UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THAÍS ALMEIDA AIRES

O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO KdV: UMA ABORDAGEM SOBRE EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO

Arraias (TO)
2021

THAÍS ALMEIDA AIRES

O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO KdV: UMA ABORDAGEM SOBRE EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO

Monografia avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário Dr. Sérgio Jacintho Leonor, curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Orientadora: Profª. Dra. Gisele Detomazi Almeida

Arraias (TO)
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A298p Aires, Thaís Almeida.

O problema de Cauchy associado à equação KdV: uma abordagem sobre existência, unicidade e estabilidade de solução . / Thaís Almeida Aires. – Arraias, TO, 2021.

43 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2021.

Orientadora : Gisele Detomazi Almeida

1. Equações Diferenciais. 2. Problema de Cauchy. 3. Boa colocação. 4. Estabilidade. I. Título

CDD 510

THAÍS ALMEIDA AIRES

O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO KdV: UMA ABORDAGEM SOBRE EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO

Monografia avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Dr. Sérgio Jacintho Leonor, curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Banca examinadora:

Profª. Dra. Gisele Detomazi Almeida. (orientador)

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Curso de Licenciatura em Matemática - Campus de Arraias

Prof. Dr. Paulo Alexandre Oliveira

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Curso de Engenharia de Alimentos - Campus de Palmas

Profª. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Curso de Licenciatura em Matemática - Campus de Arraias

Ao meu querido Felipe, eu dedico.
Sua presença durante essa jornada tornou tudo mais satisfatório. Mamãe te ama para sempre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus. Por Tua misericórdia e amor infinitos por mim. Tudo que sou, tudo que tenho e tudo que consegui realizar vêm do Senhor. É minha morada, meu alívio, minha esperança e meu refúgio. Obrigada por que é Pai e amigo em todas as horas.

Agradeço à minha mãe, Deuzelice. Sem sua paciência, cuidado e preocupação comigo e com o meu filho, nada do que eu tenho feito teria sido concluído. Obrigada por cuidar tão bem do Felipe todas as vezes que eu precisei me ausentar, por se preocupar com os detalhes que eu mal pude notar, por se esforçar tanto para permitir que eu alcance meus objetivos. Obrigada por escalar essa montanha comigo.

Agradeço à minha família. Obrigada Hemilly, Andressa e Amanda, primas tão chegadas quanto irmãs. Obrigada pai, irmãos, tias e tios. Obrigada Carlos Eduardo, meu parceiro. Pelo apoio e confiança que sempre depositaram em mim, mesmo conhecendo minhas falhas e defeitos, a fé de vocês em mim me fez acreditar que eu era capaz.

Agradeço à minha orientadora, profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida. Você sempre foi bem mais que uma profissional excelente, mas uma pessoa bondosa, amiga e conselheira. Obrigada por contribuir tanto para a minha maturidade intelectual e emocional, sabendo que este momento chegaria.

Agradeço aos professores do curso de Licenciatura em Matemática e à UFT. Especialmente aos professores Dailson, Eudes, Ivo, Kaled, Keidna e Mônica, obrigada pela preocupação com a formação dos seus alunos e por irem sempre além do esperado para promover aprendizagem. Obrigada ao campus de Arraias por todas as possibilidades e oportunidades oferecidas, cada rica experiência que tive contribuiu para formar quem sou hoje.

Agradeço às minhas amigas. Ana Carolina, Carol, Beth, Geovanna, Lidy, Emily, obrigada pelas orações, pelo cuidado, pela confiança. Vocês também me permitiram acreditar.

Agradeço à minha Igreja. À toda a minha família na fé da Igreja Presbisteriana de Campos Belos, muito obrigada pelas orações, interseções e cuidado.

Finalmente, agradeço ao meu filho, Felipe. Tudo que faço é por você. Obrigada por ser,

mesmo sem imaginar, meu propósito, minha força e minha alegria. É por você que anseio todas as coisas grandes.

"Os mais fortes de todos os guerreiros são estes dois: Tempo e Paciência."

(Liev Tolstói)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e estabilidade orbital do problema de Cauchy associado à equação KdV. É um estudo exploratório, embasado principalmente nas teorias de Tenenbaum e Pollard (1963) e Grillax, Shatah e Strauss (1987). A Equação de Korteweg-de Vries (KdV) se caracteriza como uma das mais importantes equações diferenciais dispersivas não lineares, sendo esta uma equação da onda que gerou outras tantas e tantas teorias, foi foco dos nossos estudos com a inteção de revisitar respostas à questões como: O que esta equação modela? O Problema de Cauchy associado à ela está bem colocado? Suas soluções são orbitalmente estáveis? Nesta busca, entendemos que todos estes resultados estão estabelecidos e os métodos utilizados vem sendo aplicados em outras importantes equações. A nível de um curso de graduação, destacamos a presença de Leis de Conservação como Energia e Massa, e também do uso da Teoria do Cálculo Variacional, num problema de minimização para a obtenção de estabilidade orbital de suas soluções.

Palavras chave: Korteweg-de Vries. Boa colocação. Estabilidade orbital. Problema de Cauchy. Equação diferencial parcial.

ABSTRACT

In this work, we study the existence, uniqueness and orbital stability of the Cauchy problem associated with the KdV equation. It is an exploratory study, based mainly on the theories of Tenenbaum and Pollard (1963) and Grillax, Shatah and Strauss (1987). The Korteweg-de Vries Equation (KdV) stands out as one of the most important nonlinear dispersive differential equations, being this a wave equation that generated so many other theories, it was the focus of our studies with the intention of revisiting answers to the questions like: What does this equation models? Is the Cauchy Problem associated with it well posedness? Are your solutions orbitally stable? In this search, we understand that all these results are included and the methods used relate to other important equations. At the level of an undergraduate course, we highlight the presence of Conservation Laws such as energy and mass, and also the use of the Variational Calculus Theory, in a minimization problem to obtain orbital stability for their solutions.

Keywords: Korteweg-de Vries. Good placement. Stability. Cauchy's problem. Partial differential equation.

LISTA DE ABREVIAÇÕES

Capes: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

EDO: Equação Diferencial Ordinária.

EDP: Equação Diferencial Parcial.

GSS: Grillakis, Shatah e Strauss (1987) sobre a Teoria da Estabilidade.

KdV: Equação Korteweg-de Vries.

PVI: Problema de Valor Inicial.

TEU: Teorema de Existência e Unicidade.

UFT: Universidade Federal do Tocantins.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

John Scott Russel (1808-1882), engenheiro naval britânico, passou parte da sua vida estudando as particularidades dos sólitons, fenômeno do qual ele mesmo observou e documentou. Ele estava observando o movimento de sua balsa, sendo puxada por dois cavalos, um em cada lado do estreito Canal Union, próximo a Edimburgo, na Escócia, quando a sentiu parar bruscamente.

Russel vislumbrou a onda solitária passar para a frente de sua embarcação e continuar seu caminho pelo canal, sem notar mudança alguma de velocidade ou forma. Ele, então, a seguiu por mais de três quilômetros a cavalo, em uma velocidade de aproximadamente 15 km/h. Diante disto, ele se fascinou. Russel descreve,

> Este é um fenômeno belíssimo e extraordinário: quando o vi pela primeira vez foi o dia mais feliz de minha vida. Nunca ninguém tinha tido a sorte de observá-lo antes, ou, pelo menos, entender seu significado. Hoje em dia é conhecido como *onda solitária de translação*. Ninguém até então tinha imaginado uma onda solitária como algo possível. (...) É isso que uma elevação de água faz: ela não permanece onde está, mas viaja a grande distância. (RUSSEL (1844) *apud* CHALUB e ZUBELLI, 2005, p. 41)

As ondas solitárias, hoje conhecidas por *sólitons*, são meias-ondas, isto é, ondas que só se propagam acima da linha de repouso do canal, que vagam em canais rasos sem deformação por um espaço razoável. A partir de diversos experimentos laboratoriais, Russel (1844) desenvolveu uma série de experimentos que o levaram a produzir estas ondas "em série" e conseguiu estabelecer a seguinte relação sobre a velocidade de propagação c destes *sólitons*:

$$c^2 = g(h+a), \tag{1.1}$$

onde a é a altura da onda em relação a linha de repouso da água (amplitude), h é a profundidade do canal e g é a aceleração da gravidade. Esse forte resultado gerou, por sua vez, muitas discussões e controvérsias. A equação (1.1) contradizia outra equação já existente, de George B. Airy, um conhecido dinamista de fluidos, que se ateve a estudos puramente teóricos (SANTANA, 2019).

Russel faleceu em 1882 e não vivenciou a concretização dos seus estudos e solução do problema, que só aconteceu 13 anos depois, com o trabalho de Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) e Gustav de Vries (1866-1934).

Segundo Araújo (2018), a equação Korteweg-de Vries foi batizada em homenagem ao par de matemáticos que modelaram-na e foi descrita pela primeira vez em 1895, com base nas observações de John Scott Russel sobre os sólitons.

Essa monografia, portanto, objetiva estudar resultados e propriedades importantes da equação Korteweg-de Vries, ou simplesmente KdV, daqui em diante. Estas propriedades incluem a existência e unicidade do Problema de Cauchy associado, isto é, apresentaremos resultados que verificam que o problema é bem posto em um determinado domínio. Abordaremos, ainda, estudos sobre a estabilidade da solução.

A equação KdV é dada por

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{1.2}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função suave que representa a superfície da onda, x é a variável espacial e $t \geq 0$ diz respeito ao tempo.

Em 1965, Kruskal e Zabusky, os mesmos que denominaram as ondas solitárias por *sólitons*, observaram uma importante propriedade das ondas do tipo KdV. Esta propriedade permite mostrar que a energia pode se propagar em pacotes localizados sem se dispersar. Por isso, Araújo (2018) recorda que a KdV é uma equação matemática que se tornou muito útil aos estudos de equações com não linearidade simples e efeitos dispersivos.

O interesse em estudar a equação KdV surge associado aos primeiros contatos com as equações diferenciais, em particular, com as equações diferenciais parciais. A equação KdV modela o movimento de ondas em águas rasas (canais), e a partir desta surgem outras equações tipo KdV, as quais modelam importantes fenômenos físicos, por exemplo, as ondas em linhas de transmissão.

Considerando que a equação é originária de uma situação física associada ao tempo e ao espaço, faz sentido questionar sobre certas condições iniciais, se é possível garantir a existência de solução para o problema e, ainda, se tal solução é única. Caso isso aconteça diremos que o problema é bem posto, ou bem colocado, no domínio considerado.

Uma vez provada a boa colocação do problema de Cauchy, um questionamento natural é se a solução encontrada é estável, isto é, se os resultados permanecem próximos mesmo diante de pequenas pertubações na onda em questão.

Além do acima descrito, o estudo de equações diferenciais parciais dispersivas, onde a KdV é um dos principais exemplos, é foco de muitos estudos por pesquisadores no mundo todo, nos dando base para continuar nossos trabalhos em um curso de pós-graduação.

Tendo isso em vista, essa pesquisa visa explorar todo contexto que envolve o problema de Cauchy associado à equação diferencial parcial Korteweg-de Vries (KdV), incluindo a relevância física do problema, bem como a existência, unicidade e estabilidade de solução.

Portanto, serão abordados aqui, os eventos históricos que permeiam o estudo da equação KdV para então apresentarmos a modelagem de propagação de uma onda longa em águas rasas. Somente após isso, serão determinadas a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy associado à KdV e posteriormente, será brevemente analisada a estabilidade dessa solução.

No que diz respeito à metodologia, este projeto se trata de uma pesquisa exploratória que se atém a produzir certa familiaridade com o problema e contribuir para o avanço da ciência a partir da reunião e análise dos resultados existentes.

No próximo capítulo, serão abordados de forma detalhada objetos matemáticos importantes para a construção do problema que iremos explorar.

No terceiro capítulo, será apresentada a prova da boa colocação do problema de Cauchy para a equação KdV, isto é, serão demonstradas a existência e a unicidade da solução obtida nessas condições. Além disso, serão expostas aplicações notáveis da equação.

No quarto capítulo, há um breve estudo histórico sobre a estabilidade e a prova da estabilidade orbital da solução.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O capítulo que se inicia tem por objetivo apresentar os principais conceitos, definições e teoremas que são essenciais ao estudo da equação KdV. É importante salientar que não é de nosso interesse demonstrar os resultados aqui apresentados, mas indicaremos onde encontrar as provas.

2.1 Equações Diferenciais

A partir dos esclarecimentos feitos por Tenenbaum e Pollard (1963), é possível compreender que a vida natural é feita de processos, os quais dependem de entidades que estão sempre sujeitas a mudanças. A área de um círculo muda com o comprimento do raio, a posição da Terra muda com o tempo, as cheias e vazantes de um rio mudam com a quantidade de chuvas ou derretimento de geleiras, o peso de um objeto muda com a aceleração da gravidade presente no local. Diversos fenômenos podem ser descritos seguindo essa mesma linha de pensamento.

Essa relação de dependência entre diferentes elementos é um conhecimento primitivo. Em síntese, pode-se afirmar que qualquer resultado científico e avanço tecnológico já alcançados hoje só foram possíveis graças a capacidade do homem de considerarem todas as mudanças que podem vir a ocorrer.

Na matemática, essas entidades mutáveis são chamadas de variáveis. Algumas dessas, por sua vez, mudam constantemente e em grande escala, então é mais que necessário considerar também a taxa de variação de uma variável com respeito a outra. Essa taxa é chamada de derivada. Para realizar ou prever certas situações práticas, surge o interesse dos homens em modelar processos que envolvem taxas de variação. As equações que eles escrevem, combinando essas variáveis e suas derivadas são chamadas de equações diferenciais (FLEMMING, 2010).

Estas, por sua vez, são classificadas considerando dois aspectos importantes. Se, na equação diferencial, as derivadas da função desconhecida dependem de apenas uma variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Entretanto, se as derivadas da função abrangem diversas variáveis independentes, isto é, derivadas parciais, é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Definição 2.1

Equação Diferencial Ordinária (EDO): *Seja y uma função de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma EDO é uma equação matemática envolvendo x, a função y e uma ou mais de suas variáveis, contanto que estas envolvam apenas um elemento $x_i \in x$.*

De uma forma geral, é assim que definimos uma equação diferencial ordinária. Alguns exemplos de EDOs são:

$$y' = e^x. \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0. \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{t - x^2}. \tag{2.3}$$

Definiremos, agora, as EDPs com base nos estudos de Iório Jr. e Iório (1988).

Definição 2.2

Equação Diferencial Parcial (EDP): *Uma EDP é uma equação matemática que contém uma função desconhecida de duas ou mais variáveis independentes e derivadas parciais desta função com respeito as variáveis independentes. A forma geral de uma EDP em n variáveis independentes x_1, x_2, ... , x_n é*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u, \partial^2{}_{x_1 x_1} u, ..., \partial^2{}_{x_1 x_n} u, ..., \partial^k{}_{x_n{}^k} u) = 0,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, em que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determinar.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem é chamada parte principal, ela determina a ordem da equação e, em muitos casos, determina as propriedades principais da solução.

Além disso, ela é dita linear se é de primeiro grau em y (ou u) e em todas as derivadas parciais que ocorrem na equação. Caso contrário, a equação diferencial é dita não linear.

Existem, ainda, equações não lineares que tem parte principal linear, nestes casos, a equação é chamada de semi-linear.

Uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo.

Estabelecidas as definições e características principais, vamos definir uma solução para essas equações, segundo Tenenbaum e Pollard (1963) e Iório Jr. e Iório (1988), ligeiramente adaptadas para alcançar melhor os objetivos deste trabalho.

Definição 2.3

Solução de uma equação diferencial ordinária: *Seja $y = f(x)$ uma função de $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f(x_i)$ é uma solução explícita ou simplesmente uma solução de uma equação diferencial envolvendo x_i, $f(x_i)$ e suas derivadas, se ela satisfaz a equação para cada x_i em Ω, ou seja, se substituirmos y por $f(x_i)$, y' por $f'(x_i)$ e y'' por $f''(x_i)$, ..., $y^{(n)}$ por $f^{(n)}(x_i)$, a equação diferencial se reduz a uma identidade em x_i.*

Formalmente, nós dizemos: uma função $f(x)$ é solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.4}$$

se

$$F[x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)] = 0 \tag{2.5}$$

para todo x em Ω.

Definição 2.4

Solução clássica de uma equação diferencial parcial: *Considerando uma EDP de ordem k em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a solução clássica é uma função $u \in C^k(\Omega)$ que satisfaz a equação em todos os pontos de Ω.*

Vamos utilizar, como exemplo, a equação de onda homogênea a uma dimensão espacial,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

A solução geral de (2.6) é da forma

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{2.7}$$

onde $f,\ g \in C^2(\mathbb{R})$ são arbitrárias.

A prova de que todas as soluções de EDPs são da forma descrita acima pode ser encontrada em (IÓRIO Jr., IÓRIO, 1988, p. 5-6).

2.2 Problema de Cauchy

Ao estudar a teoria de integração em Cálculo, aprendemos a resolver equações diferenciais simples da forma $y_0 = f(x)$. Por exemplo, a solução da equação (2.1), obtida a partir de uma simples integração em ambos os lados da igualdade, é

$$y = e^x + c, \tag{2.8}$$

onde c pode assumir qualquer valor numérico. Portanto, a equação (2.1) não admite apenas uma solução, mas uma família infinita de soluções do tipo (2.8), curvas congruentes que se diferem apenas pelo valor de c, o qual chamamos de constante de integração.

De acordo com Lima (2013), uma maneira de selecionarmos uma solução $u(x,t)$ particular de um conjunto infinito de soluções, consiste em prescrevermos uma curva λ no espaço xtz que deve estar contida na superfície integral $S = \{z; z = u(x,t)\}$. Seja λ representada parametricamente por

$$x = f(s), t = g(s), z = h(s),$$

estamos interessados numa solução da equação proposta, tal que

$$h(s) = u(f(s), g(s)),$$

para todo s. Este problema é chamado de Problema de Cauchy. Estaremos satisfeitos com uma solução local u do nosso problema definida para x, t próximos dos valores $x_o = f(s_o), t_o = g(s_o)$.

Em muitas situações, bem como na equação KdV, a segunda variável refere-se ao tempo, por isso o problema de Cauchy é chamado de problema de valor inicial (PVI). Em geral, o PVI é fornecido da seguinte forma

$$\begin{cases} F(\partial_x, \partial_t)u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \ u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

É valido ressaltar que um Problema de Cauchy é dito bem-posto em um domínio conveniente, se neste conjunto conseguimos provar a existência de solução para a equação (2.9) e, satisfazendo a condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, essa solução seja única.

2.3 Teorema de Existência e Unicidade

Infelizmente, são poucas as equações diferenciais cuja solução pode ser expressa implícita ou explicitamente em termos de funções elementares. Mesmo as equações mais simples de primeira ordem, na maioria dos casos, não têm solução elementar e, por isso, nem sempre é fácil encontrá-la.

Tenembaum e Pollard (1963) mostram que, nestes casos, existem teoremas que nos dão, sob hipóteses apropriadas, as respostas para algumas perguntas: a equação em questão tem uma família de soluções de primeiro grau? Se sim, existe uma solução particular que satisfaça uma condição inicial dada? Caso exista, essa solução particular é única? Este resultado importantíssimo é chamado de Teorema de Existência e Unicidade.

É importante ressaltar, contudo, que este resultado não nos fornece qualquer informação sobre a solução, portanto, não será possível determiná-la e nem afirmar que é uma solução elementar. Para obter essas informações, os cálculos deverão ir além. Tudo que o teorema em questão nos assegura é que, desde que o problema de Cauchy satisfaça as hipóteses do mesmo, então existe uma única solução particular para a equação e o valor inicial fornecidos.

A seguir estarão descritos o Teorema de Existência e Unicidade a Condição de Lispchitz, necessária para formulação do mesmo, segundo Tenenbaum e Pollard (1963).

Definição 2.5

Condição de Lipschitz: *Se $f(x,y)$ é uma função de x e y em uma região S tal que, para quaisquer dois pontos (x,y) e $(x,\bar{y})$ em S,*

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq N|(y-\bar{y})|,$$

onde N é uma constante positiva, então dizemos que $f(x,y)$ satisfaz a Condição de Lipschitz em S.

Teorema 2.6

Teorema de Existência e Unicidade: *Seja $f(x,y)$ uma função limitada e contínua de x e y em uma região S do plano xy, e seja (x_0,y_0) um ponto de S. Em S, verifique se a função f satisfaz a condição de Lipschitz. Então, existe um intervalo*

$$I_0 : |x-x_0| < h, h > 0,$$

em que há uma única função contínua $y(x)$, com derivada contínua em I_0, que satisfaça a equação diferencial

$$y' = f(x,y)$$

e a condição inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

A demonstração do Teorema (3.1) pode ser encontrada em Tenenbaum e Pollard (1963, p. 734-740). Este mesmo resultado é descrito da seguinte forma por Boyce e Di Prima (2002).

Teorema 2.7

Teorema de Existência e Unicidade: *Suponha que a função f e a derivada parcial f_y são contínuas em uma região $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0,y_0). Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Vamos definir, neste momento, os conceitos de métrica e espaço métrico que serão muito citados posteriormente, segundo Lima (1977).

Definição 2.8

Métrica e Espaços Métricos: *Dado um conjunto M, uma métrica deste conjunto é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x,y \in M$ um número $d(x,y)$, que chamamos de distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x,y,z \in M$:*

1. $d(x,x) = 0$;

2. *Se* $x \neq y$ *então* $d(x,y) > 0$*;*

3. $d(x,y) = d(y,x)$*;*

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdade triangular).*

Diante disso, um **espaço métrico** *é um par* (M,d)*, onde* M *é um conjunto e* d *uma métrica em* M*. Na maioria dos casos, diz-se apenas "o espaço métrico* M*", deixando subentendida qual a métrica que está sendo considerada.*

Teorema 2.9

Teorema do Ponto Fixo de Banach: *Sejam* M *um espaço métrico completo, onde* $M \neq \varnothing$*, e* $f : M \to M$ *uma contração. Então,* f *possui um único ponto fixo em* M*, isto é, existe um único* $x \in M$ *tal que* $f(x) = x$*.*

Este é um resultado clássico e sua prova pode ser encontrada em Brezis (1984).

2.4 Espaços Funcionais

A seguir estão descritos alguns espaços de funções que serão necessários no decorrer desse trabalho, uma vez que em muitos casos, ao impor condições no domínio, deduzimos e provamos mais facilmente alguns resultados.

Chamamos de $C^k(U)$ o conjunto que contém todas as funções de $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis e sua k-ésima derivada é contínua. Do mesmo modo, o conjunto que contém todas as funções de $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis será denotado por $C^\infty(U)$.

A seguir, vamos definir os espaços $L^p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definição 2.10

Espaço $L^p(\mathbb{R})$***:*** *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Denotaremos por* $L^p(\mathbb{R})$ *o conjunto de todas as funções* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensuráveis, tais que*

$$||f||_{L^p} = ||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

o número $||f||_p$ *é a norma de* f. *Se* $p=\infty$, *então*

$$||f||_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Segue, portanto, que L^p *é um espaço de Banach.* L^p *é um espaço de Hilbert se, e somente se,* $p=2$. *Este resultado pode ser encontrado em Bresis (1984).*

Nos espaços $L^p(\mathbb{R})$ temos as seguintes desigualdades:

Lema 2.11 *Considere* $p,q \geq 1$ *e* $\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=1$.

(i) ***Desigualdade de Hölder:*** *Sejam* f *e* $L^p(\mathbb{R})$ *e* g *e* $L^q(\mathbb{R})$. *Então* $fg \in L^1(\mathbb{R})$ *e*

$$||fg||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R})}\ ||g||_{L^q(\mathbb{R})}. \tag{2.10}$$

(ii) ***Desigualdade Integral de Minkowski:***

$$\left\{\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|dx\right)^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} dx. \tag{2.11}$$

(iii) ***Desigualdade de Young:*** *Dados* $a,b>0$ *tem-se que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q. \tag{2.12}$$

Além disso, para todo $\varepsilon>0$, *tem-se que existe* $C_\varepsilon>0$ *tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q. \tag{2.13}$$

As demonstrações das desigualdades descritas acima podem ser encontradas nos trabalhos de Adams (1975) e Bresis (1984).

Definição 2.12

Espaço de Schwartz: *Denotado por* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *é a coleção das funções* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ *infinitamente diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *tais que, para quaisquer que sejam* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^+$, *existe uma constante* $C_{\alpha,\beta}$ *com*

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta},\quad \forall x\in\mathbb{R}, \tag{2.14}$$

onde $f^{(\beta)}$ *é a* β*-ésima derivada de* f.

Por meio dessas definições, podemos notar que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$|x^2 f^{(\beta)}(x)| \leq C_{2,\beta},$$

e, portanto,

$$|f^{(\beta)}(x)| \leq \frac{C_{2,\beta}}{x^2}.$$

Com isso, podemos concluir que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ com $p \in [1,+\infty]$.

Proposição 2.13 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então a função $g(x) = x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ também está em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração: A função g é infinitamente diferenciável e, para quaisquer que sejam $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^+$, $x^{\alpha'} f^{(\beta')}(x)$ é uma soma finita de termos da forma $x^n f^{(m)}(x)$, logo é limitada. □

Definição 2.14

Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: *Considerando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, chamamos de transformada de Fourier de f a função $\widehat{f}(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad com\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Teorema 2.15 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, obtemos

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \widehat{f}^{(\beta)}(\xi) &= (-i)^{\beta+\alpha} (i\xi)^\alpha (x^\beta f)^\wedge(\xi) \\
&= (-i)^{\beta+\alpha} \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (x^\beta f)^\wedge(\xi) \right) \\
&= \widehat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

onde $g = (-i)^{\beta+\alpha} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^\beta f)$. Então, vemos que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, logo $\widehat{g}$ é limitada, isto é, $\xi^\alpha \widehat{f}^{(\beta)}(\xi)$ é limitada, o que prova que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

A definição a seguir diz respeito a um dos espaços de funções mais amplos dos quais vamos tratar aqui. Suas propriedades são de grande importância para alcançar os objetivos de nosso trabalho.

Definição 2.16

Os espaços de Sobolev: *Sejam $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz e $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o espaço das distribuições temperadas. Para $s \in \mathbb{R}$, os espaços Sobolev (do tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:*

$$H^s := H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1+\xi^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \tag{2.16}$$

cuja norma é

$$\|f\|_{H^s} := \|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ é de Hilbert quando munido do produto interno,

$$< f, g >_s = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Em particular, podemos concluir que $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. Para o caso de $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|f\|_s^2 = \sum_{j=0}^{s} \left\|\partial_x^j f\right\|_0^2,$$

onde $\|\cdot\|_0$ denota a norma em $L^2(\mathbb{R})$.

Agora, vamos enunciar algumas desigualdades importantes para os resultados de boa colocação feitos posteriormente.

Para tanto, considere $W(t)$ o operador de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$W(t)u_0(x) := (S_t * u_0)(x),$$

onde

$$S_t(x) = (e^{i\xi^3 t})^{\check{}}(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^3 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Teorema 2.17 *Se $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ então*

(i)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|u_0\|_{L^2}. \tag{2.17}$$

(ii)

$$\left\| D_x^{1/4} W(t)u_0 \right\|_{L_t^4 L_x^\infty} \leq c\|u_0\|_{L^2}. \tag{2.18}$$

Estas desigualdades estão provadas em Santos (2009).

Lema 2.18 *Seja $s > 3/4$. Então, para qualquer $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e qualquer $\rho > 3/4$,*

$$\|W(t)u_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq c(1+T)^\rho \|u_0\|_{s,2}. \tag{2.19}$$

Esta demonstração pode ser encontrada em Kenig, Ponce e Vega (1993).

3 A EQUAÇÃO KdV: LEIS DE CONSERVAÇÃO E BOA COLOCAÇÃO

Neste capítulo, a demonstração de boa colocação local e global para a Equação KdV. Estes resultados são imprescindíveis para os estudos posteriores que envolvem a estabilidade de solução da equação.

Nas seguintes seções serão estabelecidas algumas leis de conservação, segundo Barbosa (2009), e em seguida iremos propor uma solução formal para a KdV utilizando a Transformada de Fourier para assim, no desfecho do capítulo, provarmos a boa colocação do problema.

3.1 A Equação KdV

O intuito do trabalho é estudar e apresentar resultados de boa-colocação para a equação Korteweg-de Vries, dada por

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{3.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Assim, o Problema de Cauchy associado à KdV é da forma

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, & \\ u(x,0) = \ u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Tal equação não linear modela a propagação de ondas longas em águas rasas, cuja velocidade de fase atinge um máximo simples para ondas de comprimento infinito. A KdV está presente na descrição de inúmeros fenômenos da mecânica dos fluidos e física de partículas, entre outros (SANTANA, 2019).

Segundo Almeida (2021), a equação KdV e a equação de Schrödinger não linear são as mais importantes equações não lineares dispersivas. Entre as propriedades notáveis da KdV estão a presença de simetrias, com destaque a simetria por translações, e a presença de leis de conservação, com ênfase nas leis de conservação de massa e energia. Estas propriedades são essenciais para o desenvolvimento das teorias de estabilidades existentes, amparadas no cálculo variacional.

3.2 Leis de Conservação

Ao longo dos anos, os matemáticos perceberam que muitas características da solução da KdV podem ser obtidas apenas estudando suas propriedades algébricas da equação. Para começar a estudar essas propriedades, que chamamos de quantidades conservadas, vamos relembrar a equação KdV:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Agora, conforme os resultados de Barbosa (2009), vamos reescrevê-la desta forma:

$$u_t = \partial x\left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right). \tag{3.4}$$

Nos interessa as soluções que tendem a zero quando a variável independente tende ao infinito juntamente com as suas derivadas. Integrando a equação (3.4) sobre a reta e lembrando que $u \to 0$, bem como todas as suas derivadas, quando $x \to +\infty$, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u\, dx = \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right)\Bigg|_{x=\infty}^{x=-\infty} = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u\, dx = A_1, \tag{3.5}$$

onde A_1 é uma constante.

Ao longo do fluxo descrito pela KdV, $\int_{\mathbb{R}} T_1\, dx$ não se altera (com $T_1 = u$), deste modo, a expressão acima é uma grandeza conservada. Sob o olhar da Física, isso significa que a massa não se altera no percurso, portanto, temos uma expressão para conservação da massa.

Vamos multiplicar a equação (3.3) por u, afim de encontrar outras grandezas conservadas que estejam associadas a entidades físicas.

$$\partial t\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\partial x\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right).$$

Integrando sobre a reta e considerando que $u \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, assim como todas as derivadas de u, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2\, dx = -\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2\, dx = A_2, \tag{3.6}$$

onde A_2 é uma constante.

Escrevendo $T_2 = u^2$, podemos ver que $\int_{\mathbb{R}} T_2 \, dx$ não se altera e a partir deste resultado, obtemos uma segunda lei de conservação que, desta vez, está associada a conservação do momento.

Agora, vamos multiplicar a equação (3.3) por $3u^2$,

$$3u^2 u_t + 3u^2 u_{xxx} + 3u^3 u_x = 0. \tag{3.7}$$

Agora, derivando a equação (3.3) em relação a x e, em seguida, multiplicando-a por $6u_x$, temos

$$6u_x u_{tx} + 6u_x u_{xxxx} + 6u_x^3 + 6u_x u u_{xx} = 0. \tag{3.8}$$

Subtraindo (3.7) de (3.8), obtemos

$$\partial_t \left((u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3 \right) = -\partial_x \left(-\frac{3}{4}u^4 + 6u_x u_{xxx} - 6u_{xx} + 6uu_x^2 - 3u^2 u_{xx} \right). \tag{3.9}$$

A partir disto, obtemos $T_3 = (u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3$ e a última equação é uma nova lei de conservação para a KdV, deste vez associada a energia.

A título de curiosidade, sempre que tivermos uma equação do tipo

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

e condições de contorno apropriadas para o caso de $X \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, conseguimos encontrar uma lei de conservação, que pode ser escrita na forma $\int_{\mathbb{R}} T \ dx = A$, onde A é uma constante.

Somando a estas que acabamos de deduzir, foram encontradas onze leis de conservação para a equação KdV, sendo que as outras oito foram provadas em Miura, Gardner e Kruskal (1968). Hoje, já foi provado que a KdV possui infinitas leis de conservação.

3.3 Boa Colocação Local para o Problema de Cauchy associado à equação KdV

Nesta seção iremos expor um dos mais importantes resultados deste trabalho, a boa colocação local para o problema de Cauchy associado à equação KdV (3.2) em espaços de

Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ com $s > 3/4$. Mais precisamente, iremos expor a prova do seguinte teorema, segundo Santos (2009):

Teorema 3.1 *Consideremos o problema (3.2) e* $s > 3/4$*. Então para cada* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(\|u_o\|_{s,2}) > 0$ *(com* $T(\rho) \to \infty$ *para* $\rho \to 0$*) e uma única solução* $u(t)$ *de (3.2) que satisfaça*

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})), \tag{3.10}$$

$$\partial_x u \in L^4([-T,T] : L^\infty(\mathbb{R})), \tag{3.11}$$

$$\left\| D_x^s \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{3.12}$$

e

$$\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty. \tag{3.13}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0,T)$*, existe uma vizinhança* V *de* u_0 *em* $H^s(\mathbb{R})$ *tal que a função* $\bar{u}_0 \to \bar{u}(t)$ *de* V *sobre a classe definida pelas equações (3.10)-(3.13) com* T' *no lugar de* T *é Lipschitz.*

Antes de iniciarmos a demonstração, faremos uma motivação para o funcional. Vamos considerar a Transformada de Fourier com respeito a variável x no sistema (3.2):

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) + \widehat{u\partial_x u}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} \tag{3.14}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.14) pelo fator de integração $e^{(i\xi)^3 t}$, obtemos

$$\widehat{u_t} e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0,$$

onde $f(x,t) = u(x,t)\partial_x u(x,t)$ é uma constante.

Dessa equação, obtemos a relação

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}) = -\widehat{f}(t) e^{(i\xi)^3 t}.$$

Ao integrar em relação a variável t, obtemos a igualdade

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u_0} e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt'.$$

Então, aplicando a transformação inversa, temos

$$u(t) = (\widehat{u_0} e^{i\xi^3 t})^{\vee} - \int_0^t \left(e^{i\xi^3 (t-t')} \widehat{f}(t') \right)^{\vee} dt'.$$

Observe que $W(t)u_0 = (\widehat{u_0} e^{i\xi^3 t})^{\vee}$ e $\left(e^{i\xi^3 (t-t')} \widehat{f}(t') \right)^{\vee} = W(t-t')f(t') = (u\partial_x u)$, logo temos

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(u\frac{\partial u}{\partial x} \right)(t')\, dt'. \tag{3.15}$$

Isto significa que se u é uma solução do problema de Cauchy associado à equação KdV (3.2), então u satisfaz a equação integral (3.15). Neste instante, portanto, vamos demostrar o Teorema (3.1), segundo Santos (2009).

Demonstração: Consideremos um intervalo $[-T,T]$ e uma função

$$w : \mathbb{R} \times [-T,T] \to \mathbb{R}.$$

Para simplificar as notações, considere as seguintes normas

$$\lambda_1^T(w) := \max_{t \in [-T,T]} \|w(t)\|_{s,2}, \tag{3.16}$$

$$\lambda_2^T(w) := \left(\int_{-T}^T \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(.,t) \right\|_\infty^4 dt \right)^{1/4}, \tag{3.17}$$

$$\lambda_3^T(w) := \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w \right\|_{L_x^\infty L_T^2} = \sup_x \left(\int_{-T}^T \left| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w(x,t) \right|^2 dt \right)^{1/2}, \tag{3.18}$$

e

$$\lambda_4^T(w) := (1+T)^{-\rho} \|w\|_{L_x^2 L_T^\infty},\ para\ \rho > 3/4, \tag{3.19}$$

$$\Lambda^T(w) := \max_{j=1,\dots,4} \lambda_j^T(w), \tag{3.20}$$

e também o espaço métrico completo

$$X_T := \{ w \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}) / \Lambda^T(w) < \infty \}, \tag{3.21}$$

com a métrica

$$d(w_1,w_2) := \Lambda^T(w_1 - w_2).$$

Primeiramente, observe que $X_T \neq \varnothing$. Portanto, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, então, utilizando as propriedades de grupo e as desigualdades (2.18), (2.17) e (2.19), temos que

$$\lambda_1^T(W(t)u_0) = \|u_0\|_{s,2}, \tag{3.22}$$

$$\lambda_2^T(W(t)u_0) \leq c\|u_0\|_{s,2}, \tag{3.23}$$

$$\lambda_3^T(W(t)u_0) \leq c\|u_0\|_{s,2}, \tag{3.24}$$

e

$$\lambda_4^T(W(t)u_0) = c\|u_0\|_{s,2}. \tag{3.25}$$

Os resultados acima estão esmiuçados em Santos (2009). Assim, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, então para qualquer $T > 0, W(t)u_0 \in X^T$ com $\Lambda^T(W(t)u_0) = \max_{j=1,\ldots,4} \lambda_j^T(W(t)u_0)$ dependendo de $\|u_0\|_{s,2}$, mas não de T e, portanto, $X^T \neq \varnothing$.

Agora, o objetivo principal é mostrar que existe $T = T(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ e $a = a(\|u_0\|_{s,2})$ tais que se $v \in X_T^a$ então $u = \phi(v) \in X_T^a$ e $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração. Uma vez provado isto, do Teorema do Ponto Fixo de Banach (2.9) segue-se, portanto, que existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi(u)_{u_0} = u$, isto é,

$$u(t) = W(t)u_0 \int_0^t W(t-t')\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt'.$$

Para isto, denotemos por $u = \phi(v) = \phi_{u_0}(v)$ a solução do PVI linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v\partial_x v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.26}$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $X_T^a := \{w \in X_T / \Lambda^T(w) \leq a\}$.

Agora, vamos considerar a seguinte equação integral do PVI (3.26):

$$u(t) = W(t)u_0 \int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'. \tag{3.27}$$

Neste momento, vamos estabelecer alguns Lemas que serão úteis mais adiante, ainda considerando u e v como definidos no PVI (3.26). As demonstrações de cada um destes resultados podem ser encontradas em Santos (2009).

Lema 3.2

$$\left\| D_x^s \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\| v \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq c(1+T)^{\rho} (\Lambda^T(v))^2. \tag{3.28}$$

Lema 3.3

$$\lambda_1^T(u) \leq \|u_0\|_{s,2} + \int_{-T}^{T} \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{s,2} (t') dt'. \tag{3.29}$$

Lema 3.4

$$\lambda_2^T(u) \leq c \left[\|u_0\|_{s,2} + \int_{-T}^{T} \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{s,2} (t') dt' \right]. \tag{3.30}$$

Lema 3.5

$$\lambda_3^T(u) \leq c \left[\|u_0\|_{s,2} + \int_{-T}^{T} \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{s,2} (t') dt' \right]. \tag{3.31}$$

Lema 3.6

$$\lambda_4^T(u) \leq c \left[\|u_0\|_{s,2} + \int_{-T}^{T} \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{s,2} (t') dt' \right]. \tag{3.32}$$

Agora, tomando o máximo de todos os $\lambda_i^T(u)$ (3.20) e utilizando a desigualdade de Minkowski (2.11) e as desigualdades (3.29) – (3.32) descritas nos Lemas anteriores, segue-se que

$$\Lambda^T(u) \leq c\|u_0\|_{s,2} + cT^{1/2}(1+T)^{\rho} (\lambda^T(v))^2. \tag{3.33}$$

Neste instante, escolhemos a e $T > 0$ tais que

$$a = 2c\|u_0\|_{s,2}, \tag{3.34}$$

com T satistazendo

$$4cT^{1/2}(1+T)^{\rho} a < 1. \tag{3.35}$$

Desta escolha acima, temos que

$$\begin{aligned} \Lambda^T(\phi(v)) &= \Lambda^T(u) \\ &\leq c\|u_0\|_{s,2} + cT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2 \\ &\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} \cdot a^2 = \frac{3a}{4} \leq a. \end{aligned}$$

Deste modo, $\phi(v) = \phi_{u_0}(v) \in X_a^T$ desde que $v \in X_a^T$. Portanto, comcluímos que $\phi : X_a^T \to X_a^T$.

Prosseguindo com a demonstração, vamos considerar mais alguns lemas que estão demonstrados em Santos (2009).

Lema 3.7

$$\lambda_1^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v})) \leq \int_{-T}^{T} \left\| \left(\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt'. \tag{3.36}$$

Lema 3.8

$$\lambda_2^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v})) \leq c \left[\int_{-T}^{T} \left\| \left(\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt' \right]. \tag{3.37}$$

Lema 3.9

$$\lambda_3^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v})) \leq c \left[\int_{-T}^{T} \left\| \left(\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt' \right]. \tag{3.38}$$

Lema 3.10

$$\lambda_4^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v})) \leq c \left[\int_{-T}^{T} \left\| \left(\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt' \right]. \tag{3.39}$$

Tomando, neste momento, o máximo (3.20) de todos os $\lambda_i^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v}))$, obtemos

$$\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v}) \leq cT^{1/2}(1+T)^{\rho}\Lambda^T(v-\bar{v})\{\Lambda^T(v) + \Lambda^T(\bar{v})\}.$$

Mostraremos, agora, que $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração. Para isto, tomemos $v, \bar{v} \in X_T^a$, com a e T satisfazendo (3.34) e (3.35). Observe que

$$\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\bar{v}) \leq \frac{1}{2}\Lambda^T(v-\bar{v}).$$

Logo, para valores de v que satisfaçam (3.34) e (3.35), a função $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração e, dessa forma, existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$.

Analogamente, para $T_1 \in (0,T)$, obtemos

$$\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\bar{u}_0}(\bar{v}) \leq c\|u_0 - \bar{u}_0\|_{s,2} + cT_1^{1/2}(1+T_1)^{\rho}\Lambda^{T_1}(v-\bar{v})\{\Lambda^{T_1}(v) + \Lambda^{T_1}(\bar{v})\}.$$

Para mostrar que a aplicação dado inicial - fluxo é Lipschitz, considere $T_1 \in (0,T)$ e $v, \bar{v} \in X_T^a$, com a e T satisfazendo (3.34) e (3.35). Deste modo,

$$\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\bar{u}_0}(\bar{v}) \leq c\|u_0 - \bar{u}_0\|_{s,2} + 2acT_1^{1/2}(1+T_1)^{\rho}\Lambda^{T_1}(v-\bar{v}).$$

Portanto,

$$\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\bar{u}_0}(\bar{v}) \leq N\|u_0 - \bar{u}_0\|_{s,2},$$

onde $N > 0$. Assim, para $T_1 \in (0,T)$, a aplicação $\bar{u}_0 \to \bar{u}$ de V em $X^a_{T_1}$ satisfaz a condição de Lipschitz (2.5).

Se considerarmos, agora, $w \in X_{T_1}$ para $T_1 \in (0,T)$ uma solução do PVI (3.2), o mesmo argumento usado em (3.33) mostra que para $T_2 \in (0,T_1)$, temos $w \in X^a_{T_2}$. Em outros termos, isso mostra que $w = u$ em $\mathbb{R} \times [-T_2, T_2]$.

Ao reaplicarmos este processo um número finito de vezes, expandimos a unicidade da solução ao intervalo $(0,T)$ inteiro. Portanto, está provado o Teorema (3.1).

$\square$

4 ESTABILIDADE ORBITAL DE SOLUÇÕES

Entre tantos aspectos interessantes e possíveis de serem abordados sobre as equações diferenciais, destacamos aqui a Estabilidade Orbital de suas soluções. Mais uma vez, nosso foco está voltado para a Equação KdV, mas reiteramos sua importância no estudo da estabilidade orbital de tantas outras equações diferenciais parciais dispersivas não-lineares, como:

i) a Equação Benjamin-Bona-Mahony (BBM), dada por

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

que é a equação regularizada da KdV, e modela ondas de gravidade de superfície longas de pequena amplitude propagando-se unidirecionalmente em 1+1 dimensões;

ii) a Equação de Kawahara, dada por

$$u_t + uu_x - (u_{xxx} - u_{xxxxx}) = 0, \tag{4.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é contínua em ambas variáveis reais;

iii) a Equação de Kawahara Regularizada, dada por

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} + u_{xxxxt} = 0,$$

que assim como a Equação de Kawahara, modela a propagação de ondas com baixa amplitude em uma dimensão, para mais detalhes ver Almeida (2021);

iv) a Equação Benjamin-Ono (BO) e Benjamin-Ono Regularizada (rBO), dadas, respectivamente, por

$$u_t + uu_x + (\mathcal{H}u) = 0,$$

e

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{H}u)_t = 0,$$

onde $\mathcal{H}$ é a transformada de Hilbert. A equação BO descreve a Picnoclina no oceano profundo, e o sistema de duas camadas criado pelo influxo de água doce de um rio para o mar, segundo Kalish (2005) e referências nele.

Considerando que as equações BBM e de Kawahara, foram obtidas a partir de estudos da equação KdV, é natural que resultados obtidos para ela influenciem nas outras duas. Porém, o papel da KdV vai muito além. Tendo como referência o trabalho feito em 1987 por Grillakis, Shatah e Strauss (GSS, daqui para frente), sobre a Estabilidade Orbital de soluções de ondas solitárias (Solitons) da Equações KdV e da Equação de Schrödinger, outra importante equação dispersiva, este resultado foi base para desenvolvimento de uma ampla teoria sobre estabilidade para esta e outras importantes equações.

Brevemente, definimos aqui o conceito de estabilidade orbital de uma solução do Problema 3.2.

Definição 4.1 *Sejam u e v funções em $X := \mathbb{R}$, consideraremos ρ a distância entre u e a órbita de v, por*

$$\rho(u,v) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \| u - v(\cdot + y) \|_X \ .$$

Observe que, a grosso modo, a distância entre u e v é medida através da distância entre u e a órbita de v, gerada por translações.

Definição 4.2 *Diz-se que uma solução $u(x,t)$ de (3.1) é orbitalmente estável em X, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $u_0 \in X$ satisfazendo $\| u_0 - u(x,t) \|_X < \delta$, a solução $u(t)$ de (3.1) com dado inicial u_0 existe globalmente e satisfaz $\rho(u(t), u(x,t)) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$.*

É evidente que esta definição pode ser aplicada a problemas relacionados a outras equações, como por exemplo as que foram citadas acima.

O estudo sobre estabilidade orbital de equações dispersivas, tem sido objeto de muitos trabalhos, e com isso o próprio resultado apresentado em GSS (1987), foi melhorado, onde certas condições impostas, puderam ser revistas.

Podemos enunciar aqui o resultado de estabilidade obtido em GSS.

Teorema 4.3 *As soluções do Problema de Cauchy 3.2 são orbitalmente estáveis.*

Demonstração: Ver GSS (1987, p. 160-197). □

Poderíamos citar outros autores como referências para o Teorema 4.3, alguns foram mencionados em Almeida (2021), mas nosso interesse é importância histórica deste estudo relacionado inicialmente à KdV e, por outro lado, todos os outros resultados são baseados no trabalho já citado.

A obtenção da estabilidade orbital se baseia na Teoria de Lyapunov, ou simplesmente no cálculo variacional, pois este é trabalhado como um problema de minimização. No caso, um problema de minimização da quantidade conservada de Energia associada à equação KdV. Outro importante aspecto considerado são as simetrias presentes nas soluções das equações em questão, isto justifica GSS (1987) terem abordado a KdV e a Schrodinger, visto que a primeira possui uma simetria e a segunda duas. Não nos aprofundaremos sobre isso pois, devido ao tempo, não fizemos um estudo detalhado sobre tais simetrias.

De maneira, bastante simplista e o fazemos para ilustrar, o que buscou-se ao minimizar a Energia é: se em uma superfície com formato de U, soltássemos uma bolinha de um certo ponto inicial u_0 com a intenção de que ela parasse, isso ocorreria caso a energia dentro daquele espaço se tornasse nula e, é bastante claro assim, a importância de tal curva e do ponto inicial de onde soltássemos o objeto.

Sem entrar em tantos detalhes, o que foi feito é criar um funcional G, como combinação linear das quantidades conservadas associadas à KdV, e fazer o estudo da segunda derivada (no sentido de Frechet, ver Brezis (1984)), como nas ideias mais simples do Cálculo Variacional. No entanto, como se tratam de funções, algumas condições devem ser impostas para o cálculo do Jacobiano, bem como da matriz Hessiana de G, o que nem sempre é simples e possível. Simplificar tais condições tem gerado resultados muito interessantes e possibilitado a prova de de Estabilidade Orbital de soluções do tipo ondas solitárias e do tipo ondas viajantes de equações que não seria possível, sob as condições impostas em GSS (1987), como exemplo temos a Equação de Kawahara.

Muitos outros aspectos da Equação KdV poderiam ser explorados, entre eles a Estabilidade Espectral, Decaimento, e principalmente suas aplicações, o que não foi possível fazer e nem era nosso propósito.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos de revisitar resultados importantes da solução de uma EDP e organizá-los de forma a dar base àqueles alunos da graduação que querem iniciar nessa área de pesquisa foram contemplados. Conforme a ampla literatura estudada sobre a equação KdV, as conclusões obtidas neste trabalho e muitas outras que não puderam ser abordadas são de grande importância na Análise Matemática e na Física.

Compreender o comportamento e as peculiaridades das EDPs desperta o interesse em prosseguir nesta área de pesquisa em programas de pós-graduação, principalmente entendendo a aplicabilidade e a relevância física que estas equações possuem.

Existem, ainda, inúmeras outras possibilidades e assuntos a serem abordados no mesmo âmbito dos estudos concluídos aqui. O estudo da equação KdV dá base a uma série de equações de onda que foram descritas depois e têm despertado a curiosidade de muitos pesquisadores ainda nas últimas décadas, o que permite a continuidade em estudos futuros.

O interesse que surgiu a partir das disicplinas de EDO e EDP oferecidas pelo curso de Licenciatura em Matemática gerou frutos e culminou nesta pesquisa. Há a expectativa, ainda, de outros estudantes da graduação se dedicarem ao estudo de outros aspectos da KdV e darem sequência a esta pesquisa ou, até mesmo, estudarem outras equações do tipo KdV importantes, como a equação Korteweg-de Vries modificada (mKdV), equação KdV linearizada, equação de Kawahara, e outras.

Referências

ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. London: Academic Press, 1975.

ALMEIDA, G. D. **Estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas para equações de Kawahara e Kawahara regularizada**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Maringá, 2021.

ARAÚJO, E. M. **Controle e estabilização da equação Korteweg-de Vries em um domínio periódico**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

BARBOSA, I. I. **Existência e estabilidade de Soluções do tipo ondas solitárias para a equação Korteweg-de Vries (KdV)**. Dissertação (Mestrado), 2009.

BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

BREZIS, H. Analísis funcional: Teoría e aplicaciones. Aliança, 1984.

BREZIS, H. Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science & Business Media, New York, 2010.

CHALUB, F. A. C. C.; ZUBELLI, J. P. Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos. 2005.

EVANS, L. C. Partial differential equations. American Mathematical Society, 2010.

FLEMMING, D. M. **Equações Diferenciais: livro didático**. Palhoça: UnisulVirtual, 2010.

GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, i. J. Funct. Anal., v. 74, p. 160–197, 1987.

IÓRIO Jr, R.; IÓRIO, V. d. M. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. 2. ed. Rio de Janeiro: Institudo de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

IÓRIO, V. d. M. **EDP, um curso de graduaçao**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

KALISCH, H. **Error analysis of a spectral projection of the regularized Benjamin-Ono equation**. [S.l.]: BIT, 2005. 69-89 p.

KENIG, C.; PONCE, G.; VEGA, V. **Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle**. [S.l.]: Comm. Pure Appl. Math, 1993. 527-620 p.

KORTEWEG, D. J.; De VRIES, G. **On the change of form of long wave advancing in a retangular canal, and on a new type of long stationary waves**. London - Edinburgh - Dublin: Philosophical Magazine and Jounal of Science, 1895.

KRUSKAL, M. D.; ZABUSKY, N. J. Interaction of "solitons"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical review letters 15.6, 1965.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

LIMA, P. C. de. **Equações Diferenciais Parciais I**. Dissertação (Mestrado) — Uiversidade Federal de Minas Gerais, 2013.

MIURA, R. M.; GARDNER, C. S.; KRUSKAL, M. D. The korteweg-de vries equation and generalizations ii: existence of conservation laws and constants of motion. Math. Phys., 1968.

RUSSEL, J. S. Report of fourteenth meeting of the british association for the advanced of science. Plates XLVIII-L, York, 1844.

SANTANA, J. d. J. **Equaçoes dispersivas e boa colocaçao de uma equaçao linear do tipo Airy**. Dissertação (Mestrado) — Univesidade Federeal da Bahia, 2019.

SANTOS, C. A. S. d. et al. **O problema de Cauchy para as equações KdV e mKdV**. Dissertação (Mestrado), 2009.

TENEMBAUM, M.; POLLARD, H. **Ordinary Differential Equations**. New York: Harper & Row, 1963.