



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA

ALANA CRUZ DE SOUSA

**ASPECTOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES DO  
CÁLCULO COM FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA**

Araguaína  
2014

ALANA CRUZ DE SOUSA

**ASPECTOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES DO  
CÁLCULO COM FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Araguaína  
2014

---

Sousa, Alana Cruz de

ASPECTOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES DO CÁLCULO COM FUNÇÕES  
DE VARIÁVEL COMPLEXA/ Alana Cruz de Sousa. – Araguaína:[s.n], 2014.

61 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Trabalho de Conclusão de Curso – Fundação Universidade Federal do Tocantins – UFT,  
2014.

1. Teoria Quântica de Campos. 2. I. Orientador Dr. Luís Antonio Cabral II. Fundação  
Universidade Federal do Tocantins IV. Título Graduação

CDU 02:141:005.7

---

ALANA CRUZ DE SOUSA

## ASPECTOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES DO CÁLCULO COM FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

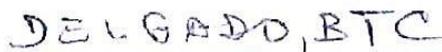
Aprovado em: 16/10/2014.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Luís Antonio Cabral



---

Prof. Me. Basilides Temistocles  
Colunche Delgado



---

Prof. Dr. Érica Cupertino Gomes

*Dedico este trabalho aos meus pais, Alzira e Roberto, que nunca pouparam sacrifícios para que eu pudesse estudar. Dedico também a minha preciosidade, minha filha, Catarina.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu bom Deus, por ser minha fonte de sabedoria, paz e amor. Por ter me guiado e me dado a força necessária para suportar e passar por todos os desafios que me foram impostos.

Aos meus pais e ao meu irmão, Roberto Fernandes de Sousa, Alzira Gonçalves Cruz de Sousa e Artur Cruz, por todo o esforço e dedicação como minha família. Agradeço ainda, pela colaboração em todos os aspectos possíveis creditados à minha vida acadêmica.

Aos meus avôs, José Auilson B. Cruz e Luzia G. Cruz, por acreditarem em mim, no meu sucesso. E também pela contribuição em todos os aspectos, mas principalmente financeira, que me ajudou a ir aos eventos realizados em outros estados para apresentar meus trabalhos e conquistar, além de novas amizades, mais conhecimento.

A minha filha, Catarina Marie, que é Luz em minha vida. Que mesmo sem saber colaborou com a mamãe, que sorriu quando eu só pensava em chorar, me garantindo a força que eu precisava.

Ao Isaías Borges, por todo o apoio e compreensão. Por ser a pessoa com quem pude compartilhar e enfrentar momentos de alegrias e tristezas ao longo desses quatro anos.

Aos meus professores, Alexsandro Silvestre, Daiara Resende, Diógenes Neto, Edison Franco, Erica Gomes, Jaime Zanolla, Liliana Yolanda, Luis Juracy, Matheus Lobo, Nilo Maurício, Regina Lélis, Rogério Carneiro e Shirlei Nabarrete, por todo o exemplo acadêmico e conhecimento compartilhado. Em especial, meu orientador neste trabalho, Luís Cabral.

A todos os colegas de curso, pelo apoio, incentivo e principalmente, pela amizade construída e lapidada durante esta jornada. Em especial a Alexandre, Edilon, Everton, Jadson, Jackson, Jakeline Bastos, Kamilla, Lídia Cruz, Michelle Soares, Paola Seidel, Petronílio, Sergivan e Rafael. Obrigada!

E por fim agradecer a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação.

*“A colaboração intelectual entre dois indivíduos pode produzir uma fusão entre as duas esferas de consciência, como um grau inacreditável chegando mesmo a fundir dando unidade empírica.”*  
*Erwin Schrödinger*

# Resumo

O cálculo com funções de variável complexa possui uma base mais ampla e completa em relação ao cálculo com funções reais. Neste sentido, este trabalho objetiva aplicar na equação de Schrödinger independente do tempo o cálculo com funções de variável complexa. Alguns métodos matemáticos, como a fórmula integral de Cauchy e o teorema dos resíduos, ganharam destaque neste trabalho, por serem essenciais no tratamento de integrais que são analíticas e para as que possuem singularidades. Nossa metodologia envolve o estudo bibliográfico em conjunto com o estudo algébrico e analítico de situações problemas, próprios do sistema complexo. Contudo, verificamos que as técnicas de soluções estudadas possuem contribuições importantes não somente para o desenvolvimento de soluções dos problemas propostos, mas para aplicações importantes no ramo da Física Matemática.

**Palavras-chaves:** Funções de Variável Complexa. Cálculo. Mecânica Quântica.

# Abstract

The complex variable calculus has a large and complete basis compared to real variable calculus. By the way, this work applies the real variable calculus to the time independent Schrödinger equation. Some mathematical methods, as the Cauchy integral formula and residues theorem, have emphasis in this work, by essentially in the integration treatment that are analytical and with singularities. Our methodology involves the bibliographic study with algebraic and analytical situations related to complex systems. However, we noted that some solution techniques have important contributions not only in the solution development of proposed problems, but for important applications in the Mathematical Physics branch.

**Key-words:** Complex variable functions. Calculus. Quantum Mechanics.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>NÚMEROS COMPLEXOS</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Propriedades dos Números Complexos</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Álgebra dos Números Complexos</b> . . . . .	<b>20</b>
1.2.1	Regras Operacionais . . . . .	20
1.2.2	Exemplos: . . . . .	21
<b>2</b>	<b>FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.1</b>	<b>Funções Polinomiais</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1.1	Exemplo . . . . .	24
<b>2.2</b>	<b>Funções Exponenciais</b> . . . . .	<b>24</b>
2.2.1	Propriedades . . . . .	24
2.2.2	Exemplos: . . . . .	25
<b>2.3</b>	<b>Funções Trigonométricas e Hiperbólicas</b> . . . . .	<b>26</b>
2.3.1	Exemplos: . . . . .	26
<b>3</b>	<b>O CÁLCULO COM FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Derivadas com Funções de uma Variável Complexa</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1.1	Condições de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares . . . . .	32
3.1.2	Exemplo . . . . .	32
<b>3.2</b>	<b>Integral no Plano Complexo</b> . . . . .	<b>34</b>
3.2.1	Integral de Caminho . . . . .	35
3.2.2	Integral de Caminho e as Funções Analíticas . . . . .	38
<b>3.3</b>	<b>Teorema da Integral de Cauchy</b> . . . . .	<b>39</b>
3.3.1	Aplicações do Teorema da Integral de Cauchy . . . . .	40
<b>3.4</b>	<b>Cálculo de Resíduos</b> . . . . .	<b>41</b>
3.4.1	Expansão de Laurent . . . . .	41
3.4.2	Teorema dos resíduos . . . . .	41
3.4.3	Aplicações do Teorema dos Resíduos . . . . .	42
<b>3.5</b>	<b>Transformada de Fourier</b> . . . . .	<b>45</b>
3.5.1	Teorema da Inversão . . . . .	45
3.5.2	Transformada de Fourier – Delta de Dirac . . . . .	46
<b>4</b>	<b>ALGUMAS APLICAÇÕES NA MECÂNICA QUÂNTICA</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Equação de Schrödinger independente do tempo</b> . . . . .	<b>47</b>

4.1.1	Aplicação da Fórmula Integral de Cauchy . . . . .	52
4.1.2	Aplicação do Teorema dos Resíduos . . . . .	53
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>57</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>59</b>

# Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) surgiu a partir da Mecânica Quântica (MQ) junto ao formalismo da teoria da relatividade de Einstein na metade do século XX. A própria MQ, enquanto precursora da TQC, contribuiu ao longo dos anos para o desenvolvimento de diversos dispositivos eletrônicos, entre eles a câmera digital que é produto do princípio fotoelétrico junto ao formalismo da mecânica quântica. Outra contribuição impactante foram os semicondutores que é um dos principais componentes dos dispositivos atuais.

Em vista de toda a contribuição que a mecânica quântica nos proporciona o que podemos esperar do formalismo da TQC? É importante destacar que o Prêmio Nobel de Física em 2013 foi concedido à François Englert e Peter W. Higgs pela teoria que explica como as partículas adquirem massa. Esta ideia, construída a partir da TQC foi proposta independentemente por cada um deles em 1964 e só em 2012 foi confirmada pela descoberta da partícula de Higgs no Large Hadron Collider - LHC (Grande Colisor de Hadrón) do laboratório CERN.

O LHC, por sua vez, teve sua construção motivada pela TQC que tem como objetivo descrever o decaimento de partículas e prever o surgimento de novas partículas no universo. Mesmo com os destaques na fronteira dos conhecimentos físicos, a TQC perde visibilidade nos currículos atuais dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física que exploram pouquíssimo os métodos matemáticos que a sustentam.

Neste trabalho, objetivamos estudar os aspectos matemáticos do cálculo com funções de variável complexa aplicado em parte da solução da equação de Schrödinger independente do tempo, problema físico da MQ e TQC. Em vista da necessidade do atual currículo do curso de Licenciatura em Física, daremos maior destaque no detalhamento dos cálculos e métodos explorados. Este conteúdo será fundamental para os alunos que buscam o domínio das ferramentas matemáticas utilizadas e materiais introdutórios destas áreas.

A metodologia utilizada envolve a pesquisa bibliográfica em conjunto com o estudo algébrico e analítico de exemplos e situações que ilustram as principais ferramentas do cálculo com funções de variável complexa dando ênfase ao tratamento matemático e aplicação dos métodos base deste formalismo. Desta forma, será considerado o conteúdo mínimo para resolver alguns problemas fundamentais da Mecânica Quântica.

Os capítulos 1,2 e 3, fazem uma introdução teórica sobre os métodos de soluções matemáticas com o auxílio dos números complexos. Começaremos com uma introdução ao

estudo algébrico dos números complexos. Em seguida, funções de variáveis complexas e no terceiro capítulo, estudaremos o cálculo com funções de variáveis complexas que envolve as principais técnicas matemáticas a serem utilizadas no quarto capítulo.

No capítulo 4, construiremos a função de Green para a equação de Schrödinger independente do tempo na qual aplicaremos à parte da solução, dois métodos úteis do cálculo com funções de variável complexa. Por fim, apresentaremos nossas considerações finais para este trabalho.

# 1 Números Complexos

Antes de mais nada, é importante destacar que o estudo dos números complexos é de fundamental importância para o entendimento de algumas integrais que ocorrem no cálculo das Funções de Green, em especial na solução da equação de Schrödinger independente do tempo, que será explorado no capítulo 4 deste trabalho. Áreas como a Mecânica Quântica, Teoria Quântica de Campos e até mesmo a Física ondulatória, necessita do tratamento matemático à base de números complexos. Neste sentido, este capítulo será dedicado à apresentação de um ponto de vista prático, que envolve a discussão e desenvolvimento de exemplos sobre os conceitos mínimos dos números complexos  $\mathbb{C}$ .

## 1.1 Propriedades dos Números Complexos

Os números complexos possuem uma estrutura que engloba os números naturais, irracionais, racionais e reais. Em referências como Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988), apresentam como motivação mais comum para o estudo dos números complexos, as equações de 2º grau,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cujas as raízes são dadas pela fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desta fórmula, obtemos duas raízes, quando o radical ( $b^2 - 4ac$ ) é positivo. E apenas uma, quando o mesmo for nulo.

Para o radical negativo a fórmula de Bhaskara não conduz a nenhuma raiz real. Neste sentido, considere como exemplo a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0. \tag{1.1}$$

Para a solução desta equação, temos que

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}. \tag{1.2}$$

Observe que qualquer valor de  $x$  na equação (2) não possui uma solução geral. Neste caso, note que podemos reescrevê-la se operarmos com o símbolo  $i = \sqrt{-1}$ . Isto define uma propriedade dada seguinte forma:

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} \tag{1.3}$$

que resulta em duas soluções possíveis:  $3 + 2\sqrt{-1} = 3 + i2$  e  $3 - 2\sqrt{-1} = 3 - i2$ .

Portanto, as soluções resultantes da equação (1.1) é motivação para o estudo da álgebra dos números complexos, assunto da próxima seção.

## 1.2 Álgebra dos Números Complexos

A forma algébrica para um número complexo  $\mathbb{C}$  é dado por  $z = a + ib$ , onde  $a$  é a parte real (Re) de  $z$  e  $b$  a parte imaginária (Im) de  $z$ . Definimos o conjugado de um número complexo  $z^*$  ou  $\bar{z} = a - ib$ . A partir da Fig. 1, podemos pensar no conjugado de  $z$  como seu reflexo no plano complexo, mas note que o conjugado e o oposto de  $z$  são situações distintas.

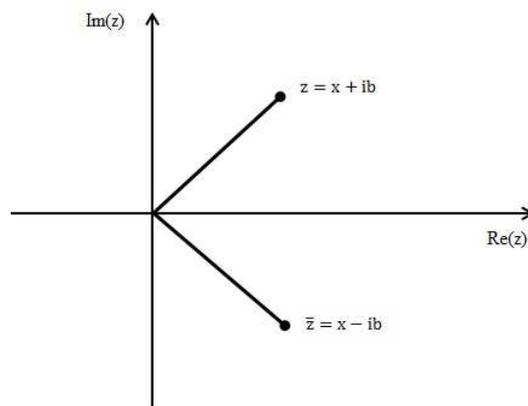


Figura 1 – Representação de  $z$  e o conjugado  $\bar{z}$  no plano complexo.

Fonte: Elaborado pela autora

Agora, voltemos aos resultados obtidos da equação (1.1), onde obtivemos as raízes de  $x$  igual a  $3 + i2$  e  $3 - i2$  que são números complexos e sua solução é dada pela seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned} (3 + 2i)(3 - i2) &= 9 - i6 + i6 - i^24, \\ &= 3^2 - i^24. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como  $i = \sqrt{-1}$ , temos que  $i^2 = -1$ . Neste caso,

$$(3 + 2i)(3 - i2) = 3^2 - (-1)4 = 13, \tag{1.5}$$

o qual é um resultado complexo  $13 + i0$ , mas que também pode ser considerado apenas real.

### 1.2.1 Regras Operacionais

O conjunto dos números complexos, segundo Ávila (2008) e Butkov (1988), é dado pelos pares ordenados dos números reais  $(a,b)$ , onde  $a$  é o primeiro elemento, e  $b$ , o segundo. Os números complexos gozam das propriedades dos números reais em que estão

definidos: igualdade, adição e multiplicação. Desta forma, vejamos alguns exemplos em que as propriedades algébricas dos números reais se estendem ao conjunto dos números complexos:

a) *Propriedade associativa*: seja  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$  e  $z_3 = e + if$ . Assim,  $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .

b) *Propriedade comutativa*: seja  $z_1 = a + ib$  e  $z_2 = c + id$ , onde  $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ , e ainda,  $z_2 + z_1 = (c + a) + i(d + b)$ . Deduzimos então que  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .

c) *Propriedade distributiva*: seja  $z_1 = a + ib$  e  $z_2 = c + id$  números complexos distintos. Assim, na adição temos que

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (1.6)$$

e multiplicação:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Exemplos:

Considere  $z_1 = a + ib$  e  $z_2 = c + id$ .

1- Prove que:

$$\overline{|z|} = |z|.$$

*Demonstração*:

$$\begin{aligned} \overline{|z|} &= \overline{|a + ib|} \\ &= \overline{\sqrt{a^2 - i^2 b^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2- Prove que:

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

*Demonstração*:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - aib + aib - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

## 2 Funções de Variável Complexa

Vamos construir um mapeamento de um ponto do plano complexo  $(x, y)$  para outro plano  $(u, v)$ . Segundo Ávila (2008), cada elemento de  $z$  no plano  $(x, y)$  corresponde a um único número complexo  $w$  no plano  $(u, v)$ . Observe que  $z$  e  $w \in \mathbb{C}$ , mas  $x, y, u$  e  $v \in \mathbb{R}$ . Nestas condições, diz-se que  $f(z)$  é uma função com domínio em  $(x, y)$ , onde  $z = x + iy$  é chamada *variável independente*, e  $w = u + iv$ , a *variável dependente*, ou seja,  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$ .

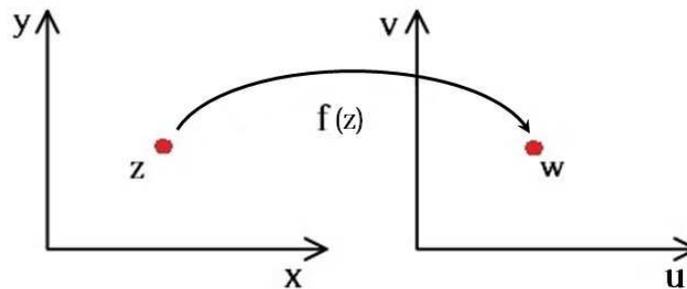


Figura 2 – Representação da correspondência do ponto  $w$  a uma função complexa  $z$  presentes em planos complexos distintos.

Fonte: Elaborado pela autora

Para melhor exemplificar, considere o seguinte polinômio  $f(z) = z^2$ , onde  $z = x + iy$ . Assim,

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Veja que ao substituir  $z$  em  $f(z)$  obtivemos um polinômio com termos reais e outros dependentes de  $i$ . Assim,

$$w = u(x, y) + v(x, y),$$

$$w = x^2 - y^2 + i2xy.$$

### 2.1 Funções Polinomiais

Consideramos uma função polinomial complexa a seguinte expressão

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + K + a_n z^n,$$

com  $a_n \neq 0$  onde os coeficientes  $a_k$  são números complexos e  $n$  é o grau da função polinomial. Podemos obter também funções polinomiais complexas com coeficientes reais.

### 2.1.1 Exemplo

Por exemplo, seja  $f(z) = z^2 + 3z - 5$ , temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + 3(x + iy) - 5 \\ &= x^2 + i2xy + i^2y^2 + 3x + i3y - 5 \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + 3x + i3y - 5, \end{aligned}$$

ou seja,  $u = x^2 - y^2 + 3x - 5$  e  $v = 2xy + 3y$ .

## 2.2 Funções Exponenciais

A definição de função exponencial complexa é motivada por  $e^z$ , onde

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \text{ para } z = (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Observe ainda que a expressão  $e^x$  é uma função real que envolve apenas variáveis reais. Tais funções podem ser definidas pelas séries de MacLaurin, nas quais

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad e \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Com isso, note que a exponencial complexa é uma extensão da exponencial real, visto que  $e^{x+i0} = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$ , mas se  $y \neq 0$ , temos que

$$e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y), \tag{2.1}$$

ou seja, uma expressão puramente imaginária.

### 2.2.1 Propriedades

As definições dadas para uma função exponencial estão em acordo com Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988), e estas satisfazem as seguintes propriedades:

$$e^{z_1 z_2} = e^{z_1 + z_2}; \tag{2.2}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}; \tag{2.3}$$

$$(e^z)^n = e^{zn}, \text{ para } n \text{ inteiro}; \tag{2.4}$$

$$e^z \neq 0 \text{ para todo } z; \tag{2.5}$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}; \tag{2.6}$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \text{ inteiro}. \tag{2.7}$$

Demonstraremos apenas as propriedades (2.2) e (2.3). Para a primeira demonstração considere  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Já para segunda,  $z = x + iy$ .

Para (2.2),

$$\begin{aligned}
 e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\
 &= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\
 &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] \\
 &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} \\
 &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\
 &= e^{z_1+z_2}.
 \end{aligned}$$

Para (2.3), temos

$$\begin{aligned}
 e^{-z} &= e^{-x} e^{-iy} \\
 &= \frac{1}{e^x}[(\cos y - i \operatorname{sen} y)] \\
 &= \frac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\
 &= \frac{1}{e^{x+iy}}.
 \end{aligned}$$

Ainda é possível, a partir da notação exponencial, a representação polar de um número complexo na qual  $z = r e^{i\theta}$ , onde  $r = |z|$  e  $\theta = \operatorname{arg} z$ . Ainda de acordo com Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988), a mesma notação permite escrever a fórmula de De Moivre em que

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

### 2.2.2 Exemplos:

1- Escreva na forma de  $z = r e^{i\theta}$ .

a)  $z = -2 + 2i$ .

$$\begin{aligned}
 r &= |z| \implies r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\
 \theta &= \operatorname{arctan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \implies \theta = \operatorname{arctan}^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) \\
 \theta &= \operatorname{arctan}^{-1}(-1) = 45^\circ = 180 - 45 = 135^\circ.
 \end{aligned}$$

b)  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \implies r = \sqrt{1+3} = 2 \\
 \theta &= \operatorname{arctan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ.
 \end{aligned}$$

## 2.3 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Introduziremos a definição das funções trigonométricas a partir da definição da função exponencial complexa, em que  $y \in \mathbb{R}$ . Com isso obtemos as seguintes expressões:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad e \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \quad (2.8)$$

A partir da relação existente entre os dois exponenciais, estabelecemos as fórmulas de Euler para

$$\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{i2}, \quad (2.9)$$

[para mais detalhes veja em Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988)]. Analogamente, obtemos as funções trigonométricas,

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2}. \quad (2.10)$$

Podemos ainda obter as seguintes relações:

$$\tan(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}. \quad (2.11)$$

É importante ressaltar que as identidades trigonométricas permanecem válidas no campo complexo, assim como as fórmulas de derivação.

As funções hiperbólicas de seno e cosseno decorrem, no caso de variáveis reais, as seguintes expressões:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad e \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Exemplos:

Seja  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2} \\ &= (\cos x) \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i(\operatorname{sen} x) \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h y. \end{aligned} \quad (2.13)$$

De forma análoga temos que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{sen} h y.$$

Simplifique a seguinte expressão:

a)

$$A + B = \left[ \frac{(1 + i\alpha)e^{k_2a}}{2} + \frac{(1 - i\alpha)e^{-k_2a}}{2} \right].$$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} A + B &= \left[ \frac{e^{k_2a}}{2} + \frac{i\alpha e^{k_2a}}{2} + \frac{e^{-k_2a}}{2} - \frac{i\alpha e^{-k_2a}}{2} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{e^{k_2a} + e^{-k_2a}}{2} \right) + i\alpha \left( \frac{e^{k_2a} - e^{-k_2a}}{2} \right) \right] \\ A + B &= [\cosh(k_2a) + i\alpha \sinh(k_2a)]. \end{aligned}$$

## 3 O Cálculo com Funções de uma Variável Complexa

Uma das principais bases operacionais para o estudo da Mecânica Quântica é o cálculo com funções de variáveis complexas. Este capítulo, será dedicado ao tratamento matemático de funções com determinadas condições em que podemos utilizar diversos métodos de solução. Desta forma, tentaremos desenvolver com o máximo de detalhes alguns exemplos fundamentais para desenvolvimento de problemas do próximo capítulo.

### 3.1 Derivadas com Funções de uma Variável Complexa

Para iniciarmos o estudo das derivadas complexas, veremos primeiro o caso real  $\mathbb{R}$  para uma função  $F(x)$  em que  $F(x)$  e  $x \in \mathbb{R}$ . De acordo com Arfken (2007) e Butkov (1988) podemos verificar que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow h} \frac{(x+h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observe que a derivada de  $F(x)$  em  $x_0$  é definida somente se o limite existir. Outra forma de representá-lo, segue no seguinte formato:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}. \quad (3.2)$$

Ainda de acordo com Arfken (2007) e Butkov (1988), ao considerarmos um  $x_0$  específico, o limite existe se:

$$\lim_{x_0 \rightarrow h^+} \frac{(x+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_0 \rightarrow h^-} \frac{(x+h) - f(x_0)}{h}, \quad (3.3)$$

ou seja,  $\lim_{\delta x \rightarrow 0}$  existe se  $\lim_{\delta x \rightarrow 0^+} \frac{(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0^-} \frac{(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$  e esta condição independe do caminho. Para compreendermos então como isso ocorre no plano complexo, vamos considerar dois caminhos independentes representados na (Figura 3).

A partir disto surge o questionamento: como definiremos  $\frac{dF}{dz}$ ? Para responder a este questionamento, temos dois caminhos possíveis.

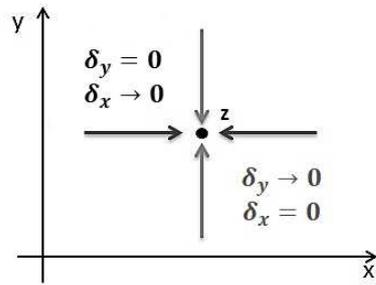


Figura 3 – Caminhos independentes.

Fonte: Elaborado pela autora

**1º Caminho** -  $\delta z = \delta x + i\delta y$

De acordo com a (Figura 3) segue as seguintes condições:

$$\delta z = \delta x,$$

$$\delta z \rightarrow 0,$$

$$\delta x \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta F &= u(x, y) + iv(x, y), \\ &= u(x + \delta x, y + \delta y) + iv(x + \delta x, y + \delta y) - u(x, y) - iv(x, y). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta z} &= \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x}, \\ &= \frac{u(x + \delta x, y) - u(x, y)}{\delta x} + \frac{iv(x + \delta x, y) - v(x, y)}{\delta x}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por este caminho, temos

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta z} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\therefore \frac{dF}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.6)$$

**2º Caminho** -  $\delta z = \delta x + i\delta y$

Ainda de acordo com a (Figura 3) as condições para o 2º caminho são:

$$\delta z = \delta y,$$

$$\delta z \rightarrow 0,$$

$$\delta y \rightarrow 0.$$

Desta forma,

$$\delta F = \delta u + i\delta v,$$

resumidamente temos,

$$\delta u = u(x, y + \delta y) - u(x, y) \quad (3.7)$$

$$e \quad (3.8)$$

$$\delta v = v(x, y + \delta y) - v(x, y). \quad (3.9)$$

Assim, temos

$$\frac{dF}{dz} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left( \frac{\delta u}{\delta iy} + i \frac{\delta v}{\delta iy} \right)$$

$$\therefore \frac{dF}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{-\partial u}{\partial y} \quad (3.10)$$

Como o limite existe e independe do caminho,  $\frac{dF}{dz}$  é definida onde ( $f$  é derivável). Assim, quando  $f(z)$  é derivável, isto implica nas “Condições de Cauchy-Riemann”-CCR, onde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial u}{\partial y}. \quad (3.12)$$

As condições de Cauchy-Riemann são necessárias, porém não suficiente, para que uma função  $f$  tenha derivada. Todavia, se juntarmos esta às condições de continuidade para as derivadas de  $u$  e  $v$  numa região  $R$ , estabeleceremos uma característica essencial das funções analíticas em termos das equações de Cauchy-Riemann. Para compreendermos melhor, consideremos o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Sejam  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  funções reais com derivadas parciais contínuas numa região  $R$ . Então, uma condição necessária e suficiente para que a função  $f(z) = u + iv$  seja analítica em  $R$  é que as equações de Cauchy-Riemann estejam satisfeitas.*

**Definição:** uma função  $f(z)$  é analítica numa região  $R$  de plano complexo se  $f(z)$  é derivável em todos os pontos desta região.

Observe a Fig. 4, em que  $f(z)$  é derivável em todos os pontos da vizinhança de  $z_0$ , assim, a função  $f(z)$  é analítica neste ponto.

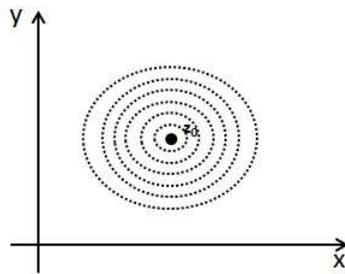


Figura 4 – Demonstração da vizinhança do ponto  $z_0$  no plano complexo.

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.1.1 Condições de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares

A Fig. 5 representa o estado do ponto  $z$  no plano, vejamos agora a mudança de variáveis de cartesianas para polares, onde  $|z| = r$  e  $z = re^{i\theta}$ ,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ .

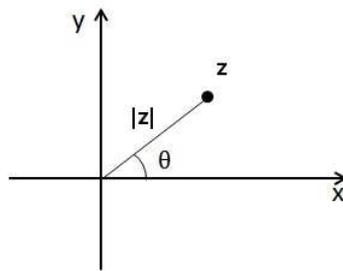


Figura 5 – Coordenadas polares no plano complexo.

Fonte: Elaborado pela autora

De acordo com Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988), temos que as CCR para coordenadas polares são:

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (3.13)$$

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.14)$$

Para compreendermos como verificar a analiticidade de uma função vejamos os exemplos a seguir.

### 3.1.2 Exemplo

1- Seja  $f(z) = z^2$ , onde  $z = x + iy$ .

*Demonstração*

a-

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + i2xy, \end{aligned}$$

onde  $u = x^2 - y^2$  e  $v = 2xy$ . Logo,

b-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad (3.18)$$

c-

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.20)$$

Deste modo, note que as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas em qualquer região do plano complexo e os resultados obedecem as CCR, logo  $f(z)$  é derivável em todo plano.

2- Seja  $f(r, \theta) = z^6$ , onde  $z = re^{i\theta}$ . Verifique se  $z^6$  é analítica.

*Demonstração*

a-

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= r^6 e^{i6\theta} \\ &= r^6 (\cos 6\theta + i \operatorname{sen} 6\theta) \\ &= r^6 \cos 6\theta + ir^6 \operatorname{sen} 6\theta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde,  $u = r^6 \cos 6\theta$  e  $v = r^6 \operatorname{sen} 6\theta$ .

b-

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 6r^5 \cos 6\theta \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r^6 6 \operatorname{sen} 6\theta \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 6r^5 \operatorname{sen} 6\theta \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r^6 6 \cos 6\theta \quad (3.25)$$

c-

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = 6r^6 \cos 6\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.26)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \theta} = 6r^6 \operatorname{sen} 6\theta = \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.27)$$

Deste modo,  $f$  é analítica em todo plano complexo  $\mathbb{C}$ .

3- Seja  $w = e^z$ , com  $z = x + iy$ . Verifique se a função é analítica.

*Demonstração*

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (3.28)$$

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \quad (3.29)$$

para todo  $z$ .

Veja também que,

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = \frac{\partial (e^x e^{iy})}{\partial x} = e^z, \quad (3.30)$$

as derivadas parciais das partes real e imaginária de  $e^z$  são contínuas em todo o plano. Portanto,  $e^z$  é analítica.

## 3.2 Integral no Plano Complexo

Seja  $F(x) = U(x) + iV(x)$  uma função contínua da variável real  $x$  num intervalo  $[a, b]$ . Sua integral é definida em termo da soma das integrais reais  $U$  e  $V$ , onde

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b U(x) dx + i \int_a^b V(x) dx. \quad (3.31)$$

Segundo Arfken (2007), “a integral de uma variável complexa sobre um contorno no plano complexo pode ser definida por uma analogia fiel à integral (de Riemann) de uma função real integrada ao longo do eixo real  $x$ ”. A partir disto e da definição dada acima, seguem as principais propriedades,

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} F(x) dx; \quad \operatorname{Im} \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \operatorname{Im} F(x) dx,$$

onde claramente  $a < b$  [para mais detalhes veja as referências Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988)]. Neste seguimento temos que as propriedades lineares são

$$\int_a^b [F(x) + G(x)] dx = \int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx \quad (3.32)$$

e

$$\int_a^b cF(x) dx = c \int_a^b F(x) dx \quad (3.33)$$

esta última é válida para  $c = \text{constante}$  que geralmente é complexa.

A representação polar para equação (3.31) é dada por

$$\int_a^b F(x)dx = re^{i\theta} \quad (r > 0), \quad (3.34)$$

onde,

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(x)dx = \int_a^b e^{-i\theta} F(x)dx.$$

### 3.2.1 Integral de Caminho

Assim como as derivadas dependem do caminho, veremos nesta seção que as integrais podem ser resolvidas também por diversos caminhos. Neste sentido, definimos a integral de caminho a partir da seguinte expressão

$$\int_C f(z)dz, \quad (3.35)$$

onde  $C$  é um caminho qualquer escolhido a partir de cada situação e  $f(z) = u + iv$ , é uma função contínua em  $C$ . A partir disso é interessante explorarmos algumas situações que envolvem este tipo de integral.

Considere, por exemplo, a integral de caminho aberto

$$\int_0^{1+i} (1-z)^2 dz. \quad (3.36)$$

A Fig. 6, representa os caminhos  $C_1$  e  $C_2$ . Nesta figura, note a mudança dos caminhos, de uma reta para uma curva, que envolve duas situações distintas. É importante destacar que, apesar de escolher apenas dois caminhos para demonstrar este exemplo, poderíamos ter escolhido outros, como por exemplo, o sentido anti-horário da circunferência presente na Fig. 6b e para qualquer caminho, o resultado desta integral em (3.36) tem que ser o mesmo. Note ainda que, nas duas situações a função sobre os caminhos  $C_1$  e  $C_2$  variam entre  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ , onde  $z = x + iy$  e  $dz = dx + idy$  em coordenadas cartesianas. Agora vejamos as soluções.

#### Solução para $C_1$ .

Veja primeiramente que o caminho  $C_1$  é de  $x = y$ , assim temos que  $z = x + ix$  e  $dz = dx + idx$ . Desta forma, reescrevemos

$$\begin{aligned} (1-z^2)dz &= [1 - (x+ix)^2(dx+idx)] & (3.37) \\ &= [1 - (x^2 + i2x^2 - x^2)(dx+idx)] \\ &= [(1 - x^2 - i2x^2 + x^2)(dx+idx)] \\ &= [(1 - i2x^2)(dx+idx)] \\ &= (1 + 2x^2)dx + i(1 - 2x^2)dx \end{aligned}$$

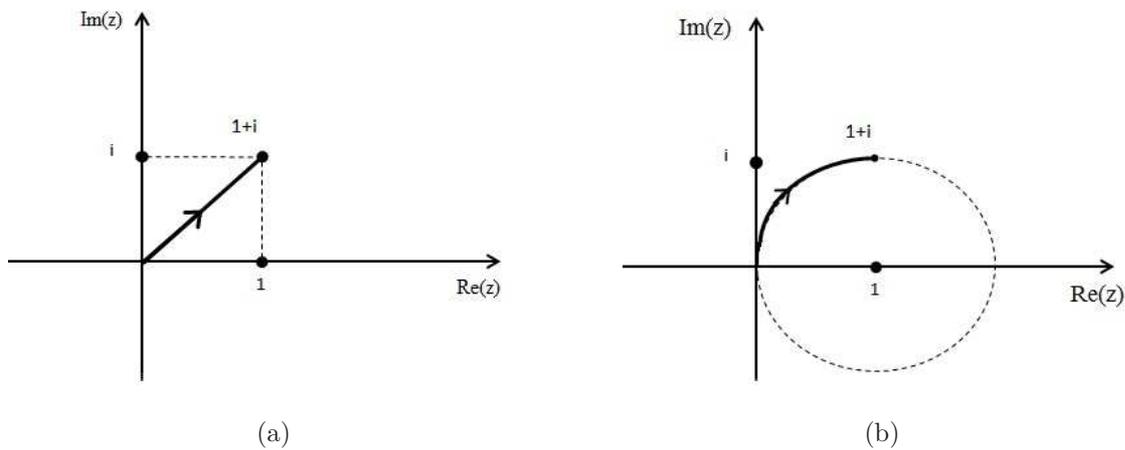


Figura 6 – As figuras (a) e (b) representam os caminhos  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente.  
Fonte: Elaborado pela autora.

Substituindo (3.37) em (3.36), obtemos

$$\begin{aligned}
 I_{C_1} &= \int_0^{1+i} (1-z)^2 dz & (3.38) \\
 &= \int_0^1 dx + 2 \int_0^1 x^2 dx + i \int_0^1 dx - i2 \int_0^1 x^2 dx \\
 &= x|_0^1 + \frac{2}{3}x^3|_0^1 + ix|_0^1 - i\frac{2}{3}x^3|_0^1 \\
 &= 1 + \frac{2}{3} + i - i\frac{2}{3} \\
 &= \frac{5}{3} + \frac{i}{3} \\
 I_{C_1} &= \frac{1}{3}(5+i)
 \end{aligned}$$

**Solução para  $C_2$ .**

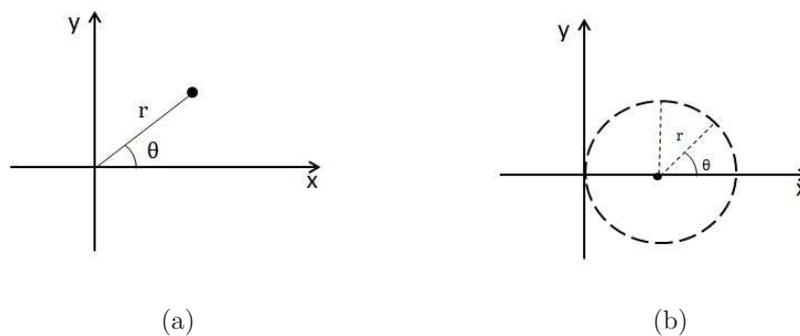


Figura 7 – Estratégia para representação da curva na forma polar.  
Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que todos os pontos da curva escolhida na Fig. 6b obedecem ao

$$\begin{aligned} |z - 1|^2 &= 1 \\ |(x + iy) - 1|^2 &= 1 \\ |(x - 1) + iy|^2 &= 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Isto pode ser facilmente verificado a partir da equação reduzida da circunferência

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

onde  $a$  e  $b$  são as coordenadas e  $r$ , o raio da circunferência.

Para tornar nossos cálculos mais triviais, recomendo nesta situação mudar as coordenadas de cartesiana para polar. Assim, definimos com o auxílio das figuras 6b, 7a e 7b que nossa curva está no sentido horário, saindo da origem do plano até o ponto  $(1+i)$ , com isso podemos verificar os seguintes valores de  $\theta$ :

$$\triangleright \text{ para } \theta = \pi \longrightarrow z_1 = 1 + e^{i\pi} = 1 - 1,$$

$$\triangleright \text{ para } \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$$

Logo, podemos substituir os intervalos da integral em (3.36) de  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 1 + i$  por  $z_1 = \pi$  e  $z_2 = \frac{\pi}{2}$  respectivamente. Além disso, se  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta$ . Logo, na curva  $1 - z^2 = -e^{i2\theta} - 2e^{i\theta}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} I_{C_2} &= \int_0^{1+i} (1 - z)^2 dz \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-e^{i2\theta} - 2e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \\ &= -i \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (e^{i3\theta} + 2e^{i2\theta}) d\theta \\ &= -i \left[ \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{i3\theta} d\theta + 2 \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{i2\theta} d\theta \right]. \end{aligned} \tag{3.40}$$

A partir disto temos que  $I_{C_2} = -i(I_1 + 2I_2)$ , onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{i3\theta} d\theta \\ &= \frac{e^{i3\theta}}{i3} \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{i3} \left[ \cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi \right] - \left[ \cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi \right] \\ &= \frac{1}{i3} (-i + 1) \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{1}{i3} \\ &= \frac{-1}{3} - \frac{i}{3} \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{i2\theta} d\theta & (3.42) \\
&= \frac{e^{i2\theta}}{i2} \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{i2} [\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi] - [\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi] \\
&= \frac{1}{i2} (-1 - 1) \\
&= -\frac{2}{i2} \\
&= i
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_{C_2} &= -i \left( i2 + \left( -\frac{1}{3} - \frac{i}{3} \right) \right) & (3.43) \\
&= -i \left( i2 - \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \right) \\
&= 2 - \frac{1}{3} + \frac{i}{3} \\
&= \frac{5}{3} + \frac{i}{3} \\
I_{C_2} &= \frac{1}{3}(5 + i).
\end{aligned}$$

Note que os dois caminhos utilizados são diferentes, mas os resultados em (3.38) e (3.43) são os mesmos. Isto prova que o cálculo da integral de números complexos podem ser resolvido por diversos caminhos abertos em acordo com a expressão em (3.35).

### 3.2.2 Integral de Caminho e as Funções Analíticas

Na seção anterior resolvemos o exemplo (3.36) de acordo com a expressão mais geral em (3.35) para provar que a partir de diversos caminhos abertos podemos chegar ao mesmo resultado de uma integral complexa. Agora, veja uma situação diferente, onde ao invés de um caminho aberto, trabalharemos com um caminho fechado em acordo com o teorema 2.

**Teorema 2.** *Se  $f(z)$  é uma função analítica numa região  $R$  simplesmente conexa do plano complexo e  $C$  é uma curva fechada nesta região  $R$ . Então,*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

A partir da Fig. 8, podemos verificar o teorema 2, somente se a função  $f$  for analítica em todos os pontos sobre a curva  $C$  e em seu interior, inclusive no ponto  $z_0$ .

Para compreendermos melhor esta condição, considere o exemplo dado na equação (3.36) a partir da Fig. 6b onde tínhamos um caminho aberto com intervalo de  $\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

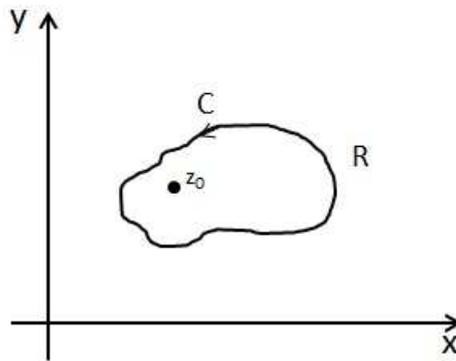


Figura 8 – Caminho fechado  $C$  numa região conexa  $R$  do plano complexo.

Fonte: Elaborado pela autora

para um caminho fechado com intervalo de  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 I_o &= \oint_C (1-z)^2 dz & (3.44) \\
 &= \int_0^{2\pi} (-e^{i2\theta} - 2e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta \\
 &= -i \left[ \int_0^{2\pi} e^{i3\theta} d\theta + 2 \int_0^{2\pi} e^{i2\theta} d\theta \right] \\
 &= -i \left[ \frac{e^{i3\theta}}{i3} \Big|_0^{2\pi} + 2 \left( \frac{e^{i2\theta}}{i2} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] \\
 I_o &= 0.
 \end{aligned}$$

O exemplo (3.44), é rapidamente resolvido em acordo com o teorema 2 e confirma que o resultado da integral dada para um intervalo fechado por uma circunferência centrada em  $x = 1$  é zero. Entretanto, observe que nem todas as integrais, principalmente as que encontramos em problemas da Teoria Quântica de Campos, são analíticas em todos os pontos do contorno, ou seja, sobre e dentro de um caminho fechado  $C$ . Assim, daremos continuidade nas próximas seções à demonstrações de outros métodos mais eficientes.

### 3.3 Teorema da Integral de Cauchy

De acordo com Arfken (2007), o teorema da integral de Cauchy obedece o seguinte formato:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0), \quad (3.45)$$

comumente conhecida como fórmula integral de Cauchy.

Na equação (3.45), consideramos uma função  $f(z)$  analítica sobre um caminho fechado  $C$  e dentro da região interior limitado por  $C$  na qual  $z_0$  é qualquer ponto na região interna de  $C$ . Note, uma vez que  $z$  está sobre o caminho  $C$ , enquanto  $z_0$  em

seu interior (veja Fig. 8), temos  $z - z_0 \neq 0$ . Embora  $f(z)$  seja uma função analítica, o integrando  $f(z)/z - z_0$  não é analítico em  $z = z_0$ , exceto para  $f(z_0) = 0$ . Assim, dizemos que  $z_0$  é uma singularidade no integrando. Em contrapartida se deformarmos o caminho  $C$  de forma a excluirmos  $z_0$ , o teorema da integral de Cauchy se aplica.

### 3.3.1 Aplicações do Teorema da Integral de Cauchy

Considere, a seguinte expressão:

$$\oint_C \frac{1}{1 - z^2} dz, \quad (3.46)$$

onde  $C$  é uma curva fechada em  $|z| = 2$ , melhor representada na Fig. 9. Veja que, no interior de  $C$  existem pontos em que  $g(z)$  não é analítica como, por exemplo,  $x = 1$ . Para resolver esta integral faremos uso da fórmula integral de Cauchy dada em (3.45).

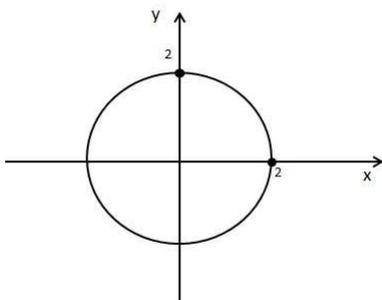


Figura 9 – Circunferência centrada na origem.

Fonte: Elaborado pela autora

Note que,  $g(z)$  não está no formato do integrando apresentado na expressão (3.45), por isso, nosso primeiro passo é reescrever  $g(z)$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} 1 - z^2 &= (1 - z)(1 + z), \\ &= -(z - 1)(1 + z). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{1 - z^2} \\ &= \frac{-1}{(z - 1)(1 + z)} \\ &= \frac{-1/(1 + z)}{z - 1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

de forma que

$$f(z) = \frac{-1}{1 + z}. \quad (3.49)$$

Com  $f(z)$  analítica sobre e no interior de  $C$  podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy, onde

$$\oint_C \frac{-1/(1+z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1), \quad (3.50)$$

assim,

$$2\pi i \left( \frac{-1}{1+1} \right) = -i\pi. \quad (3.51)$$

De acordo com Ávila (2008),

*“A fórmula integral de Cauchy é instrumento básico no estudo das funções analíticas. Ela revela de imediato, alguns resultados surpreendentes e de importância fundamental. Por exemplo, uma simples inspeção dessa fórmula nos mostra que basta o conhecimento de  $f$  nos pontos  $z$  do contorno  $C$  para que possamos calcular  $f$  em qualquer ponto  $z_0$  do interior de  $C$ ”*(ÁVILA, 2008,pag.102).

Apesar deste método ser de “importância fundamental”, nem toda função pode ser reescrita como  $g(z)$  em (3.48). Na seção seguinte discutiremos sobre o teorema dos resíduos e veremos em alguns exemplos por que este é mais geral que o teorema de Cauchy.

## 3.4 Cálculo de Resíduos

Entre o teorema da integral de Cauchy e o cálculo de resíduos existe uma série de pontos importantes a serem explorados. Neste trabalho, tentaremos ser breve e simplórios ao expor os detalhes desta lacuna a partir de algumas subseções e da resolução de exemplos.

### 3.4.1 Expansão de Laurent

A série de Laurent é a generalização da série de Taylor para um plano complexo e é dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.52)$$

em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'. \quad (3.53)$$

Esta série corresponde também a uma expansão em torno de uma singularidade, em que esta, representa pontos onde a função não é analítica.

### 3.4.2 Teorema dos resíduos

De acordo com Arfken (2007), “se a expansão de Laurent de uma função  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  é integrada termo a termo usando um contorno fechado que circunda

um ponto singular isolado  $z_0$  uma vez que em sentido anti-horário, obtemos”

$$a_{-1} \oint (z - z_0)^{-1} dz = a_{-1} \oint \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2\pi ia_{-1}, \quad n = -1, \quad (3.54)$$

e nulo para  $n \neq -1$ . Resumidamente, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = a_{-1}, \quad (3.55)$$

onde a constante  $a_{-1}$  junto ao coeficiente  $(z - z_0)^{-1}$  na expansão de Laurent, é denominado resíduo de  $f(z)$  no ponto  $z_0$ . Contudo, a integral no caminho fechado ao redor de uma singularidade é dada pela expressão

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi ia_{-1}|_{z=z_0}. \quad (3.56)$$

### 3.4.3 Aplicações do Teorema dos Resíduos

Dada a integral fechada de uma função complexa qualquer podemos concluir que

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{C_x} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \text{caminho real} + \text{caminho complexo}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

em que  $C$  é um caminho fechado e equivale a soma de dois outros caminhos:  $C_x$  que representa o caminho na coordenada  $x$ , no intervalo  $[-R \leq x \leq +R]$  e  $C_R$  que forma a metade de uma circunferência e representa o caminho na parte complexa do plano (veja a Fig. 10). Neste sentido, considere a integral

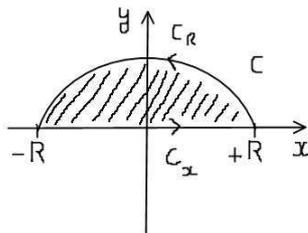


Figura 10 – Caminho fechado  $C$  equivale à soma de dois caminhos: real ( $C_x$ ) e complexo ( $C_R$ )

Fonte: Elaborado pela autora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx. \quad (3.58)$$

Qual o resultado desta integral? Apoiados na expressão dada em (3.57) podemos resolver (3.58) por dois métodos distintos: real e complexo. Vejamos a solução para o caminho real, onde consideramos  $R \rightarrow \infty$  e obtemos

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + (\rightarrow 0), \quad (3.59)$$

para mais detalhes veja as referências Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988) sobre o (teorema de Rouché) onde podemos verificar a aplicação desta condição para algumas integrais. Em seguida, observe que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad (3.60)$$

onde  $F'(x) = f(x)$ , e portanto,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Além disso, sabemos que  $F(x) = \arctan(x)$ , ou seja,

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2} = f(x). \quad (3.61)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Agora resolveremos (3.58) para o caminho complexo. Neste caso, identificamos imediatamente que

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad (3.63)$$

onde,

$$z^2 + 1 = 0 \rightarrow z^2 = -1 \rightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Podemos reescrever a expressão (3.63) no seguinte formato

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)}, \quad (3.64)$$

a partir disto nos resta descobrir os resíduos de  $f(z = +i)$  e  $f(z = -i)$ . Neste caso, é importante lembrar que primeiro devemos verificar se o pólo (é o termo de uma expansão em série que possui potência negativa, também conhecido como singularidade isolada) é finito ou não [para mais detalhes veja as referências Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988)]. Dado que o pólo é finito, temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Para  $m = 1$  (número da ordem do pólo) e  $z_0 = +i$  (veja Fig. 10), temos que

$$\begin{aligned} Res(z_0) &= \lim_{z \rightarrow +i} (z - i) \left[ \frac{1}{(z - i)(z + i)} \right] \\ &= \frac{1}{i + i} \\ &= \frac{1}{2i}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

A partir da expressão em (3.56), podemos concluir então que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2i}\right) = \pi. \quad (3.66)$$

A integral dada em (3.58), pode ser facilmente resolvida no plano real. Note ainda que, mesmo transformada de real para complexa por meio da expressão (3.57), podemos facilmente reescrevê-la no formato similar à expressão (3.45). Desta forma, podemos resolver (3.58) na forma complexa pelo teorema de Cauchy ou pelo teorema dos resíduos. Entretanto, existem integrais que diferente do que ocorre com (3.58), não podem ser resolvidas no caminho real e ainda possuem singularidades no interior do caminho complexo fechado, isto limita os métodos de resolução ao teorema dos resíduos, que de acordo com Arfken (2007) e Butkov (1988), é mais geral que o teorema de Cauchy.

Para uma melhor compreensão, considere a integral

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1. \quad (3.67)$$

Note que, a integral possui o caminho aberto e para facilitar nossos cálculos devemos considerá-la no caminho fechado. Para isso, temos que

$$\oint_C \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}. \quad (3.68)$$

Com  $z = e^{i\theta}$ , temos que o sistema de  $ze\bar{z}$  resulta em  $\cos \theta = \frac{1+z^2}{2z}$ , onde  $d\theta = i^{-1}z^{-1}dz$ . Desta forma, a expressão em (3.67) é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{i2} \oint \frac{z^{-1}}{\left[\frac{2za+1+z^2}{2z}\right]^2} dz. \quad (3.69)$$

Depois de realizar todas as simplificações necessárias chegamos a

$$I = \frac{2}{i} \oint \frac{z}{\left[(z + a - \sqrt{a^2 - 1})(z + a + \sqrt{a^2 - 1})\right]^2} dz, \quad (3.70)$$

e a partir disto, precisamos agora verificar se o valor  $m$  (pólo) é 2. Assim,

$$\lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \left\{ (z + a - \sqrt{a^2 - 1})^2 \frac{z}{\left[(z + a - \sqrt{a^2 - 1})(z + a + \sqrt{a^2 - 1})\right]^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \left[ \frac{z}{(z + a + \sqrt{a^2 - 1})^2} \right]. \quad (3.71)$$

Ao aplicar o limite, temos

$$\begin{aligned} \frac{-a + \sqrt{a^2 - 1}}{[-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1}]^2} &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - 1}}{4(\sqrt{a^2 - 1})^2} \\ &= \frac{-a + 1}{4\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Em seguida, calculamos o resíduo por meio da expressão mais geral de (3.53), onde

$$a_{-1} = \frac{2}{i} \lim_{z \rightarrow z^+} \left[ \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} (z + a - \sqrt{a^2 - 1})^2 \frac{z}{[(z + a - \sqrt{a^2 - 1})(z + a + \sqrt{a^2 - 1})]^2} \right].$$

Com todas as simplificações, obtemos

$$a_{-1} = \frac{1}{i} \left( \frac{a}{2(\sqrt{a^2 - 1})^3} \right). \quad (3.73)$$

Desta forma, a partir de (3.56), (3.70) e (3.73) temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} \left( \frac{a}{2(\sqrt{a^2 - 1})^3} \right) 2\pi i \\ &= \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

## 3.5 Transformada de Fourier

Estamos habituados com a transformada de Laplace, devido a frequência com que trabalhamos a solução de problemas exclusivamente reais. Por outro lado, expressões no formato

$$G(\alpha) = \int_a^b f(s)K(\alpha, s)ds, \quad (3.75)$$

onde,  $G(\alpha)$  é uma função denominada transformada (integral) de  $f(s)$  pelo núcleo  $K(\alpha, s)$  são comumente encontradas em problemas da Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos. De acordo com Arfken (2007), “a operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função  $f(s)$  no espaço  $s$  para uma outra função,  $G(\alpha)$ , no espaço  $\alpha$ ”.

Uma das expressões mais utilizadas é a transformada de Fourier, dada por

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds. \quad (3.76)$$

A transformada de Fourier é baseada no núcleo  $e^{i\alpha s}$  e suas partes real e imaginária são tomadas separadamente,  $\cos \alpha s$  e  $\sin \alpha s$ . Desta forma, podemos verificar que a transformada de Fourier é mais geral que a transformada de Laplace.

### 3.5.1 Teorema da Inversão

Segundo Arfken (2007) e Butkov (1988), definimos  $G(\alpha)$ , a transformada de Fourier da função  $f(s)$ , dado pela equação (3.76) e sua relação inversa é

$$f(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha)e^{-i\alpha s} d\alpha. \quad (3.77)$$

Das equações (3.76) e (3.77), passadas para o espaço tridimensional tornam-se

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{s})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}} d^3s \quad (3.78)$$

e

$$f(\mathbf{s}) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}} d^3\alpha. \quad (3.79)$$

Segundo Arfken, a equação (3.79) “pode ser interpretada como uma expansão de uma função  $f(\mathbf{s})$  em um contínuo de autofunções de onda plana, então,  $G(\mathbf{k})$  se torna a amplitude da onda,  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}}$ ”.

### 3.5.2 Transformada de Fourier – Delta de Dirac

Definimos a transformada de Fourier para o delta de Dirac como

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (3.80)$$

e tridimensional dado pela expressão

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.81)$$

## 4 Algumas Aplicações na Mecânica Quântica

Nos capítulos anteriores nossa atenção esteve voltada ao desenvolvimento da parte teórica deste trabalho, para então, neste capítulo tratarmos do nosso objetivo central. Assim, construiremos a função de Green para a equação de Schrödinger, problema físico da Mecânica Quântica, e em busca de sua solução faremos uso dos conhecimentos já visto. A Mecânica Quântica, por sua vez, junto ao formalismo da relatividade de Einstein são precursores da Teoria Quântica de Campos. Isto implica que todas as aplicações matemáticas e físicas desenvolvidas neste capítulo são essenciais para a introdução do estudo da TQC.

### 4.1 Equação de Schrödinger independente do tempo

Vamos considerar, de acordo com Griffiths (1995), a equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi, \quad (4.1)$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  é a constante reduzida de Plack,  $V$  é a função energia potencial,  $m$  é a massa,  $\psi$  a função de onda e  $E$  é a energia da partícula. Esta equação ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - E\psi = -V\psi. \quad (4.2)$$

A partir da equação (4.2) vamos simplificar ambos os lados da igualdade por  $(-\frac{\hbar^2}{2m})$ , o que implica em

$$\nabla^2\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = \frac{2mV}{\hbar^2}\psi. \quad (4.3)$$

Logo, consideramos que

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{ou} \quad k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \text{e} \quad Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi. \quad (4.4)$$

Assim a equação (4.3) pode ser reescrita como

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = Q, \quad (4.5)$$

ainda é importante observar que  $\psi$  e  $V$  são ambas funções de espaço tridimensional  $(x, y, z)$  e o termo “não homogêneo”  $Q$  em si depende de  $\psi$ , ou seja,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}). \quad (4.6)$$

Assim, obtivemos em (4.6) uma equação diferencial não homogênea que a primeira vista não há solução. De acordo com Filho *et. al* (1988, 1990) e Griffiths (1995), podemos

supor que (4.6) tem solução, mas para isso precisamos transformar a função  $\psi(\mathbf{r})$  em uma função mais sucinta. Por isso, considerarmos o método da função de Green  $G(\mathbf{r})$  e igualamos à um delta de Dirac tridimensional  $\delta^3(\mathbf{r})$ , para então, obtermos

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Ao considerarmos  $r = r - r'$ , a solução para esta função é

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{r}'$  é a região onde está ocorrendo a solução geral.

Para provar a solução, substituímos a equação (4.8) na (4.6) e utilizamos a propriedade  $Q(\mathbf{r}) = \int_0^\infty Q(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$ , assim temos

$$(\nabla^2 + k^2) \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \int Q(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \quad (4.9)$$

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int Q(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int Q(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'. \quad (4.10)$$

Assim, chegamos novamente à equação (4.7). Neste caso, podemos verificar que encontramos uma equação diferencial igual à um delta de Dirac tridimensional, e para resolvê-la precisamos recorrer ao método da transformada de Fourier [veja detalhes na seção (3.5)] que à transforma em uma equação algébrica, onde

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}g(\mathbf{s})d^3\mathbf{s}. \quad (4.11)$$

Em seguida, podemos reescrever o lado esquerdo da equação (4.7) a partir da transformada de Fourier dada em (4.11) e obtermos

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int (\nabla^2 + k^2)e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}g(\mathbf{s})d^3\mathbf{s}, \quad (4.12)$$

e para o argumento  $[(\nabla^2 + k^2)e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}]$  podemos reescrevê-lo a partir do auxílio algébrico, no qual

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  e  $\mathbf{s} = \hat{i}s_x + \hat{j}s_y + \hat{k}s_z$ . Assim,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = xs_x + ys_y + zs_z. \quad (4.14)$$

Logo,

$$\nabla^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} = i^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2), \quad (4.15)$$

$$\nabla^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{s}^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.16)$$

Substituindo o resultado da equação (4.16) na (4.12), temos

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int (-\mathbf{s}^2 + k^2) e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} g(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s}. \quad (4.17)$$

Agora nos voltemos ao lado direito da equação (4.7), onde temos o delta de Dirac tridimensional. Como visto na seção (3.5.2), a transformada de Fourier para o  $\delta^3(\mathbf{r})$  é

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{s}. \quad (4.18)$$

Assim, ao substituirmos os resultados das equações (4.17) e (4.18) na (4.7), obtemos

$$\frac{(-\mathbf{s}^2 + k^2)g(\mathbf{s})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^3}, \quad (4.19)$$

$$g(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(k^2 - \mathbf{s}^2)}. \quad (4.20)$$

Ao substituir a equação (4.20) na (4.11), temos que

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 - \mathbf{s}^2)} d^3\mathbf{s}, \quad (4.21)$$

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 - \mathbf{s}^2)} d^3\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

A partir da equação (4.22), verificamos a necessidade de mudar as coordenadas de cartesianas para esféricas (ver Fig. 11). Assim,

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \iiint f(s, \theta, \phi) s^2 \sin\theta ds d\theta d\phi.$$

É importante destacar que algumas referências, inclusive o Griffiths (1995), considera  $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$  para representar de forma sucinta a existência de uma integral tripla. Veja que na equação (4.22), esta convenção apresenta-se em termos de  $(\mathbf{s})$  devido sua dependência na integral.

Note que, ao passo que buscamos a solução de (4.22), facilmente encontramos o resultado da integral de  $\phi$  onde,

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi. \quad (4.23)$$

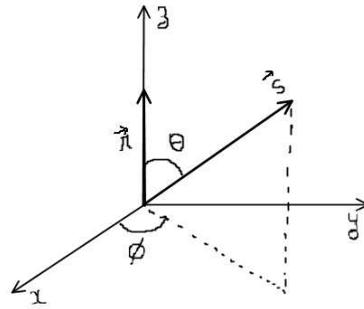


Figura 11 – Representação das coordenadas cartesianas em relação as coordenadas esféricas da equação (4.22)

Fonte: Elaborado pela autora

Por conveniência nos cálculos, consideremos a forma exponencial dos números complexos. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi e^{irs \cos \theta} \text{sen} \theta d\theta &= -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{isr} (e^{isr \cos \pi} - e^{isr \cos 0}) \\
 &= -\frac{1}{isr} (e^{-isr} - e^{isr}) \\
 &= -\frac{1}{isr} [(\cos sr - i \text{sen} sr) - (\cos sr + i \text{sen} sr)] \\
 &= -\frac{1}{isr} (-2i \text{sen} sr) \\
 &= \frac{2 \text{sen} sr}{sr}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por último e pouco trivial chegamos a integral de  $s$  onde substituímos os resultados obtidos em (4.23) e (4.24) em (4.22), e obtemos

$$G(r) = \frac{1}{2\pi^3} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{2 \text{sen} sr}{sr} \cdot \frac{1}{(k^2 - s^2)} s^2 ds, \tag{4.25}$$

$$G(r) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \text{sen} sr}{(k^2 - s^2)} ds. \tag{4.26}$$

Utilizamos o seguinte artifício matemático em (4.26) para simplificar e transformar meu caminho de integração de  $(0 \rightarrow \infty)$  para  $(-\infty \rightarrow +\infty)$

$$G(r) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \text{sen} sr}{(k^2 - s^2)} ds, \tag{4.27}$$

de maneira que,

$$G(r) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \text{sen}(sr)}{(k^2 - s^2)} ds. \tag{4.28}$$

O integrando restante não é trivial e para simplificá-lo recorreremos novamente a notação exponencial e fatoramos o denominador, ou seja, escreveremos (4.28) em termos

de uma função complexa. Desta forma, temos que

$$\begin{cases} e^{isr} = \cos(sr) + i \operatorname{sen}(sr) \\ e^{-isr} = \cos(sr) - i \operatorname{sen}(sr) \end{cases},$$

$$e^{isr} - e^{-isr} = 2i \operatorname{sen}(sr).$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(sr) = \frac{1}{2i}(e^{isr} - e^{-isr}) = \frac{-i}{2}(e^{isr} - e^{-isr}), \quad (4.29)$$

assim, temos uma combinação complexa do lado direito e para o lado esquerdo, exclusivamente, uma função real. Como isto é uma igualdade, então o lado direito também é uma função real. Mesmo que pareça abstrato, o fato de introduzirmos termos complexos ao  $\operatorname{sen}(sr)$  não anula sua condição real, e este permanece sobre a reta real (veja figura 12).

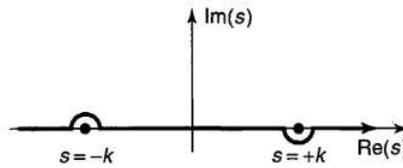


Figura 12 – Contorno dos pólos no caminho inicial de integração.

Fonte: GRIFFITHS, 1995, p. 411.

Para o denominador, segue que

$$(k^2 - s^2) = -(k^2 - s^2) = s^2 - k^2 = (s - k)(s + k). \quad (4.30)$$

Substituímos então, (4.29) e (4.30) em (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{i}{8\pi^2 r} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{se^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right), \quad (4.31) \\ &= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2). \end{aligned}$$

Note que a expressão (4.31) possui o integrando e a variável de integração reais e não é trivial, assim, a resolução desta expressão será análoga ao exemplo da seção (3.4.3) onde temos uma integral real e a resolvemos para os dois casos: real e complexo. Diferente do que ocorre em (3.4.3) resolveremos  $I_1$  e  $I_2$  apenas para os métodos dado nas seções (3.3) e (3.4).

### 4.1.1 Aplicação da Fórmula Integral de Cauchy

Para iniciarmos a aplicação da fórmula integral de Cauchy, note que  $I_1$  e  $I_2$  são integrais em termos de uma função que é complexa e sua variável de integração é real. Porém, esta variável que está na reta real pertence a um plano complexo, perfeitamente ilustrado pela figura 12 e 13.

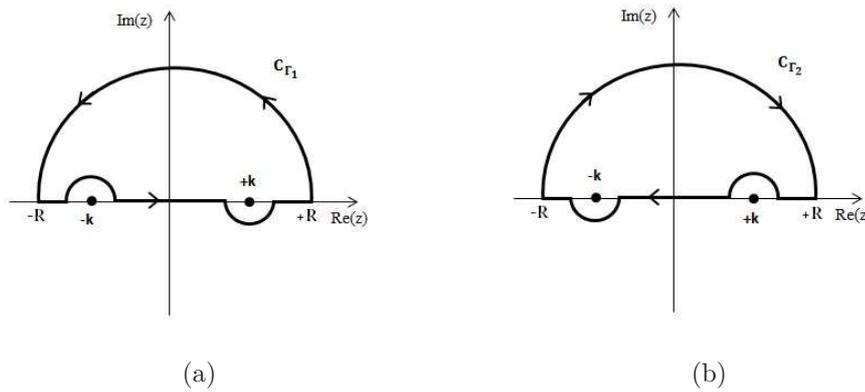


Figura 13 – Estratégia para representação do caminho fechado  $C_{\Gamma_1}$  e  $C_{\Gamma_2}$ .  
Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com Arfken (2007), Ávila (2008) e Butkov (1988), o teorema de Rouché permite que a primeira integral  $I_1$  dada em (4.31) seja tratada da seguinte forma:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds, \quad (k > 0). \quad (4.32)$$

Análogo ao exemplo da seção (3.4.3), sabemos que

$$\oint_{C_{\Gamma_1}} \frac{ze^{izr}}{(z-k)(z+k)} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{se^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds + \int_{C_{\Gamma_1}} \frac{ze^{izr}}{(z-k)(z+k)} dz, \quad (4.33)$$

onde  $C_{\Gamma_1}$  corresponde ao caminho fechado no sentido anti-horário, que sai de  $-R \rightarrow +R$ . Note, a partir da (Fig. 13a e 13b) que  $z = s + i0$  na maior parte do caminho e  $z = s + i\epsilon$ , onde  $\epsilon$  representa uma leve aproximação do caminho, seja  $C_{\Gamma_1}$  ou  $C_{\Gamma_2}$  no contorno das singularidades  $k$ , note ainda, que esta é uma saída para fugirmos das singularidades da função real. Desta forma,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{izr}/(z+k)}{(z-k)} dz, \quad (4.34)$$

em que pela fórmula integral de Cauchy dada em (3.45),

$$I_1 = 2\pi i \left[ \frac{ze^{izr}}{z+k} \right]_{z=+k} = i\pi e^{ikr}. \quad (4.35)$$

A solução para  $I_2$  ocorre analogamente, com exceção da singularidade que não está mais em  $+k$ , mas em  $-k$  (veja Fig. 12b), onde  $C_{\Gamma_2}$  é um caminho fechado no sentido horário,

que implica no resultado da fórmula integral de Cauchy em  $-2\pi i(f(z))|_{z=-k}$ . Vejamos, sendo

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{-izr}}{(z-k)(z+k)} dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{izr}/(z-k)}{(z+k)} dz, \end{aligned} \quad (4.36)$$

temos

$$I_2 = -2\pi i \left[ \frac{ze^{-izr}}{z-k} \right] \Big|_{z=-k} = -i\pi e^{ikr}. \quad (4.37)$$

#### 4.1.2 Aplicação do Teorema dos Resíduos

Análogo ao que resolvemos para aplicação da fórmula integral de Cauchy, com a diferença de que nesta seção, faremos uso do teorema dos resíduos. Note que, para cada integral fazemos um tratamento diferente em relação aos resíduos, ao modo que para as duas integrais dada em (4.31), identificamos imediatamente que os resíduos são  $f(z=k)$  e  $f(z=-k)$ . Desta forma, para o caminho  $C_{\Gamma_1}$  em que

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{izr}}{(z-k)(z+k)} dz, \quad (4.38)$$

de maneira que

$$I_1 = 2\pi i \text{Res}(+k). \quad (4.39)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \text{Res}(+k) &= \lim_{z \rightarrow +k} (z-k) \left[ \frac{ze^{izr}}{(z-k)(z+k)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow +k} \left[ \frac{ze^{izr}}{(z+k)} \right] \\ &= \frac{ke^{ikr}}{2k} \\ &= \frac{e^{ikr}}{2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi i \frac{e^{ikr}}{2} \\ &= i\pi e^{ikr}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Analogamente, para

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{-izr}}{(z-k)(z+k)} dz. \quad (4.42)$$

Lembre que o caminho em  $C_{\Gamma_2}$  é fechado no sentido horário. Por isso,

$$I_2 = -2\pi i \text{Res}(-k). \quad (4.43)$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(-k) &= \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \left[ \frac{ze^{izr}}{(z-k)(z+k)} \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow -k} \left[ \frac{ze^{izr}}{(z-k)} \right] \\
 &= \frac{-ke^{-ikr}}{-2k} \\
 &= \frac{e^{-ikr}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Substituindo (4.44) em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -2\pi i \frac{e^{-ikr}}{2} \\
 &= -i\pi e^{ikr}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

A partir dos resultados obtidos em (4.35) e (4.37), confirmados ainda pelo resultados de (4.41) e (4.45), e substituídos em (4.31), verificamos que

$$G(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[ (i\pi e^{ikr}) - (-i\pi e^{ikr}) \right] = \frac{-e^{ikr}}{4\pi r}, \tag{4.46}$$

e este resultado está de acordo com a solução dada pelo Griffiths (1995).

As seções (4.2) e (4.3) demonstram ainda, a importância do conhecimento acerca dos diferentes métodos de resolução do cálculo com variáveis complexa aplicado aos problemas da Física. Este é apenas um de muitos exemplos que podemos encontrar não só na Física da Mecânica Quântica, mas em outras áreas de conhecimento como a Teoria Quântica de Campos. Note ainda, que o resultado obtido para  $G(r)$  é apenas um indicativo da solução geral descrita na equação (4.8). Para encontrarmos a solução geral, teríamos que resolver outra integral. Além disso, é importante verificar que  $\psi(\mathbf{r})$  é uma função que depende do próprio sistema, ou seja, seu resultado dependerá do tipo de potencial envolvido. Neste sentido, é aconselhável a expansão desta função cuja solução está dentro da própria integral.

De acordo com Griffiths (1995), o resultado desta expansão dá-se por

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots, \tag{4.47}$$

onde cada termo da função possui um comportamento funcional que está representado no diagrama de Feynman abaixo.

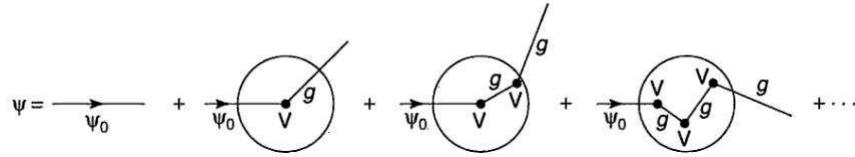


Figura 14 – Representação das coordenadas cartesianas em relação as coordenadas esféricas da equação (4.23)

Fonte:Fonte: GRIFFITHS, 1995, p. 418.

Finalmente, temos que a expressão dada em (4.47) e o digrama de Feynman ( Fig. 14), são assuntos voltados à Teoria Quântica de Campos. E a partir daqui teremos um outro trabalho que pode ser concluído numa Pós-Graduação.

# Conclusão

Este trabalho teve por objetivo o estudo do cálculo com funções de variável complexa e sua aplicação ao problema típico da Física da Mecânica Quântica. Focamos principalmente, no estudo de métodos matemáticos utilizados para demonstrar a importância deste cálculo em parte da solução da equação de Schrödinger independente do tempo. Assim, a fórmula integral de Cauchy e o teorema dos resíduos ganharam destaque por serem solução do nosso problema proposto.

Antes de chegarmos à aplicação de alguns métodos no capítulo 4, introduzimos nos capítulos 1, 2 e 3 fundamentos importantes que auxiliaram no desenvolvimento da solução do problema proposto. Um exemplo disso, é que para compreendermos da função de Green com o plano complexo, necessitamos rever a definição de uma função exponencial complexa. Desta forma, integrais não triviais, com singularidades no interior de um caminho  $C$  fechado ou até mesmo pertencentes a uma reta real no plano complexo, foram resolvidas. Algumas apenas com auxílio algébrico e outras por meio dos métodos apresentados.

É importante destacar, que devido as sutilezas do cálculo com funções de variável complexa, conseguimos a partir do tratamento matemático, resolver integrais com integrando e variável de integração reais. Isto só foi possível, devido aos detalhes explorados nos primeiros capítulo, no qual notamos que é possível uma função está numa reta real, e ao mesmo tempo, esta reta pertencer ao plano complexo. Assim, a solução de tais integrais foi possível, não excluindo a revisão das demais condições, e ainda, o artifício de identificar o método mais adequado à ser utilizado.

No desenvolvimento de parte solução da equação de Schrödinger, é possível ainda notar que utilizamos diversos artifícios matemáticos no intuito de facilitar nossos cálculos, um exemplo simples disso foi a mudança de coordenadas de cartesianas para esféricas.

Contudo, este trabalho é importante por conter detalhes do cálculo que não encontramos em outros livros introdutórios do estudo da Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos. Por isso, todo o estudo desenvolvido é base de estudo para qualquer aluno que queira introduzir ao estudo destas áreas. Outros exemplos de aplicação destes cálculos podem ser encontrados em problemas da ótica ondulatória, como na difração de Franhofer, que apresenta integrais não calculáveis no plano real, ou ainda, cuja solução torna-se factível por meio dos métodos explorados neste trabalho.

## Referências

- ARFKEN, George B; WEBER, Hans. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. tradução de Arlete Simille Marques. 6.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- ÁVILA, Geraldo. *Variáveis complexas e aplicações*. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira F. de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1988.
- FILHO, J. Bellandi; COVOLAN, R. J. M.; PÁDUA, A. B.; PAES, J. T. S. *Uma revisão sobre as funções de Green estacionárias (I)*. Revista de Ensino de Física, Vol. 10, dez/88, 55/66.
- FILHO, J. Bellandi; COVOLAN, R. J. M.; PÁDUA, A. B.; PAES, J. T. S. *Uma revisão sobre as funções de Green estacionárias (III)*. Revista de Ensino de Física, Vol. 12, dez/90, 02/11.
- GRIFFITHS, David J. *Introduction To Quantum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1995.