UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE

WANDER ALBERTO JOSÉ

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS INERENTES AO CONCEITO DE FRAÇÃO

PALMAS – TO
2021

WANDER ALBERTO JOSÉ

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS INERENTES AO CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Palmas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.
Orientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli
Linha de Pesquisa: Estado, Sociedade e Práticas Educativas

Palmas – TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

J83o José, Wander Alberto.
OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS INERENTES AO CONCEITO DE FRAÇÃO. / Wander Alberto José. – Palmas, TO, 2021.
114 f.

Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) em Educação, 2021.
Orientador: Idemar Vizolli

1. Educação. 2. Obstáculos Epistemológicos. 3. Conceito de Fração. 4. Obstáculos Didáticos. I. Título

CDD 370

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

WANDER ALBERTO JOSÉ

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS INERENTES AO CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Palmas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.
Orientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Idemar Vizolli (UFT)

Profª. Dra. Carmem Lúcia Artioli Rolim (UFT – Avaliadora)

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (UFPA – Avaliador)

Prof. Dr. Walber Christiano Lima da Costa (UFT/UNIFESSPA – Suplente)

Local: Palmas – TO
Data de aprovação: 10 / 12 / 2021

Em memória do meu pai,
Wanderlei Cardoso de Jesus.

Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento deve ser colocado.

Gaston Bachelard

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por ter me dado forças para superar os obstáculos desta jornada.

À minha mãe Eliane José Tereza, meus irmãos Marco Aurélio José Duarte, Wendel Henrique José e Helen Maria José Duarte. Minha esposa Maria de Fátima Duarte Morais, minhas filhas Evelyn José Duarte e Brenda José Duarte, pelo incentivo e compreensão nos momentos difíceis.

Ao professor Dr. Idemar Vizolli pela atenção e dedicação na orientação deste trabalho. Pela compreensão e o zelo característicos, meu especial muito obrigado!

A prof.ª Dra. Carmem Lúcia Artioli Rolim, ao prof. Dr. Iran Abreu Mendes e ao Prof. Dr. Walber Christiano Silva da Costa, membros da Banca de Qualificação e de Defesa, por terem aceitado participar deste trabalho e pelas valiosas indicações e sugestões.

À Secretaria da Educação, Juventude e Esportes do Tocantins, da qual integro o quadro efetivo de servidores há 19 anos, pela concessão do afastamento para aprimoramento profissional.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação (PPGE/UFT) e (PPPGE/UFT), pelos conhecimentos compartilhados nas disciplinas que cursei neste mestrado.

Aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisas em Saberes e Fazeres em Contextos Socioculturais e Educacionais – GEPEFAZE, e do Grupo de orientandos do Dr. Idemar Vizolli.

A todos(as) colegas com quem compartilhei estudos, angústias e alegrias, aqui representados por Severino Roberto, Débora Cristiana, Brainna Aretuza e Sandra Cobalchini.

RESUMO

Uma questão instigante para muitos pensadores diz respeito a maneira como se dá a evolução do conhecimento científico, como acontecem os avanços na Ciência. Uma das possíveis respostas foi proposta pelo filósofo francês Gaston Bachelard, o qual considera que o progresso da Ciência ocorre a partir de ruptura, e que esse processo é permeado por obstáculos epistemológicos. O educador matemático Guy Brousseau foi o primeiro a abordar a noção de obstáculo epistemológico na relação com o ensino e a aprendizagem da Matemática. O objetivo deste trabalho é conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração. Assim, esta pesquisa apoia-se nas perspectivas teóricas de Bachelard e de Brousseau. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, de abordagem qualitativa com escopo no estado do conhecimento. Este estudo compõe-se de dois movimentos complementares, o primeiro constitui-se numa fundamentação teórica baseada nos estudos das teorias que tratam dos obstáculos e com olhar mais atento em relação ao conceito de fração em civilizações antigas. O segundo movimento concebe uma revisão de literatura a partir da análise de dissertações e de um livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental. Para o levantamento das produções, foi utilizado o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Pessoal de Nível Superior, com recorte temporal de 2006 a 2020, em que foram encontradas 5 (cinco) dissertações que atendem ao escopo da pesquisa. Uma vez realizados os estudos, encontrou-se obstáculos inerentes ao conceito de fração: a partir da fundamentação teórica e conforme Bachelard, temos o obstáculo da experiência primeira e o obstáculo verbal; nas produções acadêmicas e no livro didático, identificou-se os obstáculos didáticos de origem didática, ontogênica e epistemológica de que trata Brousseau. Dentre os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração, destacou-se o conhecimento dos naturais. A leitura e interpretação simples associada a processos de contagem ou de medição faz com que este conhecimento seja um obstáculo ao estabelecimento do número fracionário, oriundo de uma ideia complexa a de ‘partição de algo’, em que sua leitura envolve uma interpretação.

Palavras-chaves: Educação. Obstáculos Epistemológicos. Conceito de Fração. Obstáculos Didáticos.

ABSTRACT

An intriguing question for many thinkers concerns the way in which scientific Knowledge evolves,how advances in science take place. One of the possible answers was proposed by the French philosopher Gaston Bachelard, who considers that the progress of science occurs from rupture, and that this process is permeated by epistemological obstacles. The mathematical educator Guy Brousseau was the first to address the notion of epistemological obstacle in mathematics. The objective of this work is to know the epistemological obstacles inherent to the concept of fraction. Thus, this research is supported by the theoretical perspectives of Bachelard and Brousseau. This is a bibliographical research, with a qualitative approach, with scope in the state of knowledge.This study presents two complementary movements, the first one constitutes a theoretical foundation, based on the studies of theories that deal with obstacles and with a closer look at the concept of fraction in ancient civilizations.The second movement conceives a literature review based on the analysis of academic productions and a 6th grade math textbook, year of elementary school.To survey the productions, the Theses and Dissertations Catalog of the Higher Education Personnel Coordination was used, with a temporal reversal from 2006 to 2020, in which five (5) dissertations were found that meet the scope of the research.Once the studies were carried out, we encountered obstacles inherent to the concept of fraction: from the theoretical foundation and according to Bachelard, we have the obstacle of the first experience and the verbal obstacle, in academic productions and in the textbook, we identify the educational obstacles of didactic, ontogenic and epistemological origin that Brousseau deals with.

Key-words: Education. Epistemological obstacles. Fracion Concept. Educational Obstacles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a. C.	Antes de Cristo
a. E.C.	Antes da Era Cristã
AI-5	Ato Institucional Número 5
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Pessoal de Nível Superior
CESGRANRIO	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
CIAEM	Congresso Interamericano de Educação Matemática
DF	Distrito Federal
DRE	Diretoria Regional de Ensino
EJA	Educação de Jovens e Adultos
FADES	Faculdade para o Desenvolvimento do Sudeste Tocantinense
GO	Goiás
IES	Instituição de Ensino Superior
MEC	Ministério da Educação
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
OMS	Organização Mundial de Saúde
OSPB	Organização Social e Política Brasileira
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGE	Programa de Pós-Graduação em Educação
PPP	Projeto Político Pedagógico
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SEDUC	Secretaria da Educação e Cultura
SP	São Paulo
TO	Tocantins
UEG	Universidade Estadual de Goiás
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFT	Universidade Federal do Tocantins
UNIOESTE	Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNITINS	Universidade Estadual do Tocantins
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção trago uma síntese de minha trajetória de vida[1], revisitando lugares, emoções, lembranças e experiências que me conduziram até o Mestrado em Educação, exponho aspectos relacionados à formação pessoal, escolar, acadêmica e profissional. No desenvolvimento dessa reflexão de vida, procuro estabelecer uma conexão entre o objeto de pesquisa e a experiência profissional, e anuncio a perspectiva teórica desta produção.

Na sequência, apresento a problemática e os elementos diretivos da dissertação: o tema, a questão de pesquisa, os objetivos, a justificativa. Por fim, tem-se as escolhas metodológicas e a organização das seções.

1.1 Frações de minha história de vida

Como diz o adágio popular: falar dos outros é fácil, difícil é falar de si (Anônimo).

Oriundo de uma família simples, sou o terceiro de quatro irmãos, nasci em 1978 na cidade de Taguatinga no Distrito Federal – DF, onde residi com minha família até meus cinco anos de idade.

No ano de 1978, ocorreram vários fatos marcantes no Brasil e no mundo, dentre estes: o falecimento de dois pontífices Giovanni Battista Enrico Antonio Maria Montini – Papa Paulo VI e Albino Luciani – Papa João Paulo I; o incêndio no Museu de Arte Moderna do Rio de Janeiro; o nascimento da primeira bebê de proveta do mundo na Inglaterra – Louise Brown.

Em termos nacionais 1978, foi um ano emblemático para a história brasileira, estávamos no período da ditadura militar e o presidente era o general Ernesto Geisel. Atribui-se a Geisel uma estratégia com o intuito de preparar o regime para uma futura transição para um governo civil.

> Entretanto, o saldo repressivo do governo Geisel não autoriza falar em democratização ou sequer em “distensão”, pois durante seu governo houve 39 opositores desaparecidos e 42 mortos pela repressão. A censura à imprensa, às artes e às diversões foi amplamente utilizada, abrandando-se somente em meados de 1976. O Congresso foi fechado durante quinze dias em 1977, com o governo impondo uma reforma constitucional pelo alto, mantendo as eleições indiretas para governadores de Estado e reformando o poder judiciário (Instituto Vladimir Herzog, 2021).

---

[1] Na subseção 1.1 Frações de minha história de vida – A escrita é de cunho pessoal e apresenta algumas expressões específicas.

Nesse cenário de instabilidades, foi promulgada em 13 de outubro de 1978 a emenda constitucional nº 11, que revogou o AI-5[2], considerado o instrumento mais agressivo do regime militar. A revogação deste ato é considerada como o primeiro passo para a redemocratização brasileira, que viria a ter início somente com a saída do último general presidente do regime militar, João Batista Figueiredo, em 1985, e com a posse de José Ribamar Ferreira da Costa Sarney, primeiro presidente civil, pós ditadura militar.

Em 1984 minha família mudou-se de Taguatinga – DF para a cidade de Campos Belos no interior do Estado de Goiás, onde permaneci até os vinte e dois anos de idade, período em que cursei a educação básica e a licenciatura em Matemática, portanto, considero-me um Campo-Belense. Toda a minha vida escolar deu-se em instituições públicas.

Nesta época começava-se a trabalhar bem novo, lembro que comecei a vender coisas nas ruas com sete anos de idade, junto com meu irmão mais velho que tinha onze anos à época, vendíamos de tudo: pastel, coxinha, chocolate, geladinho, galinha, cheiro verde, garrafa, adubo. Recebia como pagamento uma parte do dinheiro das vendas, desta maneira aprendi as primeiras noções de fração e de porcentagem, além de algumas estratégias de cálculo mental, antes mesmo desses conteúdos serem ensinados na escola. Quando a professora da minha classe iniciou o conteúdo de fração, não tive dificuldades, as experiências que possuía de atividades realizadas fora da escola facilitaram o entendimento.

Hoje ao rememorar o uso de fração identifiquei algumas situações comuns em meu cotidiano à época, como na preparação de canteiros para hortaliças de folhas ou haste: alface, cebolinha, coentro, rúcula, e outras com raízes curtas, bastava cavar o chão em torno de 10 centímetros de profundidade pela largura e comprimento desejados, e depois adicionar adubo, palha de arroz, e revolver a terra, deixando o canteiro com uns 10 centímetros de altura, em relação ao solo. Para este tipo de

---

[2] AI-5 – Ato Institucional nº 5, decretado em 13 de dezembro de 1968 durante o período da ditatura militar, no governo do general Arthur da Costa e Silva. As principais consequências deste ato foram: o fechamento do Congresso Nacional e de Assembleias Legislativas dos estados brasileiros; censura prévia de músicas, cinema, teatro e televisão; as reuniões políticas não autorizadas pela polícia passaram a serem consideradas ilegais; a suspensão de habeas corpus; o banimento de cidadãos, entre outras medidas.

plantio, a mistura que se utilizava continha aproximadamente $\frac{1}{5}$ de palha de arroz, $\frac{1}{5}$ de adubo e $\frac{3}{5}$ de terra.

No cultivo de hortaliças tuberosas: cenoura, beterraba, rabanete, a profundidade do canteiro tinha que ser maior, mantendo a parte externa com a altura em torno de 10 centímetros, cavava 20 centímetros de profundidade, e a mistura também era alterada para $\frac{2}{5}$ de terra, $\frac{2}{5}$ de adubo e $\frac{1}{5}$ de palha de arroz. As hortaliças de raízes compridas exigem que o canteiro seja mais macio para poder se desenvolverem.

Numa outra vertente de uso, tinha a fração presente na criação de galinhas, devíamos ter 1 galo para 9 galinhas, em média, caso contrário os ovos não eram fertilizados. Logo, os galos representavam $\frac{1}{10}$ do total de animais.

Também se utilizava a fração na construção de cercas de arame farpado, em que a profundidade dos buracos, em que eram colocadas as estacas, tinham aproximadamente $\frac{1}{5}$ da altura da estaca.

Experiências como vender, plantar, criar galinhas ou até mesmo construir cercas, estão repletas de conteúdo de fração, mas, na época, tais contextos não foram utilizados nas aulas na escola.

A dicotomia entre o conhecimento da experiência adquirida fora do ambiente escolar e o conhecimento ensinado em sala de aula não deveria existir. Tal situação favorece o surgimento de obstáculos e fragiliza a construção do conhecimento científico.

A criança em seu convívio familiar e social aprende noções de quantidade e é apresentada a ideia dos números naturais de maneira não formal, na escola ela vai sistematizando esse conhecimento.

Ao estudar o conteúdo de fração na escola, o estudante tende a utilizar o conhecimento que possui do conjunto dos números naturais nesse novo contexto, e esse conhecimento já estabelecido não é capaz de atender com eficiência as novas necessidades. Conforme Bachelard (2005), essa situação é conhecida como obstáculo epistemológico da experiência primeira[3].

---

[3] O estudo dos obstáculos epistemológicos enunciados pelo filósofo francês Gaston Bachelard é a teoria principal deste trabalho, e será aprofundado na subseção 2.1.

Na década de 1980, a disciplina era um valor muito importante no ambiente educacional e na sociedade, minha mãe dizia, se souber de alguma reclamação a seu respeito na escola vai levar uma surra.

Da 1ª a 4ª séries estudei na escola Professora Ricarda, tudo muito diferente dos dias atuais, cantava-se o hino nacional e hasteava-se a bandeira toda segunda-feira, só depois que se iniciavam as aulas. As professoras possuíam muita autoridade, se fizesse bagunça sabia que seria punido, o castigo dependia da professora da classe, exemplos: dona Cleide gostava de bater com varas de goiabeira, dona Maria tinha um puxão de orelha fenomenal, dona Stela colocava de castigo de joelhos atrás da porta da sala e dona Joana batia com cipó de Mироró. Ressalto aqui que os nomes foram alterados para preservar as identidades das professoras, mas os castigos, esses eram bem verdadeiros. Fui um estudante comportado, mas, na 4ª série, levei um puxão de orelha daqueles, estava distraído conversando com um colega e não percebi que a professora havia entrado em classe, que vacilo.

Ao concluir a 4ª série, fui para o Colégio Estadual Professora Antusa, também chamado de Polivalente, lá havia o ensino de Primeiro Grau de 5ª a 8ª séries e o ensino de Segundo Grau, sendo a única instituição que ofertava o Segundo Grau na cidade, no colégio não havia os castigos físicos.

O processo avaliativo geralmente se resumia em duas avaliações escritas que compunham a nota do bimestre. Ao final do ano letivo, tinha a semana de recuperação, em que os estudantes que não haviam alcançado a média para aprovação em alguma disciplina realizavam uma prova e se atingissem a média na disciplina em questão, estariam aprovados, caso contrário, teriam que repetir o ano letivo, cursando todas disciplinas.

As notas variavam de 0 a 10,0 pontos, e a média para aprovação era 5,0 pontos, logo a média correspondia a $\frac{1}{2}$ da nota máxima.

Em relação à autoridade e ao comportamento, essas questões eram reforçadas nas aulas das disciplinas: Moral e Cívica; Organização Social e Política Brasileira – OSPB; e Ensino Religioso.

No colégio havia outros espaços, quadra esportiva, biblioteca, laboratório de ciências. A disciplina de Educação Física era uma das preferidas dos estudantes, e resumia-se em jogar futebol ou vôlei, e alguns exercícios físicos. Não havia acesso a computadores, internet, vídeos, e os avanços da época eram a Enciclopédia Barsa e o retroprojetor com uso de transparências. Era o tempo do mimeógrafo à álcool, mas, muitas vezes, as provas eram copiadas do quadro de giz.

Ao ingressar no Segundo Grau, existia uma divisão implícita estabelecida pelos estudantes mais velhos, que ocupavam alguns pavilhões de salas. Estudantes do Primeiro Grau não podiam passar na calçada do pessoal do Segundo Grau senão levava cascudo, a regra era rígida. Nessa época, não se falava em bullying[4], a maioria das pessoas se conhecia por apelidos, gostando ou não, e muitos professores fumavam em classe.

Nesse período do Primeiro e Segundo Grau, tudo se processava conforme a sociedade da época e os valores vigentes, porém, hoje com mais experiência e informações, é possível verificar que, em vários momentos, ocorriam situações de racismo, exemplos: para os papéis de maior visibilidade nas apresentações teatrais ou artísticas sempre eram escolhidos estudantes brancos, mais abastados, filhos de pessoas com influência na sociedade; nas festas e eventos para arrecadar fundos para o colégio, o pessoal da portaria, ou segurança, sempre eram os negros, de preferência os que trabalhavam no serviço pesado.

Pelo disposto, verifica-se a presença da estrutura de poder estabelecida na América Latina e no Brasil com suas características nefastas e bem alicerçadas, entre estas o patriarcado[5] e o eurocentrismo[6], aliado aos traços marcantes da ditadura e do autoritarismo.

Nas décadas de 1980 e 1990, a cultura do autoritarismo estava bem presente na sociedade, fato que ganhou força novamente com o atual governo federal e seus arroubos antidemocráticos.

Na vida escolar, sempre mantive boa relação com os cálculos; considerava possuir facilidade na forma de raciocinar, realizar operações, memorizar. Como ia bem na disciplina, não me questionava acerca das dificuldades dos outros, mas, ajudava quando possível.

---

[4] Prática agressiva que geralmente ocorre no ambiente escolar, consiste em xingamentos, humilhação, agressão física e/ou intimidação, contra um indivíduo, pode ser praticada por uma ou várias pessoas.

[5] Sistema social que valoriza e favorece o homem branco e heterossexual, em detrimento das mulheres, e outras pessoas, com base em questões de gênero e orientação sexual.

[6] O eurocentrismo é uma visão de mundo centrada na Europa, nessa perspectiva os brancos seriam a raça superior e as demais inferiores.

Ao concluir o Segundo Grau em 1995, prestei vestibular e fui aprovado; na oportunidade, foi fácil a escolha, uma vez que só havia dois cursos superiores na região, Arraias/Tocantins, sendo Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Como possuía maior interesse pelos números, escolhi Matemática.

A realidade foi dura, logo veio a constatação de que o ensino na Educação Básica havia deixado lacunas, muitos conteúdos não foram vistos. No início, éramos trinta e quatro acadêmicos; no primeiro ano, desistiram dezoito; ao final de quatro anos, apenas sete acadêmicos, que iniciaram o curso no ano de 1996, concluíram a licenciatura.

As dificuldades foram muitas, destacando-se problemas com transporte público e falta de domínio de conteúdos e conceitos matemáticos relacionados ao Ensino Fundamental e Médio. Para conseguir concluir o curso, foram horas a fio de muito estudo e dedicação.

Nesta época os cursos da Universidade Estadual do Tocantins – UNITINS eram anualizados, diferente de hoje que os períodos são semestrais. O primeiro ano foi o mais difícil, a falta de conhecimentos básicos de Matemática provocou a desistência de muitos acadêmicos, os que ficaram tiveram que estudar por conta própria e aprender o que não sabiam.

Ao iniciar o 3º ano da graduação, o coordenador do Curso de Matemática me indicou para ministrar aulas no Colégio Polivalente, onde cursei a segunda fase do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em Campos Belos-GO. Foi um desafio, ser colega dos meus antigos professores.

Na condição de professor durante o dia e acadêmico à noite, o tempo ficou escasso, porém foi bastante útil, pois favorecia o esclarecimento de dúvidas com meus professores na UNITINS, tanto em questões de conteúdo específico ou em situações didático-pedagógicas.

No último ano da graduação, cursei a disciplina Prática de Ensino de Matemática, conhecida como estágio. Neste período, assumi a regência de algumas classes em escolas da rede pública de ensino em Arraias – TO, cidade onde o curso era ofertado. Em cada classe, atuava durante uma semana, sob supervisão da professora da disciplina, e, algumas vezes, a professora da classe assistia às aulas.

As classes eram de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental de 8 anos, e, nessa época, chamou minha atenção as dificuldades dos estudantes, pois, independente da classe e período (matutino, vespertino, noturno), os conteúdos com maior quantidade de erros eram fração, números decimais e porcentagem. Em conversas com colegas do curso, estagiários em outras classes, as situações eram semelhantes, porém, na época, mesmo identificada a situação, não houve desenvolvimento de trabalhos ou pesquisas em relação ao assunto.

> No caso dos números racionais, os alunos até conseguem dar um tratamento decimal, isto é, trabalhar com representações decimais e algumas vezes com representações fracionárias, dando tratamentos fracionários, porém não conseguem converter essas representações entre si, ou seja, perceber que 0,1 e 1/10 são equivalentes e representam o mesmo objeto matemático (números racionais) (VIZOLLI, 2001, p. 49).

Concluída a licenciatura e exercendo a docência em classes de Ensino Fundamental e Médio em Campos Belos-GO, tais dificuldades permaneciam, inclusive para os estudantes do Ensino Médio.

Em junho de 2000, recebi uma proposta de trabalho e ingressei como professor no Estado do Tocantins, no município de Almas. Assumi uma vaga de 40 horas no Colégio Estadual Dr. Abner Araújo Pacini, que ofertava o Ensino Fundamental de 1ª a 8ª séries e o Ensino Médio. Ao iniciar minhas atividades, percebi que no colégio havia apenas três docentes com curso superior, um advogado que lecionava Língua Portuguesa, uma pedagoga que ministrava aulas de Geografia, e uma licenciada em História que atuava na área de formação. No ano seguinte, busquei uma especialização em Matemática, mas não havia instituição pública ou privada que ofertasse o curso no Estado do Tocantins, então fui para São Paulo nos meses de janeiro e julho de 2001, onde fiz o curso de especialização *Lato Sensu* em Metodologia do Ensino de Matemática, área de concentração: Formação de Professores.

Em agosto de 2001, assumi a coordenação pedagógica do Colégio Abner, neste período também atuava como tesoureiro da Associação Escolar, o que possibilitava participar ativamente das decisões escolares, quer financeiras, pedagógicas ou administrativas.

Neste momento, o cenário educacional passava por mudanças devido a um processo de reordenação nas unidades escolares da Secretaria de Educação e Cultura do Estado do Tocantins, SEDUC – TO, o novo direcionamento era para alocar os professores com formação superior nas escolas que ofertavam o Ensino Médio. As mudanças desagradaram alguns docentes devido ao fato de terem que mudar de escola, e alguns de município, mas, ao final, o resultado foi positivo.

O ensino ofertado no colégio teve um ganho em qualidade devido a alguns fatores, a titulação/formação dos professores, mudanças nas ações pedagógicas e na atuação da equipe diretiva. A SEDUC - TO promovia vários encontros de capacitação docente, e estava no momento de formações em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Havia alguns questionamentos quanto à qualidade das formações, contudo houve um avanço que contribuiu para a melhoria dos trabalhos nas unidades escolares.

No ano seguinte, ocorreu o concurso para docentes e fui aprovado, tomando posse no cargo efetivo em junho de 2002 para o município de Almas.

As atividades na coordenação pedagógica trouxeram novos desafios e novas aprendizagens, o trabalho em equipe, a elaboração do Projeto Político Pedagógico – o famoso PPP, o acompanhamento aos docentes em suas demandas, a relação com a comunidade local, a evasão escolar, o monitoramento do rendimento dos estudantes, a formação continuada com os docentes, planejamento, enfim o fazer pedagógico, período muito intenso de atividades. Em 2003 a SEDUC – TO firmou uma parceria com a Fundação Cesgranrio, e implantou o Programa de Melhoria da Qualidade do Ensino, em que os professores de Língua Portuguesa e Matemática das unidades escolares tinham encontros quinzenais com coordenadores de grupo para estudo e discussão quanto a conteúdos e metodologias. Os coordenadores de grupo participavam de treinamentos em Palmas – TO com professores mestres e doutores da Cesgranrio, e multiplicavam junto aos professores das escolas na sede das Diretorias Regionais de Ensino – DRE, ou seja, os coordenadores de grupo eram professores multiplicadores.

Na oportunidade, fui convidado para ser o coordenador de grupo de Matemática na DRE – Dianópolis, então, em agosto de 2003, deixei a coordenação pedagógica no colégio em Almas - TO e assumi a nova função na DRE, em Dianópolis - TO, com a respectiva mudança de domicílio.

Foi uma rica oportunidade, os encontros com os professores da Cesgranrio, o processo de capacitação e multiplicação, oportunizava reflexão e aprendizado. Os professores das escolas jurisdicionadas à DRE eram divididos em grupos: Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, e Ensino Médio.

Nos encontros de formação com os docentes do Ensino Fundamental I e II, além da pauta prévia, havia espaço para discussão e sugestões de conteúdos a serem trabalhados e, dentre as sugestões dadas, destacavam-se o estudo de fração, porcentagem e resolução de problemas.

Além de relatar dificuldades em determinados conteúdos matemáticos, os docentes também indicavam situações conflitantes ou desafiadoras ocorridas em sala de aula, dentre estas: erros recorrentes; erros ou dificuldades coletivas; estudantes mais novos que a média de idade da turma e que apresentavam dificuldades em compreender alguns conceitos matemáticos; dificuldade do docente em preparar materiais para o ensino de frações.

Ao refletir em relação a estes relatos/sugestões, percebi uma proximidade com a teoria do educador matemático Guy Brousseau (1998) que trata dos obstáculos de origem[7]: didática, ontogênica e epistemológica.

Permaneci na coordenação de grupo até março de 2004, quando surgiu o processo seletivo para Diretores Escolares, uma vez que a parceria entre a SEDUC – TO e a Fundação Cesgranrio se encaminhava para o fim.

Na intenção de conhecer a gestão escolar, inscrevi-me no processo de seleção que era composto por três etapas, análise curricular; elaboração de um projeto de gestão baseado em dados da escola; e uma entrevista. Assumi a direção da Escola Estadual Coronel Abílio Wolney em março de 2004, a partir de então, meu trabalho na SEDUC esteve mais atrelado a funções mais administrativas que pedagógicas, direção escolar, coordenação financeira, controle interno e coordenação de polo da Universidade Aberta do Brasil.

Outras experiências pedagógicas que tive foi no ensino superior, a primeira delas na docência universitária foi em duas turmas do curso de Normal Superior, ofertado pela UNITINS, em Dianópolis, em 2004, na disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática. As turmas eram compostas em sua maioria por professores que já ministravam aulas nas séries iniciais há bastante tempo, muitos perto da aposentadoria, e o curso era ofertado em regime especial, nos meses de janeiro e julho, com encontros quinzenais aos finais de semana durante o semestre.

Os acadêmicos possuíam muitas dificuldades, porém apresentavam boa vontade, mesmo com a carga diária matutina e vespertina que os deixavam exaustos. A priori, a disciplina tratava de metodologia, mas, após contato com a turma, em conjunto com a coordenação de curso, fizemos um mix, de conteúdos e metodologia,

[7] Os obstáculos discutidos por Brousseau integram a perspectiva teórica deste trabalho e são abordados na subseção 2.2.

para ajudá-los em suas turmas no retorno às escolas, dentre os conteúdos escolhidos estava o de fração.

Um segundo contato com o ensino superior, também foi em turmas de licenciatura parcelada, nome do programa ofertado pela Universidade Estadual de Goiás – UEG, em Campos Belos-GO no ano de 2005, atuando no curso de Pedagogia com as disciplinas de Aspectos Teóricos Metodológicos do Ensino de Matemática, e Metodologia do Ensino de Matemática; no curso Licenciatura em Matemática, com disciplinas de Estatística e Probabilidade; Cálculo Integral e Diferencial II; e Física I. Nestes programas, ficou perceptível que o trabalho nas turmas de Pedagogia era possível de ser realizado, com algumas ressalvas, porém na turma de Matemática era muito difícil os acadêmicos acompanharem uma disciplina de Cálculo ou de Física, ministrada em seis dias, de segunda a sábado, dez aulas por dia, manhã e tarde. Era visível o desespero no rosto dos acadêmicos, e o medo da reprovação. Havia baixo aprendizado e uma ideia implícita disseminada de que o importante era o Diploma.

Em 2007, iniciei na Faculdade para o Desenvolvimento do Sudeste Tocantinense – FADES, em Dianópolis - TO. Lecionava nos cursos de Administração, Ciências Contábeis e Gestão Ambiental, em disciplinas da área de exatas. Permaneci até 2014, quando houve o encerramento das atividades da Faculdade por questões financeiras. Em substituição à FADES, para atendimento dos acadêmicos, houve ações dos governos municipal e estadual que culminou com a criação do Campus da UNITINS em Dianópolis em 2014, na oportunidade foram aprovados os planos de curso da FADES nos órgãos da UNITINS e, assim, foi possível aos cursistas concluírem seus cursos, iniciados na FADES, junto à UNITINS.

Mesmo no ensino superior, as dificuldades com fração, números decimais e porcentagem manifestam-se em variados momentos, um deles em particular é no estudo de Probabilidades, em que para resolver situações-problema os acadêmicos precisam de tais conceitos bem estabelecidos.

A partir da experiência adquirida em mais de duas décadas atuando na área da educação, percebe-se que a maneira como o professor compreende determinado conteúdo influenciará a metodologia utilizada por ele no processo de ensino, com objetivo de ensinar esse conhecimento ao estudante. O professor precisa ter consciência de seu papel.

> Para nós [pedagogos, pesquisadores e teóricos da educação], é claro que não se pode ser professor sem combinar três tipos de conhecimento: **saber**

> **muito bem o conteúdo que se vai ensinar** – isso é central, se não se souber muito bem história, não se pode ensinar história; se não se souber muito bem matemática, não se pode ensinar matemática; ter as bases centrais de tudo o que é da pedagogia, das teorias da aprendizagem, sobre a maneira como as crianças aprendem; e depois, ter um conhecimento da profissão, saber como a profissão funciona na prática, qual é o conhecimento profissional, como se organizar nas escolas, como qualificar o trabalho. Sem esses tipos de conhecimento, é impossível ser professor (NÓVOA, 2016, s\p, grifo nosso).

Graduado e com 3 (três) especializações *lato sensu*, senti a necessidade de buscar novos conhecimentos, assim, resgatei um sonho antigo, o de cursar mestrado. Por muitas vezes tive vontade de estar na Pós-graduação *Stricto Sensu*, mas as condições não favoreciam tal intento, geralmente eram ofertadas em municípios distantes e por dificuldades em conciliar o tempo ou por questões financeiras, ainda não havia sido possível.

Em 2019, resolvi participar do processo seletivo para o curso de Mestrado Acadêmico em Educação, ofertado pela UFT campus Palmas. Soube por um colega que a SEDUC – TO estava possibilitando o afastamento para aprimoramento profissional, via edital, ou seja, os servidores efetivos que fossem aprovados em programas de mestrado ou de doutorado em áreas de interesse da SEDUC – TO e que atendessem a todos os critérios dispostos no edital poderiam cursar a pós-graduação e receber seus vencimentos durante o período concedido, um tipo de licença remunerada. Na oportunidade verifiquei que um dos professores orientadores do Programa de Mestrado desenvolvia um projeto de pesquisa cujo objeto de estudo é a fração.

Fui aprovado para a 8ª turma do Mestrado Acadêmico em Educação, com ingresso em agosto de 2019, aderi ao edital de afastamento e fui selecionado. Após vários anos dedicados ao ensino de Matemática, poderia me envolver agora com a pesquisa em Matemática.

Ao iniciar o curso e em conversa com o orientador, ficou estabelecido que a pesquisa se daria em torno dos obstáculos epistemológicos no conceito de fração.

Segundo Bachelard (2005), ao estudar os obstáculos epistemológicos, temos uma nova forma de perceber as dificuldades dos estudantes, vez que nem sempre os chamados erros são cometidos por falta de conhecimento, sendo alguns deles exatamente devido a algum conhecimento prévio que, em determinada época foi útil, e depois se mostra incompleto, falso. Nesta perspectiva teórica, já anunciada nesta reflexão, delineou-se todo o trabalho.

O estudo dos obstáculos epistemológicos no conceito de fração, vai muito além das questões pedagógicas e do conteúdo de fração comumente discutidos nos cursos de graduação ou de formação continuada, pressupõe um mergulho em questões filosóficas e epistemológicas, além de um estudo que remonta às origens do conceito de fração em civilizações antigas.

1.2 Fundamento e problemática

Ser docente de Matemática não é tarefa fácil, esta ciência possui um arcabouço teórico e um volume de conteúdos muito amplo, formado ao longo dos séculos, com a contribuição de homens e mulheres. Para atuar nesta disciplina, o docente precisa conhecer conceitos, procedimentos, operações, e isso requer muito estudo e reflexão.

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. (BRASIL, 1997, p. 18).

O processo de ensino da Matemática é complexo e requer uma concepção epistemológica de produção do conhecimento, em muitos casos não atendida pelos cursos de graduação ofertados em nossas faculdades e universidades.

> O caminho de sucesso para o ensino da matemática no Brasil não existe previamente, e por isso, aponta a urgente necessidade de ações conjuntas, das escolas, de políticas públicas, dos professores e da sociedade, ações essas que busquem entre suas metas, a melhoria da matemática desenvolvida nos cursos de pedagogia, o que certamente trará contribuições efetivas para a educação básica (ROLIM, 2014, p. 95).

No trabalho com docentes e futuros docentes, em cursos de graduação ou de formação continuada, observa-se limitações quanto ao domínio de conceitos e operações envolvendo fração. As iniciativas propostas para a superação de tais dificuldades, nem sempre apresentam bons resultados, muitas vezes discutem as consequências sem identificar as causas. As angústias e inquietações ao não conseguir compreender determinados erros servem de inspiração para a busca de informações e conhecimentos.

Nessa perspectiva de desvelar as dificuldades/limitações intrínsecas ao conceito de fração, busca-se conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes a este conceito, e tal perspectiva ganha força devido ao fato de não terem sido encontrados trabalhos com esta temática no Estado do Tocantins.

Numa busca preliminar, foram identificadas algumas produções acadêmicas que tratam de obstáculos epistemológicos envolvendo o ensino de números racionais, porém estas dão ênfase a teoria de Brousseau, neste trabalho propôs-se ir além, fazendo uma análise à luz das teorias de Bachelard e de Brousseau.

Entende-se que a epistemologia de Bachelard se constitui num diferencial em termos filosóficos que agregam valor ao fazer pedagógico dos docentes.

> A epistemologia bachelardiana define, portanto, o progresso do conhecimento científico como uma retificação contínua e chama a atenção do epistemólogo e do educador para o seu axioma primeiro a "*primazia teórica do erro*". [...] Ao contrário da pedagogia tradicional que durante muito tempo, e ainda hoje, concebe o erro como um acidente de percurso, uma imperícia, um defeito, a ignorância de um saber, Bachelard defende, insistentemente, talvez como ninguém, que o erro tem uma função positiva na gênese do conhecimento, que o erro não é uma simples privação ou carência, mas que ele tem a estrutura e a vitalidade do instinto (TRINDADE, 1996, p. 77, grifo do autor).

Conhecedor ou não de conceitos relacionados à filosofia e à epistemologia, o docente possui e utiliza-se de uma perspectiva epistemológica no seu fazer pedagógico que envolve desde a preparação da aula até a sua execução em classe, nessa perspectiva,

> [...] entendemos a *epistemologia do professor* como sendo as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos. (PAIS, 2018, p. 34, grifo do autor).

Este trabalho propõe-se a ser fonte de pesquisa para docentes e não docentes que busquem um contato inicial com a epistemologia bachelardiana e com a noção dos obstáculos epistemológicos intrínsecos ao conceito de fração, e possui os elementos diretivos apresentados a seguir.

Tema

- Obstáculos epistemológicos no conceito de fração.

Questão de pesquisa

- Que obstáculos epistemológicos afetam o conceito de fração?

Objetivo Geral

- Conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração.

Objetivos Específicos

- Identificar obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração a partir de teses e dissertações de IES brasileiras;
- Buscar obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração a partir da História da Matemática em diferentes civilizações antigas;
- Analisar em livro didático de 6º ano do Ensino Fundamental implicações a partir de obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração.

1.3 Metodologia

Este trabalho foi inicialmente pensado na perspectiva de conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes ao ensino de fração, bem como a metodologia utilizada por professores de Matemática nesse ensino, etapa em que seria realizada uma pesquisa de campo. Estava-se no segundo semestre de 2019, época de nosso ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Tocantins (PPGE/UFT), num contexto em que não havia a pandemia do novo corona vírus.

A partir da declaração da pandemia de Covid-19 realizada pela Organização Mundial de Saúde (OMS), em março de 2020, houve grandes mudanças: a suspensão das aulas presenciais nas escolas, faculdades e universidades na maior parte do país; a organização do ensino remoto em substituição às aulas presenciais; a implementação de novos protocolos sanitários; e alterações no comércio e demais setores da sociedade, além de um crescente número pessoas contaminadas e de óbitos.

Considerando esta nova conjuntura e o prognóstico para os próximos semestres, realizou-se mudanças na estrutura da pesquisa, fez-se, então, necessária a retirada da pesquisa de campo, prevista inicialmente. Assim, optou-se pela realização de um trabalho bibliográfico.

Delineando o percurso

Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa e, em relação aos procedimentos, é bibliográfica com escopo no estado do conhecimento.

A abordagem qualitativa é adequada à linha de pesquisa do Programa de Mestrado – Estado, Sociedade e Práticas Educativas, bem como à temática desenvolvida.

> Quando se fala de pesquisa quantitativa ou qualitativa, e mesmo quando se fala de metodologia quantitativa ou qualitativa, apesar da liberdade de linguagem consagrada pelo uso acadêmico, não se está referindo a uma modalidade de metodologia em particular. Daí ser preferível falar-se de *abordagem quantitativa*, de *abordagem qualitativa*, pois com estas designações, cabe referir-se a conjuntos de metodologias, envolvendo eventualmente diversas referências epistemológicas (SEVERINO, 2007, p. 119, grifo do autor).

Ao se vislumbrar o arcabouço teórico atual, muitas obras tratam da pesquisa qualitativa, ela ocupa uma posição de destaque, sendo utilizada entre outras possibilidades para estudar os fenômenos sociais, ou seja, situações com pessoas e suas relações.

Conforme Marconi; Lakatos (2010), Cervo; Bervian e Silva (2014), a pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, apoia-se em publicações existentes relacionadas a determinado tema ou assunto em estudo.

> A *pesquisa bibliográfica* é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc., utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2007, p. 122, grifo do autor).

Este tipo de pesquisa visa possibilitar ao pesquisador informações existentes acerca de seu objeto de pesquisa.

> A pesquisa bibliográfica procura explicar um problema a partir de referências teóricas publicadas em artigos, livros, dissertações e teses. Pode ser

> realizada independentemente ou como parte da pesquisa descritiva ou experimental. Em ambos os casos, busca-se conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2014, p. 60).

Por se tratar de uma pesquisa de caráter bibliográfico, optou-se pelo estado do conhecimento[8] para o mapeamento das produções acadêmicas em relação à temática proposta. O recorte temporal estabelecido foi do ano de 2006 a 2020.

Procedimentos metodológicos

Uma vez delineado o percurso metodológico e com base nos objetivos específicos, foram definidos os seguintes procedimentos.

Categorias de análise para os obstáculos

Na análise dos obstáculos verificados na pesquisa, serão utilizadas as categorias estabelecidas por Bachelard – subseção 2.2, e por Brousseau – subseção 2.3, ambas descritas na Seção 2 – Fundamentação Teórica.

- Conforme Bachelard (2005), temos as categorias de obstáculos epistemológicos: a experiência primeira; conhecimento geral; obstáculo verbal; conhecimento unitário e pragmático; obstáculo substancialista; obstáculo realista; obstáculo animista; o mito da digestão; libido e conhecimento objetivo; e obstáculos do conhecimento quantitativo.
- Conforme Brousseau (1998), os obstáculos são organizados em categorias de acordo a origem: ontogênica, didática e epistemológica.

O surgimento da fração e os obstáculos

Com base num levantamento histórico, buscou-se as origens da fração em civilizações antigas, de modo a identificar os obstáculos epistemológicos intrínsecos a este conceito. Esta investigação deu-se a partir dos teóricos Boyer (1994), Eves

[8] As etapas, organização e critérios adotados para a realização do estado do conhecimento encontram-se detalhadas na subseção 3.1.

(2011), Ifrah (1997), e outras produções a respeito da História da Matemática. Averiguou-se as civilizações: Egípcia, Mesopotâmica, Grega e a Hindu. Foram identificados elementos relacionados ao contexto histórico, localização, necessidade de uso da fração, aspectos da escrita, o sistema de numeração, evidências, registros, e os obstáculos.

O conteúdo de fração e os obstáculos no livro didático

Muitas produções tematizam e estabelecem discussões em variados aspectos quanto ao livro didático, sabe-se que além da influência nos processos de ensino e de aprendizagem, este material é uma importante mercadoria econômica e que, muitas vezes, o aspecto econômico sobrepõe-se aos demais.

Neste estudo considerou-se o livro didático como um material disponível aos docentes e discentes, e buscou-se as implicações a partir dos obstáculos epistemológicos intrínsecos ao conceito de fração. Nesta análise optou-se pelo livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, por ser o que apresenta maior volume de conteúdo de fração.

1.4 A organização da pesquisa

Esta dissertação está organizada em quatro seções que descrevem o percurso teórico e metodológico referente à pesquisa. Na primeira, traz-se as motivações para a realização da pesquisa, a problemática envolvida e a metodologia. Na segunda, a fundamentação teórica e histórica. Na terceira, a revisão de literatura e, na quarta e última, apresenta-se nossas reflexões.

Na primeira seção, traz-se um testemunho de vida e de experiência (memorial) que indica o percurso de minhas origens até o ingresso no Mestrado em Educação, bem como os seguintes elementos: a justificativa para o desenvolvimento do trabalho, a questão de pesquisa, o objetivo geral e os específicos, a metodologia e a estruturação da pesquisa.

Na segunda, aprofunda-se os aspectos teóricos e históricos da pesquisa, trata-se da teoria principal, a do filósofo francês Gaston Bachelard, em que se realiza um estudo de sua epistemologia e dos obstáculos epistemológicos, da teoria do educador matemático Guy Brousseau que complementa a fundamentação teórica a partir de seus trabalhos a respeito dos obstáculos didáticos. Encerra-se esta parte com o estudo da fração na história da Matemática em civilizações antigas: Egito, Mesopotâmia, Grécia e Índia.

A terceira seção é composta de um estudo de produções acadêmicas, coletadas a partir de um levantamento de dados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. São analisadas 5 (cinco) dissertações que abordam a temática em discussão: Miranda (2007), Costa (2009), Meier (2012), Ferreira (2014) e Martins (2016), e um livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental.

Na quarta e última seção, apresenta-se as reflexões, em que se busca responder de maneira clara à questão de pesquisa, e o atingimento dos objetivos geral e específicos do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, procura-se responder à seguinte indagação - Quais obstáculos permearam a construção histórica do conceito de fração? A elaboração da resposta está alicerçada em elementos teóricos e históricos.

A sustentação teórica está baseada em duas teorias, a primeira do filósofo francês Gaston Bachelard que formulou uma epistemologia da Ciência voltada ao espírito científico atual, sendo este o autor da obra A Formação do Espírito Científico – Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento (1938), em que foram enunciados os obstáculos epistemológicos. “Gaston Bachelard desenvolveu suas primeiras teses epistemológicas há mais de oitenta anos e, apesar de parecer muito tempo, seu pensamento continua com a marca da contemporaneidade” (SOUSA, 2018, p. 28).

A segunda teoria foi elaborada pelo educador matemático Guy Brousseau, que explorou a noção de obstáculos epistemológicos na Matemática. Muitos autores como Glaeser (1981), Igliori (2008), Trindade (1996), Bittencourt (1998), Almouloud (2007), fizeram contribuições à temática no decorrer dos anos e alguns são referenciados ao longo deste trabalho.

Na parte histórica, realiza-se uma busca a partir de autores que discutem a História da Matemática, no intuito de conseguir indícios e informações a respeito dos obstáculos epistemológicos inerentes à formação do conceito de fração. Este estudo compreendeu um levantamento histórico em civilizações antigas: egípcia, mesopotâmica, grega e hindu.

2.1 A epistemologia da ciência de Bachelard

No estudo da obra de Bachelard, identifica-se um elemento que perpassa sua filosofia e sua epistemologia é o progresso científico.

> Pode-se discutir muito acerca do progresso moral, do progresso social, do progresso poético, do progresso da felicidade; existe, no entanto, um progresso que é indiscutível; o progresso científico, considerado como hierarquia de conhecimentos, no seu aspecto especificamente intelectual (BACHELARD, 1978, p. 12).

Ao considerar a evolução da Ciência, ele utiliza a expressão espírito científico. Para Bachelard (2005), o espírito científico encontra-se entre o concreto e o abstrato, e busca conciliar matemática e experiência, leis e fatos.

> Para o cientista, o conhecimento sai da ignorância tal como a luz sai das trevas. O cientista não vê que a ignorância é um tecido de erros positivos, tenazes, solidários. Não vê que as trevas espirituais têm uma estrutura e que, nestas condições, toda experiência objetiva correta deve implicar sempre a correção de um erro subjetivo. Mas não é fácil destruir os erros um a um. Eles são coordenados. O espírito científico só se pode construir destruindo o espírito não científico (BACHELARD, 1978, p. 6).

A epistemologia de Bachelard foi construída a partir de sua trajetória de vida: seus estudos, sua experiência profissional e, em especial, suas reflexões filosóficas.

Segundo Barbosa e Bulcão (2011), Gaston Bachelard nasceu na cidade francesa de Bar-sur-Aube, em 27 de junho de 1884, permaneceu no interior até a fase adulta quando se mudou para Paris. Neto de um sapateiro e filho de donos de uma pequena tabacaria, sonhava em ser engenheiro, porém, devido à Primeira Guerra Mundial, não conseguiu realizar seu sonho. Formou-se em licenciatura em Matemática e, posteriormente, em Filosofia. “A origem rústica e camponesa de Bachelard conferiu à sua obra traços marcantes que foram os responsáveis pela originalidade de sua obra” (BARBOSA; BULCÃO, 2011, p. 18).

De acordo Barbosa (2020), Bachelard lecionou ciências e filosofia, foi poeta, epistemólogo, e condenava o uso de biografias, geralmente pelo caráter pouco objetivo que elas comportam. Viveu a transição entre os séculos XIX e XX, período em que foram divulgadas a Teoria da Relatividade de Einstein e a Mecânica Quântica, tais acontecimentos exerceram forte influência em sua teoria.

> A epistemologia bachelardiana é constituída de um esforço permanente de reforma de seus conceitos. Quem se aventura em sua Paideia, deve adquirir um estado permanente de se voltar constantemente contra si próprio, buscando não o que está evidente, mas o que está escondido por trás do aparente, das sombras, lançando luzes para clarear o nosso trilhar epistemológico (SOUSA, 2018, p. 28).

Criador de uma epistemologia da Ciência, suas teses iam contra às ideias epistemológicas fechadas da época. Segundo Barbosa e Bulcão (2011), essa oposição epistemológica ganhava ênfase em relação às teorias da física de Newton e as ideias de Émile Meyerson que defendia que a física de Einstein é uma continuação da física de Newton. “Bachelard foi o autor que apontou a relevância de se ter abertura, mudança, ruptura na ciência, sendo ele mesmo um homem da ciência e aberto, um homem em mudança, aquele que propõe a ruptura como condição de progresso" (SILVA, 2018, p. 65).

O filósofo francês questionava a ideia vigente de que o conhecimento seria formado por acúmulo, e afirmava que se isso fosse verdade, não existiriam períodos de estagnação nessa construção. Em sua vasta obra, organizou seus escritos em categorias: espírito científico, ruptura epistemológica, conhecimento aproximado, racionalismo aplicado, filosofia do não, uma das principais é a de ruptura ou descontinuidade.

> A categoria de ruptura vai estar presente como uma constante e como fundamento primordial ao longo do desenvolvimento de seu pensamento, impulsionando sua reflexão na direção de novos caminhos, caminhos estes que, contestando pressupostos da tradição científico-filosófica, tornaram-se marcos importantes que atestam a originalidade das ideias bachelardianas (BARBOSA; BULCÃO, 2011, p. 18).

O conceito de ruptura epistemológica é essencial para se compreender a filosofia de Bachelard, "sem o conceito de *ruptura* não é possível obter uma compreensão adequada da epistemologia bachelardiana que é notoriamente voltada para interpretar as condições epistêmicas da nova física" (VELANES, 2020, p. 2, grifo do autor).

Observa-se que, ao estudar sua epistemologia, é necessário conciliar conhecimentos científicos com conhecimentos filosóficos, caso contrário, não é possível compreender as análises feitas por ele. Segundo Barbosa (2020), existem várias portas para se estudar a epistemologia bachelardiana, dentre estas destaca-se: a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica.

Pela Teoria da Relatividade de Einstein, a ideia de tempo e de espaço foi revolucionária tanto na física quanto no conhecimento científico, uma vez que contraria a ideia de espaço e tempo finitos, que eram conceitos bem alicerçados da época. A concepção de tempo foi radicalmente alterada, a partir da nova discussão a respeito da quarta dimensão. A segunda porta - a da Mecânica Quântica, em que a análise dos elementos microfísicos, o comportamento dos elementos infinitesimais, como onda e como partícula, provocaram questionamentos em relação aos conceitos da física clássica, até então tidos como incontestáveis.

Como aponta Barbosa e Bulcão (2011), Bachelard opôs-se à filosofia positivista, considerando-a ultrapassada, uma vez que não conseguia dar conta das transformações que ocorriam no saber científico. Embora tenha sido útil no atendimento à ciência clássica.

> Ao contrário de muitos filósofos de sua época, a conclusão de Bachelard [...] em relação aos princípios das filosofias tradicionais é que elas não podem ser inteiramente transplantadas aos domínios das interpretações epistemológicas do pensamento científico contemporâneo (VELANES, 2020, p. 8).

Considerava o sistema de Newton[9] um sistema acabado. Não havia transição entre o sistema de Newton e o de Einstein[10], “o pensamento newtoniano era à primeira vista um tipo maravilhosamente límpido do pensamento fechado; dele não se podia sair a não ser por arrombamento” (BACHELARD, 1978, p. 111). Assim, questionou fundamentos, negou pressupostos, empreendeu um combate fervoroso à doutrina do positivismo[11].

> Bachelard mostra que a ciência progride porque a razão é livre e fecunda, sendo a descontinuidade e a ruptura com o saber anterior a mola propulsora do progresso e do desenvolvimento da razão. [...] A concepção de razão dinâmica e a noção de progresso descontínuo do saber são teses que constituem eixos centrais da epistemologia bachelardiana e fazem de Bachelard um opositor tenaz da doutrina comteana[12] (BARBOSA; BULCÃO, 2011, p. 18).

Nesse cenário de mudanças e de transformações no conhecimento científico, o filósofo não pode ter uma doutrina única, filosofia e ciência precisam ser contemporâneas. As verdades precisam ser constantemente revistas, sob o risco de cristalizarem-se os conceitos e as concepções.

> Trata-se de uma filosofia das ciências que, em matéria de teoria do conhecimento, não propõe mais soluções filosóficas para problemas científicos já superados. Trata-se de uma filosofia aberta, que não encontra mais em si mesma as ‘verdades primeiras’, nem tampouco vê na identidade do espírito a certeza que garante um método permanente e definitivo. O que deve ser abandonado é uma filosofia que coloca seus princípios como

---

[9] Sistema baseado nos estudos de Isaac Newton, considerado suficiente ao se trabalhar com objetos grandes, porém não apropriado ao lidar com objetos infinitesimais.

[10] O sistema de Einstein baseado na teoria da Relatividade introduziu a quarta dimensão – o tempo, fato que provocou a revisão dos conceitos de tempo e espaço.

[11] Nesse contexto a doutrina do positivismo é entendida como a valorização da experiência e a observação a melhor maneira de explicar os fatos.

[12] A doutrina comteana é estabelecida a partir dos trabalhos do filósofo francês Auguste Comte, apontado como o pai do positivismo.

> intangíveis e que afirma suas verdades primeiras como totais e acabadas (JAPIASSÚ 1992, p. 73-74).

Uma particularidade que torna a obra de Bachelard diferenciada é o aspecto poético, utilizado com maestria por esse artista da filosofia. “Como amante da poesia e da arte, Bachelard consegue penetrar no mundo dos sonhos e dos devaneios, apreendendo o verdadeiro sentido da imagem e da imaginação” (BARBOSA; BULCÃO, 2011, p. 19).

De acordo Japiassú (1992), Bachelard apresenta-se com uma dupla pedagogia: a da Razão voltada ao homem diurno da ciência, e a da Imaginação ligada ao homem noturno da poesia.

> Os eixos da poesia e da ciência são a princípio inversos. Tudo o que a filosofia pode esperar é tornar a poesia e a ciência complementares, uni-las como dois contrários bem-feitos. É preciso, portanto, opor ao espírito poético expansivo o espírito científico taciturno, para o qual a antipatia prévia é uma saudável precaução (BACHELARD, 1994, p. 2).

Bachelard apresenta em suas produções essa busca pelo equilíbrio do homem diurno e do homem noturno, ou seja, a integralidade do ser. A imaginação tem um sentido muito específico em sua teoria, o de promover sentido. “A epistemologia de Bachelard não se constrói levando em conta uma teoria do imaginário, mas através da reflexão sobre o pensamento científico e a racionalidade científica” (SILVA, 2018, p. 172).

A relevância de suas teses influenciou teóricos ao longo do tempo e observa-se um redescobrir de sua filosofia, assim se mantém atual e incentiva discussões e estudos acadêmicos em diversos países.

> Ao valorizarmos a dimensão epistemológica, é nossa intenção destacar alguns aspectos que precisam estar presentes, quer na formação dos professores, quer na sua prática docente, visto que é esta dimensão que dá a conhecer aos professores a ciência que eles ensinam, influenciando toda sua prática (TRINDADE, 1996, p. 11).

Mesmo não tendo escrito diretamente em relação à educação, pode-se verificar em suas obras contribuições para o campo pedagógico, “do ponto de vista pedagógico, a visão epistemológica de Bachelard implica a análise crítica do processo de aprendizagem, considerando as dificuldades, erros e falhas como parte deste processo” (BITTENCOURT, 1998, p. 13).

Ao se adentrar a epistemologia de Bachelard, uma das vertentes são os obstáculos epistemológicos enunciados em 1938, os quais lançam luz no processo de construção do conhecimento científico.

2.2 Obstáculos Epistemológicos conforme Bachelard

Bachelard organiza a história da ciência em três grandes períodos: o estado pré-científico, o estado científico e o novo espírito científico, mas ressalta que tal divisão não consegue abranger, em sua totalidade, as diferentes etapas históricas do pensamento científico.

> O primeiro período, que representa o *estado pré-científico,* compreenderia tanto a Antiguidade clássica quanto os séculos de renascimento e de novas buscas, como os séculos XVI, XVII e até XVIII. O segundo período, que representa o *estado científico,* em preparação no fim do século XVIII, se estenderia por todo o século XIX e início do século XX. Em terceiro lugar, consideraríamos o ano de 1905 como o início da era do *novo espírito científico,* momento em que a Relatividade de Einstein deforma conceitos primordiais que eram tidos como fixados para sempre (BACHELARD, 2005, p. 9, grifo do autor).

Conforme Sousa (2018), o primeiro período corresponderia a pré-ciência, ou seja, a busca das primeiras racionalizações sobre a ciência. No segundo período, tem-se os primeiros esforços da cultura científica para uma maior abstração; o terceiro período é marcado pelas novas teorias que abalaram conceitos considerados imutáveis, sendo a maior expressão a Relatividade de Einstein.

Nesse contexto, o período pré-científico é chamado de obstáculos epistemológicos,

> O período pré-científico é dominado pelo que Bachelard designa de obstáculos epistemológicos, pois, no nascedouro da ciência, a visão concreta e imediata do mundo fenomênico, transmitida por uma linguagem metafórica, por imagens e generalizações, embaçava o processo de abstração para a formação do espírito científico (COSTA, 2012, p. 4).

Na epistemologia de Bachelard, o processo de desenvolvimento do conhecimento científico dá-se como um contra pensamento, uma espécie de impedimento ou obstáculo ao novo saber. Para a superação destes obstáculos, é necessária uma ruptura epistemológica, uma retificação em um conhecimento existente.

> [...] é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 2005, p. 17, grifo do autor).

Para Costa (2009), os obstáculos estão vinculados à existência de conhecimentos e não pela falta destes, de modo que ao desempenhar um importante papel na epistemologia de Bachelard, os obstáculos epistemológicos contribuem na compreensão do desenvolvimento histórico do pensamento científico. De modo a afirmar, em sua tese de doutoramento, que

> Na vida do espírito há momentos que deixam marcas indeléveis, elementos que nada parece retificar: são os conceitos. Certos conceitos que se revelam nitidamente inadequados podem desaparecer de todo, mas não conseguem dobrar-se para expressar uma experiência que já não os sustenta" (BACHELARD, 2004, p. 21).

O desconhecimento da noção de obstáculo epistemológico pode ser danoso em muitos campos do saber, especialmente no campo pedagógico.

> Na educação, a noção de obstáculo pedagógico também é desconhecida. Acho surpreendente que os professores de ciências, mais do que os outros se possível fosse, não compreendam que alguém não compreenda. Poucos são os que se detiveram na psicologia do erro, da ignorância e da irreflexão. [...] Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já constituídos: não se trata, portanto, de *adquirir* uma cultura experimental, mas sim de *mudar* de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (BACHELARD, 2005, p. 23, grifo do autor).

Em sua obra A Formação do Espírito Científico – Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento (1938), Bachelard enuncia os obstáculos epistemológicos organizando-os nas seguintes categorias: a experiência primeira; conhecimento geral; obstáculo verbal; conhecimento unitário e pragmático; obstáculo substancialista; obstáculo realista; obstáculo animista; o mito da digestão; libido e conhecimento objetivo; e obstáculos do conhecimento quantitativo.

Segundo Sousa (2018), de acordo com a evolução do pensamento científico, alguns obstáculos foram sendo superados, e outros ainda permanecem mais verificáveis, porém não existe hierarquia entre as categorias de obstáculos epistemológicos.

2.2.1 A experiência primeira

O primeiro obstáculo epistemológico – a experiência primeira – é baseada na opinião, no conhecimento do sensu comum, é muito perigosa para o espírito científico uma vez que ocorre antes da crítica,

> Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la. Ela é o primeiro obstáculo a ser superado. Não basta, por exemplo, corrigi-la em determinados pontos, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com clareza” (BACHELARD, 2005, p. 18).

A observação primeira apresenta-se fácil, geralmente faz uso de imagens e de analogias, engana os sentidos e provoca ilusão. Nesse movimento de facilitar o entendimento e a compreensão, o primeiro conhecimento induz ao primeiro erro.

Conforme Costa (2012), a origem das experiências primeiras são as observações dos fatos cotidianos a nossa volta, que impressionam os sentidos e possuem um aspecto de verdade. Ao considerar-se esses fatos sem questioná-los, faz-se uma má interpretação que leva a induções e generalizações imprudentes.

A sedução provocada pela experiência primeira deve ser combatida, evitando-se o uso indiscriminado de imagens, metáforas e analogias. Deve-se buscar o espírito científico resgatando a crítica, questionando a realidade que se apresenta, lutando contra as emoções.

> Em primeiro lugar, é preciso saber formular problemas. E, digam o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse *sentido do problema* que caracteriza o verdadeiro espírito científico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído (BACHELARD, 2005, p. 18, grifo do autor).

Sabe-se que os estudantes possuem uma série de conhecimentos empíricos e que os docentes devem levar esse fato em consideração ao organizarem sua prática educativa, porém “é necessário que esses conhecimentos sejam expostos, discutidos, refletidos e, finalmente criticados, para não se constituírem em obstáculos epistemológicos no campo da educação” (SILVA, 2018, p. 72).

2.2.2 O conhecimento geral

> Nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do *geral,* que dominou de Aristóteles a Bacon, inclusive, e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do saber (BACHELARD, 2005, p. 69, grifo do autor).

O conhecimento geral obstaculiza o conhecimento científico, uma vez que tende a explicar os fenômenos via reducionismos e uso de conceitos gerais, fazendo com que as particularidades dos fenômenos não sejam observadas. “[...] a doutrina do geral, alicerçada na observação prematura do objeto e seduzida pelos dados do sentido, conduz os sujeitos à formulação precipitada das leis gerais provenientes dessa observação” (SOUSA, 2018, p. 68).

O espírito científico busca conhecer os fenômenos de maneira específica, objetiva, precisa, ao contrário da doutrina do geral que visa explicações a partir de induções e generalizações.

> A Académie estuda, portanto, a coagulação do leite, do sangue, do fel, da gordura. Para a gordura, que endurece nos pratos, o esfriamento é visível. A Académie vai tratar então da solidificação dos metais fundidos. O congelamento da água é, em seguida, incluído na categoria da coagulação. A passagem é tão natural, desperta tão poucas dificuldades, que não se pode ignorar a ação persuasiva da linguagem. Passa-se insensivelmente da coagulação para o congelamento (BACHELARD, 2005, p. 74).

Percebe-se, na doutrina do geral, um tipo de inércia no pensamento, em que se admite sem questionamentos ou análises o uso de conceitos e características relacionados a um fenômeno. A não realização de uma abordagem racional do fenômeno, e a busca de soluções simples e fáceis acabam por utilizar-se do raciocínio indutivo que conduz a generalizações vagas.

> A tentativa de alcançar o geral, ou universal, opera com o método do raciocínio Indutivo, pelo qual, por meio de uma série de fatos particulares, chega-se a generalizações precipitadas (incomprovadas, indefinidas), a definições prévias, a conclusões utilitárias do conhecimento imediato. Trata-se do processo mais usado pelo senso comum ou espírito pré-científico, que dos fatos observados tira leis gerais aplicáveis a outros fatos semelhantes, como em um círculo (COSTA, 2012, p. 6).

Bachelard (2005) considera esse obstáculo como perigoso para o espírito científico, e alerta que a falta de precisão e rigor, as explicações parciais e sem provas, presentes na doutrina do geral produzem um empobrecimento científico.

2.2.3 Obstáculo verbal

O terceiro obstáculo enunciado por Bachelard é o obstáculo verbal, considerado particularmente difícil de ser superado, evidencia-se em situações em que uma única palavra ou imagem constitui toda uma explicação, “[...] isto é, a falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa” (BACHELARD, 2005, p. 27).

Neste obstáculo epistemológico, observa-se a associação de uma teoria abstrata a uma palavra concreta,

> No ensino de ciências por exemplo, é muito comum ouvir a palavra gravidade para a queda dos corpos. Seria como se o efeito gravitacional estivesse presente somente quando os corpos caem, esquecendo-se de que ela está presente no movimento para cima e também nos lançamentos na horizontal (MELO; LIBÂNEO, 2017, p. 49).

Conforme Bachelard (2005), o espírito científico tem que estar alerta e buscar evitar os efeitos provocados pelo uso de metáforas imediatas, uma vez que estas, pelo seu aspecto pitoresco, podem levar os estudantes a um pensamento autônomo, finalizando o conhecimento no reino da imagem, neste caso não existirão dúvidas e toda explicação estará centrada numa imagem ou palavra.

> Outro exemplo claro, é o uso da palavra peso. No cotidiano os estudantes utilizam esta palavra no lugar de massa, e isso torna-se uma barreira enorme para aprender o conceito de força peso. Só existe peso se existir força gravitacional, portanto peso e massa são grandezas de natureza completamente diferentes (BACHELARD, 2005, p. 27).

O uso de metáforas, analogias e imagens, como primeiro recurso didático deve ser evitado, sob o risco de um entendimento fácil, porém, falso. Bachelard (2005) não é totalmente contra o uso destas, mas alerta que, na busca do espírito científico, deve-se valorizar as discussões conceituais e as abstrações. As metáforas e analogias podem ser utilizadas como um recurso didático, um complemento, nunca como fim em si mesma.

Do exposto, depreende-se que os docentes precisam ter especial atenção com a comunicação junto aos estudantes, visto que a linguagem cotidiana se difere bastante da linguagem científica. Para Sousa (2018), a expressão *choque térmico* funciona como um obstáculo verbal, uma vez que, estudantes a utilizam de forma inapropriada em diversas situações, como se fosse um princípio explicativo, misturando imagens e informações, elétricas (choque elétrico), mecânicas (colisão), em um fenômeno térmico.

2.2.4 Conhecimento unitário e pragmático

O conhecimento unitário e pragmático é muito parecido com o obstáculo do conhecimento geral, porém utiliza-se de generalizações mais amplas. “Aí, uma suave letargia imobiliza a experiência; todas as perguntas se apaziguam [...] todas as dificuldades se resolvem diante de uma visão geral de mundo, por simples referência a um princípio geral da Natureza” (BACHELARD, 2005, p. 103).

O aspecto de unicidade da natureza é considerado suficiente, assim, deduz-se que o verdadeiro para o grande, é também verdadeiro para o pequeno e vice-versa. “A busca da unidade, do todo, do holístico, do universal, do eterno sempre fascinou o homem, porque confere certeza, segurança, posse total e efetiva do ser, do objeto, do saber, do mundo” (COSTA, 2012, p. 7).

A unicidade da natureza representa a ideia de perfeição, de regularidade, tem-se que o obstáculo unitário e pragmático pode ser entendido como: unitário em termos de ações naturais, e pragmático em relação ao uso ou utilidade.

> Logo, o verdadeiro deve ser acompanhado do útil. O verdadeiro sem função é um verdadeiro mutilado. E, quando se descobre a utilidade, encontra-se a função real do verdadeiro. Esse modo de ver utilitário é, porém, uma aberração. [...] esse obstáculo foi, no século XVIII, especialmente perigoso, porque a exploração literária e filosófica da ciência ainda era, na época, muito fácil (BACHELARD, 2005, p. 117).

Perante a unidade da natureza toda dualidade se desfaz, a experiência prevalece, e os fenômenos são sempre explicados, pois, a natureza além de única é perfeita, não admitindo contradições.

> De uma forma geral, pode-se dizer que este obstáculo é unitário no sentido de unidade dos processos naturais e é pragmático por que todos estes processos têm uma finalidade, um uso, uma utilidade. Desta forma, é impossível para um espírito pré-científico conceber experiências que possam colocar em conflito verdade e utilidade, as quais estão sempre associadas (VASCONCELOS, 2013, p. 18).

Segundo Sousa (2018), este pragmatismo, presente na mentalidade pré-científica, procura o caráter utilitário do fenômeno como princípio de explicação do próprio fenômeno, constituindo-se num forte obstáculo para o uso da razão.

2.2.5 Obstáculo substancialista

> O espírito pré-científico na linha do substancialismo sempre busca conhecer os fenômenos pelo seu interior, pois concebe que a substância é o interior dos objetos. Atitude esta típica do realista que vê na substância suas virtudes e poderes e assim busca interpretar essas qualidades. Toda explicação baseada na ideia de substância, cuja afirmação de uma internalidade ou de valores ocultos que foram visados pelo cientista baseado numa intuição direta pode embarrar o progresso da ciência (ARAÚJO, 2016, p. 65).

Para Bachelard, o quinto obstáculo, o substancialista, existe para agradar as mentes preguiçosas com falsas explicações, atribuindo-lhes qualidades diversas que em geral falseiam uma satisfação.

> [...] pensa-se como se vê, pensa-se o que se vê, a poeira *gruda* na parede eletrizada, logo, *a eletricidade é uma cola*, um visco. É assim adotada uma falsa pista em que os falsos problemas vão suscitar experiências sem valor, cujo resultado negativo nem servirá como advertência, a tal ponto a imagem primeira, a imagem ingênua, chega a cegar, a tal ponto é decisiva sua atribuição a uma substância (BACHELARD, 2005, p. 128, grifo do autor).

Percebe-se neste obstáculo o uso desproporcional de vários adjetivos para um substantivo, provocando neste uma falsa atribuição de conhecimento, ou seja, o substancialismo constitui-se de um excesso de sentidos para um mesmo objeto.

> Essa é uma tendência geral, que se encontra em campos bem afastados do pensamento científico, como no da psicologia e da literatura: quanto menos precisa for uma ideia, mais palavras existem para expressá-la. No fundo, o progresso do pensamento científico consiste em *diminuir* o número de adjetivos que convém a um substantivo, e não em aumentar esse número. Na ciência, os atributos são pensados de forma hierárquica e não de forma justaposta (BACHELARD, 2005, p. 140, grifo do autor).

Conforme Sousa (2018), a linguagem comum é um obstáculo próprio do espírito pré-científico. Quando se procura descrever um fenômeno por meio de adjetivos, obtém-se uma falsa ideia de conhecimento deste.

> O espírito científico não pode satisfazer-se apenas com ligar os elementos descritivos de um fenômeno à respectiva substância, sem uma compreensão, determinação precisa e detalhada das relações com outros objetos (BACHELARD, 2005, p. 127).

De acordo Bachelard (2005), muitos indivíduos do período pré-científico do século XVIII sucumbiram à sedução substancialista, e exemplifica ao citar os alquimistas que buscavam conhecer o interior das substâncias e, para tal, as abriam, até mesmo as viravam pelo avesso. Outro exemplo de adjetivação inadequada tem-se a utilização do ouro como cor, logo a substância é utilizada para indicar a própria cor, dourada.

2.2.6 Obstáculo realista

O obstáculo realista, como o nome sugere, trata-se de uma descrição do real. Apoia-se no aspecto concreto dos objetos deixando de lado as abstrações, as discussões ficam centradas em observações e conhecimentos empíricos.

> Na tentativa de facilitar a compreensão dos fenômenos o espírito pré-científico busca concretizar o abstrato fazendo uso de analogias que esvaziam todo o conteúdo científico, isto é, são geradas imagens concretas de fenômenos abstratos pelo indivíduo que bloqueia a ruptura epistemológica do senso comum para a compreensão dos aspectos abstratos (VASCONCELOS, 2013, p. 15).

O realista considera como um bem particular a substância de um objeto, ou seja, existe uma atitude de posse, e entende-se como uma vantagem pessoal. Em tom polêmico, Bachelard (2005) afirma que todo realista é um avarento e todo avarento é um realista.

Verifica-se uma atração natural entre realistas e objetos constituídos de ouro, existindo para estes até afinidades entre o ouro e o sol.

> Como se sabe, as *influências* astrais são para o astrólogo e o alquimista — cujas mentalidades, reunidas, ajudam a compreender a psicologia do espírito pré-científico — influências verdadeiramente materiais, atração da matéria (BACHELARD, 2005, p. 175, grifo do autor).

Encontra-se também na natureza avarenta do realista o desejo de possuir pedras preciosas, e a sua valorização exacerbada.

> O desejo de possuir pedras preciosas conduz a domínios diversos a sua valorização inicial, em especial na farmácia, ao atribuir as mais excelsas virtudes às matérias preciosas: a esmeralda detém a hemorragia, as disenterias e o fluxo hemorroidal; o ouro fortifica o coração e alegra a alma ao se misturar com o sangue, reanimando assim a natureza humana (VASCONCELOS, 2013, p. 15).

O obstáculo realista obsta o progresso do espírito científico, valorizando-se o aspecto concreto ao invés do abstrato. Esse obstáculo tende a aparecer quando se busca explicar algo abstrato a partir de representações de conceitos concretos, mesmo que se faça uso de analogias e metáforas.

2.2.7 Obstáculo Animista

O obstáculo animista caracteriza-se pela atribuição de propriedades animadas ou vitais a grandezas físicas ou coisas inanimadas, "*Vida* é uma palavra mágica. É uma palavra valorizada. Qualquer outro princípio esmaece quando se pode invocar um princípio *vital*" (BACHELARD, 2005, p. 191, grifo do autor). Tal obstáculo constitui-se em um entrave à evolução do espírito científico.

> Na mentalidade pré-científica, a 'intuição da vida' invertia os papéis no estudo dos fenômenos físicos: em vez de buscar explicar os fenômenos biológicos por meio de princípios físicos, como incide hoje, a ciência pré-científica fazia o inverso, constituindo-se num forte obstáculo para a compreensão dos fenômenos físicos (SOUSA, 2018, p. 72).

Segundo Bachelard, verifica-se uma noção equivocada de que o reino mineral é inferior aos reinos vegetal e animal.

> Existe também a preocupação constante de comparar os três reinos da Natureza, às vezes a respeito de fenômenos muito especiais. Não é apenas um jogo de analogias, mas a real necessidade de pensar de acordo com o que imaginam ser o *plano natural.* Sem essa referência aos reinos animal e vegetal, os estudiosos teriam a impressão de trabalhar sobre abstrações. Assim, [...] Os três reinos são, com toda a evidência, princípios de classificação muitíssimo valorizados. Tudo o que foi elaborado pela vida carrega essa marca inicial como valor indiscutível (BACHELARD, 2005, p. 182, grifo do autor).

Ao descrever o obstáculo animista, Bachelard expõe situações em que é atribuída vida aos minerais, como num livro de experiências em 1785, em que De Bruno, escreve "a ferrugem é uma doença à qual o ferro está sujeito... O ímã perde sua virtude magnética quando é corroído pela ferrugem. Alguns recuperam parte de sua força quando lhe retiram a superfície atacada por essa doença" (BACHELARD, 2005, p. 194).

A supervalorização atribuída aos fenômenos vitais acaba por criar um tipo de hierarquia em que o campo biológico se coloca acima dos demais campos do conhecimento. Em um ambiente escolar, tal situação pode parecer facilitar o processo de ensino, mas "o que acontece na maioria das vezes é que analogias equivocadas com recursos animistas acabam por dar ao estudante uma compreensão errada do conceito" (BÔAS; FILHO, 2018, p. 47).

2.2.8 O mito da digestão

Com características dos obstáculos animista e realista, o mito da digestão refere-se à necessidade de posse. “Essa posse é objeto de todo um sistema de valorização” (BACHELARD, 2005, p. 210).

Para Bachelard (2005), o alimento sólido é superior ao líquido, uma vez que possibilita a produção de energia, sendo mais durável e integrável, dando mais vigor ao ser, assim o comer é mais importante que o beber. “Possuir o alimento significa possuir um bem, sendo o alimento reserva de força e poder” (COSTA, 2015, p. 38).

No período pré-científico, tem-se que a digestão é uma função privilegiada, “o mito da digestão ocupava a alquimia e a química, envolvendo a nutrição e a alimentação, considerando que tanto corpos orgânicos quanto elementos químicos e alquímicos sentiam fome e se alimentavam” (COSTA, 2015, p. 39).

Segundo Bachelard (2005), para escritores do período pré-científico, a forma do corpo humano era semelhante a um forno, a digestão era comparada com um pequeno incêndio, e existia uma teoria da trituração estomacal.

> A digestão corresponde de fato a uma tomada de posse bem evidente, de inatacável segurança. É a origem do mais forte realismo, da mais abrupta avareza. É a função da avareza animista. Toda a sua cinestesia está na origem do mito da intimidade. Esta "interiorização" ajuda a postular uma "interioridade". O realista *é* um comedor (BACHELARD, 2005, p. 209, grifo do autor).

Percebe-se que a digestão foi alçada a patamares muito distintos de sua função biológica, a análise rasa e a busca por respostas rápidas para fenômenos diversos, constituiu um obstáculo epistemológico, e favoreceu um distanciamento do conhecimento científico.

2.2.9 Libido e conhecimento objetivo

> O mito da libido é mais complexo que o da digestão. A libido sobressai ao apetite, sendo mais poderosa, implicando pensamentos longos, paciência, prolongamento, duração. [...] Sob o instinto e o impulso da libido aglomera-se uma gama diversificada de sentimentos, sensações, conceitos (COSTA, 2015, p. 40).

Neste obstáculo tem-se uma valorização em termos da pessoa em detrimento da objetividade, “[...] a libido consiste na evidencialização da relação do sujeito com o outro, deixando em segundo plano a relação entre o sujeito e o objeto em que se observa o fenômeno” (BÔAS; FILHO, 2018, p. 48).

Verifica-se uma percepção distorcida dos fenômenos, os sentimentos de quem realiza uma observação interferem diretamente em sua visão do objeto de estudo. “O poder dos desejos é tão intenso que numa explicação de um fenômeno o cientista diz mais sobre ele mesmo do que sobre o próprio fenômeno, isto é, o cientista explica o fato na perspectiva daquilo que deseja” (ARAÚJO, 2016, p. 67).

De acordo Bachelard (2005), a influência da libido no conhecimento objetivo ocorre em diferentes momentos da pesquisa objetiva, a sexualidade faz-se presente de maneiras diversas. “No tema da libido, encontram-se duas sexualidades: uma ‘sexualidade vaga’, abordada por meio da alquimia; e uma ‘sexualidade enorme’, tratada na geração telúrica, com o germe e a semente” (COSTA, 2015, p. 40).

Conforme Sousa (2018), os pensamentos sexuais estavam presentes no inconsciente dos indivíduos e, mesmo para questões do mundo inorgânico, manifestavam-se em metáforas como os metais são repartidos em machos e fêmeas, estéreis ou não.

A sedução pela sexualidade e a deturpação da objetividade são características do conhecimento pré-científico.

2.2.10 Os obstáculos do conhecimento quantitativo

O último obstáculo epistemológico enunciado por Bachelard foi o obstáculo do conhecimento quantitativo, neste, o filósofo francês analisa: a busca por medidas de precisão cada vez mais rigorosas, e as implicações destas no estudo dos objetos e dos fenômenos; e, os aspectos do conhecimento qualitativo que impactam o conhecimento quantitativo.

> Um conhecimento imediato é, por princípio, subjetivo. Ao considerar a realidade como um bem, ele oferece certezas prematuras que, em vez de ajudar, entravam o conhecimento objetivo. [...] Seria, aliás, engano pensar que o conhecimento *quantitativo* escapa, em princípio, aos perigos do conhecimento qualitativo. A *grandeza* não é automaticamente objetiva, e basta dar as costas aos objetos usuais para que se admitam as determinações geométricas mais esquisitas, as determinações quantitativas mais fantasiosas (BACHELARD, 2005, p. 259, grifo do autor).

Conforme Costa (2015), no estado pré-científico, houve um problema denominado de matematismo que se apresentava em duas vertentes: a primeira o matematismo vago que dava pouco valor à precisão das medidas e aos processos de medição, e a segunda vertente o matematismo extremamente preciso, em que a atenção às medidas era mais importante que o fenômeno em estudo.

> O excesso que houve no estado pré-científico foi na verdade o de quantificação em termos de números, da quantidade mesma, da medição. Com pretensões de objetividade científica, ingênua e precipitadamente, o espírito pré-científico media e contava até o não medível e o incontável. No processo de medir, é preciso levar em conta o objeto, o método e o instrumento de medição. Não basta medir e apresentar números aleatoriamente para se obter a sensação de conhecimento matematizado e científico (COSTA, 2015, p. 43).

Ao lidar com conhecimento quantitativo, é conveniente realizar um processo constante de reflexão acerca das medidas, dos processos de medição e sua relação com o objeto ou fenômeno em estudo, “o cientista crê no realismo da medida mais do que na realidade do objeto. [...] É preciso refletir para medir, em vez de medir para refletir” (BACHELARD, 2005, p. 262).

Obstáculos epistemológicos e a Matemática

Para Bachelard, a Matemática estava livre de obstáculos, “com efeito, a história da Matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro” (BACHELARD, 2005, p. 17).

A questão da regularidade no processo de construção do conhecimento matemático apreciada em outra vertente mostra que,

> De fato, o tipo de ruptura encontrada na evolução das ciências experimentais não aparece com clareza no registro histórico da matemática. Entretanto, isso não quer dizer que haja uma linearidade absoluta na fase da descoberta matemática. Esse é um problema que relaciona o desafio da descoberta do conhecimento e sua sistematização por meio de uma demonstração, pois esse registro formal não deixa explícitas as dificuldades encontradas no transcorrer do processo de criação. Devemos relembrar que a regularidade do saber existe somente na fase final da formulação do texto matemático. Na fase inicial das ideias, pelo contrário, não há nenhum predomínio da linearidade, revelando os intensos conflitos da criação do saber (PAIS, 2018, p. 41).

Assim, percebe-se que a construção do conhecimento matemático passa por etapas não lineares, principalmente no início das ideias, o que é diferente na apresentação formalizada nos textos finais. “Dessa forma, no caso da matemática, os obstáculos aparecem com mais intensidade na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento, do que em registro histórico” (Pais, 2018, p. 41).

Nessa perspectiva e influenciado pelas teorias dos obstáculos epistemológicos de Bachelard e da equilibração de Piaget, o educador matemático francês Guy Brousseau foi o pioneiro na abordagem da noção de obstáculos epistemológicos na Matemática.

> Um obstáculo é, portanto, manifestado por erros, mas esses erros não se devem ao acaso. Fugitivos, erráticos, são reprodutíveis, persistentes. Além disso, esses erros, no mesmo assunto, são vinculados por uma fonte comum: a maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente, se não correta, um ‘conhecimento antigo e bem-sucedido em todo um campo de ações’ (BROUSSEAU, 1998, p. 122).

Os obstáculos epistemológicos são fonte de pesquisa para muitos matemáticos, um exemplo bastante conhecido é o trabalho do matemático francês George Glaeser, que inspirado nas produções de Bachelard, Piaget e Brousseau, publicou um artigo na revista Recherches em Didactique des Mathématiques, 1981, com o título Epistemologia dos Números Relativos, no Brasil esta obra foi publicada no Boletim Gepem nº 17, (1985) e republicada no Boletim Gepem nº 57 em (2010), devido a sua importância no campo da Educação Matemática. Neste trabalho o autor lista 06 (seis) obstáculos epistemológicos.

> 1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
> 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
> 3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
> 4. A ambiguidade dos dois zeros (zero absoluto e zero origem).
> 5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
> 6. Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante (GLAESER, 2010, p. 5).

Nas conclusões de seu artigo, Glaeser (2010) esclarece que o ensino da Matemática apoiado exclusivamente em exemplos concretos pode favorecer o surgimento de bloqueios posteriores. E alerta que seu estudo se baseou em documentos que evidenciaram um certo número de obstáculos no decorrer da história, e que é interessante verificar com estudantes atuais, se tais obstáculos ainda se fazem presentes.

2.3 Obstáculos didáticos conforme Brousseau

> Um dos pioneiros na abordagem da noção de obstáculo epistemológico, como meio de identificação das causas de dificuldades na aprendizagem da Matemática, foi Brousseau. A primeira apresentação desse tema, no âmbito da Educação Matemática, foi feita por ele, em 1976, em uma conferência proferida no XXVIII CIAEM (Congresso Interamericano de Educação Matemática) (IGLIORI, 2008, p. 125).

Segundo Brousseau, o erro tem um papel significativo no processo de construção do conhecimento matemático, mas não é qualquer erro, são aqueles recorrentes, difíceis de explicar, geralmente ocorrem com muitos estudantes num mesmo contexto ou em relação a conteúdos específicos.

> O que é característico desse tipo de erro é que ele reflete uma maneira de conhecer, relaciona-se a uma concepção característica, coerente e mesmo correta, a um conhecimento antigo que teve sucesso em todo um domínio de ação. Esses erros não são forçosamente explicitáveis. É preciso uma ação consciente dos didatas para que eles venham à tona (IGLIORI, 2008, p. 126)

Para Brousseau, os obstáculos têm um papel crucial para a aquisição de um novo conhecimento, uma vez que

> Na visão de Brousseau (1983), os obstáculos se manifestam pela incapacidade de compreender certos problemas, de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir à instalação de um novo conhecimento. Por consequência, o erro é considerado necessário para: I) desencadear o processo da aprendizagem do aluno; II) o professor situar as concepções do aluno e, eventualmente, compreender os obstáculos subjacentes; III) o professor adaptar a situação didática (ALMOULOUD, 2007, p. 135).

Os obstáculos epistemológicos possuem uma estrita ligação com o processo histórico de construção dos conceitos, “um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode, em princípio, encontrar na história do conceito” (IGLIORI, 2008, p. 123).

Vários estudos em relação aos obstáculos epistemológicos foram feitos a partir da obra de Bachelard. Teóricos desenvolveram pesquisas, e algumas destas foram analisadas por Brousseau, como por exemplo,

> Os estudos sobre a noção de obstáculo conduziram a uma caracterização formulada por Duroux (1983), que foi retomada por Brousseau (1989):
> a) um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento;
> b) esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto frequentemente encontrado;
> c) mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente;
> d) além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo. Não basta ter um conhecimento novo para que o precedente desapareça (é o que diferencia o transpor de obstáculo da acomodação de Piaget); é, então, indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber;
> e) depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado (ALMOULOUD, 2007, p. 133).

Teórico influente no campo da Didática da Matemática, Brousseau deu maior ênfase aos obstáculos que surgem no sistema didático,

> Devido ao caráter específico do contexto histórico das ciências, em que surgiu a noção de obstáculo epistemológico, no plano pedagógico, é mais pertinente se referir à existência de *obstáculos didáticos*. [...] Os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar (PAIS, 2018, p. 41, grifo do autor).

Brousseau organizou os obstáculos em categorias conforme a origem, sendo de origem ontogênica, de origem didática, e de origem epistemológica.

2.3.1 Obstáculos didáticos de origem ontogênica

Relacionam-se com a teoria de Piaget, uma vez que determinadas operações e construções cognitivas dependem da idade mental e cronológica do estudante, “obstáculos de origem ontogenética são aqueles que surgem devido a limitações (neurofisiológico entre outros) do sujeito no momento de seu desenvolvimento: ele desenvolve conhecimento adequado aos seus meios e objetivos nessa idade” (BROUSSEAU, 1998, p. 8). Exemplo: um estudante dificilmente constrói o conceito de volume antes do 4º ano do Ensino Fundamental.

2.3.2 Obstáculos didáticos de origem didática

Estes obstáculos resultam de ações docentes ou do sistema de ensino, em que fatores como: planejamentos ineficientes, conhecimentos mal elaborados tendem a dificultar as aprendizagens do estudante. “Os obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou projeto do sistema educacional” (BROUSSEAU, 1998, p. 8). Exemplo: Transformar um número decimal em fração, tomando a parte inteira como numerador e a decimal como denominador.

2.3.3 Obstáculos didáticos de origem epistemológica

Os obstáculos de origem epistemológica são aqueles constitutivos do conhecimento, uma vez que estão incrustados no processo histórico dos conceitos, “obstáculos de origem estritamente epistemológica são aqueles dos quais não se pode e não se deve escapar, pelo próprio fato de seu papel constitutivo no conhecimento. Eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos” (BROUSSEAU, 1989, p. 108).

Como exemplo, temos o obstáculo evidenciado por Costa (2009, p. 144), “a ideia de que o antecessor e o sucessor de um número natural sempre apresentam uma unidade a menos e a mais respectivamente, pode se constituir um obstáculo epistemológico na identificação de antecessor e sucessor de números negativos”.

Percepções quanto aos obstáculos

Após esta breve apresentação dos obstáculos epistemológicos, percebe-se uma dicotomia em seu significado, a depender do conhecimento que se tem destes.

> De nossa parte, compreendemos que os obstáculos epistemológicos têm uma dupla função: funcionam tanto como o *impossibilitador* do ato de conhecer, se forem descurados, e ocultos, no processo de aquisição do conhecimento ou, como o *possibilitador* do acesso a um conhecimento novo e mais elaborado, se nos tornarmos sujeitos vigilantes na devida retificação destes obstáculos e instalarmos a *ruptura* contra esses limites ao conhecimento (SOUSA, 2018, p. 72, grifo do autor).

Para Bachelard, a formação do espírito científico não é um processo simples, natural, ele ocorre a partir do confronto do senso comum, do conhecimento empírico. “[...] o espírito científico deve formar-se *contra* a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós, o impulso e a informação da Natureza [...] contra o fato colorido e corriqueiro. O espírito científico deve formar-se enquanto se reforma” (BACHELARD, 2005, p. 29, grifo do autor).

Cabe ressaltar que não estamos estabelecendo uma hierarquia de valores entre conhecimento empírico e conhecimento científico, “haja vista que não é possível viver no cotidiano de forma que cada uma de nossas ações reflita uma lógica científica” (VASCONCELOS, 2013, p. 18).

Num estudo inicial dos obstáculos epistemológicos, corre-se o risco de uma rejeição devido a seus aspectos desfavoráveis à formação do espírito científico.

> Contudo, os obstáculos não carregam apenas um teor negativo, já que Bachelard defende que é a superação dos diversos obstáculos que faz o conhecimento avançar. É num processo constante de afastar os erros e de desilusão com o que se achava sabido que o sujeito vai se constituindo, se desenganando. Logo, é a retificação dos erros que faz o sujeito romper com um conhecimento anterior, no qual se dá o processo de conhecer. Observamos que, segundo o autor, é somente no social que a superação dos obstáculos e a retificação dos erros poderá ser possibilitada (SOUSA, 2018, p. 152).

Bachelard (2005) afirma que se deve evitar a velha desculpa de que a ciência é difícil para justificar a negação da cultura científica.

Nas palavras de Trindade, destacam-se o caráter positivo e negativo que os obstáculos epistemológicos possuem, e que somente o conhecimento destes e uma atitude vigilante do espírito científico possibilita a superação.

> Os obstáculos epistemológicos não podem ser evitados e como vimos têm uma importante função em nosso pensamento para que possamos compreender a evolução dos conceitos matemáticos em seu desenvolvimento tanto histórico como individual. Essa função é positiva e negativa ao mesmo tempo. Positiva, no sentido de que para entendermos algo, já temos alguma concepção anterior, algum entendimento ou pré-conceito fundado em nossos esquemas de pensamento, crenças e atitudes, isto é, em nossos elementos culturais dos níveis formal e informal. Negativa, no sentido de que para avançarmos em direção a um melhor entendimento ou visão das coisas que estamos considerando, se faz necessário tomarmos consciência dessas atitudes e esquemas de pensamento, e colocarmo-nos contra eles. Quando isso não ocorre, o obstáculo não é superado, o que impede a razão de prosseguir no sentido de um novo conhecimento (TRINDADE, 1996, p. 11).

Nem toda dificuldade é um obstáculo, esse é um atrativo perigoso para os que iniciam o estudo dos obstáculos epistemológicos, existem algumas ações estabelecidas por Brousseau para que um pesquisador possa qualificar algo como um obstáculo, como a seguir:

> a) achar erros recorrentes e mostrar que se agrupam em torno de concepções;
> b) encontrar os obstáculos históricos na história da matemática;

> c) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizado para estabelecer seu caráter epistemológico (ALMOULOUD, 2007, p. 146).

O aspecto histórico e as concepções matemáticas envolvidas são determinantes para o estabelecimento de um obstáculo epistemológico, porém deve-se tomar cuidado para não confundir uma dificuldade verificada em dado momento histórico com um obstáculo. Nesse sentido, Almouloud afirma que, de acordo Brousseau, para se estudar os obstáculos baseados na história, é preciso:

> I – descrever este conhecimento e de entender sua utilização; II – explicar quais as vantagens que esta utilização trazia em relação às anteriores, a quais práticas sociais estavam ligadas, a quais técnicas e, se possível, a quais concepções matemáticas; III – reconhecer essas concepções em relação a outras possíveis e, principalmente, àquelas que lhes sucederam, para compreender as limitações, as dificuldades, as causas de fracasso dessa concepção e, ao mesmo tempo, as razões de um equilíbrio que parece ter durado um tempo suficientemente longo; IV – identificar o momento e os motivos da ruptura desse equilíbrio e examinar os vestígios de uma resistência a sua rejeição, explicando-a, se possível, por sobrevivência de práticas, de linguagem e de concepções; V – procurar possíveis ressurgimentos ou voltas inesperadas, se não sob a forma inicial, ao menos sob formas vizinhas, procurando os motivos (ALMOULOUD, 2007, p. 147).

Viu-se que os obstáculos epistemológicos não podem ser evitados, uma vez que fazem parte do processo de evolução do espírito científico, ou seja, precisa-se conhecê-los para superá-los. Esse processo de superação é a trilha que conduz o espírito à cultura científica.

Ao se concluir a primeira etapa em que se apresenta os aspectos teóricos que dão sustentação a este trabalho, dar-se-á sequência ao levantamento histórico que visa a encontrar indícios dos obstáculos epistemológicos inerentes à formação do conceito de fração a partir da História da Matemática em civilizações antigas, finalizando esta Seção II.

2.4 Fração – origens e obstáculos

> É costume dividir o passado da humanidade em eras e períodos, com particular referência a níveis e características culturais. Tais divisões são úteis, embora devamos ter sempre em mente que são apenas uma estrutura superposta arbitrariamente para nossa conveniência e que as divisões no tempo que sugerem não são fossos intransponíveis (BOYER, 1994, p. 7).

A história da fração é um tema controverso, divergências entre localidades, datas ou períodos é uma constante. Assim, quanto às origens da fração se dará ênfase aos fatos históricos, conforme Boyer (1994), as afirmações em relação aos prelúdios da Matemática, quer da aritmética ou da geometria, são um tanto especulativas, visto que tais assuntos são muito mais antigos que a arte da escrita.

Existiram civilizações em que houve uma maior valorização nas práticas socioculturais que promoviam a evidência do conhecimento fracionário.

Credita-se o surgimento da fração às atividades humanas, a partir da necessidade dos indivíduos em contextos que envolviam medição,

> [...] pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis (EVES, 2011, p. 57).

Ressalte-se que o desenvolvimento histórico do conceito de fração, das primeiras ideias até a maneira de representação que se conhece levou milhares de anos.

> O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros (BOYER, 1994, p. 4).

Os primeiros povos ou tribos não utilizavam fração, dado que em seu cotidiano as atividades não demandavam tais conhecimentos.

> Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da Matemática, não do período primitivo (Idem).

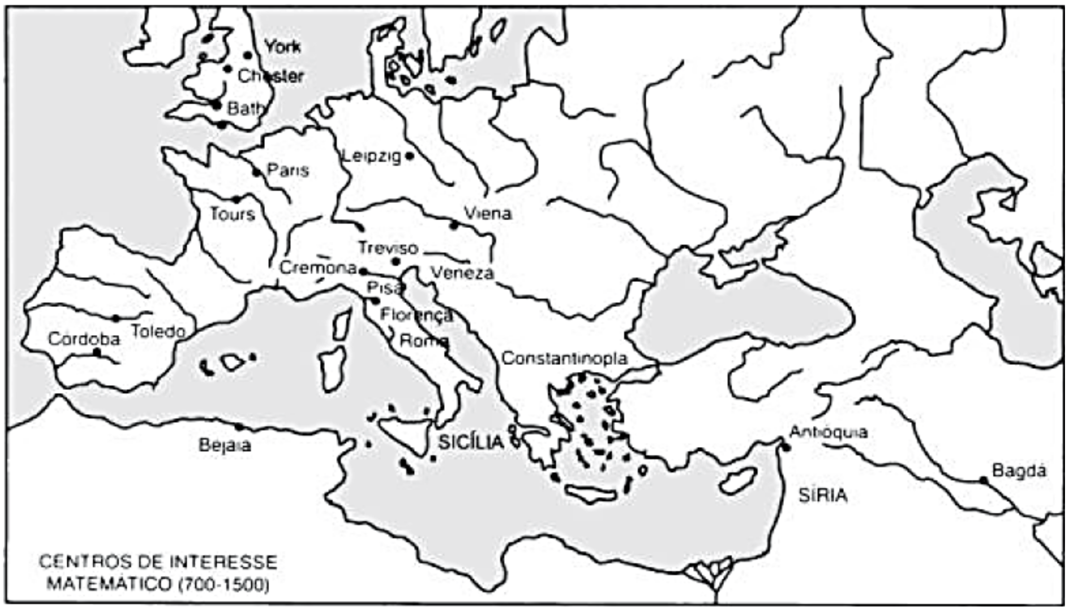
Verifica-se que o conhecimento em relação à fração, não seguiu exatamente as divisões geográficas e culturais da época.

> Não se tem dados para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais, embora os mais antigos documentos escritos encontrados, mostrem a presença desse conceito na China, Índia, Mesopotâmia e Egito, juntamente com as primeiras notações de frações. {...} A maioria dos textos egípcios antigos contendo números são textos de economia, que mostram listas de ração, de trabalho, inventários, saídas e

> recebimentos, nos quais aparecem método de cálculo envolvendo a ideia de fração, apesar de seu uso inexplorado (SILVA, 1997, p. 12).

A evolução do conceito de fração ocorreu em diferentes civilizações, porém com uma característica comum, a necessidade de medir e operar com quantidades não inteiras, como áreas e volumes. “A própria palavra ‘fração’ tem como raiz palavras como ‘fratura’ e ‘fragmento’. Ao mesmo tempo, novos sistemas de pesos e medidas foram surgindo de acordo com tal necessidade, ou seja, unidades básicas de medida menores para maior precisão” (COSTA, 2010, p. 9).

Figura 1 – Centros de interesse matemático (700–1500)



Fonte: Eves (2011, p. 290)

De acordo Boyer (1974), a representação do sistema fracionário foi desenvolvida de maneiras diferentes, por várias civilizações, cada uma em seu contexto histórico e foram influenciadas por seus sistemas de numeração e de escrita.

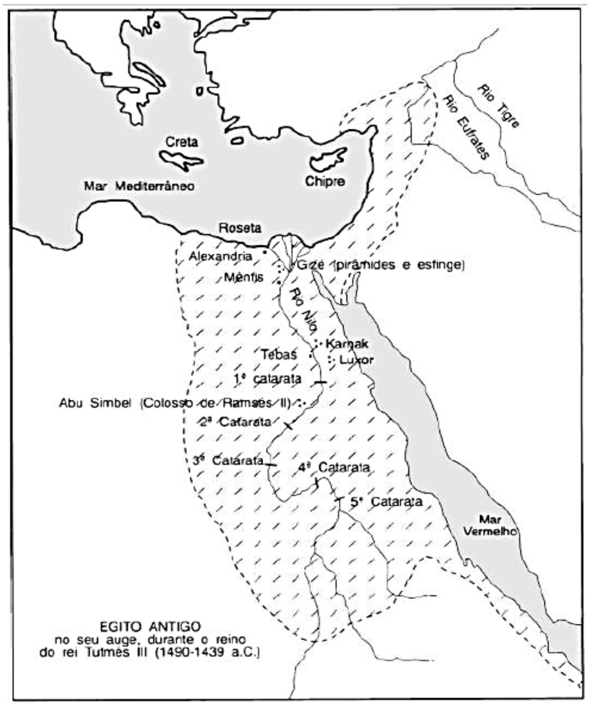
Apresenta-se a seguir uma breve síntese em relação à época do nascedouro da fração, em civilizações antigas.

2.4.1 As frações egípcias

> Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias – isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado (BOYER, 1994, p. 9-10).

As frações egípcias remetem a um período entre 3000 a 4000 anos antes de cristo (a. C.).

Figura 2 – Egito Antigo



Fonte: Eves (2011, p. 68)

Figura 3 – Egito atual

Fonte: depositphotos.com

Segundo o historiador Heródoto, um faraó desta época, Sesóstris, adotava procedimentos em que se vislumbra o uso de fração.

> Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante (ALMEIDA; CORRÊA, 1997, p. 1).

Nesse processo de medição, os servos do faraó utilizavam cordas que possuíam uma unidade de medida, estes servos eram chamados de estiradores de corda. A técnica consistia em verificar quantas vezes a corda cabia nas laterais do terreno, porém nem sempre o resultado encontrado correspondia a um número inteiro. “Desta forma, a resposta encontrada pelos egípcios foi criar um novo tipo de número com a intenção de dividir o todo em partes, surgindo assim os números fracionários” (FILHO, O. 2017, p. 81).

Pressupõe-se que grande parte do conhecimento matemático da antiguidade tenha sido perdido em função da fragilidade dos registros, geralmente feitos em papiros, pedras, blocos ou tábuas de argila, dentre os registros que sobreviveram ao tempo, um deles é o famoso Papiro de Rhind.

> 1650 a.C. Essa é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico (EVES, 2011, p. 69-70).

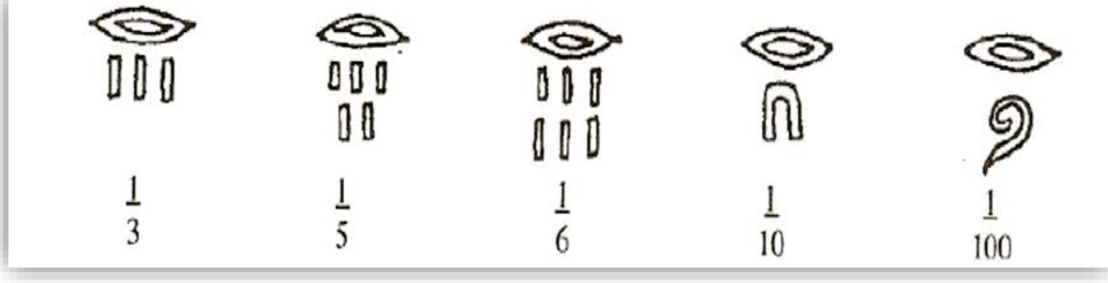
O papiro de Rhind foi escrito em Hierático, escrita egípcia, contemporânea dos hieróglifos.

Figura 4 – Fragmento da imagem do papiro Rhind

Fonte: Mol (2013, p. 22)

Conforme Eves (2011), o papiro Rhind constitui-se numa fonte rica em relação a Matemática egípcia antiga, e traz algumas aplicações, dentre estas o uso da fração unitária. “Para exprimir as frações de número, os egípcios serviam-se, de modo geral, do hieróglifo da boca” (IFRAH, 1997, p. 348).

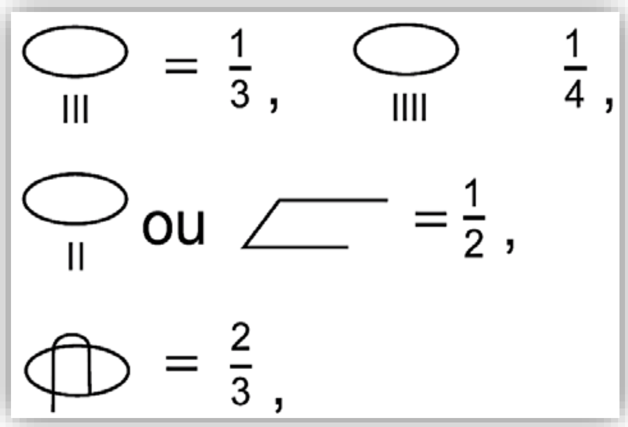
Figura 5 – Hieróglifos egípcios utilizados para representar frações unitárias



Fonte: Ifrah (1997, p. 349)

Conforme representado na Figura 05, as frações unitárias eram expressas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico ‘boca’, seguido do número que indicava as partes. Tal representação equivale ao conceito de frações unitárias da forma $\frac{1}{n}$, representando a ideia do todo e das partes. Eram exceções o $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, conforme ilustrado na Figura 06.

Figura 6 – Representação egípcia para algumas frações



Fonte: Eves (2011, p. 73)

Para Almeida e Corrêa (1997), com base no papiro de Rhind, os egípcios sabiam operar somente com as frações unitárias. Para outros tipos de frações, eles realizavam a decomposição delas em frações unitárias distintas.

Contudo deve-se ter cuidado ao utilizar o termo fração ‘unitária’, diferente da maneira que se representa a fração atualmente, o símbolo oval, acima do número, não representa o que chamamos de ‘numerador’.

> As frações egípcias não tinham numerador. Nosso numerador indica quantas partes estamos tomando de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval não possui um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, indica que, em uma distribuição em *n* partes iguais, tomamos a *n*-ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em *n* partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por *n* pessoas e *1/n* é quanto cada uma irá ganhar. Logo, configura-se um certo abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem “numerador 1”. Seria mais adequado dizer que essas frações egípcias representam os inversos dos números (ROQUE, 2012, p. 58).

Notadamente as frações egípcias desempenharam um aspecto relevante no processo de construção do conceito de fração. Paralelamente outros povos tiveram suas contribuições na elaboração de tal conceito.

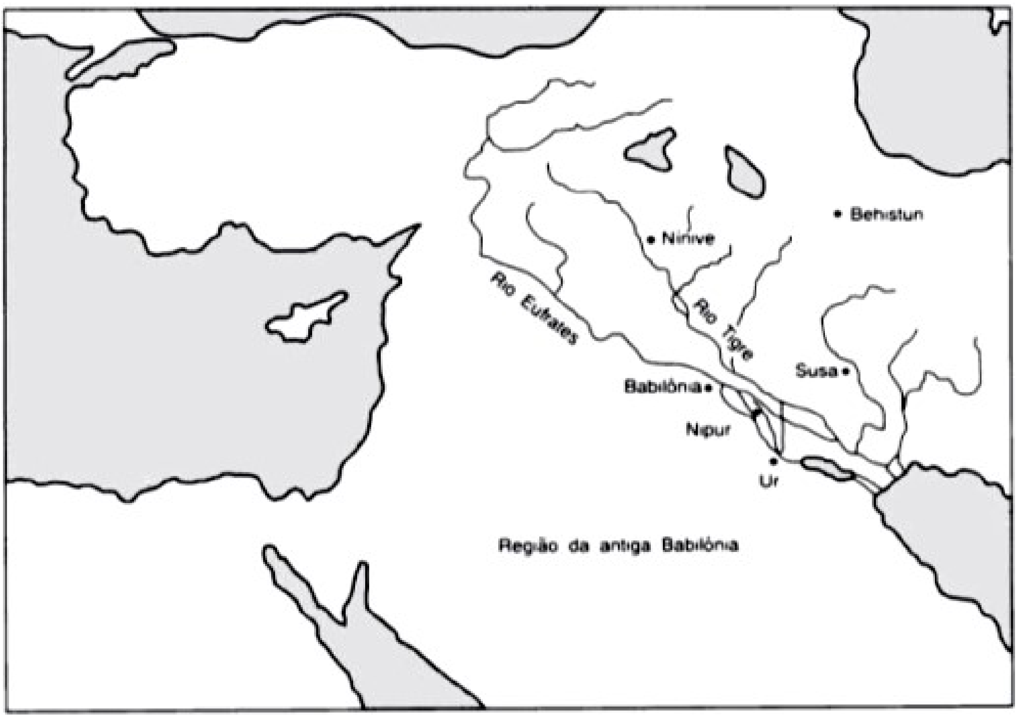
2.4.2 A fração na Mesopotâmia

Segundo Boyer (1994), as civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas de babilônias. Mesmo sendo uma informação parcialmente correta, esta não é a melhor designação. A palavra Mesopotâmia em grego quer dizer ‘entre rios’.

> Entre os rios Tigre e Eufrates, destacavam-se várias cidades que se constituíam em pequenos centros de poder, mas também passavam por ali povos nômades, que, devido à proximidade dos rios, acabavam por se estabelecer. Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes da Era Comum. As primeiras evidências de escrita são do período sumério, por volta do quarto milênio a.E.C. Em seguida, a região foi dominada por um império cujo centro administrativo era a cidade da Babilônia, habitada pelos semitas, que criaram o Primeiro Império Babilônico (ROQUE, 2012, p. 25).

As margens dos grandes rios, tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, possibilitavam condições favoráveis ao desenvolvimento de civilizações, o acesso a água e terras férteis favoreciam a agricultura.

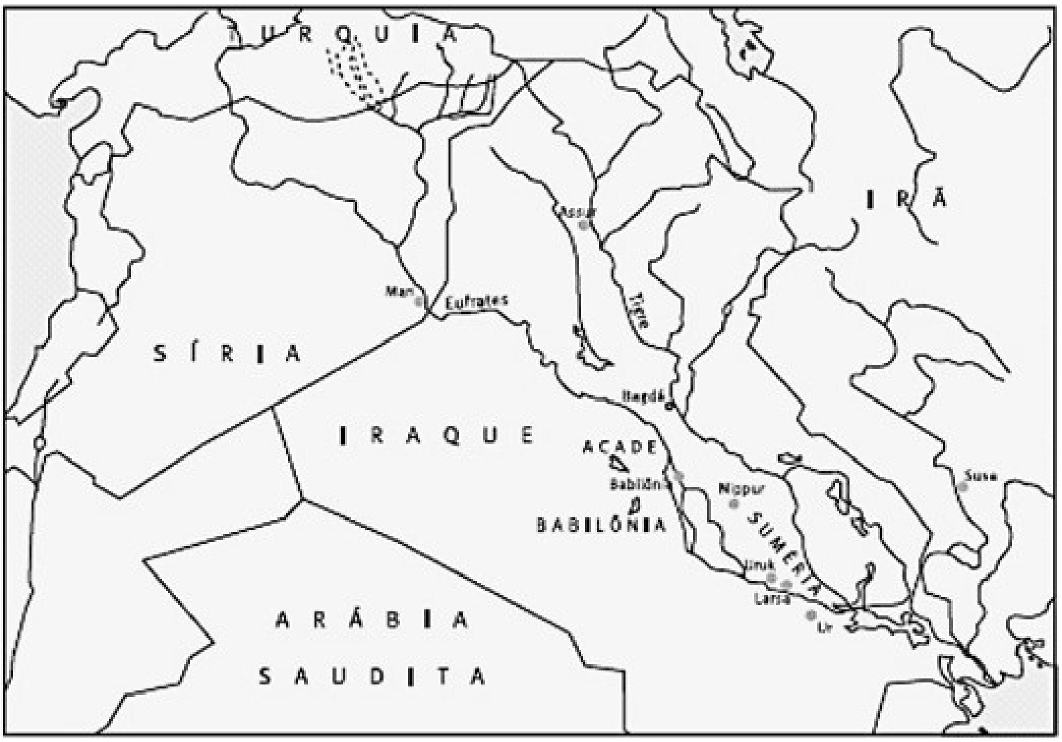
Figura 7 – Mesopotâmia Antiga



Fonte: Eves (2011, p. 59)

A região que correspondente à antiga Mesopotâmia hoje equivale aproximadamente às áreas ocupadas pelo Iraque e partes da Síria, Turquia e Irã.

Figura 8 – Mesopotâmia – Contextualizado



Fonte: Roque (2012, p. 26)

Diferente dos egípcios que faziam seus registros principalmente em papiros, os mesopotâmicos faziam maior uso de tábulas de argila, que apresentavam maior resistência.

> Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tabulas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas mais de 50 000 tabulas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Columbia e Pensilvânia tem excelentes coleções dessas tabulas. [...] Os escritos às vezes aparecem em apenas uma das faces da tabula, às vezes em ambas e frequentemente em seu contorno arredondado. Das cerca de meio milhão de tabulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas que são de tabuas e listas de problemas matemáticos (EVES, 2011, p. 58).

Conforme Boyer (1994), as tábulas de argila úmidas eram inscritas com o uso de objetos em forma de cunha (cuneiformes) e, em seguida, eram cozidas ao sol ou em fornos, o que as tornavam menos vulneráveis aos estragos provocados pela manipulação ou mesmo ao desgaste ocasionado pelo tempo.

> Ocasionalmente a área entre os rios é também designada como Caldéia, porque os caldeus, provenientes do sul da Mesopotâmia, foram dominantes durante certo tempo, principalmente durante o fim do sétimo século A. C., em toda região entre os rios. Então, como hoje, a Terra dos Dois Rios estava aberta a invasões de várias direções o que fazia do Crescente Fértil um campo de batalha, com a hegemonia mudando frequentemente. Uma das

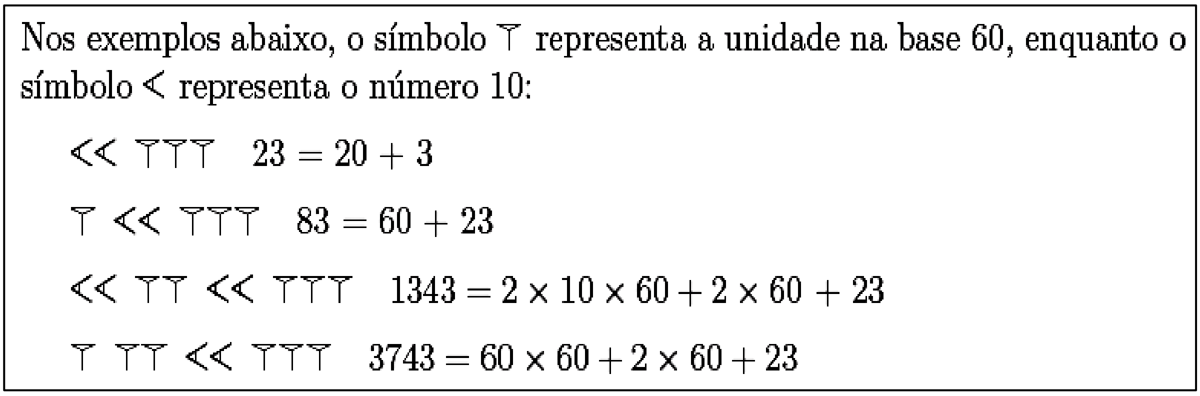
> invasões mais significativas foi a dos acadianos semíticos sob Sargão I (2276-2221 A. C. aproximadamente) ou Sargão o grand. Ele estabeleceu um império que se estendeu do Golfo Pérsico ao sul, até o Mar Negro ao norte e das estepes da Pérsia a leste, até o Mediterrâneo a oeste. Sob Sargão começou uma gradual absorção pelos invasores da cultura suméria indígena, inclusive da escrita cuneiforme, invasões e revoltas posteriores trouxeram estirpes de várias raças – *amoritas, cassitas, elamitas, hititas, assírios, medos, persas e outros* – ao poder político em épocas diversas, mas permaneceu um grau suficientemente alto de unidade cultural na área para que se possa *chamar simplesmente de mesopotâmica essa civilização*. Em particular, o uso da escrita cuneiforme formou um forte laço (BOYER, 1994, p. 18, grifo nosso).

A civilização mesopotâmica escrevia fração utilizando a base de numeração sexagesimal, ou seja, base 60. “[...] e, ao contrário dos egípcios, usavam a mesma notação tanto para números inteiros quanto para os fracionários, bastante análogo a representação atual” (FILHO, R. 2017, p. 24).

Na Figura 09, observa-se uma característica do sistema mesopotâmico, o de ser posicional, o que favorecia a representação de números grandes.

> Isso se tornou possível pela invenção que fizeram, há cerca de 4000 anos, da notação posicional – o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral, isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número (BOYER, 1994, p. 20).

Figura 9 – Exemplo de utilização do sistema de numeração sexagesimal



Fonte: Mol (2013, p. 18)

Segundo Silva (1997), os babilônios empregavam o princípio posicional, e os números menores que 60 eram representados por um sistema de base 10, já os números iguais ou maiores que 60 eram designados pelo mesmo princípio com a base 60. “Este tipo de base babilônica tem influência ainda nos dias atuais quando tratamos de medida de tempo, por exemplo, horas e suas subdivisões como minutos e segundos” (ROMEIRO, 2017, p. 59).

> O segredo da clara superioridade da matemática babilônica sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam “entre os dois rios” deram o passo muito feliz de estender o princípio das posições às frações. Isto é, a notação 𒐖 𒐖 era usada não só para $2(60)+2$, mas também para 2 + $2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1}+\ 2(60)^{-2}$ e outras tais frações. Isso significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere (BOYER, 1994, p. 20).

Conforme Boyer (1994), diferente dos egípcios, os babilônios não tinham uma simbologia própria para retratar a fração, assim o contexto tinha grande influência na interpretação dos escritos. “Os babilônios por sua vez representavam suas frações na forma $\frac{n}{60}$ e $\frac{n}{3600}$” (FILHO, R. 2017, p. 24).

Para Romeiro (2017), existia um inconveniente no uso das frações mesopotâmicas, não havia um símbolo para indicar onde a parte fracionária começava, o que poderia levar a interpretações errôneas na leitura de um número com parte inteira e parte fracionária.

2.4.3 A fração na Grécia Antiga

> *A civilização antiga que desempenhou o papel mais significativo na construção da matemática tal como a conhecemos foi a civilização grega.* Seu florescimento, a partir VIII a.C., representou uma mudança no centro de gravidade do mundo civilizado dos vales dos grandes rios – Tigres e Eufrates (Mesopotâmia), e Nilo (Egito) – para as margens do mar Mediterrâneo. A cidade de Mileto, na Ásia Menor (atual Turquia), foi a principal cidade grega até o século VI a.C. Porém, o apogeu da civilização grega ocorreu nos séculos V e VI a.C., quando Atenas passou a ser a capital da Grécia (MOL, 2013, p. 29, grifo nosso).

Conforme Eves (2011), na Grécia Antiga, foram utilizados alguns sistemas de numeração, um dos primeiros o sistema ático ou herodiano constituía-se num sistema de agrupamentos de base 10, formado pelas letras iniciais dos nomes dos números.

Figura 10 – Sistema de Numeração Ático

$\mathrm{I} = 1$	iota	$\mathrm{H} = 100$	hekaton
$\Gamma = 5$	penta	$\mathrm{X} = 1000$	khiloi
$\Delta = 10$	deka	$\mathrm{M} = 10000$	murioi

Fonte: Mol (2013, p. 30)

Com o passar do tempo, o sistema de numeração ático foi sendo substituído por outro no qual os números eram representados pelas letras que compunham o alfabeto grego.

Figura 11 – Sistema de Numeração Alfabético

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	φ	fi	500
ϛ	stigma	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	o	ômicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	teta	9	ϟ	qoppa	90	ϡ	sampi	900

Fonte: Mol (2013, p. 31)

Na Figura 11, pode-se observar as letras do alfabeto grego e os respectivos valores no sistema indo-arábico. De acordo com Eves (2011), esse sistema de numeração grego ficou conhecido como jônico ou alfabético e era formado por 27 caracteres.

O sistema alfabético não era posicional, e não se mostrou eficiente para a escrita de frações.

Figura 12 – Representação de frações no Sistema Alfabético

$$\gamma\,' = \frac{1}{3} \qquad \mu\gamma\,' = \frac{1}{43} \text{ ou } 40\frac{1}{3}$$

Fonte: Idem

Conforme Mol (2013), as frações unitárias podiam ser indicadas marcando o denominador com um acento, na Figura 09 verifica-se uma ambiguidade proveniente da notação utilizada. Tais situações acabavam ficando a cargo da interpretação dada a partir do contexto envolvendo a elaboração da fração.

2.4.4 A fração hindu antiga

Segundo Eves (2011), pouco se sabe em relação ao desenvolvimento da Matemática hindu antiga, devido à falta de registros históricos autênticos. “Escavações arqueológicas em Mohenjo Daro fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia durante a era das construções de pirâmides egípcias, mas não temos documentos matemáticos indianos dessa época” (BOYER, 1994, p. 150).

> Foi há cerca de 4000 anos que bandos de nômades, vindos das planícies da Ásia central, atravessaram o Himalaia e penetraram na Índia. Esses invasores chamavam-se *arianos*, designação que provém da palavra sânscrita que significa ‘nobre’ ou ‘proprietário de terras’. Muitos desses invasores permaneceram; outros rumaram para a Europa e formaram a raiz da raça indo-europeia. A influência dos arianos gradualmente estendeu-se por toda a Índia. Durante o primeiro milênio de sua permanência eles aprimoraram a língua sânscrita, escrita e falada. São eles também os responsáveis pelo sistema de castas (EVES, 2011, p. 247, grifo do autor).

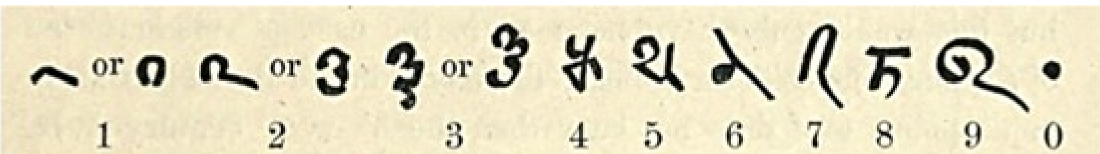
A Índia sofreu inúmeras invasões, tais movimentos acabaram por alterar elementos culturais, econômicos e sociais em maior ou menor grau, ao longo dos séculos.

> De por volta de 450 d.C. até perto do fim do século XV a Índia outra vez se viu às voltas com numerosas invasões estrangeiras. Primeiro vieram os hunos, depois, no século VIII, os árabes e no século XI os persas. Durante esse período despontaram vários matemáticos hindus eminentes, destacando-se os dois Āryabhatas, Brahmagupta, Mahāvīra e Bhāskara. O mais velho dos Āryabhatas, que se sobressaiu no século VI, nasceu perto da atual Patna, junto ao Ganges (EVES, 2011, p. 250).

No entanto, atribui-se importantes feitos na Matemática aos antigos hindus, dentre as contribuições destaca-se seu sistema de numeração, decimal e posicional.

Na figura 13, tem-se uma representação dos numerais a partir do manuscrito Bakhshali, conjectura-se que tais escritos representem conhecimentos relativos aos primeiros séculos da nossa era, algo entre o século II a. C. e o século III d. C.

Figura 13 - Números hindus antigos



Fonte: Internet Archive

De acordo Boyer (1994), tanto a Índia como o Egito possuíam seus estiradores de corda, e os primeiros registros da Matemática indiana constam em livros religiosos intitulados Sulvasutras ou ‘regras de corda’, que datam do século II d.C., estes livros continham primitivas noções geométricas adquiridas nos trabalhos de construção de templos e altares.

> O sistema de numeração hindu foi resultado da incorporação de elementos de outros povos e de uma longa evolução interna. Os hindus uniram em seu sistema quatro elementos: *a base decimal, a notação posicional, o uso do zero e uma notação para cada um dos dez numerais*. Nenhum desses elementos foi criação hindu, mas foi na Índia que eles ganharam uma existência conjunta. A princípio, o sistema contava apenas com nove símbolos básicos. O zero, como instrumento para preencher posições vazias, surgiu apenas posteriormente – a primeira referência a ele data do século IX (MOL, 2013, p. 63, grifo nosso).

Conforme Eves (2011), mesmo não havendo registros formais, há evidências de que a Matemática dos hindus sofreu influências grega, chinesa, babilônica e vice-versa. Outra constatação é que os matemáticos hindus apresentavam especial interesse pela astronomia.

Figura 14 – Índia Antiga

Fonte: Eves (2011, p. 251)

Figura 15 - Índia Atual

Fonte: depositphotos.com

Para Eves (2011), é difícil focalizar os hindus, e uma das principais dificuldades está relacionada aos escritos quase incompreensíveis dos escritores hindus.

> O uso da barra para separar os números foi introduzido pelos árabes em algum momento do século XII e desde então apareceu na grande maioria dos escritos em latim, sendo omitido no surgimento da imprensa no final do século XV e início do século XVI por dificuldades de impressão e reaparecendo algumas décadas depois (FILHO, R. 2017, p. 25).

Verifica-se que a maneira como escrevemos fração hoje, levou milhares de anos para ser aperfeiçoada, sendo atribuída aos hindus que escreviam fração de forma semelhante a atual, sem a barra.

2.5 Obstáculos epistemológicos inerentes à formação do conceito de fração

A partir da noção de fração em diferentes civilizações antigas é possível detectar alguns obstáculos inerentes ao desenvolvimento desse conceito.

Ressalta-se que o comportamento da Matemática em relação ao obstáculo epistemológico com ênfase na fração será mais destacado ou menos destacado, conforme o processo sociocultural da Matemática produzida.

Cada povo, em sua época e com base em suas necessidades, buscou desenvolver e representar a fração. De acordo Silva (1997), alguns obstáculos epistemológicos podem ser encontrados a partir do estudo histórico da fração, conforme disposto no Quadro 1.

Quadro 1 - Obstáculos Epistemológicos no conceito de fração

Obstáculo Epistemológico	Considerações
Representação Simbólica	A representação usada hoje foi conquistada depois de séculos e a partir das representações individuais de cada povo. Chegar a uma única representação, que não fosse ambígua, não foi uma conquista simples. Os egípcios se firmaram nas frações unitárias, colocando um ponto sobre o símbolo do denominador; os babilônios, mesmo com um sistema de escrita numérico e posicional, não conseguiram resolver a ambiguidade desse sistema; os gregos por sua vez, com seu sistema alfabético tinham dificuldades até de operar com as frações representadas dessa forma.
Negação da necessidade das quantidades fracionárias	Uma das situações que levou o homem a sentir necessidade dos números fracionários foi a questão da medida. No entanto, percebe-se que ele lutou muito contra isso através da procura incessante de unidades de medida que permitissem medir qualquer coisa e obter como resultado um número inteiro em vez dessa unidade, pois o conhecimento dos números naturais através da contagem o induzia a essa procura.
Dificuldade em aceitar as frações como número	Uma das grandes dificuldades dos matemáticos foi aceitar a fração como sendo um número. Euler, já no século XVII, era um deles e por isso apresentava duas vezes as mesmas propriedades numéricas, uma vez para os ‘números’ (naturais) e outra para as

	‘frações’. Mesmo após Stevin ter dado o status de número às frações, ainda permaneceu uma certa resistência, que só foi se dissipar após a revolução francesa. Essa grande dificuldade é essencialmente devido ao fato de o número fracionário ser de natureza diferente da dos números naturais. Ele não surge simplesmente de um processo de contagem, mas sim de um ato de partição de ‘algo’ que se toma como um inteiro, o que leva as crianças a interpretarem as frações como um par de números naturais e não como um único número que também representa uma quantidade.
Conhecimento dos Naturais	O conhecimento dos números naturais constitui em si mesmo um obstáculo ao aprendizado dos números fracionários. A maioria das crianças passa pelo mesmo processo dos matemáticos da história, pois também para elas só os números naturais têm o status de número. Como todo o seu conhecimento numérico está relacionado ao conjunto dos naturais, as crianças ao iniciarem o trabalho com frações tentam aplicar os conhecimentos que já possuem, tratando as frações como dois números naturais, que estão escritos um em cima do outro. À medida que o estudo se aprofunda permanece a dificuldade em aceitar situações em que o dividendo seja menor que o divisor, sendo comum, o aluno alegar que não dá para dividir 2 por 5 depois de ter recebido muita instrução sobre frações, sem nenhuma relação como conhecimento anterior que aconteceu naturalmente.
O modelo de Referência	O aluno, quando começa a trabalhar com as frações, tem como modelo de referência o conjunto dos números naturais que é um modelo discreto; no entanto, as frações são introduzidas a partir do modelo contínuo com a concepção parte/todo, com a intenção de apresentar ao aluno um novo conjunto numérico, em que poderá resolver algumas situações, que o antigo não resolvia. Na história, a origem das frações se deu no modelo parte/todo no contínuo (divisão de terras) sendo por isso o modelo preferido pelo ensino. No entanto, o aluno é levado a contar as partes, num movimento de ‘discretização’ da área envolvida em pedaços contáveis, fazendo com que volte ao modelo original e perca o sentido do inteiro inicialmente considerado. Além disso, esse processo pode provocar a concepção de que ‘fração’ é o número de partes da unidade.

Fonte: Silva (1997)

Concordando-se com Silva (1997) em sua análise epistemológica em relação ao estudo do histórico da fração disposto no Quadro 1, e com base na psicanálise do conhecimento feita por Bachelard (2005), pode-se considerar o período que compreende às origens da fração em diferentes civilizações como pertencente ao estado pré-científico[13].

A partir de uma análise numa perspectiva bachelardiana, pode-se corresponder os obstáculos epistemológicos propostos por Silva (1997), constantes no Quadro 1, com o obstáculo A Experiência Primeira. Tal análise é exposta no Quadro 2.

---

[13] Conforme Bachelard corresponde a todo o período que antecede o século XVIII, compreendendo a Antiguidade Clássica e os séculos do renascimento.

Quadro 2 - Análise de obstáculos epistemológicos

Obstáculo Epistemológico segundo Bachelard (2005)	Obstáculo Epistemológico segundo Silva (1997)	Considerações
A Experiência Primeira	Representação Simbólica	O conceito de fração foi elaborado simultaneamente ou não, por diferentes civilizações antigas. Cada uma buscou desenvolver uma representação própria, a partir de seu conhecimento dos números, da escrita que possuíam, seus símbolos e recursos.
	Negação da necessidade das quantidades fracionárias	A negação da necessidade de quantidades fracionárias, advém do ato de conhecer e operar com as quantidades inteiras. O processo de medição ficava confuso, ao procurar maneiras de usá-lo para atender simultaneamente partes inteiras e fracionárias.
	Dificuldade em aceitar as frações como número	Os números Naturais (e os inteiros) apresentam-se sempre prontos, sua forma de representação e de leitura são bastante simples, quando comparados à forma fracionária, que precisa ser interpretada. Num primeiro momento, o indivíduo tende a rejeitar a fração como número, pois não compreende sua natureza que está ligada a um processo de partição, enquanto os Naturais se vinculam a uma ideia conhecida, a do processo de contagem.
	Conhecimento dos Naturais	O indivíduo que conhece o conjunto dos Naturais, tende a utilizar este conhecimento quando confrontado com a fração, e neste novo cenário as relações e operações baseadas nos Naturais não conseguem atender ao novo contexto.
	O modelo de Referência	O conjunto dos números Naturais é um modelo discreto, é o primeiro que o indivíduo aprende e opera. Ao se introduzir a fração, parte-se da concepção parte-todo e utiliza-se a princípio exemplos que envolvem modelos contínuos: divisão de terras, pizzas, barras de chocolate.

Fonte: dados da pesquisa

Considerando os obstáculos epistemológicos enunciados por Bachelard (2005), tem-se que a evolução do conhecimento científico ocorrida, desde o estado pré-científico até a atualidade, encarregou-se de superar total ou parcialmente alguns destes, como: o mito da digestão; libido e conhecimento objetivo; e obstáculos do conhecimento quantitativo. Alguns ainda se fazem presentes e precisam ser superados, destes destacamos: a experiência primeira; e o obstáculo verbal.

A partir das teorias anunciadas na primeira parte desta seção, entende-se, como um encadeamento natural, os estudos dos obstáculos conforme Bachelard (2005) e dos obstáculos segundo Brousseau (1998).

Ao enunciar os obstáculos epistemológicos, Bachelard os organiza em categorias e faz uma discussão mais voltada à formação do espírito científico, a construção do conhecimento científico, e ao progresso da Ciência. Mesmo utilizando-se de exemplos, metáforas e analogias mais voltadas à Física, Química, e Biologia, ele não vincula os obstáculos epistemológicos a um determinado campo do saber.

Nas produções de Brousseau, verifica-se uma delimitação no estudo dos obstáculos, compreendendo mais detidamente os obstáculos didáticos na construção do conhecimento matemático.

Verifica-se, no estudo da história da Matemática em civilizações antigas, que o período compreendido entre as ‘primeiras ideias de fração’ e o ‘conceito de fração’, como se conhece, compreendeu milhares de anos. O contexto histórico, os sistemas de numeração e de escrita, aliados às necessidades de cada povo influenciaram as primeiras noções de fração.

Realizado o estudo de fundamentação teórica e de origens da fração em civilizações antigas e os obstáculos intrínsecos a este conceito, segue-se, na próxima seção, com uma verificação de produções que versam sobre a temática proposta por meio de uma revisão de literatura.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção busca-se responder aos seguintes questionamentos – Quais obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração são identificados a partir de teses e dissertações de IES brasileiras? Quais implicações são verificadas a partir de obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração em livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental?

Para responder à primeira questão, elabora-se a revisão de literatura via estado do conhecimento.

> Fazer a revisão da literatura em torno de uma questão é, para o pesquisador, revisar todos os trabalhos disponíveis, objetivando selecionar tudo o que possa servir em sua pesquisa. Nela tenta encontrar essencialmente os saberes e as pesquisas relacionadas com sua questão; deles se serve para alimentar conhecimentos, afinar suas perspectivas teóricas, precisar e objetivar seu aparelho conceitual. Aproveita para tornar ainda mais conscientes e articuladas suas intenções e, desse modo, vendo como outros procederam em suas pesquisas, vislumbrar sua própria maneira de fazê-lo (LAVILLE; DIONE, 1999, p. 112).

Entende-se que a revisão de literatura pode ser bastante útil, desde que executada de maneira criteriosa e analítica. Conforme Martins (2016), um dos conteúdos mais difíceis de ensinar é o conjunto dos números racionais, em destaque o conceito de fração.

Ao realizar esse movimento para conhecer as produções acadêmicas, teses e dissertações, que versam sobre temática proposta, definiu-se inicialmente o período de 2011 a 2020, porém foram encontradas apenas 3 produções. No intuito de ampliar o número de trabalhos a serem analisados, expandiu-se o período para os anos de 2006 a 2020 e o quantitativo aumentou para 5.

Em relação a segunda questão, esta é respondida na subseção 3.3 por meio da análise de um livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental. O processo limita-se a parte que trata do conteúdo de fração.

A obra analisada foi uma escolha unificada nas unidades escolares jurisdicionadas à Diretoria Regional de Educação de Dianópolis – TO, que abrange 8 municípios do sudeste tocantinense. A regional é integrante da Secretaria da Educação, Juventude e Esportes do Tocantins e a cidade de Dianópolis é o município onde reside o autor desta pesquisa.

3.1 Realizando o estado do conhecimento

Considerando que é intenção deste estudo perscrutar teses e dissertações voltadas à temática dos obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração, entende-se que o delineamento desta pesquisa se adequa ao estado do conhecimento.

> *Estado do conhecimento* é identificação, registro, categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção científica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica (MOROSINI, 2015, p. 102).

Para o levantamento das publicações, utilizou-se como base de dados o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Pessoal de Nível Superior (CAPES) (https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/). Os termos utilizados na busca foram: "Obstáculos Epistemológicos" + “Conceito de Fração” + "Obstáculos Didáticos". Foram encontradas 39 teses e 157 dissertações, num total de 196 produções.

A verificação das teses e dissertações encontradas foi realizada em etapas. Na primeira, observou-se o ano de publicação das produções, as quais deveriam pertencer ao período de 2006 a 2020, neste quesito foram descartadas 44 produções (7 teses e 37 dissertações) por haverem sido publicadas fora do recorte temporal estabelecido.

Na segunda etapa, foram verificas as produções que tratavam de Matemática, procedeu-se a leitura dos títulos das 152 produções e 90 destas foram rejeitadas (22 teses e 68 dissertações), por tratarem de temas voltados à Química, Física, Biologia, Direito, Informática e outras áreas do conhecimento.

A terceira etapa correspondeu a leitura dos títulos das 62 produções que discutiam Matemática, destas foram desconsideradas 22 (8 teses e 14 dissertações), que discutiam temas distintos ao proposto, dentre estes, obstáculos epistemológicos no ensino/aprendizagem: de logaritmo, de análise combinatória, de limite de função, de geometrias não euclidianas, entre outros.

Na quarta e última etapa, foram observadas as 40 produções restantes, nas quais se realizou a leitura dos títulos e dos resumos, todas se relacionavam de algum modo ao estudo da fração, porém, 35 produções foram descartadas (2 teses e 33 dissertações).

Ao final do processo de verificação das produções foram selecionadas 5 dissertações que atendem ao escopo da pesquisa, que são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Produções selecionadas para análise

INSTITUIÇÃO	AUTOR(A)	TÍTULO / ANO
Universidade Federal do Pará	MIRANDA, Werventon dos Santos	Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental no processo de avaliação – 2007.
Universidade de São Paulo	COSTA, Letícia Vieira Oliveira	Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos – 2009.
Universidade Estadual do Oeste do Paraná	MEIER, Wander Mateus Branco	Obstáculos Didáticos na Educação Matemática: o conceito de Números Racionais no 6º ano do Ensino Fundamental – 2012.
Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP)	FERREIRA, Edinalva Rodrigues	Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos: obstáculos didáticos e epistemológicos – 2014.
Universidade Estadual do Oeste do Paraná	MARTINS, Josiane Bernini Jorente	Relação entre a formação docente e desempenho de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas matemáticos – 2016.

Fonte: Dissertações selecionadas

3.1.1 Características das produções

Uma vez concluída a seleção das produções, deu-se início ao processo de análise, neste observou-se que as dissertações estão vinculadas às áreas de conhecimento (Educação, Ensino, Ensino de Ciências e Matemática) e de concentração (Educação, Educação em Ciências e Matemática; Sociedade, Estado e Educação; Ensino da Matemática), nos quadros 04 e 05 temos uma sistematização desses dados.

Quadro 4 - Quantidade de produções por área de conhecimento

Área de conhecimento	Educação	Ensino	Ensino de Ciências e Matemática
Quantidade	3	1	1

Fonte: Dissertações analisadas

Quadro 5 - Quantidade de produções por área de concentração

Área de concentração	Educação em Ciências e Matemática	Sociedade, Estado e Educação	Ensino da Matemática
Quantidade	1	2	2

Fonte: Dissertações analisadas

As dissertações do Quadro 06, estão organizadas em ordem cronológica a partir do ano de publicação, ressalta-se que algumas dissertações não apresentaram os objetivos específicos.

Quadro 6 - Dissertações que tematizam Obstáculos Epistemológicos no ensino de fração

Temáticas	Objetivos
Dissertação: Erros e Obstáculos: Os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental no processo de avaliação **Autor:** Werventon dos Santos Miranda **Instituição:** Universidade Federal do Pará **Ano:** 2007 **Palavras – Chave:** • Avaliação. • Obstáculos Didáticos. • Erros conceituais. • Ensino-aprendizagem de Matemática.	**Geral:** Investigar o desempenho de estudantes de 5ª a 8ª séries na disciplina 'Matemática', utilizando as respostas dadas por alunos de uma escola pública de Ensino Fundamental em Belém do Pará.
Dissertação: Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos. **Autora:** Letícia Vieira Oliveira Costa **Instituição:** Universidade de São Paulo **Ano:** 2009 **Palavras – Chave:** • Epistemologia. • Obstáculo. • Obstáculo Epistemológico. • Ensino/aprendizagem de Matemática. • Números Reais.	**Geral:** Identificar alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos nas salas de aula do Ensino Fundamental no ensino/aprendizagem dos números naturais, inteiros, racionais, e irracionais a fim de ampliar a discussão visando à concepção de números reais. **Específicos:** • Realizar reflexões sobre o conceito de obstáculo epistemológico; • Identificar os obstáculos epistemológicos encontrados em sala de aula do Ensino Fundamental por meio de questionário elaborado envolvendo habilidades em trabalhar com números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
Dissertação: Obstáculos Didáticos na Educação Matemática: o conceito de Números Racionais no 6º ano do Ensino Fundamental. **Autor:** Wander Mateus Branco Meier **Instituição:** Universidade Estadual do Oeste do Paraná **Ano:** 2012	**Geral:** Fornecer aos professores em geral e, mais especificamente aos professores de matemática, um material no qual possam basear-se para aperfeiçoar sua ação didática, bem como para incorporar os mesmos anseios que a Pedagogia Histórico-Crítica propõe por resultado, ou seja, possibilitar ao aluno a aprendizagem dos conceitos científicos na área da Matemática, bem como desenvolver sua visão crítica para com as contradições sociais, favorecendo sua atuação enquanto sujeito social comprometido com a superação das desigualdades sociais.

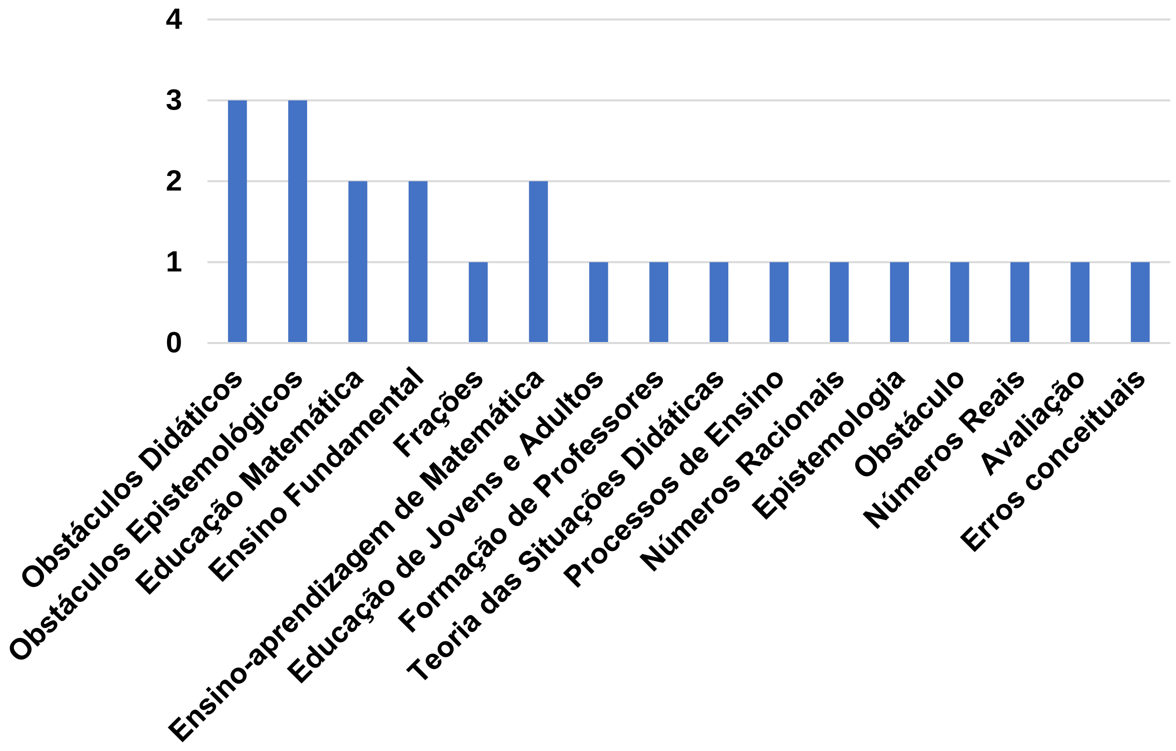
Temáticas	Objetivos
Palavras – Chave: • Processos de Ensino. • Ensino Fundamental. • Obstáculos Didáticos. • Obstáculos Epistemológicos. • Números Racionais.	
Dissertação: Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos: obstáculos didáticos e epistemológicos **Autora:** Edinalva Rodrigues Ferreira **Instituição:** Pontifícia Universidade Católica **Ano:** 2014 **Palavras – Chave:** • Frações. • Obstáculos Didáticos. • Obstáculos Epistemológicos. • Educação de Jovens e Adultos. • Teoria das Situações Didáticas. • Educação Matemática.	**Geral:** Levantar possíveis obstáculos à aprendizagem que o aluno da Educação de Jovens e Adultos (EJA) apresenta em relação ao estudo de frações, e colaborar para a elaboração de ações pedagógicas que envolvam professores e alunos no âmbito da EJA, motivando-os ao desenvolvimento e avanço de seus conhecimentos matemáticos sobre o tema.
Dissertação: Relação entre a formação docente e desempenho de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas matemáticos **Autora:** Josiane Bernini Jorente Martins **Instituição:** Universidade Estadual do Oeste do Paraná **Ano:** 2016 **Palavras – Chave:** • Educação Matemática. • Formação de Professores. • Ensino Fundamental.	**Geral:** Investigar possíveis relações entre o desempenho na resolução de problemas matemáticos por alunos, por futuros professores e por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Específicos:** • Pesquisar a produção bibliográfica sobre a formação inicial e continuada dos professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental; • Verificar em quais conceitos matemáticos os alunos do quinto ano do Ensino Fundamental apresentam maior dificuldade de apropriação; • Verificar quais os conceitos matemáticos que integram o currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental em que os concluintes dos cursos de Pedagogia e de Formação de Docentes em nível médio, além dos professores atuantes nos anos iniciais apresentam maior dificuldade de apropriação.

Fonte: Dissertações analisadas

A partir das informações do Quadro 06, verifica-se que as dissertações analisadas são oriundas de pesquisas desenvolvidas em quatro IES. Duas dissertações foram desenvolvidas na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE); uma na Universidade Federal do Pará (UFPA); e, em São Paulo, duas dissertações, uma na Universidade de São Paulo (USP) e a outra na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Nas dissertações constantes no Quadro 06, verificou-se uma diversidade de palavras-chave, algumas repetidas, outras com sentidos semelhantes. Considerando que as palavras-chave nos remetem a elementos significativos para os autores e autoras das obras em análise, foram construídos os gráficos 01 e 02.

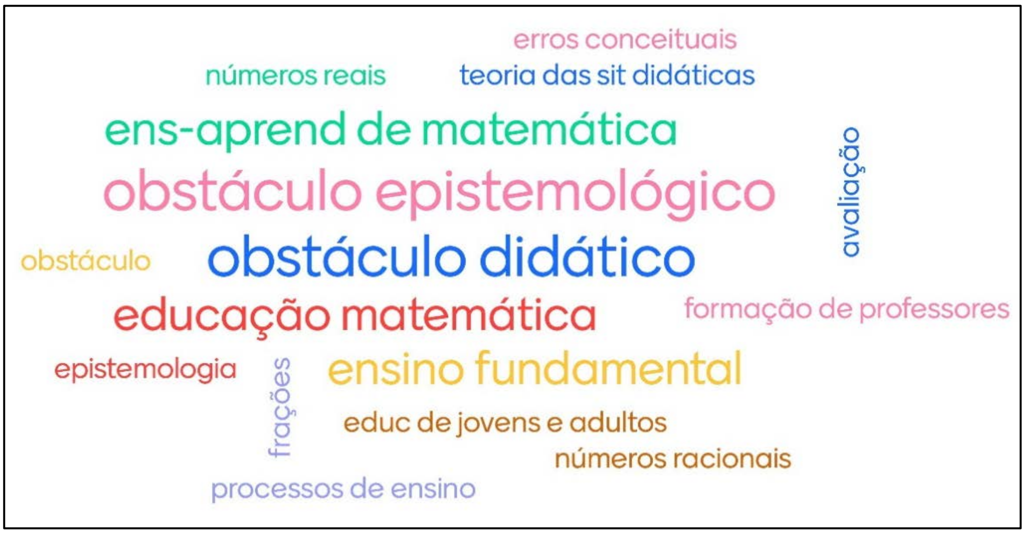
Gráfico 1 - Número de ocorrência por palavras-chave



Fonte: Dissertações analisadas

Tem-se no Gráfico 01 o quantitativo de 23 palavras-chave, das quais obstáculos didáticos e obstáculos epistemológicos apresentam maior frequência (03 ocorrências cada), seguidas por Educação Matemática, Ensino Fundamental e ensino-aprendizagem de Matemática, com duas ocorrências cada uma.

Gráfico 2 - Nuvem de palavras-chave



Fonte: Dissertações analisadas

Ao observar o Gráfico 02, percebe-se que dentre as palavras-chave algumas apresentam significados aproximados, podendo ser agrupadas em categorias.

Obstáculos didáticos, obstáculos epistemológicos, obstáculos e erros conceituais, constituem uma categoria de pesquisa direcionada ao ensino de fração e às questões conceituais; formação de professores e epistemologia dão ênfase aos processos de ensino e a formação docente; já a educação Matemática e ensino aprendizagem de Matemática se referem diretamente ao conhecimento e ensino da Matemática, mas alinham-se ao processo formativo do docente.

No Quadro 07, tem-se informações das pesquisas analisadas quanto aos participantes, os procedimentos utilizados e algumas considerações.

Quadro 7 - Aspectos gerais das produções analisadas

Dissertação	Procedimentos	Participantes	Considerações
Miranda (2007)	Realizou-se um estudo analítico do desempenho de estudantes, utilizando as respostas dadas em avaliações específicas de conteúdos matemáticos nos seguintes aspectos: a) que tipo de erros vem ocorrendo entre nossos estudantes; b) quais dos erros cometidos pelos estudantes de Matemática podem se constituir como "obstáculos didáticos", e	94 estudantes de uma escola pública em Belém do Pará, sendo: 21 da 5ª série, 25 da 6ª série, 24 da 7ª série e 24 das 8ª séries do Ensino Fundamental.	É possível afirmar que um 'obstáculo didático coletivo', uma vez estabelecido, dificilmente será superado pelos discentes sem uma intervenção docente sistemática que considere tal obstáculo e sua possível superação. Aumentando a responsabilidade dos professores em discernir entre o 'erro eventual' e o 'obstáculo didático' (individual ou coletivo).

Dissertação	Procedimentos	Participantes	Considerações
	c) se há coincidência entre os tipos de erros por mim encontrados e os erros encontrados por Pochulu (2005).		
Costa (2009)	Identificou-se alguns exemplos de obstáculos epistemológicos matemáticos no ensino/aprendizagem. Por meio de uma pesquisa de campo, com aplicação de questionários semiestruturados.	121 estudantes do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular localizada em São Vicente, São Paulo.	Constatou-se que muitos alunos têm apenas vagas lembranças das 'regras' da Matemática. Muitos deles até tentam reproduzi-las e, quando não conseguem, acabam mesmo criando outras 'inspirados pelas que lhes foram apresentadas, a fim de encontrar uma resposta.
Meier (2012)	Analisou-se a prática pedagógica utilizada por professores, durante a introdução do conceito dos Números Racionais (frações), na busca por obstáculos provenientes da própria ação didática, os quais podem provocar Obstáculos Epistemológicos.	02 Professores que lecionam Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental	O trabalho docente exige um grau mais elevado de conhecimento, tanto científico como didático, um planejamento cuidadoso, além de uma ação didática que leve em conta a participação do discente.
Ferreira (2014)	Elaborou-se uma sequência didática que foi aplicada com o fim de responder à questão de pesquisa que consiste em saber em que medida uma sequência didática, cuja elaboração leva em conta as especificidades dos alunos da EJA, contribui para o diagnóstico de obstáculos à construção das concepções parte-todo e operadores referentes às frações.	Amostra de 04 alunos da EJA, cuja série equivale ao 2º ano do Ensino Médio. Numa escola da rede pública estadual.	Os resultados indicam que a sequência de atividades aplicadas em sala de aula colaborou para que fossem diagnosticados obstáculos didáticos e epistemológicos, referentes ao estudo de frações, que se revelam em situações de aprendizagem.
Martins (2016)	Discutiu-se a formação inicial dos professores para atuarem nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase na apropriação dos conceitos matemáticos. Aplicou-se uma prova modelo da Prova Brasil ao público-alvo.	79 professores dos anos iniciais, 278 alunos do 5º ano, 18 concluintes dos cursos de Formação de Docentes em nível médio e 18 de Pedagogia.	Constatou-se que os professores dos anos iniciais apresentam lacunas em sua formação matemática, o conteúdo que apresentou maior dificuldade foi o de frações. Quando o professor não tem conhecimentos didáticos e/ou matemáticos conceituais bem construídos pode, além de não contribuir para a superação dos obstáculos existentes, criar obstáculos didáticos – provindos da prática docente.

Fonte: Dissertações analisadas

A partir do Quadro 07, constatou-se que as produções analisadas fizeram uso de pesquisa de campo, tendo como participantes: estudantes e/ou docentes.

Ressalta-se que, nas produções, o conhecimento dos obstáculos epistemológicos e obstáculos didáticos favorecem o trabalho do docente. No Quadro 08, tem-se os pressupostos teóricos das produções analisadas.

Quadro 8 - Elementos teóricos

Dissertação	Principais teóricos	Pressupostos teóricos	Abordagem
Miranda (2007)	• Pochulu (2005) • Brousseau (1998)	Obstáculos Didáticos	Quanti-qualitativa
Costa (2009)	• Bachelard (1974, 1996, 1999, 2001) • Brousseau (1983, 1997)	Obstáculos Epistemológicos e Obstáculos Didáticos	Qualitativa
Meier (2012)	• Brousseau (1983, 1998) • Saviani (2002, 2003) • Vergnaud (2009)	Obstáculos Didáticos e Pedagogia-Histórico Crítica	Qualitativa
Ferreira (2014)	• Brousseau (1983, 2008) • Silva (1997)	Teoria das Situações didáticas e Obstáculos Epistemológicos	Qualitativa
Martins (2016)	• Vygotski (2001, 2003, 2005) • Saviani (1991, 2003, 2012, 2013) • Brousseau (1999, 1998)	Psicologia Histórico-Cultural Pedagogia-Histórico Crítica Obstáculo Didático	Quanti-qualitativa

Fonte: Dissertações analisadas

Dadas as informações do Quadro 08, verifica-se nas produções analisadas conformidade com a fundamentação teórica desta pesquisa, em que Bachelard é a referência nata, por haver anunciado os obstáculos epistemológicos, e Brousseau é o teórico base no estudo dos obstáculos didáticos. Percebe-se ainda que a abordagem qualitativa é a mais utilizada nos trabalhos analisados.

3.1.2 Os obstáculos e situações didáticas verificadas

A partir dos quadros 06, 07 e 08, dar-se-á continuidade ao processo de análise das produções com a verificação dos obstáculos didáticos, epistemológicos, bem como das situações didáticas relacionadas ao conceito de fração, verificadas pelos(as) autores(as) em estudo. Ressalte-se que não serão mencionadas todas as questões envolvendo fração trabalhadas pelos(as) autores(as) das obras verificadas, uma vez que, o material ficaria demasiadamente longo, e não acarretaria ganho substancial ao estudo proposto.

Conforme Miranda (2007), a formação Matemática dos docentes dos anos iniciais apresenta lacunas, tal situação pode gerar dúvidas no ato de ensinar, de modo a dificultar a aprendizagem dos estudantes. A partir de uma síntese das variações das respostas dos estudantes que participaram da pesquisa, foi elaborada uma lista de erros,

> [...] Transforma um número decimal em fração, tomando a parte inteira como numerador, e a decimal como denominador; [...] Não reconhecem a existência de um número misto; Ao terem que efetuar o produto entre frações, multiplicam o numerador por seu denominador; Efetuam o produto entre frações aplicando a propriedade da proporção; Ao efetuarem a divisão entre frações, dividem o numerador pelo próprio denominador; Na soma de frações com número misto, desconsideram a parte inteira da fração; Na soma algébrica com mais de duas frações, ignoram o sinal negativo, transformando tudo em soma; Consideram a parte inteira do número misto como um fator comum em evidência; Ao multiplicarem frações, dividem o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração; Ao multiplicarem frações, acham o produto dos denominadores e multiplicam os numeradores em forma de 'zig-zag' lembrando a divisão; Ao multiplicarem frações, generalizam para a multiplicação a regra da adição e subtração com denominadores diferentes; Ao multiplicarem frações, tiram o MMC dos denominadores e somam os numeradores; Ao multiplicarem frações, apresentam o MMC aleatório e soma os numeradores; Ao dividirem frações, transforma a operação em multiplicação; Ao dividirem frações, tiram o MMC dos denominadores e operam os numeradores de várias formas, somam, subtraem, multiplicam ou dividem; Ao dividirem frações, fazem a inversão da segunda fração e erram a simplificação; [...] Não conseguem comparar frações equivalentes; Não conseguem representar por fração quanto valem 13 horas do dia (MIRANDA, 2007, p. 84-85).

Miranda (2007) afirma que o ensino por regras de solução algorítmica sem compreensão tende a levar os estudantes a um estado de confusão, misturando as regras de aplicação de uma operação para a outra.

A partir da listagem dos erros e de uma análise em relação aos que foram cometidos por mais estudantes, o autor elencou os que poderiam ser classificados como obstáculos, e os organizou por séries, estes estão dispostos no Quadro 09.

Quadro 9 - Obstáculos Didáticos

Questão	Série	Obstáculos Didáticos
Calcular $2\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{9}{5}$	5ª e 6ª	Tem-se como obstáculos a prática comum dos estudantes somarem os numeradores e repetirem o denominador, desconsiderando a parte inteira da primeira fração – número misto – e também o sinal negativo da terceira fração – que indica uma subtração. Porém, nota-se uma incidência maior de erros semelhantes na 6ª série, que pode estar relacionada ao fato de iniciarem seus estudos no conjunto dos números inteiros**,** sendo assim, pode estar acontecendo uma certa desestabilização entre o conhecimento prévio desses estudantes sobre as operações com números naturais.
Calcular $\frac{5}{4} \div \frac{10}{8}$	5ª	O obstáculo seria justamente a técnica de ensino por regra de aplicação, na qual o algoritmo implícito na regra é considerado de difícil internalização. Houve muitas respostas aleatórias, o que levou o autor a concluir que não houve compreensão do conceito de divisão de frações,

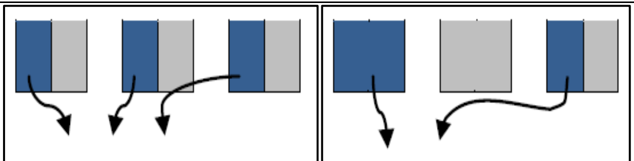
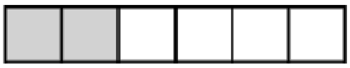
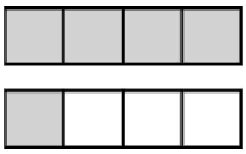
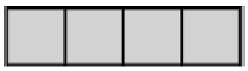
Questão	Série	Obstáculos Didáticos
		nem domínio, mesmo que mecânico, para aplicação da regra comumente difundida pelos professores: conservar a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda.
	6ª	Foi considerado como obstáculo didático o fato de os estudantes tirarem o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores e operarem os numeradores de várias formas: somam, subtraem, multiplicam ou dividem. Uma explicação possível implica a incompreensão do processo de divisão.
Verificar se a primeira fração é maior ou menor que a segunda $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$	6ª	Os obstáculos observados em termos correspondentes se encontram na não compreensão do conceito de equivalência de fração. Os estudantes não reconhecem que os símbolos são diferentes, mas representam quantidades iguais. Para os estudantes que optaram por $\frac{3}{4} > \frac{9}{12}$, infere-se que podem ter considerado o fato de que a menor fração é a que tem maior denominador não atentando que isso só é válido para frações com numeradores iguais. De outra forma os que responderam $\frac{3}{4} < \frac{9}{12}$, usam como critério os valores absolutos dos numeradores, ou seja, 3 < 9.
Representar em fração quanto vale 13 horas do dia	6ª	A diferenciação entre a posição representativa parte/todo, $\frac{24}{13}$.
Calcular $\frac{-3}{2} + \frac{(-1)}{4} - (-5)$	7ª	A inferência neste caso é que primeiro só concebem os sinais + e − como indicativo de operações aritméticas e não os reconhecem como referência do número na reta numérica.
Calcular $\frac{5}{3} \times \frac{4}{15} \times \frac{3}{2}$	8ª	Obstáculo didático advindo de uma generalização da regra de adição de frações com denominadores diferentes, ou seja, um grupo de estudantes determinam o MMC e multiplicam os numeradores. Essa expressão é comum nas quatro séries e apenas nesta se apresenta como um obstáculo, o que reforça a suspeita de que os conteúdos abordados de forma indireta como suporte para a aprendizagem de outros conteúdos, combinada com a aprendizagem mecânica, possibilita o surgimento de obstáculos didáticos em torno de assuntos tidos como já apreendidos.

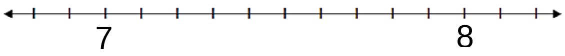
Fonte: Miranda (2007)

O que explica o estabelecimento do obstáculo “[...] é a passagem mecânica dos estudantes, dada a exigência usual dos professores de uso da memória para realizar operações, mesmo sem que os estudantes compreendam as relações, as quais raramente lhes são explicadas (MIRANDA, 2007, p. 97). Logo, verifica-se que a maneira pela qual o docente organiza sua aula e suas escolhas didáticas influenciam diretamente o processo de ensino.

Costa (2009) elaborou e aplicou questionários para estudantes de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental para identificar erros recorrentes e não aleatórios que podem se constituir em obstáculos (no sentido de Brousseau). As questões tiveram como base os descritores do tema Números e Operações da Prova Brasil, aos estudantes do 6º ano foram verificados conhecimentos relacionados ao conjunto dos números racionais. No Quadro 10, tem-se as questões que tratam de fração e as possíveis origens de obstáculos conforme a autora.

Quadro 10 - Obstáculos Didáticos e Epistemológicos - 6º ano do Ensino Fundamental

Questão	Obstáculos
Divida 3 folhas de papel para 2 pessoas. Cada pessoa recebeu que fração da folha inteira? Qual das escritas matemáticas abaixo pode representar essa situação?  $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$	Os alunos parecem não reconhecer que um número natural (e posteriormente um inteiro) possa ser escrito na forma fracionária; os alunos podem não conhecer o significado de divisão da fração e esse obstáculo pode ter origem epistemológica devido ao fato de que os números naturais (e inteiros) apresentam-se sempre 'prontos'.
Escreva a fração que representa a parte pintada das figuras: a)  b)  c) 	Os alunos parecem estar familiarizados apenas com as frações próprias e não validam as frações impróprias, talvez por não aceitarem que a 'parte possa ser maior que o todo'; esse obstáculo pode ter origem didática caso ao aluno não seja solicitado associar números racionais escritos na forma de fração imprópria e de números mistos à representação de figuras
Imagine que o segmento abaixo represente uma estrada de 200 km:  a) Quando o carro estiver no ponto B, que fração da estrada terá percorrido? b) Se ele tiver percorrido $\frac{3}{5}$ da estrada, em que ponto estará? c) Quando o carro estiver no ponto D, que fração do percurso terá feito? d) Quantos quilômetros terá percorrido até A? e) E até C?	Os alunos não dão significado a frações que representam parte de um todo contínuo representado como um segmento de reta: pode ser que a predominância de frações como parte de um todo de superfície em livros didáticos e salas de aula se constitua como origem didática desse obstáculo.
Represente os seguintes números racionais na reta numerada	Os alunos parecem não identificar a localização de números racionais escritos na forma de fração (imprópria) ou em número misto na reta numérica; talvez esse obstáculo possa ter origem didática caso o professor solicite com maior frequência a representação

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Obstáculos</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>7,1</td><td>$7\frac{1}{2}$</td><td>7,07</td><td>$\frac{50}{7}$</td><td>7,05</td></tr>
<tr><td>7,50</td><td>6,99</td><td>6,9</td><td>$\frac{73}{10}$</td><td></td></tr>
</table>


</td><td>de números racionais na forma decimal; ou origem epistemológica caso o aluno não aceite que um número racional tenha mais de uma representação, diferentemente do que ocorre com os números naturais (ou inteiros) que normalmente, utilizando apenas algarismos, são escritos de uma única maneira.</td></tr>
<tr><td>Que conta resolve? Associe os problemas às operações que podemos fazer para achar sua solução.

a) Helena comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza, enquanto Gabriel comeu $\frac{1}{2}$ dessa mesma pizza. Quanto da pizza foi comido? ( ) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

b) Na situação da letra a), quanto Gabriel comeu a mais que Helena? ( ) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

c) José e Nair tiveram 4 filhos. José morreu de uma doença rara e a sua herança foi dividida da seguinte maneira: à sua esposa, Nair, coube metade dos bens; a cada um dos seus filhos coube a quarta parte da metade dos bens. Quanto cada filho recebeu? ( ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

d) Leandro foi a uma mercearia comprar $\frac{1}{2}$ quilo de farinha. O vendedor, entretanto, disse que só tinha embalagens de $\frac{1}{4}$ de Kg. Quantas embalagens de $\frac{1}{4}$ o vendedor utilizou para embalar o $\frac{1}{2}$ kg de farinha? ( ) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$</td>
<td>Os alunos não conhecem o significado das operações com frações, principalmente no caso da multiplicação e da divisão; esse obstáculo pode ter origem didática caso o professor esteja mais preocupado em ensinar as técnicas operatórias e não tenha se atentado ao significado das operações.</td></tr>
<tr><td>Que número é maior?

a) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? b) $\frac{3}{11}$ ou $\frac{7}{11}$?</td>
<td>Os alunos apresentaram dificuldade em comparar frações que apresentavam o mesmo numerador e denominadores diferentes; pode ser que esse obstáculo tenha origem epistemológica já que a comparação entre os naturais como 7 > 5 podem levar os alunos a não aceitar que, por exemplo, $\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$.</td></tr>
</table>

Fonte: Costa (2009)

Corroborando com a perspectiva de Bachelard (2005) de que nem tudo é obstáculo, deve-se ter cuidado com as primeiras impressões. Salienta Costa (2009) sobre o cuidado com as generalizações e esclarece que a noção de obstáculo epistemológico é tema de debate entre estudiosos.

Segundo Meier (2012), ao acompanhar a construção do conceito de números racionais em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, foi possível identificar alguns obstáculos didáticos. Em sua pesquisa, o autor acompanhou aulas de dois professores de Matemática com uso de filmagens e transcrições. Os docentes foram identificados como P1 (professor 01) e P2 (professor 02), no Quadro 11, tem-se uma síntese dos aspectos observados.

Quadro 11 - Ações docentes e suas implicações

Docente	Conteúdo mediado / abordagem	Considerações
P1	**Conceito de fração** Situação problema: pediu para que os alunos imaginassem que estão em casa, com uma jarra de suco. Cita que no pacote de suco artificial consta a medida de água que se deve diluir o suco: 1 litro. Escolhe, para o exemplo, a quantidade de um litro de suco, desenhando a jarra no quadro. Questiona sobre quantos mililitros existem em um litro. Um aluno responde que são mil mililitros. diz que servirá o suco a todos os alunos em pequenos copos de café, justificando que um litro é muito pouco para todos tomarem um copo maior. Diz, então, que após servir a todos, a jarra ficou com suco pela metade e pede como se pode representar, na forma de fração, essa metade.	Inclui a divisão do suco em copinhos, mas não a explica, deixando de realizar uma relação importante para a compreensão dos alunos, e dificultando a formação do conceito de fração, pois não considera matematicamente o caminho pelo qual chegou à metade da jarra. Além do fato de que a distribuição do suco feita em copinhos para os alunos pode ser substituída por várias subtrações até que se chegue à metade, portanto envolve um conceito de divisão que não é explorado. O problema escolhido não é bom, pois deturpa a ideia de inteiro ao tomar a jarra quase cheia como inteiro e equivalente a um litro, sem a devida explicação. Com isso a ideia de todo fica confusa. Os alunos não participaram da construção do problema, não contribuíram com seu conhecimento prévio a respeito das frações. Não faz questionamentos aos alunos esperando pelas respostas, mas apenas questiona e, ela própria, imediatamente, responde, ou seja, não problematiza a situação. Assim, aqueles alunos que não conseguiram resolver o problema, ou não o desenvolveram de forma correta, não têm oportunidade de expor seu conhecimento errado ou limitado, para que possam contradizê-lo com o conhecimento correto, ou seja, o conhecimento imediato discente não é levado em consideração.
P2	**Conceito de fração** Inicia seu trabalho com frações explicando que este novo conteúdo (frações) já foi visto nas terceira e quarta séries, mas que será, no 6º ano, aprofundado. Questiona se as frações estão presentes no dia a dia dos alunos, os quais, respondem que sim. O professor questiona	Ocorre a importante correspondência entre as informações trazidas para a sala de aula e o cotidiano, ou seja, a relação que existe entre as frações e o dia a dia do estudante. Neste caso, houve participação dos alunos durante a construção do conhecimento, o que acarreta envolvimento e interesse. É importante que seja dada tal oportunidade para que os alunos se expressem e mostrem o quão abrangente e correto é seu conhecimento e, se

Docente	Conteúdo mediado / abordagem	Considerações
	onde podemos encontrar as frações. Os alunos respondem que estão presentes em receitas de alimentos. P2 pede um exemplo. Um aluno responde: “um quarto de cebola”. P2, então, diz que em uma receita de bolo podemos encontrar uma frase tal como: “um quarto de xícara de açúcar” e questiona os alunos como eles fariam para separar tal quantia. Um aluno responde corretamente: deveria se pegar uma xícara, dividi-la em quatro partes e tomar apenas uma de açúcar. P2 complementa essa explicação, repetindo-a para toda a turma e dizendo que as partes devem ser idênticas. P2 pergunta qual a fração que representa “meia xícara de azeite”, alguns alunos respondem corretamente “meio” e outros respondem “um meio”. P2 repete, informando que os alunos devem acostumar a dizer “meio” e não “um meio”. P2 explica que devemos chamar a fração $\frac{1}{2}$ de “meio” e não “um meio”, pois dessa forma não vamos confundi-la com a fração mista $1\frac{1}{2}$, a qual lemos “um e meio”.	necessário, exporem seus conhecimentos equivocados, colocando-os à prova do novo conhecimento. A nomenclatura colocada no início da representação fracionária, apesar de imposta, é positiva, pois trata-se de utilizar termos corretos, que permitirão ao aluno compreender melhor termos posteriores. Este cuidado do professor é importante, pois unificando a fala correta desde o início do contato dos alunos com as frações, diminui a possibilidade de futuros Obstáculos Epistemológicos.
P2	**Frações Decimais** Coloca o título no quadro “Frações Decimais” e diz que essas têm nomes diferenciados. Escreve a fração $\frac{1}{10}$ seguida do sinal de igual e questiona como se escreve. Os alunos respondem corretamente: “um décimo”. P2 ressalta que se trata de escrever o numerador seguido da palavra “décimo”. Ao possuir denominador com valor cem é seguido da palavra centésimo e denominador com valor mil é seguido da palavra milésimo. Questiona o nome das frações alternando o numerador e os alunos respondem corretamente.	A separação feita por P2 é importante, já que a nomenclatura das frações decimais é diferenciada.
P1	**Situação-problema** P1 fala que para que seja possível trabalhar com situações-problema é preciso perceber que a metade de 1000 mililitros é 500 mililitros e aprender a fazer uma conta para representar esse resultado, então,	A representação trazida no algoritmo está incorreta, a igualdade sugerida pela professora não está correta, bem como não representa a situação posta. Ocorre, aqui, um grave problema de representação. Ao escrever $1000 = \frac{1}{2}$, P1 pode estar criando um Obstáculo Didático, pois, obviamente, mil não é igual a meio e, nas séries

Docente	Conteúdo mediado / abordagem	Considerações
	escreve no quadro 1000 = $\frac{1}{2}$, desejando que os alunos respondam quanto vale um meio de mil mililitros. P1 diz que, apesar de já conhecermos o resultado desse exemplo, "existe uma fórmula para calcular esse resultado". Diz que consiste na divisão do valor 1000 pelo valor 2 e logo após na multiplicação pelo valor 1, registra no quadro com setas as duas operações.	seguintes, os alunos podem ter dificuldades para desvincular esta representação incorreta do cálculo de frações de números inteiros. Além disso, um algoritmo, que resolva situações-problema, retira um ponto chave da utilização de situações-problema: a possibilidade de variadas resoluções, e, possivelmente, torna o enunciado obsoleto para o aluno. Perde-se o objetivo de utilizar uma situação do cotidiano ao negar ao aluno sua tentativa de resolução individual, impondo uma forma de resolução pronta. No decorrer da aula, ao corrigir as situações-problema, P1 não relê o enunciado, apenas utiliza o algoritmo citado anteriormente, resultando em um processo automático, o qual consiste em identificar o número inteiro, colocá-lo ao lado da fração, dividi-lo pelo denominador e multiplicar o resultado obtido pelo numerador. Além disso, P1 cita que o problema seguinte a ser resolvido "é a mesma coisa". Esta frase comprova o 'desprezo' pelo enunciado da situação-problema. Esta atitude pode contribuir para a acomodação do aluno para com os enunciados, deste e de outros problemas nas séries seguintes, uma vez que, para o aluno, o enunciado (texto) em uma aula de matemática pode ganhar *status* de desnecessário.

Fonte: Meier (2012)

De acordo com as informações do Quadro 11, destaca-se uma distinção entre os aspectos didáticos adotados pelos docentes participantes da pesquisa,

> Ainda que a complexidade da relação pedagógica transcenda, em muito, a utilização de um algoritmo, a forma com que P1 o fez, acarreta dois problemas: primeiramente o fato de representar uma relação de forma matematicamente incorreta, pode criar um Obstáculo Didático e posteriormente possibilitar a criação de um Obstáculo Epistemológico. O segundo problema é o fato de que um algoritmo retira a necessidade da interpretação dos enunciados das situações-problema (MEIER, 2012, p. 86).

Outra situação enfatizada no trabalho de Meier (2012) diz respeito ao cuidado do docente de preocupar-se em demasia com o currículo do bimestre ou ano letivo.

> O professor deve primar pelo aprendizado do aluno, mesmo que para isso seja necessário não cumprir com o currículo escolar, ou seja, o professor deve, se necessário, selecionar os conteúdos essenciais para o desenvolvimento do aprendizado do aluno, inclusive considerando os anos escolares posteriores, pois privando o aluno de determinados conhecimentos o professor pode estar criando outros obstáculos, já que, no ano seguinte, possivelmente, será responsabilidade do outro docente investigar o conhecimento prévio dos alunos e este outro docente pode não apresentar a mesma postura pedagógica.

O trabalho de Meier (2012) enfatiza a atividade docente, a postura pedagógica e didática que podem auxiliar os estudantes no processo de aprendizagem de fração, evitando o surgimento de obstáculos didáticos e epistemológicos.

Segundo Ferreira (2014), o ensino de fração na EJA é permeado de obstáculos didáticos e epistemológicos, em sua pesquisa de mestrado, a autora elaborou e aplicou uma sequência didática composta de três atividades, e cada atividade com problemas semelhantes foram aplicadas em três sessões consecutivas. A identificação dos estudantes foi realizada mediante o uso de duas letras maiúsculas (DE, NY, AS e RO) de modo a preservar a identidade dos estudantes.

Quadro 12 - Algumas causas de dificuldades e obstáculos no ensino de fração na EJA

Questão	Considerações e obstáculos
Sabendo que $\frac{1}{3}$ da água dos reservatórios de São Paulo é perdida com ligações clandestinas e desperdícios. Faça uma figura para representar a água dos reservatórios e pinte a parte que corresponde as ligações clandestinas e desperdícios.	Este é um exemplo de questão que caracteriza uma das primeiras ideias de fração a partir da concepção parte-todo. Para solucionar, o aluno precisa fazer uma figura, dividi-la em três partes iguais e pintar apenas uma dessas partes. A aluna DE utilizou como estratégia a ideia de fração como parte, no entanto incorreu no erro de dividir a figura em quatro partes desiguais e pintar três delas, baseando-se no denominador da fração. A aluna não conseguiu associar o número fracionário a figura que o representasse e faz uma representação que, possivelmente, associa a figura ao numerador e denominador da fração. Um ponto evidente das respostas dos alunos é que eles pensam a fração como uma parte, mas isto ocorre de maneira desorganizada, sem fazer associação do significado do numerador e denominador da fração. Há indícios de que os alunos dividem, mentalmente, a figura em três partes, sem se preocupar com divisão equitativa, e pinta uma parte pequena da figura, o que imagina ser o reservatório após o desperdício de água. Este procedimento do aluno aponta para uma realidade característica do aluno da EJA. Ele não tem o conhecimento formal da representação fracionária por uma figura, mas consegue relacionar a uma figura a quantidade que a fração possivelmente represente. Este obstáculo à aprendizagem, segundo a definição de Brousseau, pode ser caracterizado como obstáculo didático.
Paulo levou sua esposa e os três filhos a uma pizzaria, pediram uma pizza tamanho família e dividiram em 10 partes. A esposa estava fazendo uma dieta e só quis comer $\frac{1}{10}$, as duas meninas comeram $\frac{2}{10}$ cada	Neste problema, esperava-se que os alunos mobilizassem conhecimentos relativos ao significado das frações e conseguissem utilizá-los para compor representações numéricas de frações que representem partes do todo ou o todo. Dos quatro alunos observados, apenas um respondeu corretamente, demonstrando compreender, ao menos no âmbito da situação proposta, o significado do numerador e do denominador da fração, porém não conseguiu deixar clara a ideia utilizada pra encontrar a solução. Percebeu-se a existência de um obstáculo que faz com a ideia de fração seja um par de números inteiros e não como um único número. Geralmente, o termo fração é usado nos exercícios em sala de aula para designar certas partes de um todo, ou de uma unidade. Esta ideia, muitas vezes, fica limitada a exemplos que enfatizam esta aplicação, dificilmente o

Questão	Considerações e obstáculos
uma e o menino comeu $\frac{1}{10}$. a) Qual a fração representa a pizza inteira?	professor utiliza exemplos com frações cujo numerador seja igual ao denominador. Ajudada pelo fato desse tipo de fração ser pouco presente na vivência do aluno, a prática pedagógica adotada para ensinar o conteúdo gera obstáculos que resultam na dificuldade de compreender e representar frações deste tipo.
Para o café da tarde, Marta reuniu seus três filhos e quatro sobrinhos, fez um bolo e dividiu em 15 partes. Cada sobrinho comeu $\frac{2}{15}$, o filho mais novo comeu $\frac{1}{15}$ e os outros dois comeram $\frac{3}{15}$ cada um. Responda as questões abaixo: a) Qual parte da fração do bolo ficou para Marta? b) Qual a fração representa o bolo inteiro? **Observação:** Nesta questão houve uso de material manipulativo (um bolo dividido em 15 pedaços iguais)	Para responder corretamente, o aluno deveria considerar a quantidade de partes em que o bolo foi dividido, ou seja, o denominador da fração, e associar este número à ideia de que o bolo inteiro contém quinze partes de quinze: $\frac{15}{15} = 1$. A aluna DE ficou uns instantes olhando para o bolo e procurou associar aquela situação à sua realidade, porém é possível notar que ela não tem o conhecimento ampliado para o campo dos números racionais e quando está diante de situações nas quais precisa desse conhecimento faz deduções sem significado por não entender o conceito de frações. Tal fato torna-se explícito na resolução apresentada pela aluna, que mesmo utilizando o material manipulativo, constatou que não sobraram pedaços do bolo, e não associou que quinze dos quinze pedaços representam o bolo inteiro. Como resposta registrou a fração $\frac{1}{15}$, mas em seguida apagou e escreveu a fração $\frac{6}{15}$. SY iniciou fazendo uma figura representando os pedaços do bolo. É interessante notar que o aluno, utilizando estratégias de resolução baseadas em suas vivências, não teve dificuldades em representar a figura do bolo, ainda que não fosse solicitado na questão. Na figura, foi marcando os pedaços de bolo de cada elemento e concluiu que não sobrou nenhum pedaço. Entretanto, erros conceituais graves são cometidos, como registrar a solução como $\frac{0}{0}$. De modo geral, na resolução deste problema, verifica-se que manipulação dos materiais contribuiu para que a maioria dos alunos encontrassem propostas de resolução, mas não garantiu que estes compreendessem claramente o significado desta concepção.
Quatro amigos receberam um prêmio de um bolão de loterias, dividiram o valor em 10 partes e repartiram da seguinte maneira: o primeiro recebeu $\frac{2}{10}$ desse valor, o segundo recebeu $\frac{3}{10}$ e o terceiro recebeu $\frac{4}{10}$. com as informações fornecidas, responda: a) Qual parte da fração do prêmio ficou para o quarto amigo? b) Qual a fração representa o prêmio inteiro?	Os quatro alunos pesquisados responderam o item a) corretamente. Os alunos RO e AS apresentaram uma solução diferenciada do que fizeram nas atividades anteriores, nota-se que eles fazem a soma das frações $\frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ obtendo $\frac{9}{10}$; sendo assim, chegaram à conclusão que, do total do prêmio, sobrou $\frac{1}{10}$ para o quarto amigo. Neste momento da análise, baseando-se nas observações feitas durante as atividades e registros realizados pelo aluno RO, entende-se que o aluno construiu conhecimentos, passando do concreto para o abstrato. Na análise das respostas registradas para este item, pode-se notar que os alunos conseguiram dar uma resposta correta à questão. Por outro lado, as respostas certas não significam que os estudantes construíram compreensões sobre o tema, é possível que tenham adquirido alguns conhecimentos em relação ao estudo das frações, entretanto, é provável que não tenham compreendido os significados do conteúdo. Esta mesma observação se estende para o item b) desta questão. Em relação ao item b), todos os alunos deveriam responder qual fração representa o prêmio inteiro. Todos os alunos acertaram. Em contrapartida,

Questão	Considerações e obstáculos
	as justificativas indicadas denunciam que os alunos não compreenderam, ou compreenderam parcialmente o que realizaram.

Fonte: Ferreira (2014)

Em seu trabalho, a autora faz algumas observações, reflexões, que justificam a elaboração do Quadro 13, uma vez que são informações relevantes para o estudo dos obstáculos.

Quadro 13 - Considerações e reflexões ao estudo dos obstáculos no ensino de fração na EJA

Constatações e apontamentos
• Dificuldade apresentada pelos sujeitos quando convidados a explicar seus procedimentos de resolução, revelando outra tensão, relativa ao processo de produção de conjecturas em torno de uma proposta de resolução e a compreensão dos algoritmos empregados nesta iniciativa.
• Em relação às atividades em si, na primeira delas os alunos se mostraram muito inseguros e por várias vezes requisitaram a presença da pesquisadora para fazer perguntas e reclamar das dificuldades encontradas nos problemas. Diante disso, foi possível perceber que os alunos pesquisados possuem grande dependência do professor para realizar suas atividades, além de uma preocupação exagerada em fornecer alguma resposta às questões.
• No decorrer da segunda atividade, os alunos melhoraram não só a questão da insegurança, mas também o desempenho da atividade. O uso dos materiais manipulativos facilitou algumas das conjecturas levantadas pelos estudantes, mas, de forma geral, foi visto pelos sujeitos como elementos operacionais.
• Na terceira atividade da sequência, os resultados indicam que houve uma melhora no rendimento, em relação à primeira e à segunda atividade, mas, a respeito da dependência da figura docente, esta permaneceu, mesmo que em proporção diminuída. Embora a postura assumida pela pesquisadora fosse a de mediar e permanecer atenta à devolução, não provendo intervenções durante a atividade, alguns alunos insistiam em fazer perguntas na esperança de obter informações para resolver o problema.
• É evidente a dificuldade dos alunos jovens e adultos em lidar com problemas, tanto na questão da interpretação, quanto na resolução em si. Diante da menor dificuldade, os estudantes pedem auxílio ao professor ou simplesmente desistem sem encontrar a solução. Essa atitude revela que os mesmos não estão acostumados com atividades em que lhes seja exigido pensar, formular hipóteses e enfrentar desafios, deixando assim transparecer efeitos e regras de um contrato didático vigente que valoriza a resolução de exercícios baseada em memorização de regras, cujo único objetivo é fornecer uma resposta à questão.
• Em diferentes situações, pode-se notar que as concepções dos alunos aparecem calcadas no pressuposto de que se está lidando com dois números naturais, um usado para representar o numerador e outro representando o denominador, e não com um número apenas, na representação fracionária. Tais concepções fazem com que os estudantes encontrem dificuldades em fazer comparações e operações entre frações com denominadores diferentes, em representar uma fração por meio de uma figura, em encontrar a parte do todo de uma fração, além de evidenciar o obstáculo que induz à ideia de que se pode aplicar aos números racionais a mesma lógica utilizada para os números naturais.
• Quanto ao uso de materiais manipulativos, há sempre a ideia de que o aluno adulto rejeita estes recursos, talvez por considerá-los pueris. O que se pôde constatar, entretanto, nesta pesquisa, é que os alunos aceitaram trabalhar com os materiais dispostos para a segunda atividade e que foi importante observar algum progresso no desenvolvimento das mesmas – de caráter operacional, portanto.

Fonte: Ferreira (2014)

Conforme a autora, deve-se buscar alternativas viáveis que possam auxiliar os estudantes jovens e adultos a relacionarem os conteúdos vistos em sala de aula com suas vidas além muros da escola, contextualizando e criando significado, o que eventualmente pode fazer as aulas ficarem mais interessantes para esses estudantes, a aplicação do conteúdo a situações reais vivenciadas pelos estudantes é um estímulo aos discentes.

Em sua pesquisa, Martins (2016) estudou a relação entre a formação docente e o desempenho dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas matemáticos. A partir de respostas dadas pelos professores participantes em relação aos conteúdos considerados mais difíceis para ensinar, destacou-se a fração.

> O conteúdo mais citado pelos professores foi ‘fração’, seguido de ‘números decimais’. Isso indica que o conteúdo matemático que os professores consideram mais difícil para ensinar refere-se aos números racionais, tanto em sua representação fracionária quanto decimal (MARTINS, 2016, p. 100).

No Quadro 14, listamos as informações em relação às dificuldades apresentadas e obstáculos identificados quanto à fração.

Quadro 14 - Questões relacionadas às dificuldades envolvendo fração

Questão	Considerações e obstáculos
Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos? a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{35}{24}$ d) $\frac{60}{35}$	Ao perguntar ‘que fração da hora corresponde a 35 minutos?’, espera-se que o aluno relacione a hora (60 minutos) com ‘o todo’ e os 35 minutos com ‘a parte’, representando $\frac{35}{60}$. Ainda, com a compreensão de frações equivalentes, espera-se que ele reconheça a fração $\frac{35}{60}$ em sua forma irredutível l $\frac{7}{12}$, alternativa b). Essa questão teve um índice de acertos relativamente baixo, sendo de: 10,1% alunos do 5º ano do Ensino Fundamental; 27,8% concluintes do curso de formação de docentes em Nível Médio; 22,2% concluintes em Pedagogia; 52,9% docentes dos anos iniciais. Ao analisar os erros cometidos a partir das resoluções, infere-se a dificuldade na compreensão da fração como um número racional, levando a identificá-la apenas como sendo dois números naturais separados por um traço, pode estar relacionada à forma como esse conteúdo é abordado. Geralmente as frações são ensinadas no sentido de “parte-todo” e ocorre somente por meio de desenhos nos quais se divide o todo em partes iguais – denominador, e se colore as partes indicadas – numerador. Não sendo também estudada como um número, que tem valor real e localização na reta numérica. Ou ainda, à linguagem utilizada pelo professor. Quando o professor, ao conceituar as frações, utiliza o termo número para referir-se ao numerador e ao denominador, acaba dando a ideia de que são independentes. Se o professor utiliza as palavras número, numeral e algarismo como sinônimos, poderá induzir o aluno a apropriar-se desse

Questão	Considerações e obstáculos
	conceito inadequado que se constituirá em obstáculo para a aprendizagem de outros conceitos. Esses obstáculos surgem durante o processo de ensino-aprendizagem uma vez que ao iniciar o estudo de frações, o aluno baseia-se no conjunto dos números naturais, e tende a realizar a divisão entre o numerador e o denominador somente quando primeiro for múltiplo do segundo. Outro fato importante, revela-se nos comentários referentes à essa questão. Ao entregar as provas aos professores, sugerira-se que nas questões que o quisessem, registrassem seus comentários por escrito no momento da resolução da prova. Eles classificaram essa questão como ‘difícil ou muito difícil’, alegando que o enunciado do problema proposto traz muitas informações, com isso ‘a criança fica confusa’. Escreveram, ainda, que para o aluno entender “tem que ser bem simples”. Observa-se nessas manifestações docentes que os alunos não estão acostumados a resolverem esse tipo de problema.
Pedro adubou $\frac{3}{4}$ de sua horta. A parte da horta adubada por Pedro corresponde a a) 10% b) 30% c) 40% d) 75%	Uma possibilidade de resolução é encontrar a representação decimal de $\frac{3}{4}$, dividindo o numerador 3 pelo denominador 4, cujo resultado é 0,75 que pode ser representado por $\frac{75}{100}$ ou 75%, dentre outras possibilidades de resolução. O índice de acertos foi de: 23,7% alunos do 5º ano do Ensino Fundamental; 33,3% concluintes do curso de formação de docentes em Nível Médio; 50,0% concluintes em Pedagogia; 94,1% docentes dos anos iniciais. Vários fatores podem ter influenciado esse resultado, entre eles, a maior familiaridade que os professores e os concluintes de Pedagogia podem ter com o símbolo de porcentagem, uma vez que a questão aborda esse conceito. No entanto, isso não é expresso em palavras, e sim pelo símbolo (%), o que pode dificultar sua interpretação pois, embora seja algo bastante utilizado no cotidiano, geralmente refere-se às transações financeiras de compra e venda, algo não muito comum no dia-a-dia das crianças do quinto ano e dos adolescentes do Ensino Médio. Cabe destacar que, mesmo sendo solicitado aos professores que registrassem os procedimentos e estratégias utilizados ao resolverem as questões da prova, a maioria não registrou ou apagou os registros realizados, deixando apenas assinalada a alternativa que consideravam correta. Assim, pouco se pode recuperar de seus processos de raciocínio e das estratégias utilizadas na resolução das questões, dificultando analisar as convergências e divergências entre as estratégias de resoluções utilizadas por professores, futuros professores e alunos dos anos iniciais. Nos registros deixados nas provas, percebe-se que esse exercício foi resolvido, por professores, futuros professores e alunos, pelo mesmo processo. Todos que trabalharam a partir do conceito ‘parte-todo’ da fração, considerando 100% como ‘todo’ e calculando $\frac{3}{4}$ de 100%, obtendo como resultado, 75%, portanto acertaram. Entretanto, nem todos os participantes assinalaram a alternativa correta.

Fonte: Martins (2016)

Verificou-se no estudo de Martins (2016) que algumas lacunas na apropriação do conceito de frações foram identificadas tanto em estudantes do quinto ano, docentes, e docentes em formação que participaram do referido estudo, o que pode contribuir para a não superação de possíveis obstáculos epistemológicos.

A partir da análise das produções acadêmicas selecionadas e do disposto nos quadros 09 a 14 inclusive, em que constam os obstáculos e situações didáticas verificadas nas produções analisadas, elaborou-se o Quadro 15 que traz uma visão à luz dos obstáculos epistemológicos conforme Bachelard.

Quadro 15 - Obstáculos e situações didáticas das produções analisadas conforme Bachelard

Obstáculos conforme Bachelard	Produções analisadas	Obstáculos didáticos ou epistemológicos	Característica	Possível origem
A experiência primeira	Miranda (2007), Costa (2009), Ferreira (2014), Martins (2016).	Resistência em reconhecer uma fração como um número.	Perceber a fração como sendo um par de números naturais ou inteiros, separados por um traço.	O conhecimento dos números naturais e inteiros, e o fato destes apresentarem-se sempre prontos, não sendo preciso uma interpretação. Não compreender o traço da notação de fração como sendo uma divisão.
	Costa (2009), Martins (2016).	Posicionar na reta numérica fração imprópria ou número misto.	Não conseguir identificar o valor numérico da fração escrita na forma de fração imprópria ou de número misto, e localizá-lo na reta numérica.	O conhecimento dos números naturais e inteiros que são facilmente alocados na reta numérica. A dificuldade em compreender que a parte possa ser maior que o todo, e a não aceitação que uma fração tenha mais de uma representação.
	Miranda (2007), Costa (2009), Ferreira (2014), Martins (2016).	Conceber fração apenas na concepção parte/todo.	Identificar frações a partir de desenhos nos quais se divide o todo em partes iguais.	Considerar frações como modelo discreto, devido ao conhecimento dos números naturais, ignorando que se trata de um modelo contínuo.
Obstáculo Verbal	Miranda (2007), Costa (2009), Ferreira (2014).	Operações com frações.	Limitação ao operar com frações, principalmente no caso da multiplicação e da divisão.	A ênfase dada as palavras no ensino dos números naturais, podem levar a interpretações do tipo, ‘multiplicar aumenta’, ou ‘dividir diminui’, o que nem sempre é verdade em operações com frações. Os termos ‘mais’ e ‘a mais’, indicam

Obstáculos conforme Bachelard	Produções analisadas	Obstáculos didáticos ou epistemológicos	Característica	Possível origem
				operações diferentes conforme o enunciado de uma questão ou situação problema.

Fonte: Dissertações analisadas e Silva (1997)

No quadro 15, fez-se uma análise de obstáculos didáticos ou epistemológicos encontrados nas dissertações verificadas nesta pesquisa, assim estes foram organizados conforme a teoria de Bachelard, contudo salienta-se que esta nova disposição dos obstáculos não é rígida, e que algumas situações podem conter elementos ou características relacionadas a mais de um tipo de obstáculo epistemológico, já que o conhecimento é contínuo e integrado, e não estanque e compartimentado.

Numa visão mais abrangente, tem-se que o conhecimento do conjunto dos números naturais se constitui no principal indutor de obstáculos epistemológicos e didáticos inerentes ao conceito de fração. Essa experiência primeira com os números naturais, esse conhecimento estabelecido, seguro, e eficaz, no seu domínio de significados e operações, traz segurança e conforto.

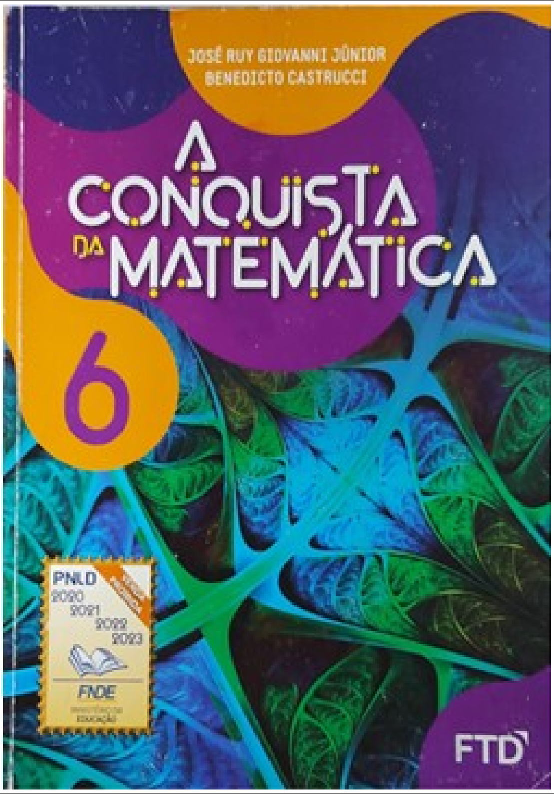
Ao defrontar-se com o conteúdo de fração, o indivíduo tende a usar o conhecimento que possui, ou seja, o dos números naturais (e de inteiros) na expectativa de que funcione com a fração, nesse movimento, manifesta-se o obstáculo epistemológico. E não há como fugir do obstáculo epistemológico, é preciso superá-lo, nesse processo de superação o papel do docente é de suma importância.

3.2 O conteúdo de fração no livro didático de Matemática

Essa análise parte do pressuposto de que o livro didático é um dos materiais mais utilizados por docentes e discentes na escola pública, além de ser, em alguns momentos, a única fonte de pesquisa disponível. Credita-se ainda a este material que as informações e conhecimentos a serem tratados junto aos discentes possam instigar a curiosidade, a reflexão e o acesso à cultura científica a ser desenvolvida no processo de ensino.

Os dados de identificação da produção, e demais informações pertinentes seguem conforme Quadro 16.

Quadro 16 - Livro didático

Capa	Dados da obra	
	Vinculação:	• Ministério da Educação – MEC; • Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE; • Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.
	Ciclo:	• 2020 – 2023.
	Nível:	• Educação Básica • Ensino Fundamental – Anos Finais
	Ano:	• 6º.
	Coleção:	• A Conquista da Matemática.
	Autores:	• José Ruy Giovanni Júnior; • Benedicto Castrucci.
	Componente Curricular	• Matemática.

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018).

A organização dos conteúdos matemáticos é feita em unidades, e cada unidade é composta por capítulos, que por sua vez, subdividem-se em seções.

A seguir tem-se a disposição dos conteúdos nas unidades de 1 a 9: Unidade 1 – Sistemas de numeração; Unidade 2 – Cálculos com números Naturais; Unidade 3 – Figuras geométricas; Unidade 4 – Múltiplos e divisores; Unidade 5 – A forma fracionária dos Números Racionais; Unidade 6 – A forma decimal dos Números Racionais; 7 – Ângulos e polígonos; Unidade 8 – Comprimento e área; Unidade 9 – Massa, volume e capacidade.

A Unidade 5 – A forma fracionária dos números Racionais, está descrita a seguir no Quadro 17.

Quadro 17 - Unidade 5 - A forma fracionária dos Números Racionais

Capítulo	Seções
1 – A ideia de fração	• A ideia de fração como parte de um todo; • A ideia de fração como resultado da divisão de dois números naturais. • Atividades.
2 – Problemas envolvendo frações	Atividades.

Capítulo	Seções
3 – Comparando frações	Atividades.
4 – Obtendo frações equivalentes	• Uma propriedade importante; • Simplificação de frações; • Frações irredutíveis; • Atividades; • Reduzindo duas frações ao mesmo denominador; • Atividades.
5 – Adição e subtração de frações	Atividades.
6 – A forma mista	Atividades.
7 – As frações e a porcentagem	Atividades.

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018).

Observa-se, no Quadro 17, que o assunto fração é dividido em 7 capítulos que vai da ideia de fração até a sua relação com a porcentagem. Nos capítulos 1 e 4, o tema foi subdividido em seções. Em todos os capítulos existem atividades a serem realizadas.

O material de fração na Unidade 5 é introduzido a partir de um texto que retrata a construção de um mosaico geométrico, confeccionado em três etapas expostas no Quadro 18.

Quadro 18 - Construção do mosaico

<table>
<tr><td colspan="2">Observe a seguir as etapas executadas por Janaína para construir um mosaico geométrico. Veja que inicialmente ela possuía apenas folhas retangulares coloridas e, após a divisão dessas folhas em partes e um bom planejamento, elaborou seu mosaico.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>• Será que podemos chamar cada uma dessas peças do mosaico de uma parte do mosaico todo?</td></tr>
</table>

	Chamando cada folha colorida da Etapa 1 de um inteiro e sabendo que cada folha da Etapa 2 foi dividida em várias partes iguais entre si, mas diferentes de uma folha para outra, podemos relacionar cada pedaço de uma folha à folha toda utilizando uma fração. Logo, se considerarmos a folha azul, cada parte equivale a 1 pare de 16 partes ou simplesmente $\frac{1}{16}$.
	• **Dessa forma, como podemos representar cada parte das outras folhas?**

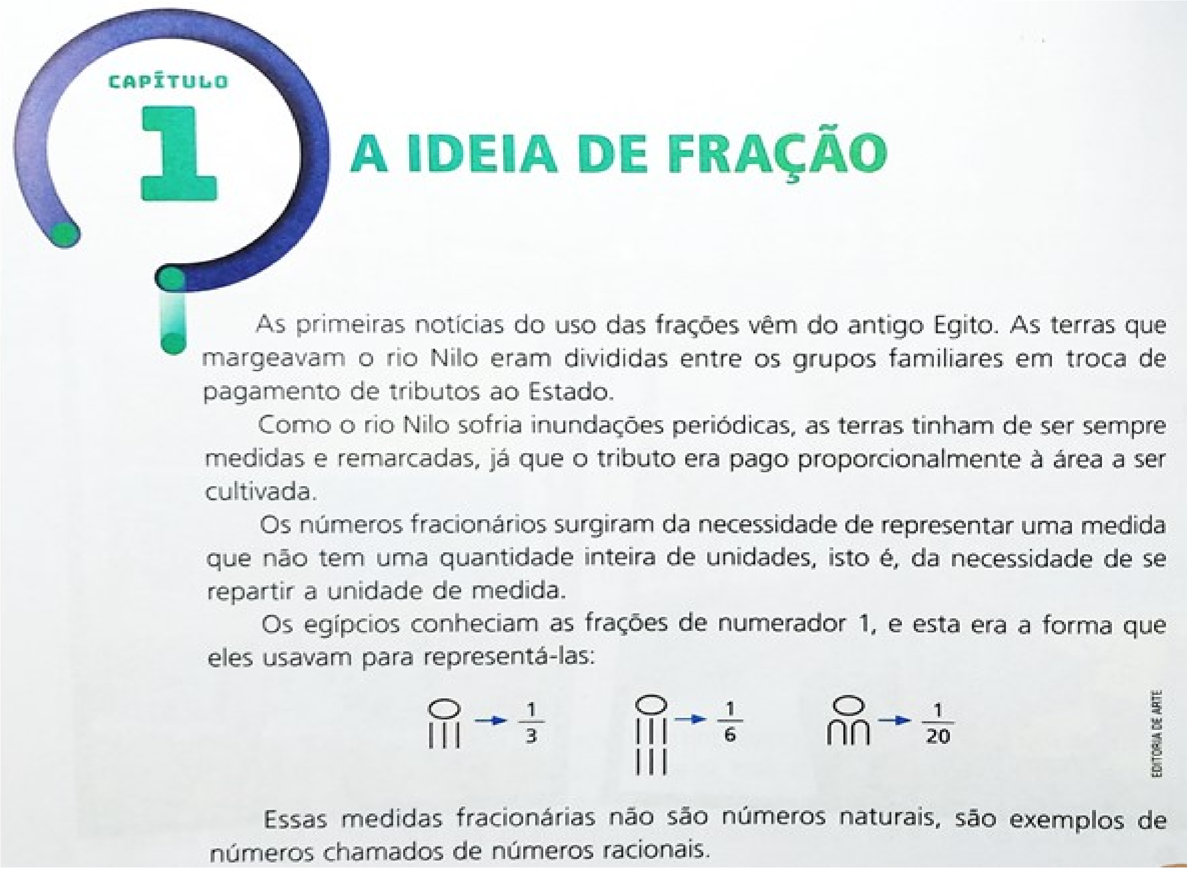
Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p. 130-131).

Verifica-se no Quadro 18 uma situação comum a outros livros didáticos que é o uso de uma situação ou abordagem para iniciar um determinado conteúdo, nesse caso específico, a introdução da forma fracionária dos números racionais a partir da construção de um mosaico geométrico.

Nessa atividade foi explorado o significado da relação parte-todo e quantidade contínua extensiva, não havendo a continuação ou a retomada desta atividade na Unidade 5. Assim se perde uma rica oportunidade de desenvolver outros aspectos do estudo da fração, como: equivalência, simetria, adição, subtração, comparação, entre outros.

Ao introduzir os aspectos históricos em relação à fração no capítulo 1 – A Ideia de Fração, fez-se referência somente ao antigo Egito.

Figura 16 - Introdução às frações egípcias



CAPÍTULO 1

A IDEIA DE FRAÇÃO

As primeiras notícias do uso das frações vêm do antigo Egito. As terras que margeavam o rio Nilo eram divididas entre os grupos familiares em troca de pagamento de tributos ao Estado.

Como o rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de ser sempre medidas e remarcadas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada.

Os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida.

Os egípcios conheciam as frações de numerador 1, e esta era a forma que eles usavam para representá-las:

$\rightarrow \frac{1}{3}$ $\rightarrow \frac{1}{6}$ $\rightarrow \frac{1}{20}$

EDITORIA DE ARTE

Essas medidas fracionárias não são números naturais, são exemplos de números chamados de números racionais.

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p. 132)

A maneira como é introduzida a história da fração partindo-se apenas da vertente egípcia, induz os estudantes a uma versão que não condiz com a verdade dos fatos, uma vez que as origens deste conceito estão relacionadas a várias civilizações antigas, conforme descrito na Seção 5 deste trabalho.

Na sequência, tem-se a verificação de possíveis obstáculos no conteúdo de fração, com base na Seção II – Fundamentação Teórica.

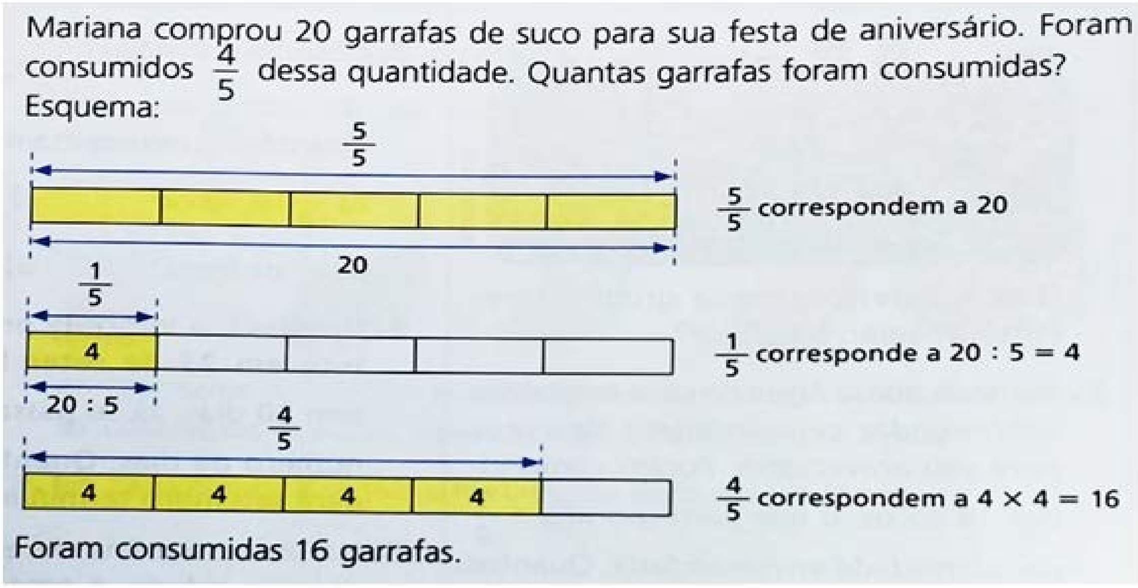
3.2.1 Identificando os obstáculos

> A influência exercida pelo livro didático na prática docente é um fenômeno conhecido, chegando a impor a rotina de trabalho de muitos professores. Ao tempo que representa um instrumento eficaz, oferecendo ao professor o ponto de partida da caminhada rumo à aprendizagem e contribuindo para o desenvolvimento da autonomia do estudante, também pode ser entendido como algo pronto e acabado, cabendo ao professor apenas informar ao estudante a página e o conteúdo a ser estudado. [...] A maneira como os conceitos são apresentados é fundamental para o processo de ensino e de aprendizagem. As informações e as situações contidas no livro didático, bem como a sua disposição podem potencializar o processo ou se transformar em

obstáculo para a aprendizagem (BORDIN; LYRA; MENONCINI. 2018, p. 270-271).

Na análise da Unidade 5 que trata da fração, seu conceito e operações, buscou-se identificar circunstâncias que evidenciem obstáculos epistemológicos ou didáticos.

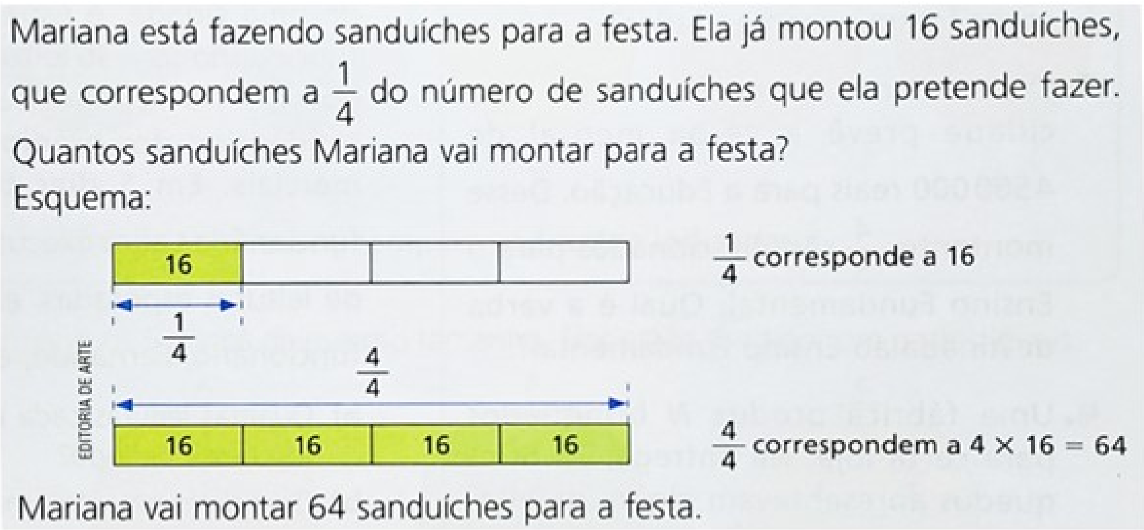
Figura 17 – Exemplo 1



Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p. 137)

Nas figuras 17 e 18, indentifica-se discrepâncias entre os enunciados das questões e a maneira como foram resolvidas.

Figura 18 - Exemplo 2



Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p. 137)

Percebe-se nos enunciados que as 20 garrafas e os 16 sanduíches indicam quantidades discretas e, no esquema de resolução, utilizou-se retângulos que representam quantidades contínuas.

Com base em Bachelard (2005), estas situações podem suscitar o obstáculo epistemológico da Experiência Primeira. Uma vez que os estudantes aprendem, na escola e fora dela, o conceito e as operações relacionadas ao conjunto dos números Naturais que correspondem a um modelo discreto.

Porém, ao serem apresentados aos números fracionários, utilizou-se o significado da relação parte-todo e quantidade contínua. Caso esse movimento de alternância entre quantidades discretas e quantidades contínuas ocorra de maneira não intencional por parte do docente, os estudantes podem não conseguir superar este tipo de obstáculo sozinhos.

Ainda em relação às figuras 17 e 18, Silva (1997), considera-se essa situação como um obstáculo – O modelo de Referência exposto no Quadro 1.

Figura 19 – Atividade 1

Ao entrar em um *shopping*, Antônio tinha 300 reais. Fez compras em 3 lojas. Em cada uma delas gastou 2 reais a mais que a quarta parte da quantia que tinha ao entrar na 1ª loja. Ao sair da 3ª loja, quantos reais ainda restavam para Antônio?

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p .138).

Nas figuras 19 e 20 tem-se o uso da expressão – a mais. De acordo Bachelard (2005), o uso de determinadas palavras pode impelir o Obstáculo Verbal. No trabalho com Números Naturais, os estudantes apropriam-se da palavra ‘mais’ como sinônimo de adição.

Os estudantes ao se depararem com a expressão ‘a mais’, entendem como ‘mais’, ou seja, uma adição. O que configura um obstáculo, uma vez que a expressão ‘a mais’, na maioria das situações, indica uma operação de subtração.

Figura 20 - Atividade 2

Na concessionária de energia elétrica de uma cidade, é esperado que cada funcionário faça 30 leituras de consumo por dia no relógio de medição das residências, dos prédios ou locais comerciais. Em 5 dias trabalhados, a funcionária Laura executou $\frac{9}{10}$ do total de leituras esperadas, enquanto outro funcionário, Fernando, executou $\frac{5}{6}$.

a) Quantas leituras cada um deles executou nesse período?

b) Qual deles executou mais leituras nesse período? Quantas leituras a mais?

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p .138).

Além dos aspectos relacionados aos obstáculos, as situações descritas apresentam algumas características a serem consideradas.

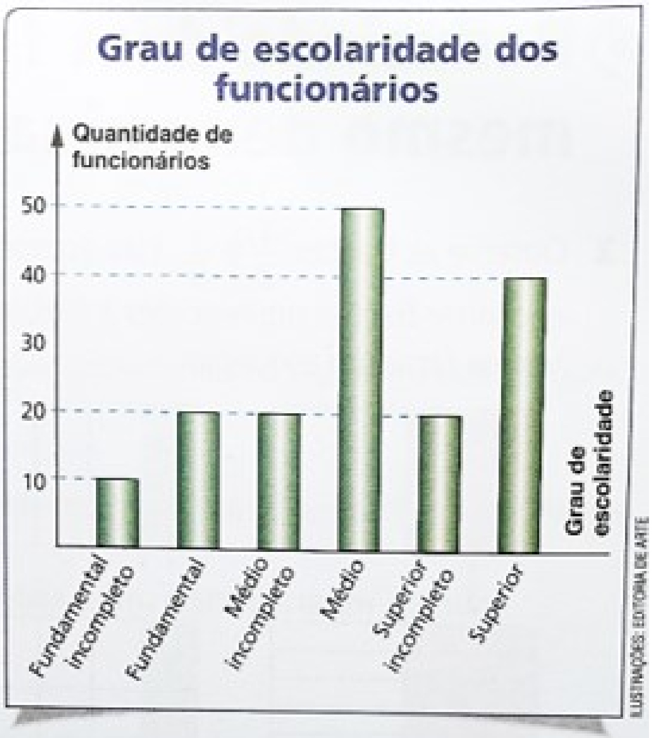
A questão da Figura 19 apresenta um contexto a partir de um shopping, nas cidades jurisdicionadas à Diretoria Regional de Ensino de Dianópolis nenhuma possui shopping, no Estado do Tocantins poucas cidades possuem shopping. Verifica-se que a contextualização favorece o entendimento e a resolução de questões matemáticas. No entanto, o cenário é diferente, conforme afirma Lopes.

> Há alguns anos fiz um levantamento de contextos e situações problema, em que as frações fossem imprescindíveis. Imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do ensino fundamental, mas isto não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes. (LOPES, 2008, p. 5).

Nas questões das figuras 19 e 20, o contexto sugerido não apresenta relação com situações vivenciadas pela maior parte dos estudantes.

Figura 21 - Atividade 3

Numa pesquisa sobre o grau de escolaridade dos funcionários de uma empresa, obtiveram-se os resultados expressos no gráfico a seguir:



Fonte: Dados fictícios.

Que fração do total de entrevistados representa o total de pessoas que terminaram pelo menos o Ensino Fundamental?

Fonte: Júnior e Castrucci, (2018, p. 145).

A questão disposta na Figura 21 requer do estudante uma série de atitudes e conhecimentos. A partir da leitura e observação do gráfico, este deve perceber que a quantidade total de entrevistados corresponde a soma de entrevistados em cada grau de escolaridade, ou seja, 10 + 20 + 20 + 50 + 20 + 40 = 160 entrevistados. ‘Terminar pelo menos o Ensino Fundamental’, equivale a expressão, ‘terminar no mínimo o Ensino Fundamental’, então, todos os entrevistados que possuem escolaridade igual ou acima do Ensino Fundamental completo, estão inseridos. Logo, 160 (total) – 10 (Fundamental Incompleto) = 150. Enfim, a fração solicitada na questão é igual $\frac{150}{160}$, o resultado ao final do livro didático é dado na forma de fração irredutível $\frac{15}{16}$. Mesmo havendo alguma variação na lógica de resolução, o nível de dificuldade pouco varia.

Este tipo de questão pode ensejar obstáculos, segundo Brousseau (1998), Obstáculo de Origem Didática, caso o docente proponha uma questão como a da Figura 21 sem ter realizado anteriormente um trabalho com gráficos que possibilite aos estudantes interpretação, reflexão, análise, enfim condições para buscar uma solução para a questão; Obstáculo de origem ontogênica, pois pode acontecer de alguns estudantes não terem desenvolvido construções cognitivas e, em função de limitações neurofisiológicas, não consigam operar todas as informações necessárias para solucionar a questão.

Após essa breve análise de alguns elementos deste livro didático, identificou-se a existência de situações que podem potencializar a manifestação de obstáculos, sabendo-se que os obstáculos epistemológicos são inerentes à construção do conhecimento e, de acordo Igliori (2008), são aqueles dos quais não se pode, nem se deve escapar, constata-se a relevância destes serem conhecidos pelos docentes. Os estudantes, sem o auxílio do docente, dificilmente conseguem superar um obstáculo epistemológico.

Ressalta-se que, neste livro didático, não foram abordadas as operações de multiplicação e de divisão de frações, tais operações, conforme a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, são atendidas no livro didático de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental. Este autor considera apropriado esse procedimento, visto que os estudantes no 7º ano já possuem maior capacidade de abstração e são menos suscetíveis aos obstáculos ontogênicos.

3.2.2 Fração – na história e no livro didático

Sabe-se que a dinâmica da sala de aula, o currículo a ser cumprido e, atualmente, as diretrizes da BNCC não possibilitam um tempo amplo para o docente tratar de um histórico completo acerca da origem da fração, contudo é preciso que os estudantes tenham acesso a um conjunto mínimo de informações para que possam compreender a construção do conceito de fração e que este tenha significado. Ao confrontar a análise do livro didático com o disposto na Seção 2, percebe-se diferenças significativas entre a fração no livro didático e na história, no Quadro 19, tem-se uma síntese de observações e considerações que esclarecem tal situação.

Quadro 19 – Aspectos da fração – na História e no Livro didático

Elemento	Livro Didático	História da fração	Considerações
Origem	Antigo Egito.	Indica a origem da fração em diferentes civilizações antigas: egípcia, babilônica, grega, hindu e outras.	Limitar a origem da fração ao antigo Egito, induz a um entendimento histórico incompleto, e sugere que as demais civilizações não tiveram necessidade ou empreenderam esforços na construção do conceito de fração.
Exemplos de uso	Divisão de terras às margens do rio Nilo.	Partilha de terras; atividades ligadas à agricultura e à engenharia; geometria; sistemas de medida.	Ao apresentar apenas o exemplo da divisão de terras, prejudica-se o entendimento quanto à necessidade das frações. Perde-se a oportunidade de enriquecer as aulas e de despertar o interesse dos estudantes.
Representação	Frações egípcias unitárias.	Frações: egípcias unitárias e não unitárias; mesopotâmicas sexagesimais; gregas com representação alfabética; hindu semelhantes a forma atual.	Ao ter acesso somente à representação da fração egípcia unitária. O estudante entende ser essa a única forma de representação antiga. Perde-se importante aspecto no contexto da origem das frações.
Valor numérico	Declarado na introdução do conteúdo como números racionais.	Processo histórico complexo em que houve dificuldade em aceitar as frações como número, situação que perdurou por milênios.	Simplifica-se o entendimento quanto à formação do conceito de fração. O que pode levar docentes a não compreenderem o tempo necessário à construção de significados no ensino de fração.

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do disposto no Quadro 19, evidencia-se uma limitação quanto às informações relativas às origens da fração no livro didático, tal situação poderá ser potencializada caso o docente não tenha uma formação que o possibilite conhecer esse conteúdo e o habilite a buscar complementação em outras fontes e materiais.

Ao realizar-se a revisão de literatura, pôde-se verificar a existência de obstáculos epistemológicos que afetam o conceito de fração. Na perspectiva de Bachelard, percebe-se os obstáculos da experiência primeira e o obstáculo verbal. Conforme Brousseau, identificou-se os obstáculos didáticos de origem: epistemológica, ontogênica e didática, com prevalência dos de origem didática.

Em relação ao livro didático, identificou-se que o conteúdo de fração disponibilizado, sua organização e tratamento, induz à manifestação de obstáculos epistemológicos e didáticos.

Na próxima seção, apresenta-se as considerações finais desta pesquisa. Entende-se que os resultados são oportunos e podem contribuir com os docentes que tiverem contato com esses dados, num processo de reflexão acerca do conceito de fração.

4 TECENDO CONSIDERAÇÕES

Encontra-se em Bachelard (2005) que, para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a um questionamento, e que é preciso atenção em relação à opinião, uma vez que esta pensa mal ou não pensa, além de ser eivada de pré-conceitos. Com base nas recomendações do filósofo francês, elaborou-se este trabalho, atento ao rigor científico em cada etapa de execução.

Assim, nesta seção, empreende-se uma reflexão acerca das premissas iniciais, do caminho trilhado, dos resultados encontrados e das perspectivas futuras. A metodologia compreendeu uma abordagem qualitativa, de procedimento bibliográfico com escopo no estado do conhecimento.

No intuito de responder à questão de pesquisa, iniciou-se um estudo em relação à origem dos obstáculos epistemológicos, adentrando assim na teoria de Bachelard e, em seguida, na de Brousseau, uma vez que o primeiro os enunciou e o segundo os abordou no ensino e aprendizagem da Matemática.

Esta pesquisa teve como objetivo conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração. Para alcançá-lo, realizou-se dois movimentos, no primeiro buscou-se uma fundamentação teórica de maneira a subsidiar as escolhas, as análises e a escrita da dissertação.

Compreendeu-se que, na gênese da fração, alguns obstáculos interpuseram-se na construção deste conceito, e entendeu-se que o principal foi o conhecimento dos naturais. O fato de os números naturais estarem associados a processos de contagem e de medição os tornaram conhecidos e aceitos, além de apresentarem leitura e interpretação simples.

A fração tem origem numa ideia mais complexa, a leitura de um número fracionário implica numa interpretação ligada a um processo de partição. Essa característica induziu outros obstáculos, inclusive quanto à maneira de representá-la. Viu-se que, nas civilizações antigas, houve por muito tempo a negação da necessidade do uso das quantidades fracionárias, bem como levaram séculos para a fração ser aceita como número.

O segundo movimento compreendeu a análise de dissertações e de um livro didático. Percebeu-se um número reduzido de pesquisas em relação à temática, contudo, identificou-se cinco dissertações numa busca realizada junto ao Catálogo de

Teses e Dissertações da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), a partir destas realizou-se o estado do conhecimento.

Uma vez identificados os obstáculos que afetam o conceito de fração, procedeu-se a análise destes, relacionando-os às categorias estabelecidas conforme as teorias que sustentam este trabalho.

Das categorias de obstáculos enunciadas por Bachelard (2005), verificou-se, nas produções acadêmicas, os obstáculos epistemológicos: a experiência primeira e obstáculo verbal. Já nas categorias, segundo Brousseau, detectou-se os obstáculos didáticos de origem: epistemológica, ontogênica e didática, com primazia dos de origem didática. Com base nas dissertações analisadas, percebeu-se lacunas na formação docente em relação ao conteúdo matemático de fração.

Na análise do livro didático de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, constatou-se que a maneira como foi organizado e disposto o conteúdo de fração, favorece a manifestação de obstáculos epistemológicos e didáticos. Neste, verificou-se uma limitação nas informações quanto à origem da fração, o que pode induzir entendimentos equivocados. Percebe-se um distanciamento entre o desenvolvimento do conceito de fração ocorrido na história e a maneira como este é apresentado no livro didático.

A partir dos movimentos descritos envolvendo o estudo da fração: na teoria, nos obstáculos, na história em civilizações antigas, em dissertações e no livro didático, entendeu-se que os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração no pensamento de Bachelard têm propensão a serem superados à medida que o conhecimento científico avança.

Na perspectiva de Brousseau, tem-se um viés diferente em que os obstáculos didáticos no conceito de fração tendem a existir. Nas produções analisadas, percebeu-se uma ênfase quanto à importância de o docente conhecer os obstáculos e buscar maneiras de superá-los no seu fazer pedagógico em sala de aula.

No tocante às dificuldades na execução do trabalho, tem-se: o número reduzido de produções voltadas à temática; a limitação das informações relativas à história da fração; a compreensão da epistemologia bachelardiana a partir de seus escritos com redação científica e poética; o rigor da escrita científica stricto sensu; os efeitos danosos oriundos da pandemia de Covid-19 (suspensão das aulas e atividades presencias, isolamento social, ansiedade).

Almeja-se que esta pesquisa contribua com docentes no conhecimento e superação de obstáculos para progresso do conhecimento científico, possibilitando reflexões quanto à construção do conceito de fração em seu fazer pedagógico.

No desenvolver da pesquisa, foram aparecendo outras questões que requerem atenção e merecem ser investigadas. Na busca em conhecer os obstáculos epistemológicos intrínsecos ao conceito de fração, entende-se que não se esgotou o assunto, nem foi este o intento.

Na perspectiva de continuidade dos estudos acadêmicos em um curso de Doutorado, entende-se como possíveis temáticas investigações que abordem:

- *A história da fração em diferentes civilizações antigas, origens e obstáculos.*

Nas produções analisadas nesta pesquisa e nas demais verificadas na base de dados da CAPES, não foram identificados trabalhos com esta temática. Tem-se que, nos livros de história da Matemática verificados, as informações relativas ao histórico da fração são escassas e dispersas.

- *A metodologia utilizada por docentes que ensinam fração à luz da teoria de Guy Brousseau no viés dos obstáculos didáticos*. O processo ensino e aprendizagem é permeado pela metodologia do docente, assim conhecer essa metodologia empregada no ensino de fração e analisá-la mediante a teoria dos obstáculos didáticos de Brousseau tende a identificar maneiras de superá-los no fazer docente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Arthur Costa; CORRÊA, Francisco J. S. de Araújo. Papiro de Rhind e as frações unitárias. **Revista do Professor de Matemática***,* n. 35. p. 2-8. 1997.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ARAÚJO, David Velanes de. Francis Bacon e Gaston Bachelard: um diálogo sobre os obstáculos epistemológicos. **Cadernos do PET Filosofia**, v. 7, n., Jan-Jun, p.54-74, 2016.

BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**: contribuição para uma psicanálise do Conhecimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

______. **Ensaio sobre o conhecimento aproximado**. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.

______. **A filosofia do não; O novo espírito científico; A poética do espaço**; seleção de textos de José Américo Motta Pessanha; traduções de Joaquim José Moura Ramos. . . (et al.). — São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os pensadores).

______. **A psicanálise do fogo**. Tradução Paulo Neves. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

BARBOSA, Elyana. **Bachelard no Brasil:** ciência e imaginação. Resp. ROCHA, Gabriel Kafure da. 2020. Disponível em: <https://youtu.be/UR8DLW6hzNk>. Acesso em: 16 set. 2020.

BARBOSA, Elyana; BULCÃO, Marly. **Bachelard:** pedagogia da razão, pedagogia da imaginação. 2. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2011.

BITTENCOURT, Jane. Obstáculos epistemológicos e a pesquisa em didática da matemática**. Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 5, n. 6, p. 13-17, 1998.

BÔAS, Claudia Santos do Nascimento Vilas; FILHO, Moacir Pereira de Souza. Epistemologia de Bachelard e a aprendizagem do conceito de ressonância. **Revista do professor de física**, v. 2, n. 2, p. 40-58, 2018.

BORDIN, Leandro; LYRA, Letícia Ribeiro; MENONCINI, Lucia. Reflexões acerca das etapas de identificação, fissuração e superação de obstáculos de aprendizagem no ensino de frações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 264-277, 2018.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 1. ed. 11. Reimpressão. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1994.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, **Théorie des situations didactiques**. Grenoble La Pensée Sauvage. p. 115-160, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), **Construction des savoirs, Obstacles et Conflits**. Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc. p.41-63, 1989.

CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.

COSTA, Alan Cesar da. **Referenciais históricos e metodológicos para o ensino de frações**. 2010. 64 f. Monografia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

COSTA, Celma Laurinda Freitas. **O pensamento científico em Bachelard.** Anais do VI Colóquio Internacional – Educação e Contemporaneidade. São Cristóvão – SE, 2012.

COSTA, Celma Laurinda Freitas. **Ciência e Educação em Bachelard**. 2015. 201 f. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia. 2015.

COSTA, Letícia Vieira Oliveira. **Números Reais no Ensino Fundamental**: Alguns Obstáculos Epistemológicos. 2009. 368 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

DEPOSITPHOTOS. **República árabe do Egito** – mapa vetorial. Disponível em: <https://br.depositphotos.com/similar-vectors/27382291.html?qview=13204269>. Acesso em: 15 ago. 2021.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Higino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Edinalva Rodrigues. **Ensino de Frações na Educação de Jovens e Adultos:** obstáculos didáticos e epistemológicos. 2014. 184 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

FILHO, Orencio Capestrano dos Anjos. **Propostas de aulas na Educação Básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais**. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

FILHO, Roberto Loscha. **Fração: história, teoria e aplicações.** 2017. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

GLAESER, Georges. **Epistémologie des nombres relatifs**. Recherches em Didactique Des Mathématiques, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

HOERNLE, August Frederich Rudolf. **Manuscrito Bakshali**. Internet Archive. Disponível em: <https://archive.org/details/onbakshalimanusc00hoeruoft/page/10/mode/2up>. Acesso em 15 ago. 2021.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos:** a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**.** 1. ed. v.1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A Noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008.

INSTITUTO VLADIMIR HERZOG. **Memórias da Ditatura:** Abertura lenta e anistia parcial. Disponível em: <http://memoriasdaditadura.org.br/abertura-lenta-e-anistia-parcial/>. Acesso em: 22 jul. 2021.

JAPIASSU, Hilton Peneira, **Introdução ao Pensamento Epistemológico**. Rio de Janeiro: Editor S.A. 1992.

JÚNIO, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 6º ano do Ensino Fundamental. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

LAVILLE, Christian; DIONNE, Jean. **A Construção do Saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 1-22, Rio Claro, 2008.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MARTINS, Josiane Bernini Jorente. **Relação entre Formação Docente e Desempenho de Alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental na Resolução de Problemas Matemáticos.** 2016. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Educação, Comunicação e Artes, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2016.

MEIER, Wander Mateus Branco. **Obstáculos didáticos na educação matemática**: o conceito de números racionais no 6º ano do ensino fundamental. 2012. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Educação, Comunicação e Artes, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2012.

MELO, Paulo Silva; LIBÂNEO, José Carlos. Obstáculos Epistemológicos e a formação de Conceitos. **Revista Vida de Ensino**. v. 3, n. 1, p. 45-56, Iporá, set./dez. 2017.
MIRANDA, Werventon dos Santos. **Erros e obstáculos**: os conteúdos matemáticos do ensino fundamental no processo de avaliação. 2007. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. 138 p. CAED-UFMG. Belo Horizonte. 2013.

MOROSINI, Marilia Costa. Estado de conhecimento e questões do campo científico. *In*: **Revista do Centro de Educação UFSM**. Santa Maria, v. 40, n. 1, p. 101-116, jan./abr. 2015.

NÓVOA, Antônio Sampaio da. O lugar da licenciatura. **Revista Ensino Superior**. São Paulo, ed. novembro/2016. Disponível em: <http://www.revistaensinosuperior.com.br/o-lugar-da-licenciatura/>. Acesso em: 20 mai. 2021.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

ROLIM, Carmem Lúcia Artioli. Cursos de Pedagogia: desafios e perspectivas para o ensino de matemática. **Revista da Faculdade de Educação**. Universidade do Estado do Mato Grosso, v. 21, n. 1, p. 83-98, jan./jul. 2014.

ROMEIRO, Iraji de Oliveira. **O movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído aos materiais didáticos na atividade de ensino**. 2017. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática** – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Jorge Zahar, Rio de Janeiro-RJ, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2015.

SILVA, Luzia Batista de Oliveira. **Psicanálise, poética, epistemologia e educação:** a contribuição de Gaston Bachelard. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SOUSA, Tairone Lima de. **Gaston Bachelard e a Educação.** 2018. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

TRINDADE, José Análio de Oliveira. **Os Obstáculos Epistemológicos e a Educação Matemática**. 1996. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

VASCONCELOS, Caubi. **Os obstáculos epistemológicos na formação do espírito científico de Gaston Bachelard**. 2013. 25 f. TCC. Universidade de Brasília, Planaltina, 2013.

VELANES, David. A filosofia da mecânica quântica de Gaston Bachelard. **Griot: Revista de Filosofia, Amargosa** – BA, v. 20, n. 3, p. 229-242, outubro, 2020.

VIZOLLI, Idemar. **Registro de Representação Semiótica no Estudo de Porcentagem**. 2001. 49 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.