson e Maykon que sempre estiveram comigo e contribuíram bastante na minha caminhada. Dedico também à minha falecida avó Rosaltina Rodrigues Furtado que não pôde estar aqui e ver seu neto formado, mas que sempre me deu forças para continuar.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir concluir essa etapa de minha vida.

Sou grato a minha mãe, meu pai e todos os meus familiares que me apoiaram.

Agradeço a meu Professor Orientador Me. Adriano Rodrigues pelo respeito, comprometimento e dedicação a este trabalho. Ao Professor Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante pelo incentivo ao LaTeX e contribuições a esta monografia. Agradeço também, a professora Dra. Gisele Detomazi Almeida pelas contribuições.

Gostaria de agradecer a Assistência Estudantil da Universidade pela moradia estudantil e auxílios financeiros que permitiram dedicar-me somente aos estudos e concluir o curso no período ideal.

Quero agradecer, de forma especial, meus amigos e companheiros Joyce Kelly dos Santos Aires e Lucas de Sousa Matos que estiveram comigo desde o início da graduação nos melhores e piores momentos.

Não posso deixar de agradecer a todos os amigos que fiz na Casa do Estudante e na universidade que levarei para toda a vida, em especial, à Ana Beatriz Rodrigues Marinho e Cristh Júnior Pereira Carvalho que colaboraram de forma significativa em minha vida acadêmica.

Por fim, agradeço a todos que acreditaram em mim e me ajudaram de alguma forma.

*“Entre todas as disciplinas matemáticas,  
a teoria das equações diferenciais é a  
mais importante... Ela fornece a expli-  
cação de todas as manifestações elemen-  
tares da natureza que envolvem o tempo.”*

**Marius Sophus Lie**  
*Prêmio Lobachevskii, 1897*

# RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo de um modelo matemático conhecido como Modelo de Resfriamento de Newton. Como se trata de uma aplicação de Equações Diferenciais na Física, fizemos uma pesquisa bibliográfica e exploratória nessas áreas para melhor entendimento e domínio do objeto de estudo. O objetivo principal deste trabalho é analisar os dados teóricos obtidos a partir dos cálculos produzidos de acordo com a Lei de Resfriamento de Newton e compará-los com os dados experimentais realizados durante a pesquisa.

**Palavras-chave:** Modelo de Resfriamento de Newton. Experimento. Temperatura. Equações Diferenciais.

# ABSTRACT

This work presents the study of a mathematical model known as Newton's Cooling Model. As it is an application of Differential Equations in Physics, we carried out a bibliographical and exploratory research in these areas for a better understanding and mastery of the object of study. The main objective of this work is to analyze the theoretical data obtained from the calculations produced according to Newton's Law of Cooling and compare them with the experimental data performed during the research.

**Keywords:** Newton's Cooling Model. Experiment. Temperature. Differential Equations.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .	12
2.1	Ordem e Tipo de uma Equação Diferencial . . . . .	12
2.2	Equação Diferencial Linear . . . . .	12
2.3	Equação Diferencial Separável . . . . .	15
2.4	Equação Diferencial Exata . . . . .	17
2.5	Solução de uma Equação Diferencial Linear . . . . .	19
3	TEMPERATURA E CALOR . . . . .	23
3.1	Temperatura . . . . .	23
3.2	Calor . . . . .	25
3.3	Transferência de Calor . . . . .	26
4	LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON . . . . .	28
4.1	Modelagem Matemática . . . . .	28
4.2	Modelo Matemático . . . . .	28
4.3	Experimento . . . . .	31
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	41
	REFERÊNCIAS . . . . .	42

# 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias lineares de primeira ordem, aplicadas à Lei de Resfriamento de Newton. A partir do desenvolvimento do trabalho será possível, por meio da aplicação do modelo matemático em uma situação cotidiana, confirmar a teoria do matemático e físico Isaac Newton (1643-1727).

Analisaremos dados experimentais relacionados ao cotidiano e também dados teóricos, comparando-os entre si. O estudo apresenta os conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem e as contribuições que essa área do conhecimento proporciona para as diversas áreas da ciência, compreendendo que apresentar conteúdos matemáticos por intermédio de modelos práticos pode tornar o processo de aprendizagem mais conectado ao dia a dia.

A motivação para a escrita deste trabalho partiu de três momentos vividos durante a vida acadêmica. Primeiramente, a leitura da monografia “Modelo predador-presa: uma aplicação de sistemas de equações diferenciais ordinárias” escrita pelo colega de graduação Cristh Júnior Pereira Carvalho sob a orientação do professor Adriano Rodrigues, cujo objetivo foi “*apresentar e analisar as trajetórias de soluções de sistemas predador-presa*”. (CARVALHO, 2019, p. 11).

Logo após, ao cursar a disciplina Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), obteve-se um maior contato com a aplicação da matemática em outras áreas, em particular na Física, mais especificamente com a Lei de Resfriamento de Newton. Isso motivou o interesse em estudar mais sobre essa área de conhecimento matemático, visto que o modelo se aplica muito bem em situações corriqueiras de nosso cotidiano, como aquecimento e resfriamento de alimentos, clima do tempo e diversas outras situações.

Por fim, a participação como monitor do Programa Institucional de Inovação Pedagógica (PIIP). Este programa teve como objetivo principal selecionar e apoiar projetos pedagógicos inovadores que contribuam para a transformação do processo de ensino-aprendizagem dos cursos de graduação da Universidade Federal do Tocantins (UFT), por meio de ferramentas e tecnologias educacionais inovadoras. O projeto intitulado “Professor, onde eu vou usar isso em minha vida?”, coordenado pelo professor Thiago Rodrigues Cavalcante, foi o projeto selecionado no curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo deste projeto foi mostrar aos discentes o porquê determinada disciplina faz parte da matriz curricular, a partir de apresentações de aplicações diversas, dentre elas, aplicações de EDO’s.

Desta forma, a presente pesquisa tem como objetivo o estudo das aplicações de EDO’s na Lei de Resfriamento de Newton, unindo a teoria com a prática a partir da análise de dados obtidos a partir de experimentos simples de aquecimento e resfriamento de água, comparando-os com dados teóricos obtidos durante o estudo.

Existem diversas outras aplicações de EDO's, mas como o intuito deste trabalho era aplicar um modelo matemático em uma situação comum, entendemos que a Lei de Resfriamento de Newton era o modelo mais fácil e interessante para aplicarmos, dada as limitações e dificuldades que encontramos por não possuir um laboratório.

Os dados práticos da pesquisa foram obtidos a partir de alguns experimentos realizados na Universidade Federal do Tocantins (UFT), campus de Arraias - TO, acompanhando o resfriamento e aquecimento de uma certa quantidade de água. Durante os experimentos registramos as informações a cada intervalo de tempo que definimos após alguns testes antes do experimento de fato. Estes testes foram feitos para de determinarmos os métodos a serem utilizados no experimento definitivo, a fim de obtermos as melhores aproximações possíveis dadas as ferramentas que possuíamos.

Os dados teóricos presentes no trabalho foram obtidos a partir dos cálculos realizados pelo autor após os experimentos. Tais cálculos foram baseados em uma aplicação matemática na área de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, conhecida como Lei de Resfriamento de Newton.

Para concluir os objetivos deste trabalho, fizemos uma pesquisa bibliográfica e exploratória nas áreas de conhecimento em que abrangem o objeto de estudo em questão. No capítulo 2, apresentamos alguns conceitos de Equações Diferenciais muito importantes para o desenvolvimento do trabalho, tais como: classificação de uma equação diferencial, problema de valor inicial, teorema de existência e unicidade de uma solução e alguns métodos de solução.

Ao trabalharmos com equações diferenciais em nossa pesquisa, nos ocupamos somente em abordar as EDO's lineares de primeira ordem, pois essa área define exatamente o modelo escolhido para a escrita desta monografia.

No capítulo 3, abordamos os conceitos básicos da Física que são necessários para o estudo e compreensão do Modelo de Resfriamento de Newton e os métodos de medições de temperatura que utilizamos em nosso experimento. Tratamos das três escalas termométricas mais utilizadas atualmente: Escala Celsius, Fahrenheit e Kelvin e os métodos de conversão entre elas. Apresentamos os conceitos de temperatura e calor e outras definições importantes.

No capítulo 4, abordamos a Lei de Resfriamento de Newton aplicada em uma situação cotidiana. Realizamos um experimento de aquecimento e resfriamento da água e observamos se o comportamento coincidia com o que prevê a Lei de Resfriamento de Newton. Os resultados foram apresentados em tabelas e gráficos e a partir destas apresentação foram feitas análises comparativas entre os dados obtidos nos experimentos e os dados teóricos além da análise de erros.

Alguns conceitos e definições do Cálculo, bem como métodos de integração, derivação, erro absoluto e erro relativo serão tratados como conhecidos neste trabalho, sendo assim, não nos preocuparemos em descrever estes passos. Essas definições podem ser encontradas nos livros de

Stewart (2010) e Barroso et al. (1987).

Algumas figuras aqui apresentadas foram produzidas utilizando o *Geogebra Classic online*, versão 6.0.707.0. Pode-se optar também pela versão baixada que pode ser encontrada na loja de aplicativos do celular ou *notebook*.

Em nossa pesquisa, como estamos interessados em trabalhar com um modelo matemático que depende do tempo, em todos os nossos capítulos estaremos trabalhando com funções do tempo, isto é, a variável independente será sempre  $t$ . Desta forma, definimos o domínio dessas funções de forma conveniente, ou seja, sempre  $D(f) = \mathbb{R}^+$ .

## 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Os primeiros estudos sobre Equações Diferenciais se devem à Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716). Zill e Cullen (2001, p. 1) indicam que equações diferenciais sugerem, basicamente, a resolução de equações que envolvam derivadas. Geralmente, sua solução é dada por uma função que satisfaça a equação dada. Podemos classificar equações diferenciais de acordo com o **tipo, ordem e linearidade**.

### 2.1 Ordem e Tipo de uma Equação Diferencial

Com relação a tipo, Zill e Cullen (2001, p. 2) dizem que se uma equação possui somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, então ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Caso a equação envolva as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes, então ela é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Por definição, a ordem da equação diferencial é igual a maior ordem entre as derivadas envolvidas. Por exemplo, se  $y$  é uma função de  $t$ , então uma EDO de ordem  $n$  que relacione  $y$ , a variável independente  $t$  e suas derivadas é uma equação do tipo:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde  $F$  é uma função que depende de  $t$ ,  $y$  e suas derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

### 2.2 Equação Diferencial Linear

De acordo com Zill e Cullen (2001, p. 4), uma equação diferencial é dita linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t). \quad (2.1)$$

Note que nas equações diferenciais lineares os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  e a função  $g$  dependem somente da variável  $t$ . Não existe nenhuma derivada com potência maior que 1. E a variável dependente  $y$  é de primeiro grau. Uma equação diferencial que não seja linear é dita **não-linear**.

**Exemplo 2.2.1** *A equação diferencial*

$$yy' + 2y^2 = 1 + t^2$$

é uma equação diferencial **não-linear** de ordem 1, pois nem todos os coeficientes dependem apenas da variável independente  $t$ . Veja que na primeira parcela temos o coeficiente dependendo também de  $y$ , isso é, uma variável  $y$  multiplicando a diferencial  $y'$ . Isso quebra a linearidade. Além disso, temos a variável dependente  $y$  com potência diferente de 1.

**Exemplo 2.2.2** *A equação diferencial*

$$(1 - t)y'' - 4ty' + 5y = \cos t$$

é uma equação diferencial ordinária linear de ordem 2, pois a variável dependente  $y$  e suas derivadas são de primeiro grau e cada coeficiente depende apenas da variável independente  $t$ . Temos ainda, que a derivada de maior ordem desta equação é  $y''$ , isto é, ordem 2.

A forma geral de uma equação diferencial linear de ordem  $n$ , foi definida em (2.1). Nosso foco neste trabalho será o estudo de equações diferenciais lineares de primeira ordem, isso acontece quando  $n$  é igual a 1. Essas equações são do tipo

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t). \quad (2.2)$$

Veja que os coeficientes  $a_1$  e  $a_0$  dependem somente de  $t$ , sua derivada e a variável  $y$  são de primeiro grau, o que garante a linearidade. A ordem da derivada de maior ordem é um, o que determina a ordem da equação.

Como dito na introdução deste trabalho, nosso intuito aqui, é trabalhar apenas com equações diferenciais lineares de primeira ordem. Usaremos dados teóricos obtidos a partir de resoluções desse tipo de equação diferencial. Desta forma, é importante enuciar os métodos de soluções dessas equações.

**Definição 2.2.1** *A solução de uma equação diferencial em um intervalo  $I$  é uma função definida neste intervalo que quando substituída na equação original resulta em uma identidade.*

**Exemplo 2.2.3** *A função*

$$y = e^{-\frac{t}{2}} \quad (2.3)$$

é solução para a equação

$$2y' + y = 0. \quad (2.4)$$

De fato,  $y$  é diferenciável e

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}.$$

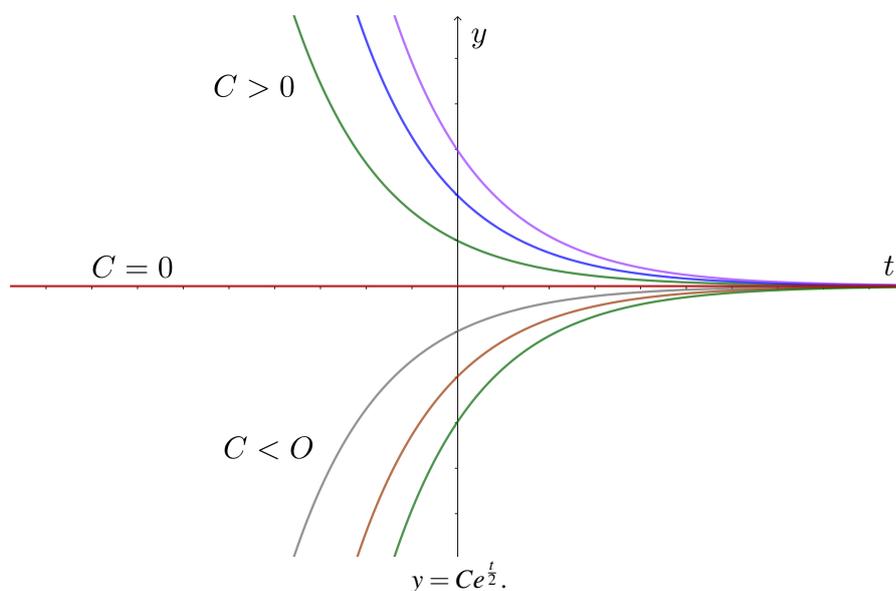
Isso implica que

$$2y' + y = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) + e^{-\frac{t}{2}} = 0.$$

Algumas Equações Diferenciais não possuem solução, enquanto outras possuem um número infinito de soluções. Como vimos no exemplo 2.2.3, a função (2.3) é solução da equação diferencial (2.4). Entretanto, devemos considerar na solução, uma constante  $C$  que advém do processo de integração, que é usado para encontrar a função original da equação diferencial, e que faz com que tenhamos um número infinito de soluções. Observe que a função  $Ce^{-\frac{t}{2}}$  satisfaz (2.4), para qualquer valor da constante  $C$ .

Observe a Figura 1 em que temos o gráfico de algumas soluções da função  $Ce^{-\frac{t}{2}}$ , perceba que ao variar o valor de  $C$  em uma unidade, temos uma nova solução.

Figura 1 – Gráfico das soluções.



Fonte: Autor (2022).

É recorrente em problemas práticos a necessidade de encontrar apenas uma solução particular para uma determinada equação. Enunciaremos a seguir, uma definição que será muito importante no desenvolvimento de nossa pesquisa, pois trataremos, exatamente, sobre equações sujeitas a uma condição inicial, isto é, procuraremos uma constante  $C$  específica que será determinada de acordo com o comportamento inicial de um fenômeno físico.

**Definição 2.2.2 Problemas de Valor Inicial**

Dada uma equação diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y); & y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Resolver essa equação e aplicar ao valor inicial  $y(t_0) = y_0$ , significa encontrar uma solução particular que passa pelo ponto  $(t_0, y_0)$ .

Dada uma solução de uma equação diferencial, é importante sabermos se ela é única, sobretudo em nossa pesquisa em que estudaremos um modelo matemático que descreve um fenômeno físico, cujo o comportamento é definido a partir de uma condição inicial. Apresentaremos a seguir, um teorema que garante a existência e unicidade de uma solução. Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada no livro de Zill e Cullen (2001).

**Teorema 2.2.1 Existência e Unicidade de uma Solução**

Considere o problema de valor inicial 2.5. Se  $f(t,y)$  for contínua em um intervalo aberto  $I$ , que possua o ponto  $y(t_0) = y_0$  em seu interior, então existe uma única função  $y(t)$  que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y).$$

Estamos interessados em resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Então, faz-se necessário enunciarmos alguns métodos de solução para este tipo de equação. A seguir, iremos descrever o método de separação de variáveis.

## 2.3 Equação Diferencial Separável

Uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)},$$

é chamada de equação diferencial separável. Observe que a equação pode ser escrita como

$$h(y) dy = g(t) dt.$$

Com isso, aplicando integral em ambos os lados da equação, podemos encontrar uma solução implícita, veja:

$$\int h(y) dy = \int g(t) dt.$$

Ao solucionar as duas integrais obtemos a solução de nossa equação diferencial.

**Exemplo 2.3.1** *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t-2y}$$

é uma equação diferencial separável.

De fato, a equação pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t} \cdot e^{-2y} \implies e^{2y} dy = e^{3t} dt.$$

Ao aplicar a integral em ambos os lados da equação, temos

$$\int e^{2y} dy = \int e^{3t} dt.$$

Ao resolver as integrais, obtemos a solução implícita

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{3}e^{3t} + c_1.$$

Reescrevendo a equação acima,

$$e^{2y} = \frac{2}{3}e^{3t} + c_2.$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação para extrair  $2y$  do expoente do lado esquerdo da equação, obtemos

$$2y = \ln\left(\frac{2}{3}e^{3t} + c_2\right).$$

Multiplicando toda a equação por  $\frac{1}{2}$  para obtermos a função

$$y(t) = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}e^{3t} + c_2\right)}{2},$$

que é a solução da equação diferencial.

Gostaríamos de apresentar o método específico de solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem, mas para isso, devemos primeiramente, comentar na próxima seção sobre equação diferencial exata.

## 2.4 Equação Diferencial Exata

Considere uma função de duas variáveis

$$f(t, y) = C, \quad (2.6)$$

onde  $C$  é uma constante real. Podemos derivar implicitamente (2.6). Veja:

$$\frac{d}{dt}[f(t, y)] = \frac{d}{dt}(C).$$

Usando a regra da cadeia para obter as derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Simplificando,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0. \quad (2.7)$$

Por questões estética, é conveniente considerar

$$M(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad N(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y. \quad (2.8)$$

Agora substituindo (2.8) em (2.7),

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Podemos reescrever essa equação como

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0. \quad (2.9)$$

Considere que  $M(t, y)$  e  $N(t, y)$  tenham derivadas parciais contínuas em todo o plano  $(t, y)$ . Uma equação diferencial na forma definida em (2.9) é chamada exata se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

De fato, pois calcular essas derivadas parciais equivalem a calcular as derivadas mistas  $f_{ty}$  e  $f_{yt}$ . Lembremos do Teorema de Clairaut-Schwarz visto no cálculo, que garante que as derivadas mistas

$$f_{ty} = f_{yt},$$

se  $f_{ty}$  e  $f_{yt}$  forem contínuas em  $(t, y)$ .

Esse processo, na verdade, é sintetizado no teorema que enunciaremos a seguir.

**Teorema 2.4.1** *Preceito para uma Equação Diferencial Exata*

Considere que  $M(t, y)$  e  $N(t, y)$  são as derivadas parciais contínuas de uma função  $f$ , também contínua, em todo plano  $(t, y)$ . Então a condição necessária e suficiente para que a equação diferencial

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0.$$

seja exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Para resolver uma equação diferencial exata, primeiramente devemos confirmar sua exatidão. Para isso é necessário escrevê-la na forma

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0$$

e verificar se ela é realmente exata, baseado no teorema 2.4.1, ou seja, se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Como definimos anteriormente,  $M(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}$ , então podemos encontrar a função  $f$  integrando  $M$  com relação a  $t$ :

$$f = \int M(t, y) dt + g(y), \quad (2.10)$$

como estamos fazendo a integração parcial com relação a  $t$ , a constante de integração é uma função de  $y$ . Assim,  $g(y)$  independe de  $t$ . Agora devemos derivar 2.10 com relação a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + g'(y).$$

Como definimos em (2.8),

$$M(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e temos por hipótese que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

segue que,

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + g'(y) = N(t, y).$$

Isolando  $g'(y)$  :

$$g'(y) = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt.$$

Para encontrarmos  $g(y)$ , basta integrarmos  $g'(y)$  com relação a  $y$ , veja

$$\int g'(y) dy = \int \left[ N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt \right] dy.$$

Então,

$$g(y) = \int \left[ N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt \right] dy. \quad (2.11)$$

Agora, substituindo (2.11) em (2.10), obtemos a solução  $f(t, y) = C$ , veja:

$$f = \int M(t, y) dt + \int \left[ N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt \right] dy$$

Veja que podemos iniciar o processo de solução integrando  $N(t, y)$  com relação a  $y$  e derivando com relação a  $t$ . Depois compararíamos com  $M(t, y)$ , encontrando a solução

$$f = \int N(t, y) dy + \int \left[ M(t, y) - \frac{\partial}{\partial t} \int N(t, y) dy \right] dt.$$

Observe que apresentamos aqui, uma sequência de passos para a resolução de uma equação diferencial exata e não uma fórmula pronta que deva ser memorizada.

Agora que definimos o que é uma equação diferencial exata e mostramos os passos de solução desta, podemos apresentar o método específico para uma equação diferencial linear de primeira ordem.

## 2.5 Solução de uma Equação Diferencial Linear

Como vimos em (2.2), uma equação diferencial linear de primeira ordem é do tipo:

$$a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = h(t).$$

Podemos reescrever esta equação de uma forma mais conveniente

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t). \quad (2.12)$$

Algumas equações não exatas podem se tornar exatas ao multiplicá-las por um **fator integrante**  $\mu(t)$ . As equações lineares têm essa propriedade. Desta forma, vamos escrever (2.12) na forma de uma equação exata definida em (2.9):

$$dy + [P(t)y - Q(t)] dt = 0$$

multiplicando pela função  $\mu(t)$ , temos:

$$\mu(t) dy + \mu(t) [P(t)y - Q(t)] dt = 0. \quad (2.13)$$

Como definimos na Seção 2.4, essa equação diferencial é exata se

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(t) = \frac{\partial}{\partial y} \mu(t) [P(t)y - Q(t)]$$

Com isso, segue que

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)] = 0 \cdot [P(t)y - Q(t)] + \mu(t)(P(t) - 0),$$

isso implica que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t) P(t).$$

Para facilitar, vamos escrever da seguinte forma

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu P(t).$$

Essa é uma equação diferencial separável, veja:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(t) dt.$$

Aplicando integral em ambos os lados da equação, temos

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(t) dt.$$

Ao resolver as integrais, obtemos

$$\ln(\mu) = \int P(t) dt$$

Assim, ao aplicar a função exponencial em ambos os lados da equação,

$$\mu(t) = e^{\int P(t) dt}. \quad (2.14)$$

É o fator integrante para a equação diferencial linear. Agora vamos escrever a equação (2.13) de forma conveniente, lembrando que a derivada da diferença é a diferença das derivadas:

$$\mu(t)dy + \mu(t)P(t)ydt - \mu(t)Q(t)dt = 0. \quad (2.15)$$

Reordenando 2.15,

$$\mu(t)dy + \mu(t)P(t)ydt = \mu(t)Q(t)dt. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.14) em (2.16), obtemos

$$e^{\int P(t)dt} dy + e^{\int P(t)dt} \cdot P(t)ydt = e^{\int P(t)dt} Q(t)dt. \quad (2.17)$$

Veja que no lado esquerdo da equação (2.17), aplicando a regra do produto, teorema fundamental do cálculo e regra da cadeia, obtemos a identidade

$$\frac{d}{dt}[e^{\int P(t)dt} y] = e^{\int P(t)dt} \cdot P(t)ydt + e^{\int P(t)dt} dy.$$

Assim, reescrevendo a equação (2.17), temos

$$\frac{d}{dt}[e^{\int P(t)dt} y] = e^{\int P(t)dt} Q(t)dt.$$

Ao aplicar a integral em ambos os lados,

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\int P(t)dt} y] = \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt.$$

Assim, segue que

$$e^{\int P(t)dt} y = \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + c.$$

Desta forma, ao isolar  $y$ , obtemos a solução geral da EDO linear, dada por:

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int P(t)dt}} \left( \int e^{\int P(t)dt} \cdot Q(t)dt + c \right). \quad (2.18)$$

**Exemplo 2.5.1** Considere a equação diferencial

$$3\frac{dy}{dt} + 12y = 4$$

**SOLUÇÃO:** Essa é uma equação diferencial linear que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} + 4y = \frac{4}{3}.$$

Temos que  $P(t) = 4$  e  $Q(t) = \frac{4}{3}$ . Por 2.18, sabemos que a solução de uma equação diferencial linear é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int P(t) dt}} \left( \int e^{\int P(t) dt} \cdot Q(t) dt + c \right).$$

Substituindo, temos:

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int 4 dt}} \left( \int e^{\int 4 dt} \cdot \frac{4}{3} dt + c \right).$$

Isso implica que

$$y(t) = \frac{1}{e^{4t}} \left( \int e^{4t} \cdot \frac{4}{3} dt + c \right).$$

Resolvendo a integral

$$y(t) = \frac{1}{e^{4t}} \left( \frac{e^{4x}}{3} + c \right).$$

Agora ao simplificarmos a equação acima, segue que

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{c}{e^{4x}},$$

é solução da EDO dada no exemplo 2.5.1. Note que a equação diferencial poderia ser resolvida, também pelo método de separação de variáveis. Nosso objetivo aqui, foi apresentar métodos alternativos para resolver equações diferenciais lineares.

## 3 TEMPERATURA E CALOR

Considerando que o nosso trabalho está diretamente ligado à termodinâmica, o presente capítulo tem o objetivo de apresentar os conceitos e definições básicos da Física que são necessários para o estudo e compreensão da Lei de Resfriamento de Newton.

As definições e conceitos apresentadas neste capítulo tem como principal referência Halliday, Resnick, Walker (2009).

### 3.1 Temperatura

A temperatura é uma grandeza que mede o grau de agitação das moléculas de um corpo. Pode ser medido em **graus celsius, graus fahrenheit ou kelvin**. Geralmente, na Física utiliza-se a **Escala Kelvin**, onde a unidade de medida é denotada por *kelvin* ( $K$ ). Já existiram diversas outras escalas termométricas, mas atualmente, somente essas três são utilizadas.

A **Escala Celsius**, cuja unidade é denotada  $^{\circ}C$  (lê-se graus Celsius), é a mais usada no Brasil para medição de temperaturas. Essa escala considera que o ponto de fusão da água, isto é, a temperatura em que a água começa a congelar é de  $0^{\circ}C$  (zero graus celsius) e o ponto de ebulição da água, ou seja, a temperatura em que a água começa a evaporar é de  $100^{\circ}C$  (cem graus celsius).

A **Escala Fahrenheit**, em que a unidade é denotada  $^{\circ}F$  (lê-se graus Fahrenheit), é mais utilizada em países como Inglaterra e Estados Unidos. Nessa escala é considerado que o ponto de fusão da água é de  $32^{\circ}F$  (trinta e dois graus fahrenheit) e o ponto de ebulição da água é de  $212^{\circ}F$  (duzentos e doze graus fahrenheit).

A **Escala Kelvin** é mais utilizada no meio científico. Diferente das demais escalas citadas, sua unidade é denotada somente por  $K$  e não por  $^{\circ}K$ . Está ligada ao grau de agitação dos elétrons de um determinado corpo, o ponto de fusão da água nesta escala é de  $273K$  (duzentos e setenta e três kelvins) e o ponto de ebulição da água é de  $373K$  (trezentos e setenta e três kelvins).

Como essas três escalas termométricas são lineares, podemos facilmente fazer a conversão das temperaturas analisando a relação de proporção que existem entre elas. Veja a Figura 2 a seguir:

Figura 2 – Escalas Termométricas.



Escalas Celsius, Fahrenheit e Kelvin.

Fonte: Autor (2022).

Analisando as escalas encontramos a seguinte relação

$$\frac{C - 0}{100} = \frac{F - 32}{212 - 32} = \frac{K - 273}{373 - 273}$$

simplificando,

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} = \frac{K - 273}{5}. \quad (3.1)$$

A partir da identidade 3.1 podemos isolar cada incógnita da forma que nos for conveniente. Assim segue que a relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é:

$$F = \frac{9}{5}C + 32^\circ. \quad (3.2)$$

A relação entre as escalas Celsius e Kelvin é:

$$C = K - 273^\circ. \quad (3.3)$$

A relação entre as escalas Kelvin e Fahrenheit é:

$$K = \frac{2297 + 5F}{9}. \quad (3.4)$$

Para fazer as conversões basta substituímos os valores em que queremos converter nas fórmulas descritas acima. A partir de agora, neste trabalho, quando falarmos de temperatura, estaremos nos referindo à escala celsius.

## 3.2 Calor

É muito comum as pessoas pensarem que calor e frio de alguma forma são opostos. Você já deve ter ouvido alguém dizer “*Amanhã não fará calor*” ou “*Não estou com calor*”, frases essas que estão equivocadas e consideram que o calor está ligado somente a temperaturas elevadas. Na verdade, **calor** é a quantidade de energia transferida entre corpos com temperaturas distintas. A sensação que temos em ambientes em que a temperatura está muito elevada advém da transferência excessiva de calor do ambiente para o nosso corpo. Teoricamente o nosso corpo e o ambiente entrariam em equilíbrio térmico, mas o corpo humano trabalha para manter a temperatura em média a  $37^{\circ}\text{C}$ , por meio da transpiração, por exemplo. Em casos em que a temperatura do ambiente é menor que a temperatura de nosso corpo, o nosso organismo estimula a produção de calor para manter a temperatura segura.

Quando falamos em transferência de calor devemos pensar em algo chamado **capacidade térmica**, que nada mais é que a quantidade de energia necessária para variar a temperatura de um corpo em uma unidade de temperatura. A capacidade térmica é uma característica que depende da substância da qual o corpo é constituído e de sua massa. Podemos relacionar a capacidade térmica  $\beta$  de um corpo a partir da seguinte equação:

$$Q = \beta\Delta T = \beta(T_f - T_i). \quad (3.5)$$

Onde  $Q$  é o calor recebido,  $\Delta T$  é a variação de temperatura do corpo,  $T_i$  e  $T_f$  são a temperatura inicial e final, respectivamente. Observamos, por exemplo (Figura 3), que as fagulhas que saem de um cortador de aço circular não queimam o braço do trabalhador. Isso está ligado a capacidade térmica. As fagulhas não o queimam porque têm pouca massa e então têm capacidade térmica muito pequena e cede uma baixa quantidade de calor.

Figura 3 – Fagulhas saindo de um cortador de aço circular



Fonte: <<https://br.freepik.com/>>

O **calor específico** é a quantidade de energia na forma de calor necessária para elevar a temperatura de uma unidade de massa de uma substância em um grau celsius. O calor específico

não se altera de acordo com a massa do material. Objetos de mesmo material têm capacidades térmicas proporcionais a suas massas. Assim:

$$Q = \Theta m \Delta T = \Theta m (T_f - T_i). \quad (3.6)$$

Onde  $\Theta$  é o calor específico e  $m$  é a massa do objeto. Existe também o **calor de transformação**, que é a quantidade de energia por unidade de massa necessária para que uma amostra mude de estado. A quantidade de calor necessária para que uma amostra mude do estado líquido para o estado gasoso ou do estado gasoso para o líquido é chamada de **calor de vaporização**. Quando a mudança é do estado sólido para o estado líquido ou do estado líquido para o estado gasoso, o calor de transformação é chamado de **calor de fusão**.

### 3.3 Transferência de Calor

Já vimos que o calor é um tipo de energia que pode ser transferida de determinado corpo a outro quando há diferença de temperatura entre eles, agora vamos falar sobre como se dá essa transferência. Ela ocorre de três formas distintas: condução, convecção e radiação.

Para entendermos melhor a transferência de calor por **condução**, imagine que você deixe sobre o fogo uma panela e, dentro dela uma colher de metal, por alguns minutos. Ao tentar encostar na colher você poderá sofrer queimaduras, pois ela estará tão quente quanto a panela. Isso acontece porque a energia é transferida da panela para a colher por condução. Em contato com a panela, o fogo a aquecerá, pois o fogo irá transferir calor à ela. Os átomos que a constituem irão colidir entre si, e a energia associada farão com que a temperatura do que está em contato com a panela aumente.

Alguns materiais, como o metal, são melhores condutores de energia térmica que outros, e por isso se aquecem com mais facilidade. Isso explica porque a maioria das panelas são feitas de metal e os cabos que serão manuseados são feitos de plástico ou madeira, que não são bons condutores térmicos.

Em um de nossos experimentos, que detalharemos melhor no capítulo a seguir, aqueceremos a água utilizando o princípio da condução, para isso, faremos o uso de uma ferramenta para depositar energia na forma de calor sobre a água até que atinja a temperatura de fervura.

A transferência de calor por **convecção** acontece quando um gás ou um líquido é exposto a uma temperatura maior que a deles. Por exemplo, as conhecidas Air Fryer<sup>1</sup> usam o princípio da convecção para cozinhar os alimentos. O ar é aquecido e distribuído uniformemente para o alimento cozinhando-o por completo.

Outro aparelho eletrodoméstico que usa esse princípio é o condicionador de ar. Geralmente utilizado em salas fechadas, ele resfria o ar do ambiente por convecção. O aparelho fica na parte de cima porque o ar de temperatura menor é mais denso que o ar de temperatura maior. Durante o processo de resfriamento, o ar mais frio se contrai, ficando mais denso e desloca-se para baixo da sala, forçando o ar mais quente subir e aproximar-se do aparelho. E este processo se repete até que a temperatura da sala esteja uniforme. Caso o aparelho fosse colocado na parte de baixo da sala, a parte de cima não resfriaria.

Por fim, apresentamos o exemplo do aquecimento da água. Quando queremos ferver uma certa quantidade de água, geralmente a colocamos em uma panela e levamos ao fogo até que levante fervura. Quando colocada a panela com água sobre o fogo a parte mais próxima do fogo aquece primeiro e se expande, ficando menos densa. Com isso move-se para parte de cima enquanto a parte mais fria e, conseqüentemente mais densa, move-se para baixo. Esse processo se repete indefinidamente até que a temperatura da água se equilibre.

A transferência de energia na forma de calor por **radiação** ocorre por meio de ondas eletromagnéticas. Neste caso, não é necessário o contato entre os corpos para que haja a transferência. Por exemplo, a terra é aquecida pelo sol e este calor chega até aqui através do vácuo.

Quando nos aproximamos de algum corpo muito quente, como uma fogueira, o calor é transferido a nós por radiação. As câmeras de infra-vermelho usam o princípio da radiação para detectar corpos, geralmente no escuro, que estão emitindo calor.

---

<sup>1</sup> Fritadeiras a ar elétricas que não necessitam do uso de óleo no processo de cozimento dos alimentos. Os fabricantes usam o termo “fritar”, mas não é o adequado já que não é usado óleo.

## 4 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Como dito na introdução deste trabalho, neste capítulo abordaremos um modelo matemático conhecido como **Lei de Resfriamento de Newton** e faremos a análise dos dados de um experimento prático realizado durante a pesquisa. Os resultados do experimento serão comparados com os dados teóricos baseados na teoria do físico Isaac Newton com o intuito de confirmar a teoria na prática. É interessante também, comentarmos um pouco sobre a importância do estudo da modelagem matemática, pois é algo que vamos utilizar em nosso trabalho.

### 4.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática pode ser usada para explicar alguns fenômenos naturais. Burak (1992, p. 62) diz que a modelagem matemática “*é o conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões*”. Desta forma, procura-se, a partir da observação de um fenômeno em determinada área, elaborar um modelo que melhor o descreva a fim de prever comportamentos e soluções para possíveis problemas.

Alguns autores definem a modelagem matemática como

a arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações problemas de nosso meio. Tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos. (BUENBENGUT e HEIN, 2005, p. 7).

Como dito, a modelagem existe desde a antiguidade. Com ela é possível “*transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los*” (COSTA, 2016 apud BAS-SANEZI 2015). Esses problemas englobam diversas áreas do conhecimento, dentre essas áreas, destaca-se modelos matemáticos a partir das EDO's que têm contribuído significativamente para resolver problemas em vários aspectos da vida humana. Apresentaremos a seguir uma aplicação de EDO muito prática e conectada ao cotidiano, pois é muito comum precisarmos saber o tempo de resfriamento de um alimento ou bebida, por exemplo.

### 4.2 Modelo Matemático

A Lei de Resfriamento de Newton nos diz que a variação de temperatura de um corpo, exposto em um ambiente com temperatura constante, é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Em termos matemático, temos:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb}), \quad (4.1)$$

onde  $T$  é a temperatura do corpo e depende do tempo  $t$ ,  $T_{amb}$  é a temperatura do ambiente, que permanece constante e,  $k$  é a constante de proporcionalidade. A hipótese nos diz que se  $T$  é maior que  $T_{amb}$ , então  $k$  é negativo e o corpo está esfriando e se  $T$  é menor que  $T_{amb}$ , então  $k$  é positivo e corpo está esquentando. Então, apesar do modelo ser conhecido como “Lei de Resfriamento” ele também é válido para o aquecimento.

Para resolver a equação (4.1) podemos optar por usar o método de separação de variáveis enunciado na seção 2.3 deste trabalho. Separando as variáveis em (4.1), temos

$$\frac{dT}{(T - T_{amb})} = k dt.$$

Aplicando a integral em ambos os lados da equação,

$$\int \frac{dT}{(T - T_{amb})} = \int k dt.$$

Após resolver as integrais obtemos os valores

$$\ln|T - T_{amb}| = k \cdot t + c_1.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados da equação, obtemos

$$T - T_{amb} = e^{k \cdot t} \cdot e^{c_1},$$

mas como  $e^{c_1}$  é constante, segue que

$$\boxed{T(t) = C e^{k \cdot t} + T_{amb}} \quad (4.2)$$

é a solução geral do modelo matemático, onde  $C$  é uma constante real.

Vamos agora, ver um exemplo prático desse modelo

**Exemplo 4.2.1** Um copo de água, inicialmente a uma temperatura de  $92^{\circ}\text{C}$  é colocado em uma sala com temperatura constante de  $25^{\circ}\text{C}$ . Após 10 minutos a temperatura da água é medida em  $72^{\circ}\text{C}$ . Qual a temperatura da água  $t$  minutos após ser colocada na sala?

**SOLUÇÃO:** Resolver esse exemplo é equivalente a resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 25), & T(0) = 92. \end{cases}$$

Sabemos que a temperatura do ambiente  $T_{amb}$  é constante e mede  $25^{\circ}\text{C}$ . Então podemos substituir estas informações na expressão 4.2, veja:

$$T(t) = Ce^{k \cdot t} + 25. \quad (4.3)$$

Devemos levar em consideração que, quando o tempo  $t$  é igual a zero, temos que a temperatura do corpo vale  $92^{\circ}\text{C}$ , então

$$T(0) = Ce^{k \cdot 0} + 25 = 92 \implies C = 67$$

Dessa forma, de (4.3) é imediato que

$$T(t) = 67e^{k \cdot t} + 25 \quad (4.4)$$

Para encontrarmos a constante  $k$ , devemos considerar a que  $T(10) = 72$ , daí encontramos

$$T(10) = 67e^{10k} + 25 = 72,$$

então

$$e^{10k} = \frac{47}{67} \implies 10k = -0,35454$$

Com isso, encontramos

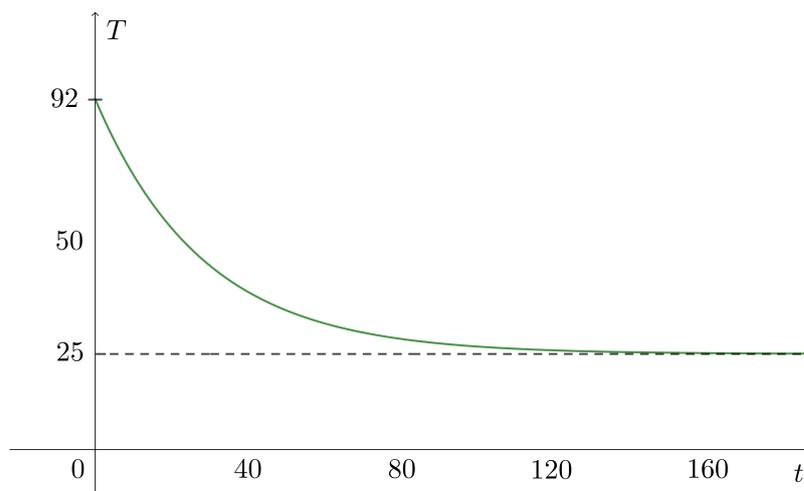
$$k = -0,0354$$

Então obtemos, de 4.4 que a temperatura da sala em qualquer instante é

$$T(t) = 67e^{-0,0354 \cdot t} + 25 \quad (4.5)$$

Percebemos que a temperatura da água atingirá a temperatura ambiente após um longo período de tempo, veja a Figura 4.

Figura 4 – Gráfico da Solução 4.5



Fonte: Autor (2022).

### 4.3 Experimento

Para a execução do experimento, foram utilizados, em uma sala climatizada e fechada à  $24^{\circ}\text{C}$ , um litro de água, um termômetro de ambiente, um termômetro de alimentos graduado entre  $-50^{\circ}\text{C}$  a  $300^{\circ}\text{C}$ , um ebulidor, um cronômetro e um recipiente com capacidade para pouco mais de um litro. Antes do experimento definitivo, foram feitos alguns testes para descobrirmos quanto tempo era necessário, em média, para que a temperatura da água se igualasse à temperatura ambiente a fim de se determinar um intervalo médio entre as medições das temperaturas. O processo foi repetido algumas vezes para o líquido quente e para o líquido frio, pois

é do senso comum que em qualquer medição ou experiência é desaconselhável ter uma única leitura, pois existe sempre o risco de se cometerem erros grosseiros que passarão despercebidos se não tiver qualquer termo de comparação (CABRAL, 2004, p. 21).

Assim, faz-se necessário a repetição tanto do processo de testes quanto do experimento em si, para que não houvesse erros que poderiam passar despercebidos. Após os testes foi observado que, em média, a água fervente chega à temperatura de  $24^{\circ}\text{C}$  após 4 horas. Com esta informação definimos o intervalo de 15 minutos entre cada observação. Foi observado também, que a água fria demora muito mais que a água fervente, cerca de 5 horas, para atingir a temperatura ambiente.

Para a água quente usamos um ebulidor para elevar a temperatura da água até que começasse a ferver. Em seguida, desligamos o ebulidor e iniciamos o experimento, usando o cronômetro para controlar as medições a cada 15 minutos. Os dados obtidos estão descritos na Tabela 1, onde os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_{15}$  são os pares ordenados  $(t, y)$  que serão representados no gráfico.

Tabela 1 – Resultados Práticos do Experimento Água Quente

Ponto	Tempo (min.)	Temperatura °C	Ponto	Tempo (min.)	Temperatura °C
$P_0$	0	97,1	$P_8$	120	29,6
$P_1$	15	66,3	$P_9$	135	28,4
$P_2$	30	53,2	$P_{10}$	150	27,3
$P_3$	45	45,5	$P_{11}$	165	26,4
$P_4$	60	40,3	$P_{12}$	180	25,8
$P_5$	75	36,4	$P_{13}$	195	25,3
$P_6$	90	33,5	$P_{14}$	210	24,8
$P_7$	105	31,3	$P_{15}$	225	24,0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Logo depois do experimento e registro dos dados, fizemos cálculos mediante a aplicação da **Lei de Resfriamento de Newton**. Dos dados da Tabela 1, temos que  $T(0) = 97,1$ , a temperatura da sala foi controlada com aparelho condicionador de ar e a temperatura ambiente ( $T_{amb}$ ) permaneceu próximo dos  $24^\circ\text{C}$  durante todo o experimento. De posse desses dados, podemos utilizar a equação (4.2) para deduzirmos a temperatura da água em qualquer instante  $t$ :

$$T(t) = Ce^{k \cdot t} + T_{amb}$$

Fazendo

$$T(0) = Ce^{k \cdot 0} + 24 = 97,1$$

obtemos

$$C = 73,1$$

Com isso temos

$$T(t) = 73,1e^{kt} + 24 \quad (4.6)$$

Da Tabela 1, vimos que  $T(15) = 66,3$  e com isso, podemos deduzir a constante  $k$  da nossa equação (4.6):

$$T(15) = 73,1e^{k \cdot 15} + 24 = 66,3$$

Isso implica que

$$73,1e^{k \cdot 15} = 42,3$$

Então

$$e^{k \cdot 15} = \frac{42,3}{73,1}$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação acima, temos

$$15k = -0,545672$$

e por fim

$$k = -0,036378.$$

Enfim, podemos substituir  $k$  em (4.6):

$$T(t) = 73,1e^{-0,036378 \cdot t} + 24 \quad (4.7)$$

Com isso, podemos determinar, teoricamente, a temperatura da água em qualquer instante.

Agora, considerando os mesmos intervalos de tempo descritos na Tabela 1, obtemos, a partir de (4.7), os dados descritos na Tabela 2, onde os pontos  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{15}$  são os pares ordenados  $(t, y)$  que serão representados no gráfico.

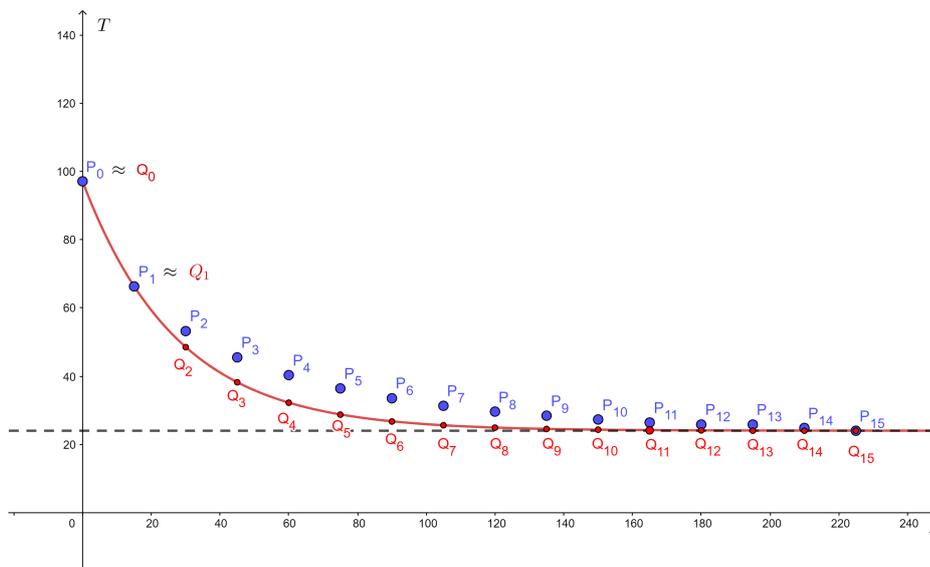
Tabela 2 – Resultados Teóricos do Experimento Água Quente

Ponto	Tempo (min.)	Temperatura °C	Ponto	Tempo (min.)	Temperatura °C
$Q_0$	0	97,1	$Q_8$	120	24,9
$Q_1$	15	66,3	$Q_9$	135	24,5
$Q_2$	30	48,5	$Q_{10}$	150	24,3
$Q_3$	45	38,2	$Q_{11}$	165	24,1
$Q_4$	60	32,2	$Q_{12}$	180	24,1
$Q_5$	75	28,7	$Q_{13}$	195	24,0
$Q_6$	90	26,7	$Q_{14}$	210	24,0
$Q_7$	105	25,6	$Q_{15}$	225	24,0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Para melhor compreensão, representamos os dados das Tabelas 1 e 2 no gráfico da Figura 5. A curva na cor vermelha representa a solução (4.7), isto é, a temperatura da água em qualquer instante. Os pontos em vermelho representam os dados teóricos calculados e expostos na Tabela 2, a partir da Lei de Resfriamento de Newton. Os pontos em azul representam os registros das temperaturas nos intervalos descritos na Tabela 1. A linha pontilhada diz respeito a função constante  $f(t) = 24$ , ou seja, a assíntota horizontal da função solução.

Figura 5 – Gráfico do Experimento Água Quente



Fonte: Autor (2022).

Analizando os dados, percebemos que o modelo se aplica ao cotidiano com uma boa aproximação, porém, pelo fato de a temperatura do ambiente ter que se manter constante durante todo o experimento, é quase impossível conseguirmos valores exatos na prática fora de um laboratório. A temperatura em nosso sistema sempre varia, e apesar de termos tomado o cuidado de controlar a temperatura do ambiente com um aparelho condicionador de ar e evitarmos ao máximo abrir a porta da sala, foi constatado com o termômetro de ambiente uma pequena variação na temperatura da sala em aproximadamente  $2^{\circ}\text{C}$ . Talvez essa variação e o fato de não possuímos um termômetro de alta precisão possa ter influenciado no resultado final do experimento.

Apesar disso, os resultados práticos foram satisfatórios e não fugiram muito do esperado na teoria como podemos ver na Figura 5. Percebemos também, que a discrepância entre a temperatura experimental e teórica da água foi maior entre os pontos  $P_3$  e  $P_9$  do experimento e menor conforme nos aproximamos da temperatura ambiente.

De acordo com a Tabela 2, a teoria nos dizia que a temperatura da água iria se igualar a temperatura do ambiente ( $24^{\circ}\text{C}$ ) em 195 minutos, mas não foi isso que aconteceu como podemos ver na Tabela 1, isso só aconteceu na prática, 30 minutos depois com 225 minutos.

Ao trabalhar com modelagem matemática, a possibilidade de erros acontecerem é grande. Alguns autores dizem que

para a resolução de modelos matemáticos, muitas vezes torna-se necessário a utilização de instrumentos de cálculo que necessitam, para o seu funcionamento, que sejam feitas certas aproximações. Tais aproximações podem gerar erros. (BARROSO et al. 1987, p. 4).

Em nossos cálculos foram utilizadas ferramentas de cálculo que utilizam aproximações.

Houve também, variação na temperatura do ambiente durante o experimento o que fez com que ocorresse erros de aproximação. Com isso, fez-se necessário os cálculos destes erros.

Na Tabela 3 a seguir, temos os pontos  $Q$  que dizem respeito aos valores da teoria e os pontos  $P$  que representam os pontos na prática. Com esses valores calculamos os erros absolutos e erros relativos para extraírmos algumas informações.

Tabela 3 – Cálculo dos Erros Experimento Água Quente

Ponto	Temperatura ( $^{\circ}C$ )	Ponto	Temperatura ( $^{\circ}C$ )	Erro Abs.	Erro Rel. (%)
$Q_0$	97,1	$P_0$	97,1	0	0
$Q_1$	66,3	$P_1$	66,3	0	0
$Q_2$	48,5	$P_2$	53,2	4,7	9,6
$Q_3$	38,2	$P_3$	45,5	7,3	19,1
$Q_4$	32,2	$P_4$	40,3	8,1	25,1
$Q_5$	28,7	$P_5$	36,4	7,7	28,8
$Q_6$	26,7	$P_6$	35,5	6,8	25,4
$Q_7$	25,6	$P_7$	31,3	5,7	22,2
$Q_8$	24,9	$P_8$	29,6	4,7	18,8
$Q_9$	24,5	$P_9$	28,4	3,9	15,9
$Q_{10}$	24,3	$P_{10}$	27,3	3	12,3
$Q_{11}$	24,1	$P_{11}$	26,4	2,3	9,5
$Q_{12}$	24,1	$P_{12}$	25,8	1,7	7,0
$Q_{13}$	24	$P_{13}$	25,3	1,3	5,4
$Q_{14}$	24	$P_{14}$	24,8	0,8	3,3
$Q_{15}$	24	$P_{15}$	24	0	0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Analizando a Tabela 3, vimos que o maior erro absoluto foi de  $8,1^{\circ}C$  e o maior erro relativo foi de  $28,8\%$ . Erros consideravelmente grandes e que mostram que os valores da teoria ficaram um pouco distante dos valores na prática. Isso pode ter acontecido por diversos motivos, alguns já citados neste trabalho. Com relação aos pontos  $Q_0 = P_0$  e  $Q_1 \approx P_1$ , os erros são iguais a zero porque os dois primeiros pontos do experimento prático foram usados como parâmetros no problema de valor inicial calculado na teoria, desta forma, os valores práticos coincidiram com os valores teóricos. Os menores erros, ocorreram na medida em que nos aproximamos do final do experimento, sendo que o menor erro absoluto, desconsiderando os erros iguais a zero, foi de  $0,8^{\circ}C$  e o menor erro relativo foi de  $3,3\%$ .

Esses erros são relativamente altos, mas quando calculamos a média aritmética entre eles, vimos que estes valores caem significativamente. O erro absoluto fica em média  $3,6^{\circ}C$  e o erro relativo fica em  $12,5\%$ . Resultados satisfatórios para o que esperávamos, dado que não possuíamos ferramentas muito precisas de medição da temperatura da água e controle da temperatura do ambiente para minimizar a discrepância nos resultados. Os erros já eram esperados, visto que não existe modelo matemático perfeito que descreva os fenômenos físicos minuciosamente e que preveja todos os problemas que causam as variações nos resultados. Se quisermos usar o modelo para encontrar resultados com erros satisfatórios de aproximação, o

modelo funcionará perfeitamente, desde que não ocorra variação muito brusca da temperatura do ambiente.

O experimento com a água fria foi feito depois do experimento com a água quente. Neste experimento, imaginávamos que poderíamos usar a água no estado sólido e acompanhar seu aquecimento até que sua temperatura alcançasse a temperatura do ambiente (estado líquido) e, após isso, usar o modelo para descrever teoricamente o comportamento da água. Percebemos que não é possível usar o modelo na mudança de estado, pois ao chegar a  $0^{\circ}\text{C}$  a temperatura da água fica constante por um tempo até que descongele por completo. Isso faz com que mascare informações e dê problemas no modelo. Então optamos por começar com a água a  $1^{\circ}\text{C}$  em seu estado líquido.

Na execução do experimento usamos um litro de água, inicialmente a  $1^{\circ}\text{C}$  e aguardamos a temperatura da água chegar bem próximo a temperatura do ambiente. Como o intervalo de temperatura era menor para o líquido frio em comparação com o líquido quente, optamos por fazer as medições com intervalos de dez minutos e após um tempo aumentamos o intervalo. Os dados obtidos estão descritos na Tabela 4, onde os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_{15}$  são os pares ordenados  $(t, y)$  que serão representados no gráfico.

Tabela 4 – Resultados Práticos do Experimento Água Fria

Ponto	Tempo (min.)	Temperatura $^{\circ}\text{C}$	Ponto	Tempo (min.)	Temperatura $^{\circ}\text{C}$
$P_0$	0	1	$P_9$	90	15,3
$P_1$	10	3,8	$P_{10}$	100	15,9
$P_2$	20	5,2	$P_{11}$	110	16,8
$P_3$	30	7,5	$P_{12}$	140	18,5
$P_4$	40	9,8	$P_{13}$	170	19,8
$P_5$	50	11,3	$P_{14}$	225	21,2
$P_6$	60	12,8	$P_{15}$	255	21,6
$P_7$	70	13,8	$P_{16}$	285	21,8
$P_8$	80	14,6	$P_{17}$	300	22,1

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Após o experimento com a água fria e registro dos dados, fizemos cálculos com o auxílio do modelo em que estamos trabalhando para deduzirmos teoricamente a temperatura da água em qualquer instante  $t$ . Analisando a Tabela 4, vemos que  $T(0) = 1$ , a temperatura da sala permaneceu próximo dos  $23^{\circ}\text{C}$  durante o experimento. Dessa forma, podemos, novamente, usar a equação 4.2 para encontrar a constante  $C$ :

$$T(t) = Ce^{k \cdot t} + T_{amb}.$$

Fazendo

$$T(0) = Ce^{k \cdot 0} + 23$$

então

$$C = -22.$$

Substituindo  $C$ ,

$$T(t) = -22e^{k \cdot t} + 23. \quad (4.8)$$

Analisando a Tabela 4, vimos que após 10 minutos a temperatura da água subiu para  $3,8^\circ\text{C}$ . Podemos usar essa informação para deduzirmos a constante  $k$  da equação 4.8:

$$T(10) = -22e^{10k} + 23 = 3,8$$

Isso implica que

$$-22e^{10k} = -19,2$$

Então

$$e^{10k} = \frac{19,2}{22}$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados, temos

$$10k = -0,136132 \implies k = -0,013613.$$

Enfim, podemos substituir  $k$  em 4.8:

$$T(t) = -22e^{-0,013613 \cdot t} + 23 \quad (4.9)$$

A partir da equação 4.9, usamos os mesmos intervalos de tempo descritos na Tabela 4 para encontrarmos os dados descritos na Tabela 5 a seguir, onde os pontos  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{15}$  são os pares ordenados  $(t, y)$  que serão representados no gráfico.

Tabela 5 – Resultados Teóricos do Experimento Água Fria

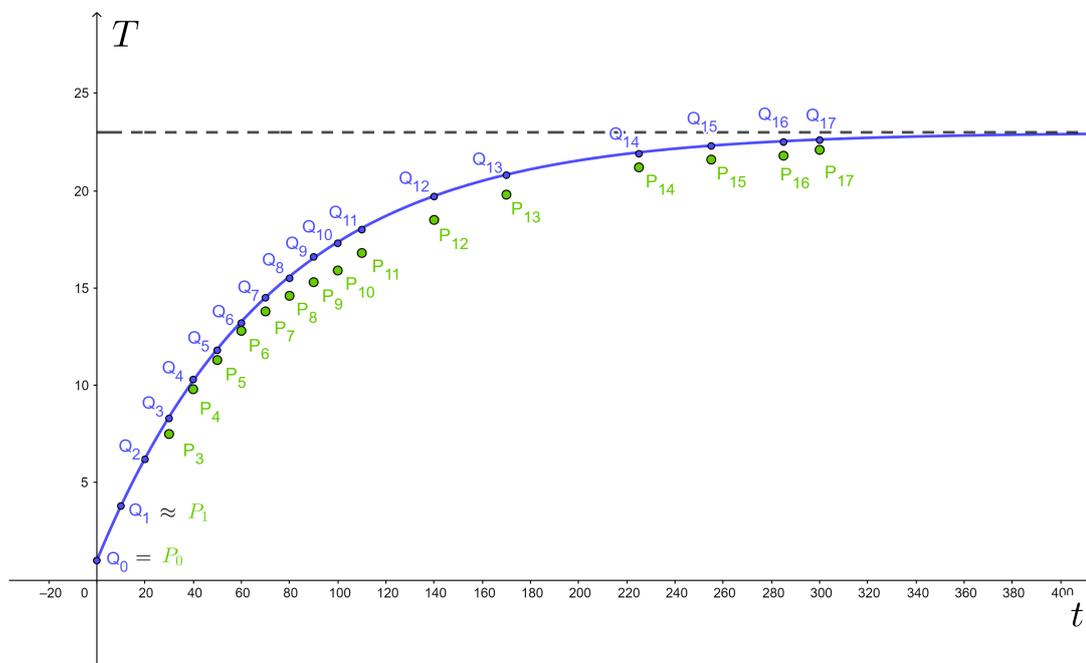
Ponto	Tempo ( <i>min.</i> )	Temperatura $^\circ\text{C}$	Ponto	Tempo ( <i>min.</i> )	Temperatura $^\circ\text{C}$
$Q_0$	0	1	$Q_9$	90	16,6
$Q_1$	10	3,8	$Q_{10}$	100	17,3
$Q_2$	20	6,2	$Q_{11}$	110	18,0
$Q_3$	30	8,3	$Q_{12}$	140	19,7
$Q_4$	40	10,3	$Q_{13}$	170	20,8
$Q_5$	50	11,8	$Q_{14}$	225	21,9
$Q_6$	60	13,2	$Q_{15}$	255	22,3
$Q_7$	70	14,5	$Q_{16}$	285	22,5
$Q_8$	80	15,5	$Q_{17}$	300	22,6

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Como fizemos no experimento da água quente, para melhor visualização dos resultados, representamos-os no gráfico (Figura 6). A curva na cor azul, representa a solução (4.9). Os

pontos na cor azul sobre a curva, retratam os pontos teóricos descritos na Tabela 5. Os pontos em verde representam os registros das temperaturas nos intervalos de tempo descritos na Tabela 4. A linha pontilhada respresenta a função constante  $g(t) = 23$ .

Figura 6 – Gráfico do Experimento Água Fria



Fonte: Autor (2022).

A partir da análise do gráfico da Figura 6, vimos que os resultados práticos também têm boa aproximação aos resultados teóricos, com margem de erro relativamente pequena. A discrepância nos resultados pode ter ocorrido pela variação de temperatura de aproximadamente  $1,5^\circ\text{C}$  que foi detectada pelo termômetro de ambiente durante o experimento. A falta de um laboratório de física para controlar a temperatura ambiente, mantendo-a constante durante todo o experimento, nos limita a conseguir resultados mais precisos, mas com este trabalho podemos concluir que a aplicabilidade da teoria em situações reais de nosso cotidiano é possível, com resultados aproximados.

Veja a seguinte situação cotidiana em que podemos aplicar a Lei de Resfriamento de Newton. Imagine que temos um certo alimento que devemos mantê-lo refrigerado e que, na temperatura ambiente, este alimento ficará inutilizável em um certo período de tempo. Caso falte energia elétrica, conseguimos prevê quanto tempo podemos ficar sem energia garantindo que o alimento não estrague. Para isso, basta calcularmos quanto tempo este alimento chegará na temperatura ambiente e adicionar o tempo em que ele pode ficar nessa temperatura. Obviamente os resultados encontrados serão aproximados.

Antes da execução do experimento, imaginávamos que a água fria atingiria a temperatura ambiente mais rápido que a água quente, pois o intervalo de temperatura era menor. Nos surpreendemos, visto que os dados, tanto teóricos quanto práticos, das tabelas nos mostram

que água fria, após 300 minutos, não havia atingido a temperatura do ambiente ainda. Agora com a água quente, as tabelas nos mostram que após apenas 225 minutos a temperatura já havia chegado bem próximo a temperatura do ambiente, nos permitindo admitir a estabilidade. Isso nos evidencia que os fenômenos físicos nem sempre se comportam como indica o senso comum, porém o modelo se mostrou eficiente e previu essa diferença.

Da mesma forma que fizemos com os dados do experimento com a água quente, calculamos os erros relativos e erros absolutos do experimento com a água fria. Na Tabela 6 a seguir, apresentamos os pontos  $Q$  e  $P$ , que dizem respeito aos pontos da teoria e prática, respectivamente.

Tabela 6 – Cálculo dos Erros Experimento Água Fria

Ponto	Temperatura (°C)	Ponto	Temperatura (°C).	Erro Abs.	Erro Rel. (%)
$Q_0$	1	$P_0$	1	0	0
$Q_1$	3,8	$P_1$	3,8	0	0
$Q_2$	6,2	$P_2$	5,2	1	16,1
$Q_3$	8,3	$P_3$	7,5	0,8	9,6
$Q_4$	10,3	$P_4$	9,8	0,5	4,8
$Q_5$	11,8	$P_5$	11,3	0,5	4,2
$Q_6$	13,2	$P_6$	12,8	0,4	3
$Q_7$	14,5	$P_7$	13,8	0,7	4,8
$Q_8$	15,5	$P_8$	14,6	0,9	5,8
$Q_9$	16,6	$P_9$	15,3	1,3	7,8
$Q_{10}$	17,3	$P_{10}$	15,9	1,4	8
$Q_{11}$	18	$P_{11}$	16,8	1,2	6,6
$Q_{12}$	19,7	$P_{12}$	18,5	1,2	6
$Q_{13}$	20,8	$P_{13}$	19,8	1	4,8
$Q_{14}$	21,9	$P_{14}$	21,2	0,7	3,1
$Q_{15}$	22,3	$P_{15}$	21,6	0,7	3,1
$Q_{16}$	22,5	$P_{16}$	21,8	0,7	3,1
$Q_{17}$	22,6	$P_{17}$	22,1	0,5	2,2

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Analizando a Tabela 6, vimos que os erros são bem menores quando comparado com os erros da Tabela 3. Isso pode ter acontecido porque o intervalo de temperatura é menor para a água fria. Considere  $A$  o intervalo de temperatura em graus celsius para o experimento com a água quente:

$$A = \{t \in \mathbb{R} : 24 \leq t \leq 97, 1\}.$$

Agora considere  $B$  o intervalo de temperatura em graus celsius para o experimento com a água fria:

$$B = \{t \in \mathbb{R} : 1 \leq t \leq 23\}.$$

Veja que o intervalo  $A$  é bem maior que o intervalo  $B$  com diferença de  $51,1^{\circ}\text{C}$ . Outro fator que pode ter influenciado nos erros, foi o intervalo entre as medições de temperatura que foram reduzidos para este experimento.

Ao observar os dados da Tabela 6, vimos que o maior erro relativo foi de  $1,4^{\circ}\text{C}$  e o maior erro absoluto foi de  $16,1\%$ . Se pegássemos intervalos de tempo bem pequenos poderíamos ter erros absolutos menores, mas era inviável fazer medições em intervalos menores, pois os termômetros que possuíamos tinha precisão de apenas três dígitos e não registrava algumas diferenças de temperatura. O menor erro absoluto foi de  $0,4^{\circ}\text{C}$  e o menor erro relativo foi de  $2,2^{\circ}\text{C}$ . Com relação aos pontos  $Q_0 = P_0$  e  $Q_1 \approx P_1$  da figura 6, da mesma forma que ocorreu no experimento com a água quente, os erros são iguais a zero porque os pontos do experimento prático foram usados como parâmetros no problema de valor inicial calculado na teoria.

Considerando os dados da Tabela 6 como um todo, temos que o erro absoluto ficou em média  $0,7^{\circ}\text{C}$  e o erro relativo em média  $4,9\%$ . Resultados satisfatórios e que confirma que o modelo funciona, visto que

é evidente que qualquer descrição matemática de um fenômeno físico não é mais que uma modelização teórica de algo, para permitir a sua compreensão. Essa modelização, mesmo que seja feita com um elevado grau de rigor, nunca corresponde em absoluto ao verdadeiro fenômeno em causa (CABRAL, 2004, p. 12).

Assim, ressaltamos que tomamos os cuidados possíveis para minimizar os erros, mas é impossível não nos depararmos com eles ao realizar o experimento prático.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, percebemos que, apesar dos erros de aproximações devidos às condições limitadas para o experimento, os objetivos iniciais deste trabalho foram atingidos. O modelo matemático se aplica, a menos de possíveis erros numéricos, às situações cotidianas, tanto para a água fria, quanto para a água quente. Conseguimos, por meio do experimento e cálculo da teoria, confirmar que o modelo de Resfriamento de Newton é válido. O modelo é conhecido com modelo de “resfriamento”, mas vimos que também é válido para o aquecimento.

A partir do experimento, percebemos que por conta das limitações dos instrumentos utilizados para medição da temperatura e a falta de controle total da temperatura do ambiente, a possibilidade de erros acontecerem era eminente. Com isso, fez-se necessário o cálculo dos erros absolutos e relativos da teoria relacionada com a prática. Após a análise dos erros, percebemos que estes eram bem pequenos e não têm grande influência nos resultados que esperávamos.

Outro aspecto importante no desenvolvimento deste trabalho diz respeito a algumas habilidades aprimoradas para sua execução. Por exemplo, o uso do editor de textos LaTeX que foi exigido pela primeira vez no curso de Licenciatura em Matemática durante a componente curricular EDO. Logo em seguida, durante os trabalhos como monitor do PIIP, mas durante o desenvolvimento desta monografia, foi necessário o aprendizado de muitos outros recursos desta ferramenta tão ampla. O mesmo pode se dizer do *Geogebra*, que pouco foi utilizado no decorrer da graduação, mas essencial para a construção dos gráficos apresentados neste trabalho.

Para a escrita desta monografia, fez-se necessário um estudo mais aprofundado nas áreas de EDO's lineares de primeira ordem e Termodinâmica. Assim, ao se aprofundar nestes temas, muitos conceitos antes apresentados nas componentes curriculares, não só relacionados diretamente ao tema, foram compreendidos com mais clareza.

Com relação aos motivos que levaram ao desenvolvimento deste trabalho, ressaltamos que, pessoalmente, o curso de Licenciatura em Matemática cumpriu seu papel, uma vez que suas disciplinas e projetos despertaram o interesse pela pesquisa, contribuindo para a formação do professor pesquisador.

O experimento do Modelo de Resfriamento de Newton é relativamente simples e não requer equipamentos sofisticados. Desta forma, pode ser proposto pelo professor como atividade para os discentes das componentes EDO e Física II, a fim de auxiliar na compreensão dos temas envolvidos. Por fim, ressaltamos que existem diversas outras aplicações de EDO que podem inspirar outros trabalhos acadêmicos. Por exemplo, crescimento populacional, sistema massa-mola, circuitos em série, dentre outras aplicações. Então, entendemos que é muito importante os professores continuarem abordando aplicações em suas aulas.

## REFERÊNCIAS

- BARROSO, Leônidas Conceição et al. **Cálculo numérico**. Harbra Ltd., São Paulo, 1987.
- BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática No Ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2005.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno**. Tradução Horcio Macedo. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 365 p. Tradução de: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.
- BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino e aprendizagem**. Tese (Doutorado educacional). Faculdade de Educação. Universidade de Campinas - Unicamp. Campinas, 1992.
- CABRAL, Paulo. **Erros e incertezas nas medições**. sítio da Internet, 2004. Disponível no endereço <<http://www.peb.ufrj.br/cursos/ErrosIncertezas.pdf>>. Acesso em: 13 jul. 2022.
- CARVALHO, Cristh Júnior Pereira. **Modelo Predador-Presa: uma aplicação de sistemas de equações diferenciais ordinárias**. 2019. 65 f. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019.
- COSTA, Felipe de Almeida. **Ensino matemática por meio da modelagem matemática**. Ensino da Matemática em Debate, v. 3, n. 1, 2016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física Vol. 2: Gravitação, ondas e termodinâmica** Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora SA , 2009. 295 p.
- SANTOS, Priscila Miranda Engelhardt et al **Modelagem Matemática Na Lei de Resfriamento de Newton: Experiência com Garafas Térmicas** South American Journal of Basic Education, Technical and Technological, v. 6, n. 2, p. 21-39, 2019.
- STEWART, James. **CÁLCULO VOLUME 1 - TRADUÇÃO DA 6ª EDIÇÃO NORTE-AMERICANA**. Cengage Learning Edições Ltda., 2010.
- ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: MAKRON Books, 2001. 422 p. v. 2.