



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**DESENVOLVIMENTO DA PLATAFORMA ALFAGEBRA E AVALIAÇÃO
DO APRENDIZADO DOS ACADÊMICOS DA DISCIPLINA DE
ÁLGEBRA LINEAR - MÓDULOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES
LINEARES E ESPAÇO VETORIAL**

OSMIR CUSTÓDIO MARIANO

PALMAS (TO)

2018

OSMIR CUSTÓDIO MARIANO

DESENVOLVIMENTO DA PLATAFORMA ALFAGEBRA E AVALIAÇÃO DO
APRENDIZADO DOS ACADÊMICOS DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR -
MÓDULOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ESPAÇO VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso II apresentado
à Universidade Federal do Tocantins para
obtenção do título de Bacharel em Ciência da
Computação, sob a orientação da Prof.^a Dra.
Hellena Christina Fernandes Apolinário.

Orientadora: Dra. Hellena Christina Fernandes
Apolinário

Coorientador: Dr. Edeilson Milhomem da Silva

PALMAS (TO)

2018

OSMIR CUSTÓDIO MARIANO

DESENVOLVIMENTO DA PLATAFORMA ALFAGEBRA E AVALIAÇÃO DO
APRENDIZADO DOS ACADÊMICOS DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR -
MÓDULOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ESPAÇO VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso II apresentado à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas, Curso de Ciência da Computação foi avaliado para a obtenção do título de Bacharel e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário

Prof. Dra. Ana Paula de Sousa Parente Rodrigues

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- C987d Custódio Mariano, Osmir.
Desenvolvimento da plataforma AlfaGebra e avaliação do aprendizado dos acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear - módulos sistemas de equações lineares e espaço vetorial. / Osmir Custódio Mariano. – Palmas, TO, 2018.
97 f.
Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Ciências da Computação, 2018.
Orientador: Hellena Christina Fernandes Apolinário
Coorientador: Edeilson Milhomem da Silva
1. Álgebra Linear. 2. Sistemas de equações lineares. 3. Espaço vetorial. 4. Software. 5. Ensino e aprendizagem. I. Título

CDD 004

Dedico este trabalho aos meus pais, Orlando Mariano da Silva e Maria Gorete Ramos Custódio, que não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeira lugar a Deus, por possibilitar-me a oportunidade de chegar até aqui, concedendo sabedoria e saúde nessa jornada de 4 (quatro) anos de estudos.

Aos meus pais pelo o apoio desde o momento que recebi a notícia da aprovação no vestibular, aos quais incentivando e aconselhando, e também pelos os esforços realizados para que eu pudesse chegar até nessa etapa de minha vida.

Agradeço a minha orientadora, a professora Dr.^a Hellena Cristina Fernandes Apolinário, pelos ensinamentos, correções, incentivos e atenção para o desenvolvimento deste trabalho, sempre motivando que irá dar tudo certo nessa jornada de dois semestres.

Agradeço também ao meu coorientador o professor Dr. Edeilson Milhomem da Silva, por aceitar participar deste projeto e pelos seus ensinamentos.

E agradeço aos meus amigos que ajudaram de forma indireta e direta no decorrer do desenvolvimento deste projeto, com revisões e dicas sobre a escrita.

RESUMO

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma plataforma de ensino e aprendizagem AlfaGebra para a disciplina de Álgebra Linear e avaliação do aprendizado dos discentes através da mesma, sendo composta por três módulos: sistemas de equações lineares, espaços vetoriais e transformações lineares, contudo este estudo abordou somente o desenvolvimento dos módulos de sistemas de equações lineares e espaço vetorial. Cada módulo dispõe de conceitos teóricos, exercícios resolvidos e opção para que o usuário possa interagir com a plataforma e assim o sistema realiza os cálculos e mostrar o passo a passo da resolução. O desenvolvimento da plataforma abordou a técnica de engenharia de *software*, sendo composta por análise de requisitos, implementação, testes e implantação e utilizou a metodologia de desenvolvimento ágil *Scrum* como procedimento para concretização dos requisitos. Destarte, o objetivo da plataforma é auxiliar os acadêmicos no aprendizado dos conteúdos e a partir da mesma avaliar se ela conseguiu. Para identificar se auxiliou foram aplicados questionários aos discentes, logo após os mesmos utilizarem o *software*, sendo um para cada módulo. E como resultados foi possível identificar que a aplicação contribuiu no aprendizado estudantes.

Palavra-chave: Álgebra Linear. Sistemas de equações lineares. Espaço vetorial. Ensino e aprendizagem. Software.

ABSTRACT

The present work to consists in the development of an AlfaGebra teaching and learning platform for the subject of Linear Algebra and to evaluation of students' learning through it, them being composed of three modules: linear systems equations, vector space and linear transformations, to which this module the study deals with the development of only linear and vector space systems. Each one module has theoretical concepts, exercises solved and option for the user to interact with the platform and so the system performs the calculations and show step by step the resolut. The platform development approached the software engineering technique, composed of requirements analysis, implementation, testing and deployment and used the agile Scrum development methodology as a procedure to fulfill the requirements. Thus, the platform objective is to help the students in the learning of the subject and them to evaluate if there was improvement in that. Thus, the goal of the platform is to help academics in learning the content and from the same evaluate if it succeeded. To identify if it helped, questionnaires were applied to the students, after which they used the software, one for each module. And as a result it was possible to identify that the application contributed to students learning.

Keywords: Linear Algebra. Systems of linear equations. Vector space. Teaching and learning. Software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Subespaço.	29
Figura 2.2 – Criação de objeto simbólico no Matlab (GILAT, 2012)	33
Figura 4.1 – Fluxo do desenvolvimento do AlfaGebra	45
Figura 5.1 – Fluxo sistema AlfaGebra	50
Figura 5.2 – Página inicial da plataforma AlfaGebra	51
Figura 5.3 – Item de seção de cálculo de expressões	52
Figura 5.4 – Item de seção de cálculo de expressões com passo a a passo da resolução	53
Figura 5.5 – Item de seção de material de estudos de sistemas de equações lineares	53
Figura 5.6 – Item de seção de material de estudos de sistemas de equações lineares	54
Figura 5.7 – Item de seção de cálculo de expressões	54
Figura 5.8 – Item de seção de cálculo de expressões com passo a passo da resolução	55
Figura 5.9 – Item de seção de material de estudos espaços vetoriais	55
Figura 5.10 – Item de seção de material de estudos espaços vetoriais	56
Figura 5.11 – Tela inicial da documentação do sistema	56
Figura 5.12 – Campo de inserção de expressão para processamento de cálculo . .	57
Figura 5.13 – Passo a passo da resolução da expressão	58
Figura 5.14 – Passo a passo da resolução da expressão	58
Figura 5.15 – Telas do aplicativo <i>mobile</i>	59
Figura 5.16 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no se- mestre 2015-2	60
Figura 5.17 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no se- mestre 2016-1	61
Figura 5.18 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no se- mestre 2016-2	61
Figura 5.19 – Grau de dificuldade dos alunos	62
Figura 5.20 – Frequência que os alunos procuram o professor	63

Figura 5.21 – Quantitativo de alunos que cursaram a disciplina de Álgebra Linear	64
Figura 5.22 – Utilização de tecnologias para o estudo	64
Figura 5.23 – Quantitativo de alunos que utilizaram a plataforma para seus estudos	65
Figura 5.24 – Plataforma ajudou no aprendizado	66
Figura 5.25 – Após uso da plataforma interesse aumentou a respeito do conteúdo de sistemas de equações lineares	66
Figura 5.26 – Quantitativo de vezes cursando a disciplina	67
Figura 5.27 – Utilização da plataforma pelos os acadêmicos	68
Figura 5.28 – Plataforma ajudou no aprendizado dos estudantes	68
Figura 5.29 – Após uso da plataforma interesse aumentou a respeito do conteúdo de espaços vetoriais	69
Figura 5.30 – Quantitativo de vezes cursando a disciplina	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Dados dos quantitativos de alunos nos três últimos semestres, referentes a aprovados por notas, reprovados por faltas e reprovados por notas	60
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Justificativa	18
1.2	Objetivos	19
1.2.1	Objetivo Geral	19
1.2.2	Objetivos Específicos	19
1.3	Estrutura do Trabalho	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	Histórico da Álgebra Linear	20
2.2	Matrizes	21
2.2.1	Tipos de matrizes	21
2.2.1.1	Matriz Quadrada	22
2.2.1.2	Matriz Linha	22
2.2.1.3	Matriz Coluna	22
2.2.1.4	Matriz Nula	22
2.2.1.5	Matriz Diagonal	23
2.2.1.6	Matriz Identidade	23
2.2.2	Operações com matrizes	23
2.2.2.1	Multiplicação por um escalar	23
2.2.2.2	Soma de matrizes	24
2.2.2.3	Multiplicação de matrizes	24
2.3	Sistemas de Equações Lineares	25
2.3.1	Equação Linear	25
2.3.2	Sistemas de equações lineares	25
2.3.3	Operações Elementares	26

2.3.4	Forma Escada	27
2.3.5	Soluções de um sistema de equações lineares	27
2.3.6	Método de Gauss	27
2.4	Espaço Vetorial	27
2.4.1	Espaços Vetoriais	28
2.4.1.1	Operação soma	28
2.4.1.2	Operação multiplicação	28
2.4.2	Subespaços Vetoriais	28
2.4.3	Combinação Linear	29
2.4.4	Dependência e Independência Linear	30
2.4.4.1	Teorema	30
2.5	Computação simbólica	30
2.6	<i>Software</i> matemático com abordagem em Álgebra Linear	31
2.6.1	Matlab e a Álgebra Linear	32
2.6.1.1	Matlab e computação simbólica	32
2.6.1.2	Matlab e sistemas de equações lineares	33
2.6.1.3	Matlab e espaço vetorial	34
2.7	Expressões regulares	35
2.8	Avaliação de aprendizagem	36
3	TRABALHOS RELACIONADOS	38
3.1	Ensino e aprendizagem de cálculo: a partir do uso de <i>softwares</i> matemáticos	38
3.1.1	Métodos Aplicados	38
3.1.2	Resultados	39
3.2	Criação de um <i>software</i> de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear	39
3.2.1	Métodos Aplicados	39
3.2.2	Resultados	39

3.3	O programa GAP como ferramenta de ensino e aprendizagem de Álgebra e uma reflexão das dificuldades da disciplina Álgebra I	40
3.3.1	Métodos Aplicados	40
3.3.2	Resultados	40
4	METODOLOGIA	41
4.1	Avaliação do aprendizado	41
4.2	Desenvolvimento da Plataforma	42
4.2.1	Conteúdos matemáticos abordados na plataforma AlfaGebra	43
4.2.1.1	Sistemas de equações lineares:	43
4.2.1.2	Espaço Vetorial:	43
4.2.2	Ambiente Computacional	44
4.2.3	Métodos	44
4.2.3.1	Prototipagem - Desenho das telas	45
4.2.3.2	Desenvolvimento Ágil (<i>Scrum</i>)	45
4.2.4	Ferramentas e Materiais	46
4.2.4.1	Ferramentas e Materiais para sistema web	46
4.2.4.2	Ferramentas e Materiais para aplicativo <i>mobile</i>	46
5	RESULTADOS	48
5.1	Sistema AlfaGebra	48
5.1.1	Página Inicial	51
5.1.2	Módulo Sistemas de Equações Lineares	51
5.1.3	Módulo Espaços Vetoriais	53
5.1.4	Ferramenta AlfaGebra: ajuda ao usuário	55
5.1.5	Ferramenta AlfaGebra como auxílio para aprendizado	57
5.1.6	Aplicativo <i>mobile</i> AlfaGebra	57
5.2	Análise da disciplina de Álgebra Linear	59
5.3	Avaliação do aprendizado	61

5.3.1	Avaliação sem aplicação do <i>software</i>	62
5.3.2	Avaliação com aplicação do <i>software</i>	64
5.3.2.1	Módulo de Sistemas de Equações Lineares	64
5.3.2.2	Módulo de Espaço Vetorial	67
6	CONCLUSÃO	71
6.1	Conclusões	71
6.2	Trabalhos Futuros	72
	REFERÊNCIAS	73
A	APÊNDICE	76

1 INTRODUÇÃO

A importância da Álgebra Linear tem crescido nas últimas décadas, principalmente nos modelos matemáticos lineares que surgem em diversas áreas, como a economia, a aviação, a exploração petrolífera, os circuitos eletrônicos, a estatística, dentre várias outras, e comumente nestes modelos aparecem a resolução de Sistemas de Equações Lineares, a qual de acordo com Leon (2011) “mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa”(p. 1).

Para Furtado (2010), a Álgebra Linear é vista como uma disciplina de fundamental importância para vários estudiosos, como matemáticos e cientistas que a utilizam como instrumento para resoluções de problemas. Dessarte, não é diferente que ela “constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é usado no início de um curso da área de exata”(DORIER, 1998), apud (FURTADO, 2010), 2010, p. 2).

Já para Poole (2016) a Álgebra Linear apresenta muitos resultados interessantes, aplicações em outras disciplinas e em várias áreas da matemática. Assim, apresenta muitas faces, técnicas computacionais, conceitos e aplicações, tornando-se uma área de grande importância.

Na computação gráfica, a aplicação de espaço vetorial é bastante utilizada, em que o espaço espectral de cores é um espaço vetorial de dimensão três, que são as três cores primárias, vermelho, verde e azul, este sistema é conhecido como sistema RGB (*Red, Green e Blue*). Diferentes sistemas de coordenadas, conhecidos como sistemas de cores, são considerados neste espaço vetorial de acordo com a aplicação ou dispositivo de saída gráfica (monitor, impressora, projetor de vídeo, etc.).

Em relação ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, Celestino (2000) destaca a importância de pesquisas voltadas para esse estudo:

pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear repousa no fato de que ela hoje se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática. Desta forma, é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento para outros estudos, dominem seus principais conceitos. Por isso se implantou o ensino de Álgebra Linear nos diferentes cursos das chamadas Ciências Exatas, como Engenharia, Física, Química, Ciência da Computação e outras, além de Matemática (p. 9).

Na Universidade Federal do Tocantins, a disciplina de Álgebra Linear faz parte da estrutura curricular dos cursos das engenharias Civil, Elétrica, Alimentos e Biotecnológica

e também Ciência da Computação e Matemática. A citada disciplina é considerada por muitos alunos como difícil, o que é perceptível pelos os altos índices de reprovações e evasões dos acadêmicos. Usando como base a turma de Álgebra Linear do semestre de 2015-1 do curso de Ciência da Computação, de um total de 38 alunos somente 6 passaram com média considerada pela instituição para obter aprovação, que a média é superior ou igual a 7 (sete) e muitos deles já desistem logo após a aplicação da primeira prova da disciplina.

Desse modo, a proposta desse trabalho visa o desenvolvimento de uma plataforma de ensino e aprendizagem para a disciplina de Álgebra Linear, com objetivo de auxiliar os acadêmicos no aprendizado dos conteúdos e a partir da plataforma realizar comparação com os estudantes que cursaram a disciplina sem a utilização do *software* e outra com a utilização, para que assim possa avaliar se houve melhora do aprendizado dos estudantes.

1.1 Justificativa

Nos dias atuais, na era da tecnologia, ainda existem muitos cientistas, matemáticos e engenheiros que dispõem de grande parte do seu tempo realizando pesquisas e muitos deles fazendo cálculos matemáticos manualmente. Devido a era tecnológica, muitos desses cálculos podem ser realizados com auxílios de *software*, dentre alguns deles presente no mercado são: *MatLab*, *Mathematica*, *Geogebra* entre outros. A partir da utilização das ferramentas de tecnologias (TICs), possibilita que as tarefas que antes eram tediosas para seu desenvolvimento agora elas se tornam mais fáceis de serem realizadas.

Lima. (2000) destaca que no atual momento, os computadores se tornaram indispensáveis ao trabalho, como nas áreas da Ciências e Engenharias. E a situação nas instituições acadêmicas não é diferente, em que a cada momento as instituições estão inteiradas acerca da importância do uso de computadores como ferramenta para o ensino e aprendizagem e para isto, elas tem promovido que os acadêmicos ainda na graduação possam ter o contato direto com essas ferramentas para assim auxiliar no aprendizado.

A Álgebra Linear é apresentada como uma área que exige muito esforço no decorrer do aprendizado, visto que é considerada por muitos alunos como uma área difícil de compreender e esse assunto é tão pertinente que alguns pesquisadores já estudaram o desempenho dos acadêmicos que cursam esta disciplina na graduação. Celestino (2000) em sua pesquisa de mestrado analisou os resultados de reprovações na Universidade Estadual Paulista (UNESP) e Universidade de São Paulo (USP) e identificou que as reprovações giram em torno de 25% a 50% e também identificou que pesquisas realizadas em outros países mostraram as dificuldades dos alunos na compreensão dos principais conceitos da Álgebra Linear como espaços vetoriais e transformações lineares.

Diante das informações supracitadas e com objetivo de auxiliar os acadêmicos no aprendizado da disciplina de Álgebra Linear do curso de Ciência da Computação, torna

primordial o desenvolvimento de uma plataforma de ensino e aprendizagem que possa ajudar a melhorar os índices de reprovações e evasões dos estudantes da citada disciplina e em conjunto verificar se a plataforma irá realmente auxiliar no processo de aprendizagem, para tal, foi realizada uma comparação entre duas turmas de Álgebra Linear, uma que não utilizou o *software* e outra que utilizou no decorrer da ministração da disciplina pelo professor.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O principal objetivo deste trabalho consiste em desenvolver a plataforma de ensino e aprendizagem AlfaGebra e avaliar o aprendizado dos acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são descritos como:

1. Desenvolver os módulos de sistemas de equações lineares e espaço vetorial da plataforma AlfaGebra em versão web e *mobile*.
2. Comparar o nível de aprendizado dos acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear com e sem a utilização do *software* AlfaGebra.

1.3 Estrutura do Trabalho

O Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica utilizada no estudo que é de grande importância para o entendimento dos conceitos que foram aplicados na pesquisa. O Capítulo 3 apresentam os trabalhos relacionados, com destaque em aplicações utilizadas para auxiliar no ensino e aprendizagem. Já no Capítulo 4 é apresentado todo o passo a passo do desenvolvimento desse estudo, bem como da criação da plataforma e os métodos aplicados para o alcance dos resultados. No Capítulo 5 estão apresentados os resultados obtidos no decorrer da pesquisa e por fim, no Capítulo 6 são descritas as conclusões e trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo desse capítulo estão expostos conceitos básicos que são de grande importância para o entendimento deste trabalho e dentre eles serão destacados: definição de matriz, principais matrizes utilizadas no estudo da Álgebra Linear, sistemas de equações lineares, conteúdo este que fará parte da plataforma de ensino e aprendizagem intitulada de AlfaGebra, espaço vetorial que também irá compor o sistema. Também uma abordagem sobre *software* Matlab como ferramenta de aprendizagem e resoluções de problemas dos conteúdos de sistemas de equações lineares e espaço vetorial, além desta está disposto uma descrição sobre expressões regulares, a qual esta foi aplicada no sistema para validação de expressões de entrada no sistema e por fim, uma abordagem sobre avaliação do ensino e aprendizagem.

2.1 Histórico da Álgebra Linear

A Álgebra Linear começou seus primeiros passos no final do século XIX. Com o emergir dos números complexos surgiu a necessidade de relacionar a Álgebra Linear com a Geometria o que nesse contexto, Rodrigues (2009) explana porque essa necessidade era válida, e isso era devido a aceitação que os números complexos possibilitou na representação geométrica e pelos os testes de representá-los em três dimensões. A partir disto, motivou Willian Rowan Hamilton¹ a constatar os quatérnios, que com eles possibilitou a criação de um sistema, em que a operação de multiplicação não dispunha das propriedades comutativas. E foi nesse ponto que os primeiros passos da Álgebra Linear começaram rumo à sua criação.

Com o surgimento da Álgebra Linear, alguns trabalhos foram desenvolvidos a fim de demonstrar esse novo ramo da matemática e estes trabalhos de grande destaque encontram-se nos Estados Unidos e na França com início de sua criação nos anos 80. Cabral (2011) relata que um grupo de pesquisadores na França desenvolveu um conjunto de artigos a respeito da Álgebra Linear e que logo após, tornaram-se um livro, intitulado de *L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question* (DORIER, 1998), coordenado pelo o autor de maior destaque na área, Dorier. Em relação aos trabalhos desenvolvidos nos Estados Unidos, a revisão do currículo da Álgebra Linear foi realizada e então surgiu o grupo de estudo *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), sendo orientado por David Carlson.

Dez anos depois da primeira publicação de artigos a respeito do tema Álgebra Linear, a *Mathematical Association of America* (MAA) começou a formação *Algebra Curri-*

¹Willian Rowan Hamilton foi um matemático, astrônomo e físico e realizou grandes contribuições no campo da óptica, dinâmica e álgebra.

culum Study Group (LACSG). E não demorou muito para o LACSG concluir o primeiro curso de Álgebra Linear em um curso de engenharia. No primeiro curso alguns requisitos foram aplicados, tais como a utilização de ferramentas tecnológicas para melhor aproveitamento do ensino.

O estudo da Álgebra Linear no Brasil começou a se desenvolver nos anos 90 e de acordo com Furtado (2010), até 2010 no Brasil a produção de trabalhos voltados para Álgebra Linear eram poucos e a pesquisadora que mais desenvolveu pesquisas na área foi Marlene Alves Dias, que começou a trabalhar em suas produções na França. Celestino (2000) desenvolveu sua dissertação de Mestrado em que estudava o histórico do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, a qual focou nos poucos trabalhos que existiam no atual momento e também citou de outros países.

Alguns matemáticos realizaram grande contribuição para a evolução da Álgebra Linear entre eles Lagrange (1736-1813), Frobenius (1849-1917), Hamilton(1805-1865), Gauss (1777-1855), entre outras.

2.2 Matrizes

Um das ferramentas mais poderosas consideradas na matemática são as matrizes, pois as mesmas têm aplicações em diversas áreas, tais como em codificação e decodificação de mensagens, computação gráfica, engenharias etc. Desse modo, faz-se necessário a compreensão de algumas propriedades e nomenclaturas em relação as mesmas.

Definição 2.2.1. Matrizes são objetos matemáticos estruturados em tabelas disposta em m linhas e n colunas.

A definição de Winterle (1987) é similar a citada, onde uma matriz é uma tabela $m \times n$ de elementos e que estes podem ser números, polinômios, funções etc., que estão dispostos em m linhas e n colunas, representada por $A_{m \times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

2.2.1 Tipos de matrizes

Para Boldrini et al. (1986), no processo de utilização de matrizes, percebe-se que existem algumas que são diferentes, seja pela quantitativo de linhas ou colunas, bem como também pela natureza de seus elementos, a qual apresentam propriedades que se

diferenciam de uma matriz qualquer. A seguir, serão expostas as principais categorias de matrizes, para isso, considerando uma matriz com m linhas e n colunas representa por $A_{m \times n}$.

2.2.1.1 Matriz Quadrada

Matriz que apresenta o mesmo número de linhas e colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Observando a matriz A , percebe-se que o número de linhas e colunas são iguais, sendo $A_{3 \times 3}$. Nesse tipo de matriz, em que a ordem é n por n , costuma dizer que A é uma matriz de ordem n .

2.2.1.2 Matriz Linha

Matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, com uma única linha.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

2.2.1.3 Matriz Coluna

Matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, com uma única coluna.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

2.2.1.4 Matriz Nula

Matriz na qual todos os seus elementos linhas e colunas são iguais a zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.1.5 Matriz Diagonal

Antes de definir matriz diagonal faz-se necessário compreender o que é uma diagonal principal e secundária, a diagonal principal de uma matriz $A_{m \times n}$ é a coleção dos elementos a_{ij} da matriz em que $i = j$. Já a diagonal secundária é formada pelos elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$.

matriz diagonal é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são todos nulos, denotada por $A_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

2.2.1.6 Matriz Identidade

É uma matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e todos os outros são nulos.

Exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Operações com matrizes

Para uma melhor utilização das matrizes é necessário um entendimento sobre as operações aritméticas aplicadas nelas. Assim, a seguir serão demonstradas as três operações que são aplicadas nelas.

2.2.2.1 Multiplicação por um escalar

De acordo com a definição de Leon (2011), se A é uma matriz e α é um escalar, assim αA será a matriz gerada a partir da multiplicação de cada elemento de A por α .

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \alpha = 5, \text{ assim}$$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 1 & \alpha \cdot 3 & \alpha \cdot 6 \\ \alpha \cdot (-4) & \alpha \cdot 2 & \alpha \cdot 0 \\ \alpha \cdot 5 & \alpha \cdot 7 & \alpha \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 30 \\ -20 & 10 & 0 \\ 25 & 35 & -5 \end{bmatrix}$$

Em relação as propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar, para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e os escalares α e $\lambda \in \mathbb{R}$, a multiplicação por o escalar satisfaz as presentes propriedades:

i) $(\alpha\lambda)A = \alpha(\lambda A)$

ii) $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$

iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

iv) $1A = A$

2.2.2.2 Soma de matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem (m, n) . Assim, a soma $A + B$ é uma matriz $C = [c_{ij}]$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Em relação às propriedades da adição de matrizes, para quaisquer matrizes A, B e C de mesma ordem $i \times j$, existem as seguintes propriedades que a satisfazem:

i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

ii) $A + 0 = 0 + A = A$

iii) $-A + A = A - A = 0$

iv) $A + B = B + A$

2.2.2.3 Multiplicação de matrizes

Uma das operações mais importantes entre matrizes é a multiplicação. De acordo com Leon (2011), a motivação da definição de multiplicação entre matrizes vem de sua aplicação em sistemas lineares.

Boldrini et al. (1986) define: sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$. Assim defini-se $C = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \dots + a_{un}b_{nv}$$

Desse modo, para formar o elemento C_{ij} do produto, pega-se a i -ésima linha de A e a j -ésima coluna de B , e assim multiplicam-se os elementos correspondentes dois a dois e soma-se os números resultantes. Contudo, para efetuar o produto entre duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{l \times p}$, só é possível se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, o resultado da matriz $C = A \cdot B$ será de ordem $m \times p$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

então:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

2.3 Sistemas de Equações Lineares

Na matemática, provavelmente um dos problemas considerados mais importantes é a resolução de sistemas de equações lineares. Leon (2011) destaca a importância desse conteúdo na Álgebra Linear, visto que muitos dos problemas matemáticos que são encontrados em aplicações científicas e industriais abordam em alguma etapa do processo a resolução de um sistema linear. Usando os métodos matemáticos modernos, em muitos dos casos é possível minimizar o problema a um único sistema de equações lineares. E as aplicações e utilização de sistemas de equações lineares está presente em várias áreas como administração, sociologia, economia, ecologia, demografia, engenharia, física, genética entre outras.

2.3.1 Equação Linear

Definição 2.3.1. Por definição uma equação linear é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n são os coeficientes, x_1, x_2, \dots, x_n são incógnitas e b é o termo independente.

2.3.2 Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares refere-se a um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2.3.3 Operações Elementares

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são um total de três:

- Permutação de duas linhas ($L_i \rightarrow L_j$):

Exemplo:

$$L_2 \rightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de uma linha por um escalar k , não nulo. ($L_i \rightarrow k \cdot L_i$):

Exemplo:

$$L_2 \rightarrow 2 \cdot L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Substituição de uma linha por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um escalar k não nulo ($L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j$):

Exemplo:

$$L_2 \rightarrow L_2 + 2 \cdot L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3.4 Forma Escada

Definição dada por Boldrini et al. (1986), uma matriz de dimensões $m \times n$ é considerada linha reduzida à forma escada se atender aos presentes requisitos abaixo:

1. O primeiro elemento de cada linha diferente de zero é igual a 1.
2. Cada coluna que apresenta o primeiro elemento diferente de zero de alguma linha tem todos os demais elementos iguais a zero.
3. Se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas.
4. O número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo, aumenta a cada linha.

Definição 2.3.2. Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada de A . O posto de A , denotado por P é a quantidade de linhas não nulas de B e a nulidade de A é o número $n - p$.

2.3.5 Soluções de um sistema de equações lineares

Dentro da resolução de sistemas de equações lineares podem ocorrer diversas situações na resolução. Considerando um sistema de uma equação e um incógnita $ax = b$, existirão três possibilidades:

1. O sistema possui uma única solução. O sistema nesse caso é dito compatível e determinado ou sistema possível e determinado.
2. Sistema possui infinitas soluções. O sistema é dito compatível e indeterminado ou sistema possível e indeterminados.
3. Sistema não possui solução. O sistema é dito incompatível ou impossível.

2.3.6 Método de Gauss

O método de Gauss é semelhante ao método da matriz forma escada, conteúdo para a resolução de sistemas só é diferente do método da forma escada na seguinte condição: Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os elementos abaixo desta linha iguais a zero.

2.4 Espaço Vetorial

Leon (2011) explica que “as operações de soma e multiplicação por um escalar são usadas em diversos contextos em matemática. Independentemente do contexto, no entanto, essas operações obedecem, em geral, ao mesmo conjunto de regras aritméticas”.

E diante de tal, aplicações de sistemas matemáticos que abordam as operações de soma e multiplicação por um escalar apresentam aplicações em várias áreas da matemática e esses sistemas matemáticos desse modelo são chamados de espaços vetoriais.

Fernandez (2016) destaca que espaço vetorial está presente em zonas importantes da análise matemática e da geometria diferencial. A utilização de espaços vetoriais está presente em diversas aplicações e áreas, dentre algumas delas, a computação gráfica com sua utilização no espaço espectral de cores, no sistema RGB (*Red, Green e Blue*), em aplicações na física moderna, entre outras.

2.4.1 Espaços Vetoriais

Definição 2.4.1. Defini um espaço vetorial real como um conjunto V , não vazio, com as seguintes operações: soma, $V \times V \xrightarrow{+} V$ e a multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$ assim, para quaisquer u, v, w e $a, b \in \mathbb{R}$ (BOLDRINI et al., 1986). As propriedades são satisfeitas.

2.4.1.1 Operação soma

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. $u + v = v + u$
3. Existe $0 \in v$ tal que $0 + v = v$ (0 é chamado vetor nulo)
4. Existe $-u \in v$ tal que $u + (-u) = 0$

2.4.1.2 Operação multiplicação

1. $a(u + v) = au + av$
2. $(a + b)v = av + bv$
3. $(ab)v = a(bv)$
4. $1u = u$

2.4.2 Subespaços Vetoriais

Em alguns casos é necessário descobrir dentro de um espaço vetorial V , subconjuntos W que sejam eles próprios espaços vetoriais menores. Estes conjuntos são chamados de subespaços de V . Por exemplo, considerando $V = \mathbb{R}^2$ o plano onde W é uma reta deste plano, que passa pela origem.

Definição 2.4.2. Dado um espaço vetorial de V , um subconjunto W , não vazio, será um espaço vetorial de V se atender as duas condições:

1. $\forall u, v \in W \rightarrow u + v \in W$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u \in W \rightarrow \alpha u \in W$

Exemplo:

Verifica se o conjunto $W = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial.

Inicialmente deve-se verificar se o vetor nulo está incluso no subespaço, assim:

$$(0, 2 \cdot 0) = (0, 0) \in W$$

Como a verificação é válida, o vetor nulo encontra-se dentro do subespaço, agora analisando as condições da definição:

1. Sejam $u = (x_1, 2x_1), v = (x_2, 2x_2) \in W$. Verificando se $u + v \in W$:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) \\ u + v &= (x_1 + x_2, 2x_1) + 2x_2 \\ u + v &= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W \end{aligned}$$

Observando o resultado obtido percebe-se que a ordenada é o dobro da abscissa.

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, 2x_1) \in W$. Verificando se $\alpha u \in W$:

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(x_1, 2x_1) \\ \alpha u &= (\alpha x_1, \alpha 2x_1) \\ \alpha u &= (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W \end{aligned}$$

Como as duas condições são satisfeitas, então o conjunto é um subespaço vetorial.

2.4.3 Combinação Linear

Com a combinação linear é possível obter novos vetores a partir de outros vetores.

Definição 2.4.3. Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$. Então o vetor

$$V = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

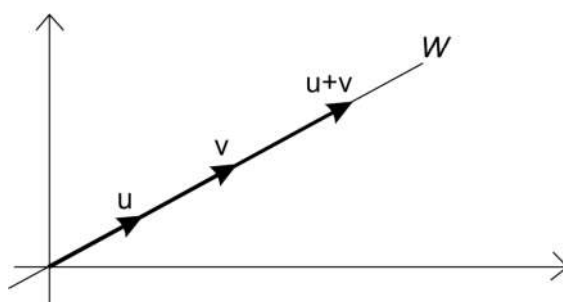


Figura 2.1 – Subespaço.

2.4.4 Dependência e Independência Linear

Definição 2.4.4. Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto v_1, \dots, v_n é linearmente independente (LI), ou que os vetores são LI, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

implica

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n é linearmente dependente (LD) ou que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são LD.

2.4.4.1 Teorema

Teorema 2.4.1. v_1, v_2, \dots, v_n é linearmente dependente, se e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros vetores.

2.5 Computação simbólica

A computação simbólica é um ramo da Ciência da Computação e Matemática que estuda as operações simbólicas que são tratadas por um computador, ou seja, o desenvolvimento de algoritmos para manipulação de expressões matemáticas e outros objetos matemáticos (ROJAS, 2005).

Em sistemas de computação simbólica, Bortolossi (2012) descreve que são

softwares matemáticos que permitem lidar com símbolos e obter respostas exatas para muitos problemas matemáticos, como a fatoração de números inteiros e polinômios, operações com matrizes, resolução de sistemas de equações lineares e não lineares, operações com números complexos, simplificações de expressões, cálculo de limites, derivadas e integrais, resolução de equações diferenciais, etc. (p. 1).

Já Campos (2015), explana que é

um interessante recurso de programação de alto nível, que integra os paradigmas de programação procedural, programação funcional e programação baseada em regras, que permite aos programadores especialistas produzirem aplicações que sistematicamente trabalham o desenvolvimento de cálculo analítico avançado (p. 4).

De acordo com Andrade (1996), “a computação simbólica surgiu da necessidade de se atribuir à máquina tarefas de manipular algebricamente extensas expressões matemáticas”(p. 7), e desde o seu surgimento, é bastante utilizada na matemática para manipular

formas simbólicas de expressões matemáticas e para realizar cálculos numéricos, bem como também é utilizada em *softwares* numéricos, como Matlab, Mathematica, Maple, entre outros.

Muitas aplicações na matemática, ciências e engenharias requerem operações simbólicas na resolução de operações, a partir disso, nas últimas décadas, no que tange o desenvolvimento de *software* para matemática, foram desenvolvidos vários sistemas entre alguns deles o Mathematica, Maple, Matlab, Mupad, entre outros que permitem a manipulação simbólica de expressões matemáticas, e assim possibilitando resultados exatos e dentre estes *softwares* os que mais receberam destaques são o Maple e Mathematica, devido a sua capacidade de resolução (CORRÊA, 2007). Atualmente a maioria dos sistemas de computação simbólica podem ser utilizados de maneira interativa, a qual o usuário entra com a expressão e assim o sistema o avalia e retorna a resposta.

É importante salientar que todos esses sistemas trabalham com os conteúdos da Álgebra Linear e por conseguinte, utilizam a computação simbólica para resolução de problema.

A utilização da computação simbólica é bastante aplicada para execução de operações aritméticas (multiplicação, divisão e potenciação), álgebra e cálculo avançado. Para compreensão do funcionamento dessa área que é bastante utilizada na matemática, faz-se necessário entender como seria a resposta em valores simbólicos e em valores numéricos, por exemplo, no valor $\frac{3}{9}$ em valor simbólico consistiria em $\frac{1}{3}$, mas já em numérico corresponderia 0,333333. Outro exemplo seria, se a , b e x são variáveis simbólicas e a expressão algébrica é $ax - b = 0$, x pode ser resolvido em termos de a e b , o que resulta em $x = \frac{b}{a}$, agora realizando um outro exemplo com a operação de adição têm que $\frac{x}{4}$ e $\frac{x}{3}$, o resultado é $\frac{7x}{12}$ e não $0,5833x$ (GILAT, 2012).

2.6 Software matemático com abordagem em Álgebra Linear

Com o avanço das tecnologias muitos *softwares* foram desenvolvidos com o propósito de auxiliar nas resoluções de problemas matemáticos, dentre alguns deles, o Matlab² que é um ambiente computacional para trabalho com expressões algébricas e simbólicas, o Maple³ também é outro *software* computacional específico para resoluções de problemas matemáticos e constitui um ambiente computacional para o trabalho de expressões algébricas e simbólicas, outro é Mathematica⁴ que é um *software* que trabalha com álgebra computacional e utiliza expressões algébricas e simbólicas para resolução, e foi desenvolvido pela Wolfram Research, entre alguns outros. Em virtude do Matlab ser um *software* conhecido mundialmente e por ser uma ferramenta poderosa o mesmo será abordado na seção 2.6.1 com descrição de como é utilizado para aplicação de conceitos voltados para

²Matlab <<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>>

³Maple <<https://www.maplesoft.com/>>

⁴Mathematica <<https://www.wolfram.com/mathematica/>>

a Álgebra Linear.

2.6.1 Matlab e a Álgebra Linear

Matlab é um *software* poderoso, “conhecido mundialmente como uma excelente ferramenta para soluções de problemas matemáticos, científicos e tecnológicos, que possuem comandos próximos da forma como são escritas as expressões matemáticas” ((CARDOSO, 2005), 2005, p. 2). Sua aplicação é usada para resoluções de problemas em diversas áreas, como: processamento de imagens, animação, aprendizagem profunda, visão computacional, robótica, etc. (WU, 2004). Trata-se de um *software* interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico, desenvolvido no final dos anos de 1970 pelo o presidente do departamento de ciência da computação da Universidade do Novo México, Cleve Moler⁵ (MARCHETTO, 2016).

Uma das principais características presente no Matlab é a sua extensibilidade, que permite que vários contribuintes interajam para o enriquecimento do sistema, tais como engenheiros, programadores, matemáticos cientistas, entre outros (CARDOSO, 2005). O sistema aborda uma parte específica para as resoluções de problemas voltados para a Álgebra Linear, como sistemas de equações lineares, espaços vetoriais, transformações lineares, entre outros conteúdos. A seguir serão apresentadas exemplificações de como alguns conceitos da Álgebra Linear são aplicados no Matlab.

2.6.1.1 Matlab e computação simbólica

O Matlab é um *software* que usa a abordagem da computação simbólica, ao qual as operações realizadas demonstram os resultados exatos e não aproximados, ou seja, no Matlab é possível manipular expressões matemática, sem que use números, assim realizando cálculos com símbolos matemáticos, por exemplo, uma equação algébrica que apresenta várias variáveis para exemplificar a dependência funcional de uma dessas variáveis. Na seção 2.5 é citado exemplos que explanam exemplos com abordagem na computação simbólica.

A coleção de funções que o Matlab utiliza para manipular e resolver expressões simbólica é o *toolbox*, que foram criadas através do *software* Maple (FILHO, 2003).

Para realizar cálculos simbólicos no Matlab é definido um tipo de dados, designado por objeto simbólico, a qual o comando utilizado para criação de objeto é o *sym* ou *syms* para criar múltiplos objetos, a figura 2.2 apresenta com detalhes de como é definido um objeto simbólico. No presente código abaixo é apresentado a diferença entre a resolução de um problema usando a computação simbólica e o outro não, e vejamos como o tratamento do resultado final é expressado.

Código não simbólico:

⁵Cleve Moler é PhD pela Universidade de Stanford em Matemática, presidente e cofundador da MathWorks. Moler é matemático e cientista da computação, trabalha com Álgebra Linear numérica e desenvolveu *software* Matlab (MARCHETTO, 2016).

The screenshot shows a MATLAB command window with the following text:

```
>> a=sym('a')
a =
a
>> bb=sym('bb')
bb =
bb
>> x=sym('x');
>>
```

Callout boxes provide additional information:

- A box above the first command says: "Cria um objeto simbólico a e o atribui à variável a".
- A box pointing to the output 'a' and 'bb' says: "Os objetos simbólicos são exibidos na tela sem indentação".
- A box pointing to the final command says: "A variável simbólica x é criada, mas não é exibida, pois um ponto e vírgula foi digitado no final do comando".

Figura 2.2 – Criação de objeto simbólico no Matlab (GILAT, 2012)

```
1 a = sqrt(2)
2 a = 1.4142
```

Código simbólico:

```
1 b = sqrt(sym(2))
2 b = 2^(1/2)
```

Existem outros comandos para trabalhar com computação simbólica no Matlab, mas como foco dessa abordagem não é apresentar os recursos do Matlab e sim só uma abordagem superficial em relação a computação simbólica, eles não serão discutidos.

2.6.1.2 Matlab e sistemas de equações lineares

O Matlab também trabalha com o conteúdo da Álgebra Linear de sistemas de equações lineares para a resoluções de problemas, no exemplo (I) é demonstrado como é realizado a resolução de um problema desta abordagem.

$$\text{Exemplo: (I)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

O presente código do Matlab é apresentado de como ficaria o exemplo (I), sendo aplicado a resolução:

```
1 A=[1 2 1; 2 -1 1; -1 1 -2]
2 A =
3     1     2     1
4     2    -1     1
5    -1     1    -2
6 b=[8;3;-5]
```

```

7      b =
8          8
9          3
10         -5
11     x = inv(A)*b ou x = A\b ou x = pinv(A)*b
12     //Mostrando o resultado
13     x =
14         1
15         2
16         3

```

Essa resolução não está em nível de computação simbólica, mas para resolução, basta somente utilizar o comando *sym* para criar um objeto, como descrito na figura 2.2 e desenvolver a questão.

2.6.1.3 Matlab e espaço vetorial

Um outro assunto de grande importância para Álgebra Linear são os espaços vetoriais e o sistema em questão, também realiza a resolução de problemas desse tipo. No exemplo a seguir é apresentado como é feito a resolução utilizando o Matlab.

O Matlab apresenta integração com as funcionalidade do *software* Mupad, isso ocorrer através do pacote de funções toolbox de computação simbólica, permitindo assim a resolução de problemas e entre alguns deles que podem ser resolvidos são os problemas de espaço vetorial. O código abaixo apresenta demonstração de uma resolução de espaço vetorial, ao qual são dados três vetores e assim encontrar a base do espaço vetorial.

Esse presente código são definidos os domínios das matrizes

```

1      MatQ := Dom::Matrix(Dom::Rational):

```

E para realizar o cálculo de uma base para o espaço vetorial gerado pelos os vetores $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Assim o código será executado e demonstrado o resultado:

```

1      v1 := MatQ ([3, -2]):
2      v2 := MatQ ([1, 0]):
3      v3 := MatQ ([5, -3]):
4      linalg :: basis ([v1, v2, v3] )

```

Todos os problemas relacionados a sistemas de equações lineares e espaço vetorial apresentados no decorrer do texto acima, demonstram que com o auxílio do *software* em questão pode auxiliar na resolução de questões e além destes conteúdos, outros também podem ser resolvidos, tais como transformações lineares. Contudo, a resolução dos problemas não são didáticas, apenas demonstram os resultados, visto que no decorrer da resolução dos problemas não apresentam um passo a passo, desse modo, no que tange

em aspectos didáticos a ferramenta apresenta limitações, mas o foco dessa ferramenta não é ser didático e sim, somente o resultado final do problema fornecido. Contudo, essa abordagem foi realizada com objetivo de apresentar um sistema que expõe a resolução de problema que envolvem os conteúdos da Álgebra Linear e assim expor que o *software* que foi desenvolvido neste trabalho apresenta vantagens em relação ao Matlab devido a esses quesitos.

2.7 Expressões regulares

Antes de iniciar a discussão sobre expressões regulares, faz-se necessário o conhecimentos de linguagens regulares. Assim, Hopcroft (2002) explana que na teoria da ciência da computação e teoria formal de linguagem, uma linguagem regular é um dialeto formal gerada a partir de expressões regulares, ou seja, uma linguagem produzida utilizando os operadores de união, concatenação e fecho de Kleene sobre os elementos de um alfabeto, em que um alfabeto é um conjunto finito de entidade abstrata básica, ou seja, símbolo e não vazio.

O termo expressão regular originou da matemática e da teoria da computação, a qual reflete uma peculiaridade das expressões matemáticas, chamada regularidade. Essa expressão pode ser implementado em programas usando um autômato finito determinístico, que é uma máquina de estados finitos que não usa retrocesso.

De acordo com Hopcroft (2002)

As álgebra de todos os tipos começam com algumas expressões elementares, normalmente constantes e/ou variáveis. As álgebras então permite construir mais expressões previamente construídas. Em geral, também é necessário algum método para agrupar operadores com seus operandos, tais como parênteses.

A álgebra de expressões regulares segue esse padrão, usando constantes e variáveis que denotam linguagens, e operadores concatenação, união e fecho de Kleene (p. 92).

Desse modo, as expressões regulares podem definir precisamente as mesmas linguagens que as análogas formas de autômatos descrevem as linguagens regulares. Contudo, as expressões regulares apresentam algo que os autômatos não dispõem que é um modo declarativo de expressar strings que deseja aceitar em determinada aplicação. Destarte, as expressões regulares servem como a linguagem de entrada para muitos sistemas que processam strings (HOPCROFT, 2002).

De acordo com Levithan (2011) expressões regulares são definidas como um tipo específico de texto-padrão que é utilizada para o desenvolvimento de vários aplicativos modernos e em linguagens de programação. Seu objetivo é de verificar se dada uma entrada de dados se ela enquadra no padrão definido do texto e assim aceitar somente

entradas de acordo com a formatação estabelecida.

A utilização desta ferramenta pode simplificar bastante tarefas de programação e processamento de texto, além de permitir outras que não seriam possíveis se ela. Em sistemas que trabalham com processamento de cálculos, este recurso é de grande importância, pois o tratamento de validação de entradas junto a sistema ajuda os desenvolvedores a trabalhar com esta validação. Um exemplo bem conhecido em sistemas web que aborda expressões regulares é a validação de e-mail, pois o e-mail utiliza um padrão, exemplo, em regex a validação é

```
1 / ^ ( ( [ ^ < > ( ) \ [ \ ] \ \ . , ; : \ s @ " ] + ( \ . [ ^ < > ( ) \ [ \ ] \ \ . , ; : \ s @ " ] + ) * ) | ( " . + " ) ) @
  ( ( \ [ [ 0 - 9 ] { 1 , 3 } \ . [ 0 - 9 ] { 1 , 3 } \ . [ 0 - 9 ] { 1 , 3 } \ . [ 0 - 9 ] { 1 , 3 } ] ) | ( ( [ a - z A - Z
  \ - 0 - 9 ] + \ . ) + [ a - z A - Z ] { 2 , } ) ) \ $ /
```

Além deste exemplo outras aplicações podem utilizar expressões regulares, tais como: Comandos de pesquisas para identificar resultados, exemplo de utilização em navegadores e também outra aplicação é na geração de analisadores léxicos, ao qual um analisador léxico é o componente de um compilador que divide programa-fonte em unidades lógicas, chamados de *tokens*, de um ou mais caracteres.

2.8 Avaliação de aprendizagem

A prática de avaliar o aprendizado está presente em todos os momentos da vida acadêmica de um estudante, visto que essa prática faz parte dos objetivos das escolas. De acordo com Cacione (2004) a avaliação integra o cotidiano da humanidade desde seus primórdios, visto que o ato remete ao seio de determinar o valor de algo ou de alguém, em que estimam o merecimento de algo. Logo, a avaliação sempre esteve presente nos passos do homem, buscando-o a solucionar questões postas, e assim levando a novas conquistas e descobertas, contudo, essa ação ao mesmo tempo que podem gerar benefícios, podem gerar resultados negativos a vida do homem.

Ao contexto do aprendizado escolar, Libâneo (1990) relata que a avaliação não se restringe somente ao processo de realizar provas e atribuir notas, ela é bem mais complexa, pois tem o papel de cumprir as funções pedagógicas-didáticas que se refere ao papel da avaliação seguindo os objetivos gerais e específicos da educação escola, de diagnóstico e de controle em relação aos níveis de rendimento escolar. E esta é uma tarefa necessária e permeante do trabalho do docente. Desse modo, o autor a define como sendo uma reflexão sobre as condições de qualidade do trabalho dos dois personagens principais da academia, os professores e os alunos.

Já Silva (2015) apresenta um conceito sobre avaliar parecido com o de Libâneo (1990) em que a avaliação não restringe somente no processo de atribuir notas ou conceito para os discentes, mas sim conseguir identificar os espaços que são deixados no decorrer do aprendizado e assim analisar e aplicar estratégias a fim suprir as necessidades identificadas.

Para Datrino (2010) na definição de avaliação existem alguns itens que são considerados elementos chaves, sendo eles: julgamento, apreciação, valoração e qualquer efeito que implicar em julgar. Apesar de avaliar implicar medição, a avaliação é algo que é bem mais abrangente do que simplesmente realizar a medição ou qualificação de alguém para saber se adquiriu os conhecimentos. E os instrumentos de avaliação têm ênfase quantitativa e as notas, obtidos na maioria dos caso por provas, com objetivo de aprovar ou reprovar, não intervindo para o crescimento. Dessarte, o objetivo da avaliação a serviço da ação é em que:

avaliação a serviço da ação não tem por objetivo a verificação e o registro de dados do desempenho escolar, mas a observação permanente das manifestações de aprendizagem para proceder a uma ação educativa que otimize os percursos individuais (HOFFMANN, 2010).

Assim, a avaliação é um processo na qual busca identificar pontos a fim de descobrir se uma determinada pessoa conseguiu absorver algo ou não e para isso, muitas técnicas são aplicadas e dentre elas a mais utilizada é aplicação de provas, que muitas vezes é ineficiente.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo está apresentados os trabalhos correlatos com ênfase em *softwares* com foco no ensino e aprendizagem, que são considerados relevantes para embasamento dessa pesquisa. As seções estão estruturadas em: métodos aplicados e resultados da pesquisa.

3.1 Ensino e aprendizagem de cálculo: a partir do uso de *softwares* matemáticos

A pesquisa de Silva e Alves Silva (2016) apresenta como objetivo analisar as supostas contribuições no ensino e aprendizagem do conceito de derivadas de uma função de uma variável real com a utilização de *softwares* matemáticos.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral por ser de grande importância para os cursos da área de ciências exatas e por apresentar grau de dificuldade no processo do ensino e absorção por parte dos acadêmicos, alguns métodos e estratégias são aplicadas nesse processo para facilitar o ensino e aprendizagem dos acadêmicos. Diante dessa situação, ferramentas tecnológicas como *softwares* são desenvolvidos com esse objetivo e consequentemente reduz os altos índices de reprovações e evasões.

Os autores destacam um ponto importante em relação ao processo de ensino e aprendizagem, que é a metodologia aplicada, onde a metodologia utilizada por parte dos docentes ainda persiste a tradicional, a qual essa é caracterizada pelo o ensino a partir de definições, enunciados, teoremas, demonstrações e exercícios, estando restrito somente ao quadro, giz e apagador. A metodologia faz com que a maioria dos estudantes apenas resolvam questões aplicando fórmulas, que muitas vez são memorizadas somente para resolver durante as avaliações, o que desse modo, não compreendem nenhum dos conceitos envolvidos na resolução do problema. Mas, outra metodologia tem surgido para tentar contornar essa situação que é a com utilização de recursos tecnológicos

3.1.1 Métodos Aplicados

O estudo utilizado pelos os autores abordaram a metodologia qualitativa afim de identificar *softwares* matemáticos, para isso, foi realizada a seleção de trabalhos que tratavam sobre o ensino e aprendizagem de cálculo a partir do uso de *softwares* matemáticos a partir desses trabalhos selecionados os mesmos foram estudados a fim de verificar os *softwares* que contribuíram para o aprendizado.

3.1.2 Resultados

Com a análise realizada pelos os autores Silva (2016) concluiu que a utilização das tecnologias estão cada vez mais presentes e seu uso está crescente nos ambientes da sociedade, especialmente na educação. Constatou também que de acordo, com a escolha de bons *softwares* e aplicação de uma metodologia correta para o ensino, o uso do computador e das tecnologias presentes trazem grandes vantagens para o ensino de cálculo, pois torna o aprendizado dos discentes mais proveitoso em relação a metodologia tradicional aplicada.

3.2 Criação de um *software* de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear

Na dissertação de Rodrigues (2009) é abordada a criação de um *software* para auxiliar no ensino e à aprendizagem de base e dimensão de um espaço vetorial de uma turma de licenciatura de matemática. Segundo o autor, o alto grau de abstração dos assuntos e ao grande volume de informações torna um ponto para os altos índices de reprovações e evasões dos alunos, a partir de tal situação, surge a necessidade de uma intervenção para colaborar no ensino e aprendizagem destes conteúdos. A qual, a partir das intervenções é possível identificar recursos metodológicos para ajudar no aprendizado dos acadêmicos, um exemplo, são *softwares* que são desenvolvidos para amenizar esses altos índices.

3.2.1 Métodos Aplicados

O *software* foi desenvolvido em três módulos, sendo eles: introdução, base e dimensão e para a avaliação do aprendizado por parte dos estudantes foram realizadas separadamente em cada módulo. Os métodos usados para verificar o aprendizado foi avaliação heurística, questionário de satisfação e avaliação de conteúdo.

A avaliação heurística foi aplicada com objetivo de identificar problemas de usabilidade do *software*, o questionário de satisfação teve como objetivo verificar o grau de satisfação do usuário quanto a abordagem do conteúdo pelo *software* e para a avaliação dos conteúdos o autor aplicou duas atividades escritas e individuais a fim de identificar se os alunos conseguiram abstrair o conteúdo apresentado.

3.2.2 Resultados

De acordo com a metodologia e aplicação do *software* com objetivo de verificar se o sistema conseguiria melhorar o aprendizado dos alunos de uma turma de matemática em relação aos conteúdos de Álgebra Linear. Obteve-se como resultados que a partir da utilização do *software* houve melhora no aprendizado dos acadêmicos em que Rodrigues (2009) destaca que os conteúdos propostos no sistema foram compreendidos pela a maioria dos estudantes

participantes. Desse modo, o autor concluiu a partir da análise dos três módulos utilizados no *software* que o mesmo contribuiu para o entendimento dos conceitos.

3.3 O programa GAP como ferramenta de ensino e aprendizagem de Álgebra e uma reflexão das dificuldades da disciplina Álgebra I

Na presente pesquisa realizada por Santos (2014) são destacados pontos importantes no que tange ao aprendizado de uma turma de alunos do curso de Licenciatura de Matemática em específico da turma de Álgebra Linear I na Universidade Federal do Goiás, a qual a motivação dos autores partiu pelos os altos índices de desistência da citada disciplina. Partindo dessa situação o objetivo do estudo foi buscar novas metodologias para auxiliar no ensino e aprendizagem dos acadêmicos.

Com o advento das ferramentas tecnológicas, trouxe consigo novas formas de aprendizados e diante, os autores explanam que essas ferramentas modificam a forma como o aprendizado acontece, visto o que antes era somente o modelo tradicional aplicado para o ensino. Onde nesse modelo consiste em uma sala de aula em que o professor possui todo o conhecimento e os alunos são passíveis no ensino e os únicos recursos para o ensino presente são somente um quadro, giz e apagador. Mas com a era das ferramentas tecnológicas esses recursos foram alterados e o aprendizado dos estudantes começaram a romper as barreiras que antes estavam restritos somente a sala de aula.

3.3.1 Métodos Aplicados

A pesquisa apresentou como enfoque investigar as vantagens da utilização de tecnologias no ensino superior com o *software* GAP (*Groups, Algorithms, Programming - System for Computational Discrete Algebra*) para auxiliar no aprendizado. Para a análise foi aplicados questionários e entrevistas a fim de identificar pontos chaves em relação ao aprendizado dos estudantes, ao qual esses foram aplicados antes de uma aula no modelo tradicional e logo depois outra aula já com a utilização de ferramentas tecnológicas. Quanto a utilização do *software* GAP, inicialmente os pesquisadores participaram de uma aula de forma tradicional e depois os mesmos participaram e prepararam de uma já com a utilização do *software* GAP com objetivo de facilitar e motivar o processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Álgebra Linear.

3.3.2 Resultados

Com a utilização do *software* GAP houve despertar, curiosidades e motivação dos alunos em relação a disciplina. E diante das análises realizadas através dos questionários e entrevistas bem como nas aulas com a utilização do GAP trouxe pontos positivos no aprendizados dos acadêmicos.

4 METODOLOGIA

No decorrer deste capítulo estão descritos as aplicações das técnicas para avaliação do aprendizado dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear do curso de Ciência da Computação da Universidade Federal do Tocantins, bem como também a Engenharia de *Software* abordada para o desenvolvimento da plataforma e os recursos aplicados para o desenvolvimento do *software*. O objetivo desse é demonstrar as metodologias adotadas para a avaliação do aprendizado do alunos e englobando o desenvolvimento das funcionalidades do *software* AlfaGebra.

A estrutura deste capítulo está dividido em duas seções principais, sendo elas: Avaliação do aprendizado e desenvolvimento da plataforma, e nelas estão incluídos subseções que são de grande importância para o entendimento do funcionamento.

4.1 Avaliação do aprendizado

Dentre os objetivos da pesquisa está em avaliar o aprendizado dos acadêmicos a partir da utilização da plataforma de ensino e aprendizagem intitulada AlfaGebra, e para esse fim, foram estudadas as turmas de Álgebra Linear do curso de Ciência da Computação dos períodos 2017-1 e 2017-2. A turma de 2017-1 não utilizou o *software* no decorrer do período para seus estudos e a de 2017-2 utilizou *software* no decorrer dos seus estudos. Entre ambas as turmas foi comparado o nível de aprendizado, a fim de identificar se a partir da utilização da plataforma houve melhora no aprendizado da turma que utilizou a ferramenta ou não. É importante salientar que para as duas turmas o professor ministrante foi o mesmo, tornando por conseguinte um ponto de grande importância, pois a metodologia aplicada na turma que não utilizou o sistema foi a mesma aplicada na turma que utilizou, destacando o ponto que diferencia só no quesito de utilização do sistema.

Para a metodologia de avaliação do desempenho dos acadêmicos foi aplicado a pesquisa-ação, que é um método de pesquisa em campo, ao qual os dados são coletados no local em que ocorrer o problema, por meio de questionários e/ou entrevistas, mas a presente pesquisa em questão abordou a aplicação de questionários. Um ponto de destaque nessa metodologia é que ela trata de um estudo de forma qualitativa e quantitativa, pois o objetivo da avaliação é verificar melhora no aprendizado dos estudantes e assim diminuir os índices de evasões. Nas etapas iniciais da pesquisa, foi realizado um estudo nos três últimos semestre a fim de identificar o quantitativo de alunos reprovados por faltas, aprovados por notas e reprovados por notas, para assim verificar os índices de reprovações que a disciplina apresentou.

Para a realização desse objetivo foi aplicado o método de avaliação dos acadêmicos

através de coletas de dados e como instrumentos de geração de dados foram aplicados questionários de acordo com as especificações descritas a seguir:

1. Questionário base - nessa etapa foi aplicado um questionário base com perguntas objetivas de múltiplas escolhas e discursivas com foco em identificar o perfil dos estudantes, tais como a quantidade de vezes que o estudante está realizando a disciplina, os métodos que são aplicados para o aprendizado dos conteúdos abordados na disciplina, dificuldade encontrada na disciplina, se a aplicação de recursos tecnológicos facilitaria o aprendizado, entre outras questões relevantes, vide Apêndice II. Importante ressaltar que esse questionário foi aplicado junto a turma de Álgebra Linear que não utilizou o *software* como ferramenta de aprendizagem.
2. Questionário avaliação - na presente etapa foram aplicados três questionários (um para cada módulo do sistema) com objetivo de identificar melhora no aprendizado dos acadêmicos, com perguntas semelhantes a etapa anterior, tais como: a partir da utilização da plataforma houve melhora no seu aprendizado, como seria seu aprendizado sem a plataforma, e perguntas mais específicas a respeito dos módulos da plataforma, para que assim os pesquisadores possam ter uma visão de como o sistema está sendo aceito pelos os estudantes, vide anexos III e IV. É importante destacar que o questionário foi aplicado junto a turma de Álgebra Linear que utilizou a plataforma como recursos tecnológicos para o aprendizado.

Para a coleta e aplicação dos questionários foram realizadas três visitas a turma pelo o pesquisador, sendo a primeira para apresentar o sistema e explicar como seria seu funcionamento. A segunda visita foi logo após a aplicação da primeira avaliação da disciplina referente ao conteúdo de sistemas de equações lineares, visto que os estudantes utilizaram o sistema durante o período que antecedia a primeira prova para o estudo e nessa segunda visita foi aplicado o questionário de Sistemas de Equações Lineares. A terceira visita também foi realizada logo após a aplicação da segunda avaliação da disciplina referente ao conteúdo de espaço vetorial e neste foi aplicado o questionário de espaço vetorial.

4.2 Desenvolvimento da Plataforma

Para o desenvolvimento da plataforma AlfaGebra algumas etapas foram aplicadas para a conclusão do sistema. Inicialmente, foi desenvolvido o documento de especificações de requisitos, vide Apêndice I, ao qual de acordo com Sommerville (SOMMERVILLE, 2013) esse documento abrange as características do sistema, tais como o que o sistema deve fazer, as propriedades emergentes desejáveis e essenciais e as restrições quanto à operação do sistema e aos processos de desenvolvimento de *software*. Após, foi realizado

a prototipagem das telas, a fim de criar os esboços do sistema que ofereceu suporte para o desenvolvimento do sistema.

Com as etapas supracitadas concluídas, foi iniciado o desenvolvimento do código fonte do *software* e com a conclusão do sistema foi realizado o teste de usabilidade, com objetivo de verificar junto aos usuários a facilidade que o *software* apresenta ao usar. É importante enfatizar que no decorrer do desenvolvimento do sistema foram realizados testes de funcionalidades, isso nos módulos já concluídos a fim de encontrar falhas e serem corrigidas e para identificar esses pontos, no próprio sistema foi adicionado o item comentários para que assim o estudante venha contribuir com suas sugestões/críticas e os desenvolvedores pudesse ter um *feedback*, a fim de está buscando melhorar.

4.2.1 Conteúdos matemáticos abordados na plataforma AlfaGebra

Nesta seção estão descritos os conteúdos que estão abordados no *software*, tanto para sistemas de equações lineares como espaço vetorial. Todo o conteúdo abordado segue o plano de ensino da disciplina de Álgebra Linear do curso de Ciência da Computação.

4.2.1.1 Sistemas de equações lineares:

- 1) Operações elementares;
- 2) Matriz forma escada ou linha reduzida;
- 3) Teorema sistema de equações lineares;
- 4) Soluções de Sistema de n equações lineares com m variáveis;
- 5) Método de Gauss

4.2.1.2 Espaço Vetorial:

- 1) Espaços Vetoriais;
- 2) Subespaços vetoriais;
- 3) Combinação Linear;
- 4) Subespaço gerado;
- 5) Dependência e Independência Linear
- 6) Base de um espaço vetorial
- 7) Matriz de mudança de base

A plataforma apresenta material teórico sobre cada tópicos e exercícios resolvidos para que os acadêmicos possam entender todos os conceitos necessários relacionados a cada assunto. Além de todo o conteúdo teórico, o estudante pode interagir com a mesma, onde entra com expressão a ser resolvida e o sistema resolve mostrando a descrição de como foi resolvido o problema em questão. Com essa abordagem possibilita aos acadêmicos um aprendizado teórico, prático e dinâmico.

4.2.2 Ambiente Computacional

No decorrer desta seção são demonstrados os ambientes computacionais que foram utilizados para o desenvolvimento da plataforma de ensino e aprendizagem. Para identificação das tecnologias a serem utilizadas, foi realizado um estudo junto as principais tecnologias presente no mercado que fossem *open source* e que possibilitaria o desenvolvimento de um sistema flexível e que viabilizasse o gerenciamento do *software* em equipe. De acordo, com a pesquisa foi escolhido como ferramenta de versionamento de código o GIT⁶ e para hospedagem foi escolhida o sistema Bitbucket⁷, devido o mesmo possibilitar a criação de repositórios remotos de acesso privado, mas é importante ressaltar que após a conclusão do AlfaGebra, o objetivo é disponibilizar o código fonte para a comunidade de programadores, visto que um dos requisitos desse sistema é que ele seja educativo e com código fonte aberto.

Para o desenvolvimento da plataforma foi aplicada a linguagem de programação Javascript, juntamente com alguns *frameworks* para facilitar o desenvolvimento e como editor de código fonte o Visual Studio Code foi utilizado para toda a codificação do sistema. O fluxo de programação do sistema iniciou a partir do computador de desenvolvimento, em que nele estão instaladas as ferramentas necessárias para todo o desenvolvimento.

A figura 4.1 apresenta o fluxograma de desenvolvimento do *software*, na qual a prototipação foi a etapa de criação das telas que apresentara o sistema e as suas funcionalidades, na etapa de codificação foi iniciada a implementação do sistema e em cada tarefa concluída de acordo com a metodologia ágil *Scrum*, essa será submetida a testes, assim caso não apresente falhas, a tarefa estará concluída, mas caso o contrário irá retornar para a etapa de codificação para solucionar o problema.

4.2.3 Métodos

Nesta seção são demonstrados os métodos aplicados para o desenvolvimento da plataforma de ensino e aprendizagem AlfaGebra, com objetivo de explanar detalhadamente como foi desenvolvido cada etapas, a qual foram: prototipagem das telas, aplicação da metodologia de desenvolvimento ágil *Scrum* e teste de usabilidade.

⁶GIT <<https://git-scm.com/>>

⁷Bitbucket <<https://bitbucket.org/product>>

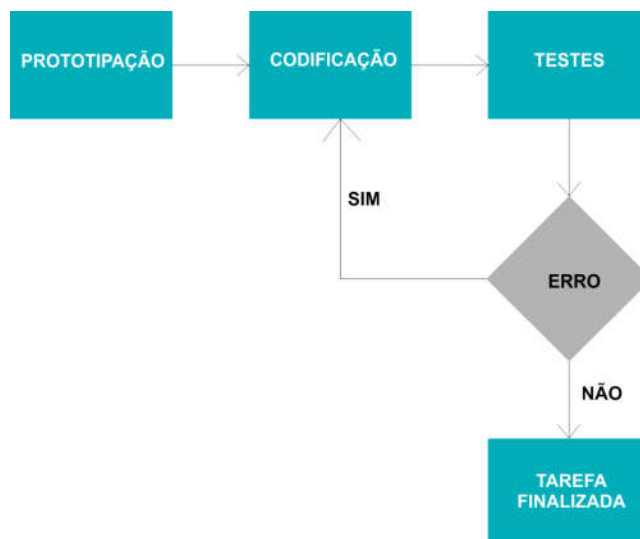


Figura 4.1 – Fluxo do desenvolvimento do AlfaGebra

4.2.3.1 Prototipagem - Desenho das telas

Para a realização da prototipagem das telas, foram desenhadas à mão e com aplicação web figma para gerar os esboços das telas e uma vez os desenhos concretizados ofereceu suporte para os programadores no decorrer do desenvolvimento.

4.2.3.2 Desenvolvimento Ágil (*Scrum*)

Com a aplicação do *framework* de desenvolvimento ágil *Scrum* tornou possível organizar todas as tarefas de programação da plataforma AlfaGebra, de forma a ter um desenvolvimento intuitivo e organizado. Para a aplicação deste *framework* foi utilizada a ferramenta de gerenciamento de projetos colaborativa, Trello¹¹, em virtude da mesma apresentar características como, por exemplo, de ser ajustada de acordo com as necessidades dos usuários.

Para esse projeto a estrutura de representação das tarefas foram divididas em 4 (quatro) colunas, sendo tarefas a fazer, em desenvolvimento, finalizadas e em testes. Na coluna de tarefas a fazer estão descritas todas as tarefas que serão realizadas para a conclusão do projeto. Na tarefa em desenvolvimento são descritas todas as tarefas que foram iniciadas com a implementação, mas que ainda não foram concluídas, na finalizada são descritas todas as tarefas que foram finalizadas e por fim, a coluna em testes são as tarefas que foram finalizadas, mas que estão em teste para verificar alguma falha no seu funcionamento.

Diante das informações supracitadas todas as tarefas foram baseadas na metodologia de desenvolvimento ágil, ao qual *framework Scrum*, a partir do conceito dos *backlog* e das demandas a serem entregadas a partir das definições dos *sprints* e o acompanhamento

¹¹Trello <<https://trello.com>>

do projeto foi realizado periodicamente em reuniões com a equipe do projeto.

4.2.4 Ferramentas e Materiais

Nesta seção são descritas as ferramentas tecnológicas utilizadas para a construção da plataforma de ensino e aprendizagem.

4.2.4.1 Ferramentas e Materiais para sistema web

- *Framework Bootstrap*¹²

O presente *framework front-end* é um kit de ferramentas de código aberto para desenvolvimento com HTML, CSS e JS. Ele facilita no desenvolvimento de sites, o mesmo apresenta tecnologia mobile (responsivo) e possui uma diversidade de componentes (*plugins*) em Javascript que auxiliam o *designer* a implementar recursos.

- *Chartist*¹³

Chartist é uma biblioteca para geração de gráficos especificamente para a linguagem de programação Javascript, ela cria gráficos responsivos com HTML5 e Javascript, através desta biblioteca é possível criar gráficos com animações, tornando assim mais atrativo para o usuário visualizar melhor os resultados que o gráfico quer passar.

- *pdfmake*¹⁴

Para a criação pdfs a partir dos resultados do processamento do cálculo foi utilizado a biblioteca pdfmake. Essa biblioteca gera pdf a partir do código fonte e também pode atribuir folha de estilo (css), o que foi um do propósito para sua escolha ao utilizar. Ele é um cliente/servidor para impressão de pdf com a linguagem de programação Javascript.

4.2.4.2 Ferramentas e Materiais para aplicativo *mobile*

- *Ionic*¹⁵

Ionic é um *framework* para desenvolvimento de aplicativos *mobile*, que usa a abordagem de desenvolvimento híbrido, ou seja, utiliza as tecnologia de desenvolvimentos web para sua criação. Essa ferramenta apresenta diversas bibliotecas para simplificar o desenvolvimento e ajudando a produzir apps com um visual agradável, ele usa as tecnologia de desenvolvimento Typescript e Angular. Um ponto de grande diferença dessa tecnologia é que é possível criar aplicativo para diversas plataformas, tais como Android, IOs, Windows Phone, etc.

¹²Bootstrap <<https://getbootstrap.com/>>

¹³Chartist <<https://gionkunz.github.io/chartist-js/>>

¹⁴pdfmake <<http://pdfmake.org/#/>>

¹⁵Ionic <<https://ionicframework.com/>>

- *Angular*¹⁶

Angular é um *framework* em Javascript para criação de aplicativos para qualquer destino de implantação. Para *web*, *mobile web*, *mobile* nativo e *desktop* nativo.

¹⁶Angular <<https://angular.io/>>

5 RESULTADOS

No presente capítulo está descrita a apresentação da ferramenta AlfaGebra, demonstrando sua estrutura e funcionalidades, além deste são descritos os resultados qualitativos e quantitativos obtidos no decorrer da aplicação dos questionários de avaliação do aprendizado dos estudantes da disciplina de Álgebra Linear que não utilizaram a plataforma AlfaGebra e os que utilizaram.

Com foco em organizar a estrutura desse capítulo, o mesmo foi dividido em três seções principais, sendo uma referente ao sistema, outra com dados referente da disciplina nos semestres de 2015-2, 2016-1 e 2016-2, e por fim a avaliação do aprendizado dos estudantes.

5.1 Sistema AlfaGebra

A Universidade Federal do Tocantins (UFT) apresenta em seu catálogo de cursos em diversas áreas, tais como: saúde, meio ambiente, tecnologia da informação, engenharia, entre outros e dentre essas áreas existem a presença dos cursos que dispõem em sua estrutura curricular disciplinas matemáticas e em especial a de Álgebra Linear, como engenharia Civil, Elétrica, Alimentos e Biotecnológica e também nos cursos de matemática e Ciência da Computação.

Na maioria dos cursos a disciplina de Álgebra Linear é ofertada no terceiro período e semestralmente são atendidos aproximadamente 280 (duzentos e oitenta) alunos em todos os *campi*. Em relação a estrutura curricular em cada curso apresenta uma pequena variação, mas todos dispõem dos conteúdos de sistemas de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares.

O curso de Ciência da Computação na Universidade Federal do Tocantins, apresenta em sua estrutura curricular a disciplina de Álgebra Linear, a qual é ofertada no terceiro período e apresenta como objetivo introduzir os conceitos fundamentais da Álgebra Linear para que assim os acadêmicos possam adquirir conhecimentos e aplicá-los para resoluções de problemas ligados a computação, por exemplo, a computação gráfica que aborda muitos dos conceitos e implementações utilizadas na Álgebra Linear.

A disciplina se desenvolve em um semestre, com carga horária de 60h, sem a exigência de pré-requisito e apresenta como conteúdos principais sistemas de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares.

Semestralmente a coordenação do curso de Ciência da Computação oferta 40 vagas e na grande maioria todas são preenchidas, contudo nem todos os alunos concluem a disciplina o que é demonstrado pelos índices de evasões que são elevados semestralmente.

De acordo com as informações supracitadas e com objetivo de auxiliar no apren-

dizado dos estudantes do curso de Ciência da Computação referente aos conteúdos da Álgebra Linear foi desenvolvido a plataforma AlfaGebra. A plataforma é um sistema web totalmente *responsivo*, ou seja, se adapta a vários modelos de dispositivos. Ela é um sistema de cálculo para a área de Álgebra Linear, a qual está dividida em três módulos, sendo eles: Sistema de Equações Lineares, Espaços Vetoriais e Transformações Lineares. Cada módulo apresentam dois tópicos, um para que o estudante forneça a expressão e o sistema realiza o processamento do cálculo para obter o resultado e o outro é de material de estudo, onde o acadêmico encontra materiais de estudos, vídeo-aulas, exercícios resolvidos etc., todos estes recursos implementados no sistema possibilitam aos acadêmicos um aprendizado teórico, prático e dinâmico. Além do sistema web existe uma aplicação *mobile*, em versão para o sistema operacional Android e encontra disponível na loja de aplicativos da Google, o Google Play.

A **Figura 5.1** representa a estrutura do sistema e suas divisões, onde o sistema inicia com a página inicial e através dela é possível acessar os módulos de sistemas de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares, cada módulo apresentam dois itens, calcular expressões e material de estudos, além disso apresentam o item documentação, as quais serão detalhados nas seções seguintes.

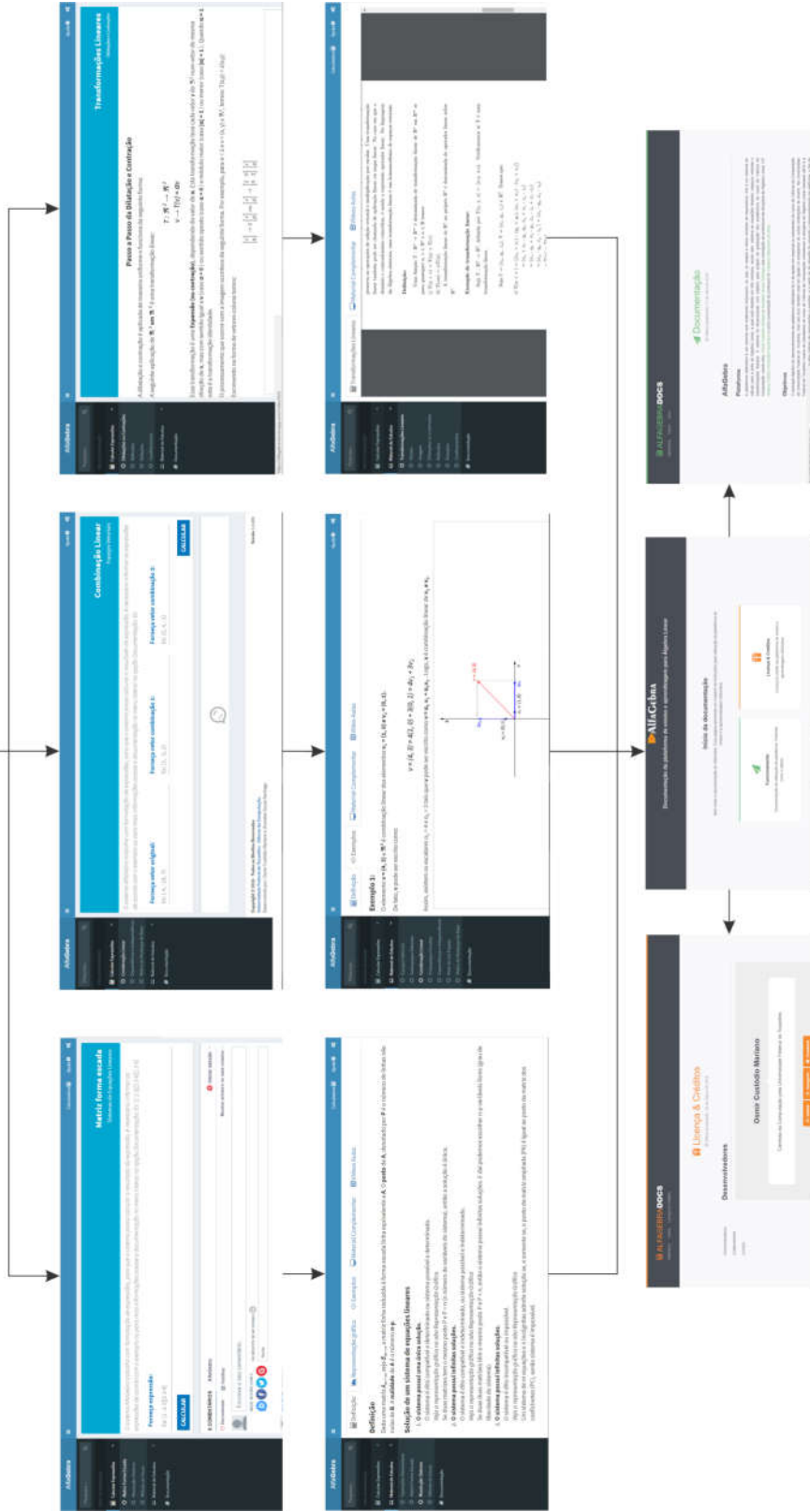


Figura 5.1 – Fluxo sistema AlfaGebra

5.1.1 Página Inicial

O sistema está hospedado em um servidor gratuito e pode ser acessado diretamente pelo link <https://alfagebra.herokuapp.com>. A **Figura 5.2** mostra a primeira tela do sistema, onde é através dela que é possível realizar acesso aos módulos do sistema, sendo eles sistemas de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares, além do acesso aos módulos é possível obter informações mais detalhadas sobre a plataforma, como descrições do que é o sistema e também nesta página encontra o link para baixar o aplicativo *mobile* para o sistema operacional Android.

Para o desenvolvimento desta tela, buscou desenvolver uma página de fácil acesso aos recursos principais do sistema, que são os módulos, por isso os links para eles encontram no topo da página e sempre que o *scroll* é acionado os links sempre ficam visíveis, além disso apresenta descrição do que é a plataforma e o que ele apresenta, para que quando quando o usuário acessar possa ter uma noção do que consiste o sistema.



Figura 5.2 – Página inicial da plataforma AlfaGebra

5.1.2 Módulo Sistemas de Equações Lineares

O presente módulo está dividido em três partes, sendo elas: Calcular Expressões, Material de Estudo e Documentação. No item de Calcular Expressões o acadêmico fornece expressões de acordo com o padrão que o sistema aceita para que assim possa realizar o processamento do resultado e mostrar o passo a passo da resolução, neste item está subdividido em três tópicos dos conteúdos, sendo matriz forma escada, resoluções de sistemas de equações lineares e método de Gauss. O outro item é referente ao Material de Estudo, nele encontram os materiais para aprendizado dos conteúdos, como exercícios resolvidos, definição de cada conteúdos, material complementar de instituições de ensino renomada

e videoaulas. Este item foi desenvolvido com objetivo de um melhor aprendizado para os discentes em relação a parte teórica dos conteúdos.

No item de Material de Estudos, os conteúdos disponíveis para os acadêmicos consistem em operações elementares, matriz forma escada, resolução de sistemas de equações lineares e método de Gauss e Calcular expressões os conteúdos disponíveis para processamentos, são operações elementares, resolução de sistemas e método de Gauss.

As **Figuras 5.3** e **5.4** mostram as telas do módulo, sendo que elas referem-se ao item de Calcular Expressão, em que é demonstrado o campo para inserir a expressão e outra mostrando o resultado do processamento de uma entrada fornecida, com o passo a passo da resolução. Já as **Figuras 5.5** e **5.6** são referentes ao item do Material de Estudo, a qual demonstra como este está estruturado em cada conteúdo, sendo cada dividido em ambas com o tópico específico.

Figura 5.3 – Item de seção de cálculo de expressões

RESULTADO

Processamento da resolução do cálculo da matriz forma escada

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 2.0 & 3.0 & -5.0 & 6.0 & \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 & 4.0 & \\ -3.0 & 0.0 & 3.0 & 2.0 & \end{array} \right|$$

Aplicando a operação elementar da **multiplicação** na **linha 0** para a resolução. Tem-se o seguinte cálculo e nova matriz gerada:

$$L_0 \leftarrow 1/2 * L_0$$

$$\begin{aligned} 1/2 * 2 &= 1 \\ 1/2 * 3 &= 1.5 \\ 1/2 * -5 &= -2.5 \\ 1/2 * 6 &= 3 \end{aligned}$$

Nova matriz após o cálculo:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1.0 & 1.5 & -2.5 & 3.0 & \\ 2.0 & 3.0 & 4.0 & 4.0 & \\ -3.0 & 0.0 & 3.0 & 2.0 & \end{array} \right|$$

Aplicando a operação elementar da **substituição** na(s) linha(s) abaixo para a resolução. Tem-se o seguinte cálculo e nova matriz gerada:

$$L_1 \leftarrow L_1 - (2 * L_0)$$

$$\begin{aligned} 2 - (2 * 1) &= 0.0 \\ 3 - (2 * 1.5) &= 0.0 \\ 4 - (2 * -2.5) &= 9.0 \\ 4 - (2 * 3) &= -2.0 \end{aligned}$$

Figura 5.4 – Item de seção de cálculo de expressões com passo a a passo da resolução

AltaGebra

Definição

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times p}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A . O **posto** de A , denotado por P é o número de linhas não nulas de B . A **nulidade** de A é o número $n-p$.

Solução de um sistema de equações lineares

- O sistema possui uma única solução.**
O sistema é dito compatível e determinado ou sistema possível e determinado.
Veja a representação gráfica na aba *Representação Gráfica*
Se duas matrizes tem o mesmo posto P e $P = n$ (n número de variáveis do sistema), então a solução é única.
- O sistema possui infinitas soluções.**
O sistema é dito compatível e indeterminado, ou sistema possível e indeterminado.
Veja a representação gráfica na aba *Representação Gráfica*
Se duas matrizes têm o mesmo posto P e $P < n$, então o sistema possui infinitas soluções. E daí podemos escolher $n-p$ variáveis livres (grau de liberdade do sistema).
- O sistema possui infinitas soluções.**
O sistema é dito incompatível ou impossível.
Veja a representação gráfica na aba *Representação Gráfica*
Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada (PA) é igual ao posto da matriz dos coeficientes (PC), senão sistema é impossível.

Figura 5.5 – Item de seção de material de estudos de sistemas de equações lineares

5.1.3 Módulo Espaços Vetoriais

No presente item é onde são realizados o processamento dos cálculos envolvendo espaços vetoriais e assim como Sistemas de Equações Lineares está dividido em três partes, sendo Calcular Expressão, Material de Estudo e Documentação. Atualmente este item de calcular expressão apresenta dois subitens, sendo eles Combinação Linear e Dependência e Independência Linear a qual, é através dele que os acadêmicos podem fornecer expressões para que o sistema possa realizar o processamento do cálculo.

AlfaGebra

Definição Representação gráfica Exemplos Material Complementar Vídeos Aulas

Exemplos

1 Resolução de Sistemas de Equações Lineares

A seguir estão apresentados alguns exemplos de resoluções de equações lineares com a aplicação de matriz forma escada para obter o resultado.

Exemplo 01:

$$\begin{cases} 3x + 5y & = 1 \\ 2x & + z = 3 \\ 5x + y - z & = 0 \end{cases}$$

Resolução

Os seguintes passos serão realizados para obter o resultado do sistema, sendo que, inicialmente será extraída a matriz do sistema informado, depois verificar Posto da matriz ampliada (PA) e Posto da matriz dos coeficiente (PC). Desse modo, segue a resolução.

Figura 5.6 – Item de seção de material de estudos de sistemas de equações lineares

AlfaGebra

Combinação Linear

Espaços Vetoriais

O sistema AlfaGebra trabalha com formatação de expressões, para que o sistema possa calcular o resultado da expressão, é necessário informar as expressões de acordo com o exemplo ou para mais informações acesse a documentação no menu lateral na opção Documentação. Ex:

Forneça vetor original: Ex: (-4, -18, 7)

Forneça vetor combinação 1: Ex: (1, -3, 2)

Forneça vetor combinação 2: Ex: (2, 4, -1)

CALCULAR

39 COMENTÁRIOS AlfaGebra

Escreva o seu comentário...

Cássia Gabriela · há 2 dias
Ótima ferramenta, me ajudou muito no primeiro conteúdo, encontrei alguns erros porém já falei nos comentários! Parabéns pelo site, muito bom!

Antonio de Fátima · há 2 dias
Uma ótima ferramenta para auxiliar nos estudos, nos buscou pelo resultado e no passo a passo da resolução. A minha única observação é no futuro adicionarem operações que envolvam incógnitas, pois várias questões trazem o uso das mesmas. Não identifiquei nenhum erro e nenhum problema em entender o resultado das questões. Estou de parabéns a equipe!

Marcos Vinícius · há 2 dias
Ao longo dos estudos consegui ver a evolução no sistema. Tive alguns pequenos bugs em relação ao ajuste de alguns componentes na versão mobile do Chrome, mas que agora estão solucionados. Quanto ao módulo de cálculos, consegui suprir minhas necessidades, no qual foi proposto. Atualmente o ponto que vejo para melhoria, é apenas um pequeno erro que o (Chrome mobile pelo ai menos) indica que se trata de uma página insegura (nos quais dados sensíveis podem estar em risco) aparece logo após o login no sistema de comentários, provavelmente algum ajuste no dia.

Figura 5.7 – Item de seção de cálculo de expressões

O item de material de estudo do módulo está dividido nos seguintes conteúdos: espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, subespaços gerados, dependência e independência linear, base de um espaço vetorial e matriz mudança de base.

As Figuras 5.7 e 5.8 mostram como é a estrutura em relação ao item calcular expressões e as Figuras 5.9 e 5.10 mostram como é a estrutura em relação ao item material de estudo.

Processamento da resolução de combinação linear

Vetores fornecidos:
 $V = (-4, 18, 4)$
 $V_1 = (1, -3, 2)$
 $V_2 = (2, 4, -1)$

Para escrevermos o $V = (-4, 18, 4)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$. Desse modo, é necessário encontrar as constantes a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$

Assim, pretende-se que:
 $V = a_1v_1 + a_2v_2$
 sendo a_1 e a_2 escalares a determinar. Então, devemos ter:
 $(-4, 18, 4) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$
 $(-4, 18, 4) = (1a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -1a_2)$
 $(-4, 18, 4) = (1a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - 1a_2)$ (*)

A partir de (*) pela a condição da igualdade de dois vetores, resulta o sistema e após para sua resolução será aplicado o método de escalonamento matriz forma escada para verificar se os vetores são combinação linear. Desse modo, o sistema é:

$$\begin{aligned} 1a_1 + 2a_2 &= -4 \\ -3a_1 + 4a_2 &= 18 \\ 2a_1 - 1a_2 &= 4 \end{aligned}$$

A partir do sistema será gerado uma matriz para o processamento do cálculo da matriz forma escada

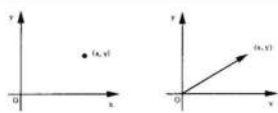
$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1.0 & 2.0 & -4.0 & \\ -3.0 & 4.0 & 18.0 & \\ 2.0 & -1.0 & 4.0 & \end{array} \right|$$

Figura 5.8 – Item de seção de cálculo de expressões com passo a passo da resolução

AlfaGebra

Definição

Definição:
 A definição de espaço vetorial que veremos adiante faz uso da ideia de operações definidas sobre um conjunto. Iniciaremos explorando esta noção. Sabe-se que o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como o plano cartesiano. O par ordenado (X, Y) pode ser um ponto ou um vetor, e isso pode ser visualizado na Figura 2.1:



Essa ideia se estende ao espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto \mathbb{R}^3 . embora se perca a visão geométrica, é possível estender essa ideia a espaços $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^n$. Um conjunto não vazio V , munido das operações de adição e multiplicação por escalar, isto é, para todo $u, v \in V$ e todo $a \in \mathbb{R}$, tal que $u + v \in V$ e $au \in V$ é denominado de um espaço vetorial sobre \mathbb{R} se para todo $u, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedades forem satisfeitas:

Operações de adição

- A_1 : $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Associatividade)
- A_2 : $u + v = v + u$ (Comutatividade)
- A_3 : $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u + 0 = u$ (Elemento Neutro)
- A_4 : $\forall u \in V$, existe $-u \in V, u + (-u) = 0$ (Elemento Oposto)

Operações de multiplicação

- M_1 : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (Associatividade)
- M_2 : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (Distributividade)
- M_3 : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributividade)
- M_4 : $1 \cdot u = u$ (Elemento neutro)

Figura 5.9 – Item de seção de material de estudos espaços vetoriais

5.1.4 Ferramenta AlfaGebra: ajuda ao usuário

A página da documentação do sistema foi desenvolvida com objetivo de auxiliar os estudantes a respeito da utilização da plataforma, visto que em cada módulo a inserção de expressões para o processamento de cálculos são diferentes. Nela encontram-se instruções de como utilizar o sistema e descreve todo o funcionamento, e além disso a mesma apresenta as páginas de créditos e licença dos autores do projeto.

As Figuras 5.11 mostra como é a estrutura da página da documentação, sendo a tela inicial da documentação, em que nela terá acesso ao funcionamento e aos crédito do

AlfaGebra

Definição Exemplos Material Complementar Vídeo Aulas

Exemplo 1:
 Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$.
 Mostre que S é um subespaço vetorial de V .

1. Evidentemente $S \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in S$.
2. Sejam $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$? De fato:
 Se $u \in S \Rightarrow u = (x_1, 2x_1)$.
 Se $v \in S \Rightarrow v = (x_2, 2x_2)$.
 Logo $u + v = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$.
 Assim, $u + v \in S$, pois a segunda componente é o dobro da primeira.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in S \Rightarrow \alpha u \in S$?
 $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in S$.

Portanto S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 e, representa uma reta que passa pela origem
 Se somarmos dois vetores que estão sobre a reta, a resultante é um vetor que está sobre a reta.
 Se multiplicarmos um vetor da reta por um número real, teremos como resultante um vetor que está sobre a reta.

Figura 2.1: Subespaço Vetorial

Figura 5.10 – Item de seção de material de estudos espaciais

sistema e colaboradores, no item do funcionamento é possível encontrar todas as informações referentes ao funcionamento da ferramenta, bem como para cada item é fornecido uma expressão com padrões diferentes.

AlfaGebra

Documentação da plataforma de ensino e aprendizagem para Álgebra Linear

Início da documentação

Bem vindo a documentação do AlfaGebra. Essa página apresenta um conjunto de instruções para utilização da plataforma de ensino e a aprendizagem AlfaGebra.

Funcionamento
 Documentação da utilização da plataforma.
 Entenda como a utilizar.

Licença & Créditos
 Licença & crédito da plataforma de ensino e aprendizagem AlfaGebra.

Figura 5.11 – Tela inicial da documentação do sistema

5.1.5 Ferramenta AlfaGebra como auxílio para aprendizado

A ferramenta foi desenvolvida com objetivo de ser uma ambiente didático, em que ajudasse os acadêmicos no aprendizado dos conteúdos da disciplina de Álgebra Linear, desse modo, todo o processamento de cálculo que é possível realizar através da mesma, é demonstrado o passo a passo do cálculo. A seguir será demonstrado como o sistema processa um resultado de uma determinada expressão.



Figura 5.12 – Campo de inserção de expressão para processamento de cálculo

A **Figura 5.12**, mostra a tela do sistema do módulo de sistemas de equações lineares, em específico ao conteúdo de resolução de sistemas de equações lineares. A expressão que pode visualizar é uma matriz que foi utilizada para exemplificar como o sistema processa o cálculo e mostra de forma didática a resolução. Após a inserção da expressão o acadêmico pode acionar o botão calcular para assim a ferramenta realizar o processamento.

Na **Figura 5.13** mostra que após clicar em calcular expressão a ferramenta processa o cálculo e mostra o passo a passo com descrição detalhada mostrando todas as etapas que é preciso seguir para chegar ao resultado final. Na presente imagem mostra o início do cálculo. Já na **Figura 5.14** mostra o resultado final da expressão e sua conclusão a respeito da entrada fornecida. A partir da visualização desses dados mostra que a ferramenta que foi desenvolvida resolve os problemas de forma didática, diferentemente da ferramenta que foi citada no Capítulo 4 que não mostra o passo a passo da resolução e sim somente o resultado final.

5.1.6 Aplicativo *mobile* AlfaGebra

Aplicativo *mobile* são *software* que são desenvolvidos especialmente para aparelhos móveis, tais como smartphones, tablets, palmtops e outros, ao qual esses *software* são

RESULTADO

Sistema de equação fornecido

$$\begin{aligned} -2a+3b+4c &= 5 \\ 0a-9b-7c &= 2 \\ 1a+2b-3c &= 4 \end{aligned}$$

Processamento da resolução do cálculo

Para a resolução do sistema fornecido é necessário inicialmente extrair a matriz dos coeficientes do sistema de acordo com os valores das variáveis:

$$\begin{array}{cccc|c} -2.0 & 3.0 & 4.0 & 5.0 & \\ 0.0 & -9.0 & -7.0 & 2.0 & \\ 1.0 & 2.0 & -3.0 & 4.0 & \end{array}$$

Aplicando a operação elementar da **multiplicação** na **linha 0** para a resolução. Tem-se o seguinte cálculo e nova matriz gerada:

$$L_0 \rightarrow 1/-2 * L_0$$

Figura 5.13 – Passo a passo da resolução da expressão

Nova matriz após o cálculo:

$$\begin{array}{cccc|c} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -4.3 & \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.3 & \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.9 & \end{array}$$

Matriz forma escada da expressão fornecida é:

$$\begin{array}{cccc|c} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -4.3 & \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.3 & \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.9 & \end{array}$$

Com a matriz forma escada encontrada, deve-se verificar o **posto da matriz ampliada (PA)**, o **posto da matriz dos coeficientes (PC)** e **número de variáveis (N)**. Assim, temos:

$$\begin{aligned} PC &= 2 \\ PA &= 3 \\ N &= 3 \end{aligned}$$

Como o **posto da matriz ampliada** é igual a 3, **posto da matriz dos coeficientes** é igual a 2 e o **número de variáveis** é igual a 3, **que são** são diferentes. Logo, o **SISTEMA É IMPOSSÍVEL e não EXISTE SOLUÇÃO**.

Figura 5.14 – Passo a passo da resolução da expressão

desenvolvido com o intuito de agilizar a execução de diversas atividades habituais do usuário. Os aplicativos móveis tem se tornado cada vez mais dinâmicas e interativas, como citado por (RAVINDRANATH L. THIAGARAJAN, 2012) que aplicativos móveis são altamente interativos.

O aplicativo *mobile* foi desenvolvido a partir da necessidade de acessar os recursos, sem a necessidade de acesso à internet para realizar o processamento do cálculo, além de acordo com as informações supracitadas. Então foi estudado entre as tecnologias presentes para desenvolvimento de aplicativo que seja de forma ágil, diante desse estudo foi escolhido *Ionic framework* para o desenvolvimento, visto que o mesmo usa tecnologia de desenvolvimento web. Atualmente o aplicativo encontra na versão 1.0.005 e está disponível somente para dispositivos que apresentam sistema operacional Android.

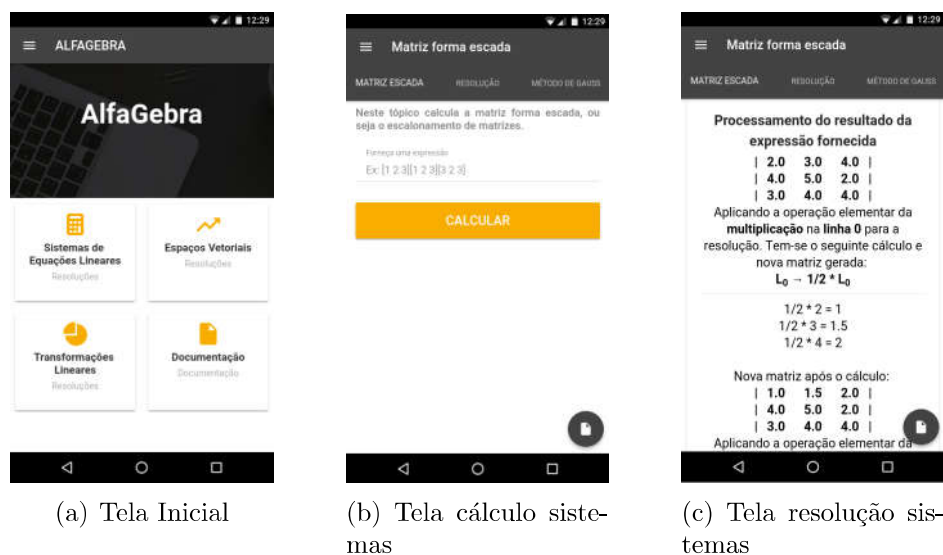


Figura 5.15 – Telas do aplicativo *mobile*

A Figura 5.15 mostra as telas do aplicativo na versão *mobile*, sendo elas respectivamente tela inicial, tela de sistema de equações lineares e espaço vetorial. É importante ressaltar que na versão *mobile* da plataforma não apresenta a seção de material de estudos, estando presente somente na versão web.

Na versão do aplicativo AlfaGebra o mesmo não apresenta material didático, somente realiza o processamento do cálculo e mostra o passo a passo da resolução, pois o objetivo do desenvolvimento deste é de ajudar o acadêmico no aprendizado dos conteúdos quando ele não dispõe de acesso a internet.

5.2 Análise da disciplina de Álgebra Linear

De acordo com informações fornecidas pela professora da disciplina de Álgebra Linear, o quantitativo de alunos que são evadidos e reprovados por notas durante a ministração da disciplina são elevados em cada semestre. Para entender melhor, foram coletados os dados dos semestres de 2015-2, 2016-1 e 2016-2 e observou que a porcentagem de alunos que são reprovados por notas nesses três semestres são de 47,06%, dados esse que corresponde quase a metade dos alunos dos semestres. É importante salientar que os alunos começam a desistir da disciplina logo após aplicação da primeira avaliação da disciplina.

Na Tabela 5.1 mostra o quantitativo de alunos correspondentes aos três períodos, sendo destacados os dados de aprovados, reprovados por faltas e reprovados por notas em cada período. Através da tabela é possível verificar que o quantitativo de alunos que estão reprovados por faltas são os dados maiores em todos os períodos, exceto no período de 2016-1, contudo, estes dados comprovam os altos índices de evasões que a disciplina apresenta.

A Figura 5.16 apresenta os resultados da disciplina de Álgebra Linear no semestre

	PERÍODO		
	2015-2	2016-1	2016-2
Matriculados	38	40	41
Aprovados	10	20	15
Reprovados por faltas	21	12	23
Reprovados por notas	7	8	3

Tabela 5.1 – Dados dos quantitativos de alunos nos três últimos semestres, referentes a aprovados por notas, reprovados por faltas e reprovados por notas

de 2015-2, em relação ao quantitativo de alunos que foram aprovados, reprovados por faltas e reprovados por notas, a qual nesse período a citada disciplina apresentava um total de 38 alunos e dentre esses, apenas 26,32% foram aprovados por notas, 55,26% reprovados por faltas e 18,42% reprovados por notas.

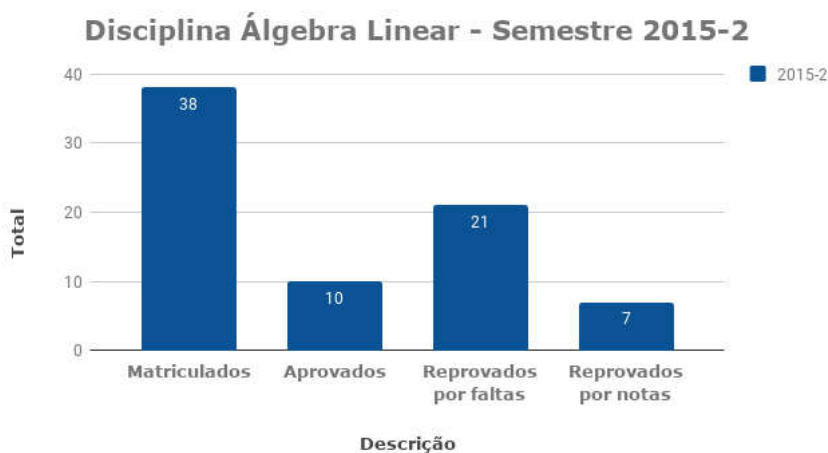


Figura 5.16 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no semestre 2015-2

Em relação ao semestre de 2016-1, na **Figura 5.17** é destacado o quantitativo referente ao semestre em questão, em que dentre as 3 (três) categorias: aprovados, reprovados por notas e reprovados por faltas, são destacados os seguintes dados obtidos perante a análise do gráfico, aprovados por notas cerca de 50%, reprovados por notas 20% e reprovados por faltas 30%.

Por fim, no semestre de 2016-2, a **Figura 5.18** mostra que mais da metade dos estudantes ficaram como reprovados por faltas, sendo 56,10% e os demais referem-se aos reprovados por notas com um total de 7,32% e aprovados por notas com 36,58%.

A partir destes dados é possível verificar que os índices de reprovações da disciplina nos três últimos semestres correspondem a 16,51% e este dado não é tão elevado, mas considerando o total de 51,37% referente aos reprovados por faltas, assim os dados

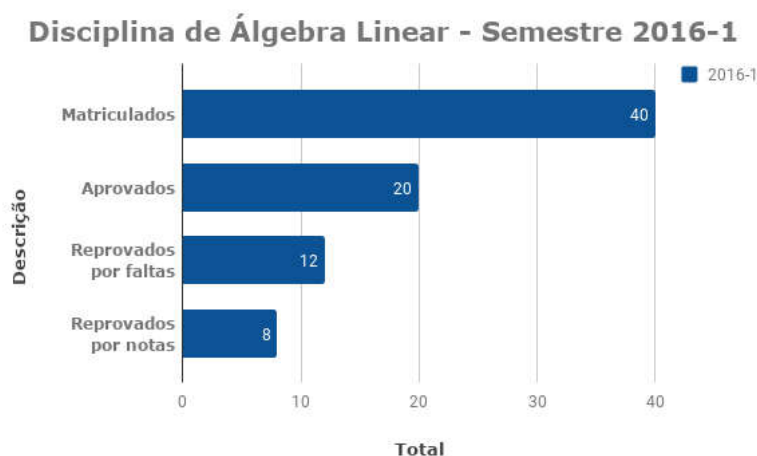


Figura 5.17 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no semestre 2016-1

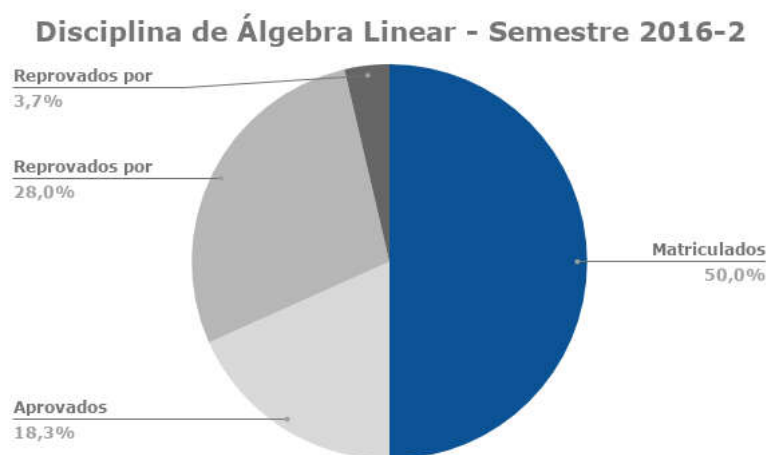


Figura 5.18 – Dados dos alunos referente a disciplina de Álgebra Linear no semestre 2016-2

poderiam ser diferentes, devido ao alto nível de abstração que a disciplina apresenta, por conseguinte, muitos deles desistem.

5.3 Avaliação do aprendizado

De acordo com a metodologia capítulo 4, o estudo da avaliação consistirá em dois momentos, sendo o primeiro sem a utilização do sistema com uma turma de Álgebra Linear e o segundo momento com outra turma que o utilizou, dessa forma verificando se *software* auxiliou no aprendizado.

5.3.1 Avaliação sem aplicação do *software*

Com objetivo de investigar porque os acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear se sentem desmotivados no estudo da Álgebra Linear, as dificuldades encontradas em absorver os conteúdos da disciplina e a importância da aplicação de recursos tecnológicos para o aprendizado foi desenvolvido um questionário base estruturado como previsto na metodologia e aplicado para a turma de Álgebra Linear do semestre de 2017-1 do curso de Ciência da Computação, o qual foi aplicado no dia 19 de outubro de 2017 e apresentavam perguntas objetivas de múltiplas escolhas e discursivas. A aplicação foi direcionada para um total de 40 (quarenta) alunos, em conformidade com o número de matriculados na disciplina, mas no dia da aplicação encontravam-se somente 22 (vinte e dois) acadêmicos presente na sala de aula e é importante salientar que já havia sido aplicada a primeira avaliação.

Com o questionário foi possível identificar o grau de dificuldade da disciplina de acordo com os acadêmicos, a qual a **Figura 5.19** explana os dados obtidos e que de um total de 22 alunos que participaram da pesquisa 40,90% consideraram a disciplina com grau de dificuldade alto, 50% como médio, 9,10% sendo razoável e nenhum estudante achou a disciplina fácil e os estudantes relataram que dentre os conteúdos presente na estrutura curricular da disciplina o mais difícil de absorver é espaço vetorial. Um ponto a destacar é que alguns alunos chegam no ensino superior muitas vezes despreparados em alguns assuntos da matemática o que muitas vezes torna um ponto difícil no início do estudo da Álgebra Linear e não somente nela mais também nas demais disciplinas de cálculos.

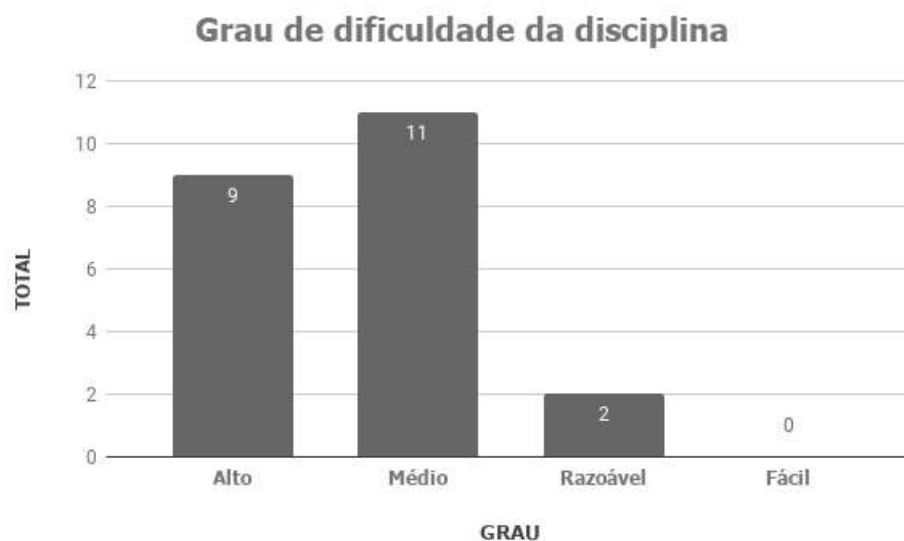


Figura 5.19 – Grau de dificuldade dos alunos

Diante dos resultados demonstrados referente ao grau de dificuldade, buscou-se entender qual é a maior dificuldade no aprendizado da Álgebra Linear e cerca de 45,45%

dos estudantes relataram que a maior dificuldade encontrada é em relação o alto nível de abstração, e para contornar os acadêmicos utilizam como métodos de estudo, listas de exercícios e a maioria gosta de estudar individualmente. Vale salientar que a assiduidade com que os acadêmicos procuram o professor para sanar suas dúvidas relativas à disciplina é ínfima. A **Figura 5.20** mostra esses dados, sendo que apenas 4,54% dos estudantes já procuraram nesse semestre, em condição razoavelmente, 36,36% procuram às vezes e 54,54% nunca procuraram.



Figura 5.20 – Frequência que os alunos procuram o professor

Um dado importante a ser destacado é a quantidade de vezes que o estudante está realizando a disciplina, pois este remete aos índices de reprovações e o grau de dificuldade enfrentado durante o estudo. Para esse dado, a **Figura 5.21** mostra que 31,81% estão realizando pela a segunda vez e 9,10% pela terceira vez.

Em relação ao uso de tecnologias para auxiliar no aprendizado dos conteúdos, 81,81% dos estudantes relataram que se fosse disponibilizado algum recurso tecnológico para auxiliar no estudo/aprendizado da Álgebra Linear eles utilizariam, além dos estudantes que relataram que a utilizaria, nenhum estudante comentou que a não utilizaria, mas 18,18% ficaram indecisos na escolha se a utilizaria ou não. Contudo, demonstraram que a ideia desse recurso tecnológico é excelente, pois ajudaria a entender os conteúdos e que seria uma nova metodologia tecnológica, na **Figura 5.22** esses dados estão representados graficamente.

No que concerne a utilização do sistema AlfaGebra, 100% dos alunos responderam que utilizariam no decorrer dos estudos e seria uma ferramenta útil para o aprendizado e que 86,36% relataram que a utilização desse sistema no decorrer das aulas possibilitaria maior dinamismo.



Figura 5.21 – Quantitativo de alunos que cursaram a disciplina de Álgebra Linear

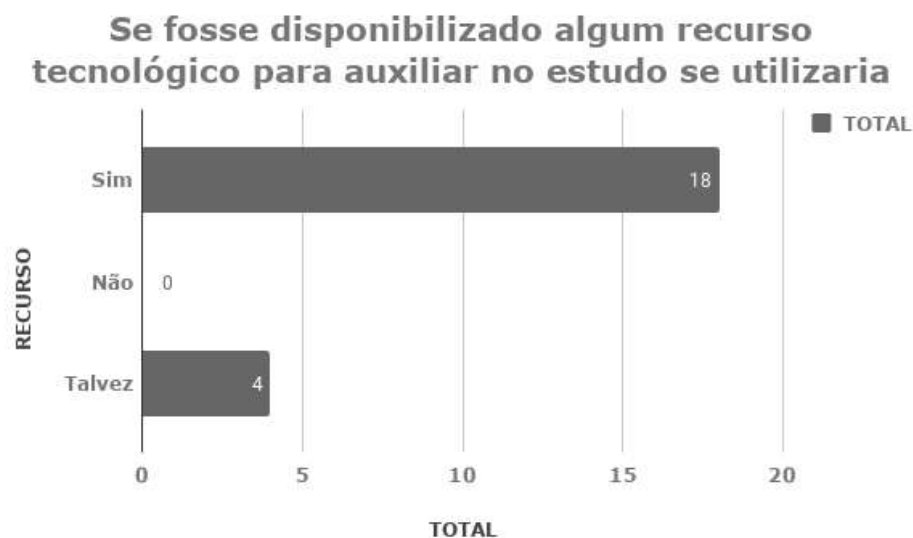


Figura 5.22 – Utilização de tecnologias para o estudo

5.3.2 Avaliação com aplicação do *software*

Para identificar se o sistema ajudou no aprendizado dos acadêmicos foram aplicados dois questionários, sendo um para cada módulo, afim de identificar os aspectos do aprendizado.

5.3.2.1 Módulo de Sistemas de Equações Lineares

A fim de identificar os aspectos referentes ao aprendizado dos acadêmicos com a utilização do *software*, no dia 19 de abril de 2018 foi aplicado um questionário específico

para o módulo de sistemas de equações lineares, a qual apresentavam perguntas objetivas de múltiplas escolhas e discursivas. A aplicação foi direcionada para 44 (quarenta e quatro) alunos, porém no momento da aplicação somente 26 (vinte e seis) alunos estavam presentes na sala de aula.

Com aplicação do questionário foi possível identificar pontos chaves para avaliação, sendo que foram apontados a quantidade de alunos que utilizaram o sistema no decorrer de seus estudos. A **Figura 5.23** mostra que 30% dos alunos não utilizaram a plataforma, segundo estes alunos o motivo foi devido não ter tempo para acessar o link do sistema, alguns também relataram que não sabia o link do site, mas é importante ressaltar que no dia que foi apresentado o sistema para os mesmo o link foi escrito no quadro para que assim eles tivessem acesso, e somente um aluno relatou que não utilizou por não ter nenhuma dificuldade com os conteúdos de sistemas de equações lineares e o total de alunos que utilizaram a plataforma foram 69,2%.

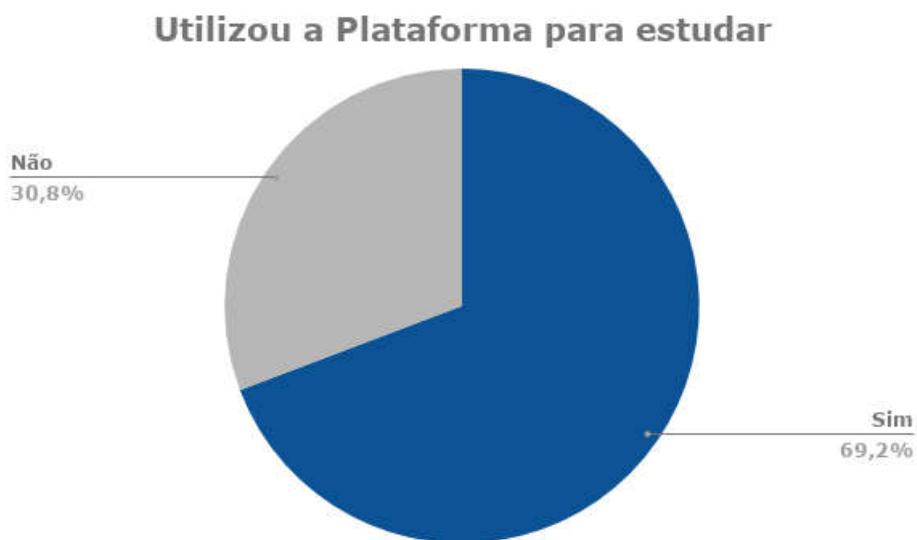


Figura 5.23 – Quantitativo de alunos que utilizaram a plataforma para seus estudos

A partir de identificar os acadêmicos que utilizou a plataforma foi questionado se ela ajudou os alunos a entender os conteúdos de sistemas de equações lineares e 72,1% relataram que ajudou bastante, visto que além de apresentar o processo do passo a passo da resolução, a qual facilitou a entender como é resolvido os problemas, ela também dispunha de material de estudos, que segundo alguns alunos ajudou bastante, onde apresentou exercícios resolvidos, vídeos aulas, etc., e 15,4% relataram que não ajudou no aprendizado e 11,5% não souberam responder, esses dados podem ser observados na **Figura 5.24**.

Assim, foi questionado se o interesse do acadêmico em relação aos conteúdos tinham aumentado depois do uso da plataforma e 61,53% relataram que aumentou, 30,77% não e 7,70% não responderam a pergunta, a **Figura 5.25** demonstram esses dados.

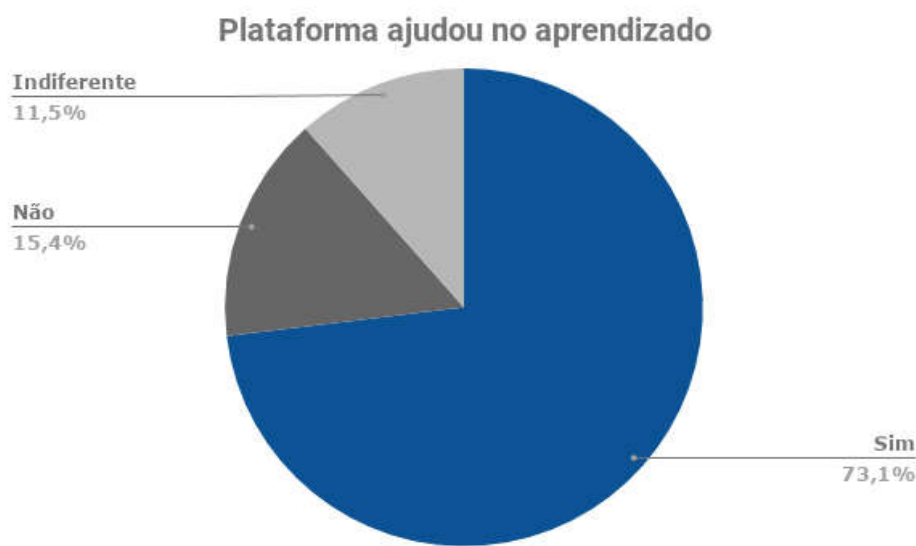


Figura 5.24 – Plataforma ajudou no aprendizado

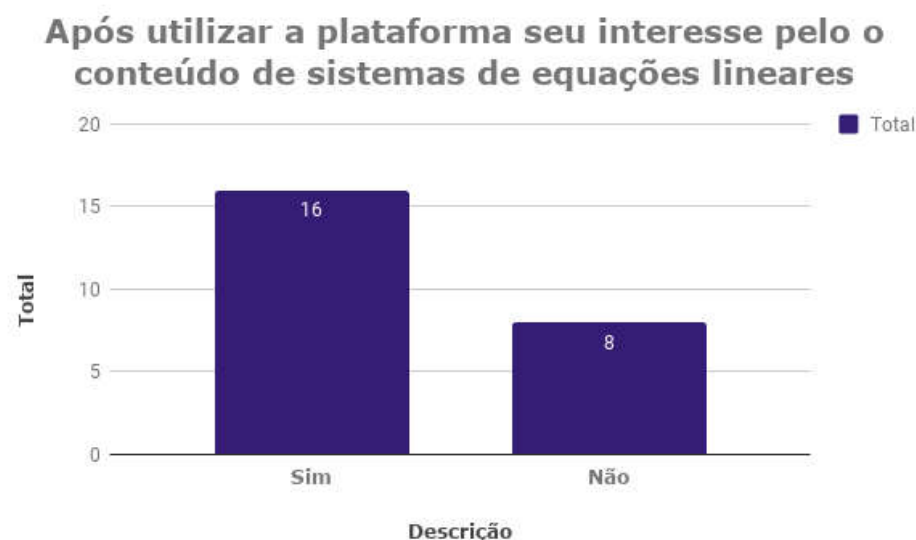


Figura 5.25 – Após uso da plataforma interesse aumentou a respeito do conteúdo de sistemas de equações lineares

Os pontos fortes e fracos em relação a plataforma os estudantes também responderam, sendo que os fortes foram que o sistema apresenta a resolução do problema e mostra o passo a passo do cálculo, facilidade para encontrar os itens do sistema, recurso de material de estudos. Já em relação aos pontos fracos é que o sistema não apresenta suporte para calcular expressões que apresentem incógnitas e no material de estudos apresentavam poucos exemplos.

Assim como no questionário aplicado para a turma que não utilizou a plataforma a pergunta referente ao quantitativo de vezes que o discente está realizando a disciplina foi aplicada novamente e de acordo com a **Figura 5.26**, 65,4% estão realizando pela a

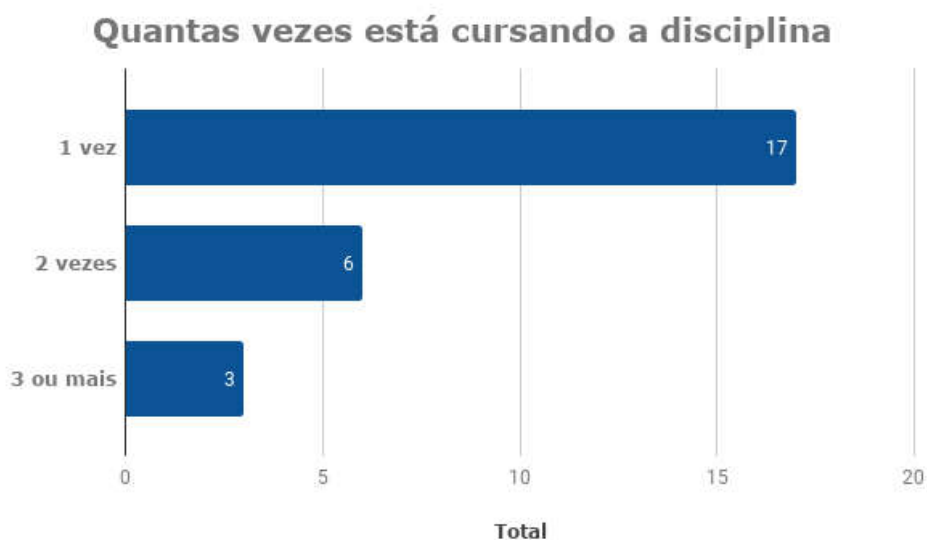


Figura 5.26 – Quantitativo de vezes cursando a disciplina

primeira vez, 23,07% pela segunda vez e 11,53% pela terceira ou mais vezes. Doravante a pergunta foi questionada aos alunos que estão realizando a disciplina duas ou mais vezes se agora com a utilização da plataforma ela ajudou a compreender melhor os conteúdos e como respostas todos relataram que ela ajudou sim.

Em relação o uso do recurso tecnológico para o processo de aprendizagem durante as aulas, os alunos responderam que a plataforma é um excelente recurso tecnológico para o aprendizado.

5.3.2.2 Módulo de Espaço Vetorial

A fim de identificar aspectos referente ao aprendizado dos acadêmicos foi aplicado um questionário pertinente ao módulo de espaço vetorial, no dia 03 de maio de 2018 para a turma de Álgebra Linear. A turma de acordo com o diário apresentavam 44 alunos matriculados, porém no momento da aplicação somente 25 alunos estavam presentes, um dado importante a destacar é que a primeira avaliação da disciplina já havia acontecido, o que muitos dos alunos já desistem logo após a aplicação da primeira avaliação.

Com a presente avaliação foi possível identificar o interesse dos acadêmicos em utilizar a plataforma para os estudos dos conteúdos de espaço vetorial. A **Figura 5.27** demonstra a quantidade de alunos que buscaram a plataforma para estudar e destes 88% utilizaram e 12% não. Os 12% dos alunos que não utilizaram relataram que não precisou dela para estudar, outros descreveram que desconheciam o sistema, mas é importante ressaltar que a plataforma foi apresentada pelos pesquisadores várias vezes em sala de aula e também a professora da disciplina sempre em suas aulas relatava sobre a mesma.

Com objetivo de descobrir se o sistema ajudou os alunos a compreenderem os conteúdos de espaço vetorial foram questionados-os se a plataforma ajudou a entender os

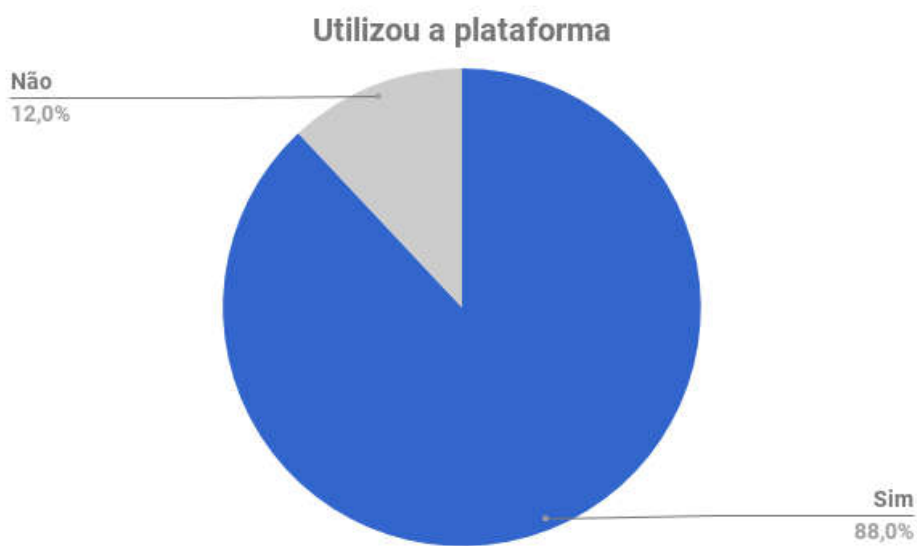


Figura 5.27 – Utilização da plataforma pelos os acadêmicos

conteúdos e conseqüentemente a melhoria no aprendizado, diante dos conteúdos presente na plataforma e os resultados mostraram que o sistema realmente auxiliou os estudantes no aprendizado e os dados estão podem ser visualizados na **Figura 5.29**, onde nela mostram que de 25 alunos, 23 responderam sim, 0 não e 2 não responderam a pergunta.

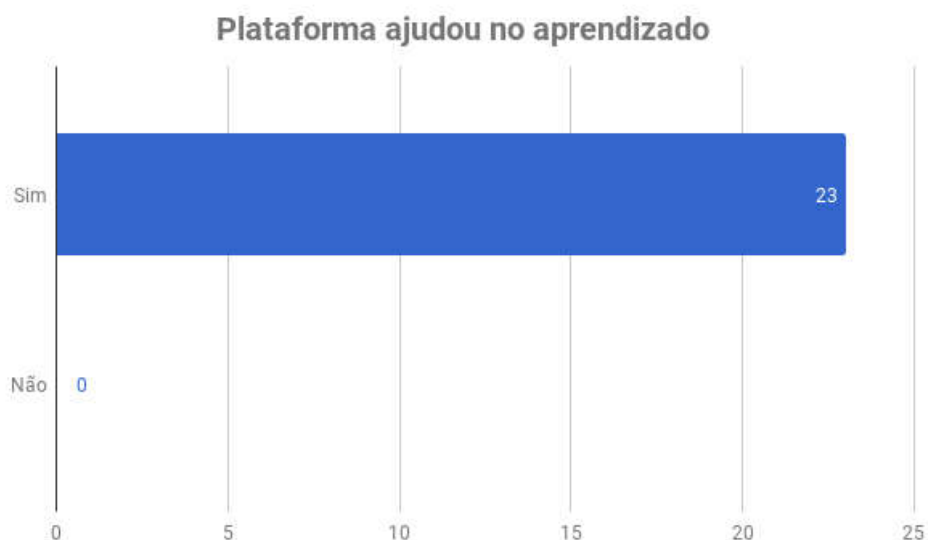


Figura 5.28 – Plataforma ajudou no aprendizado dos estudantes

Alguns relatos do sistema a respeito do mesmo auxiliar no aprendizado serão destacados a seguir, para identificação dos alunos que comentaram, será atribuído o nome aluno1, aluno2, e assim sucessivamente para preservar a identidade dos mesmos. O aluno1 destacou que é "Uma ótima ferramenta para auxiliar nos estudos, nas buscas pelo resultado e no passo a passo da resolução [...]". Para o aluno2 "a plataforma é uma ferramenta

que está auxiliando no processo de aprendizagem dos universitários que buscam ajuda através do programa [...]”, o aluno3 relatou que ”A plataforma como um todo será de grande valia para a maioria dos discentes [...]”. A partir dos comentários e dos dados do questionário é possível identificar que a plataforma está cumprindo com o objetivo, que é auxiliar os acadêmicos.

Um ponto a ser destacado é se após a utilização do sistema, se o interesse dos acadêmicos mudou em relação a visão que eles tinham antes, de que a Álgebra Linear é uma disciplina de difícil compreensão, assim verificou e identificou que 60% dos alunos despertaram seu interesse, 28% não e alguns ficaram em dúvidas, sendo estes 12%. A **Figura 5.29** mostram esses dados, a qual mais da metade referem que ajudou.

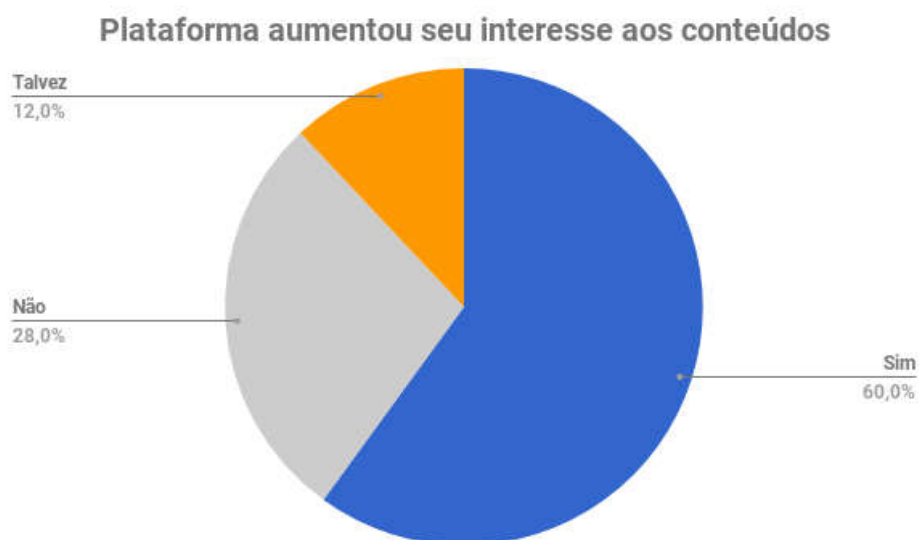


Figura 5.29 – Após uso da plataforma interesse aumentou a respeito do conteúdo de espaços vetoriais

Em relação aos pontos fortes e fracos do sistema foram abordados juntos aos acadêmicos, a fim de obter um *feedback* a respeito da plataforma na visão dos discentes e diante dos pontos fortes relatados por eles foram que o sistema apresenta a resolução de problemas e mostra o passo a passo do processamento do cálculo, facilidade em compreender o que apresenta no sistema e o material de estudo. Já em relação aos pontos fracos é que não aceita fração, tipo $\frac{2}{4}$, contudo, ele aceita o resultado de fração, tipo $\frac{2}{4}$, sendo 0.5. Outro item relatado como ponto fraco é que ele somente trabalha com número e que seria útil trabalhar com incógnitas, falta de contra exemplos e alguns *bugs* presentes, mas que os desenvolvedores já trabalharam para corrigir.

Assim como no questionário de sistemas de equações lineares o de espaço vetorial questionou o aluno se ele já havia cursado a disciplina outras vezes, com objetivo de identificar se depois que utilizou a plataforma mudou seu aprendizado. E diante, a **Figura 5.30** mostram esses dados.

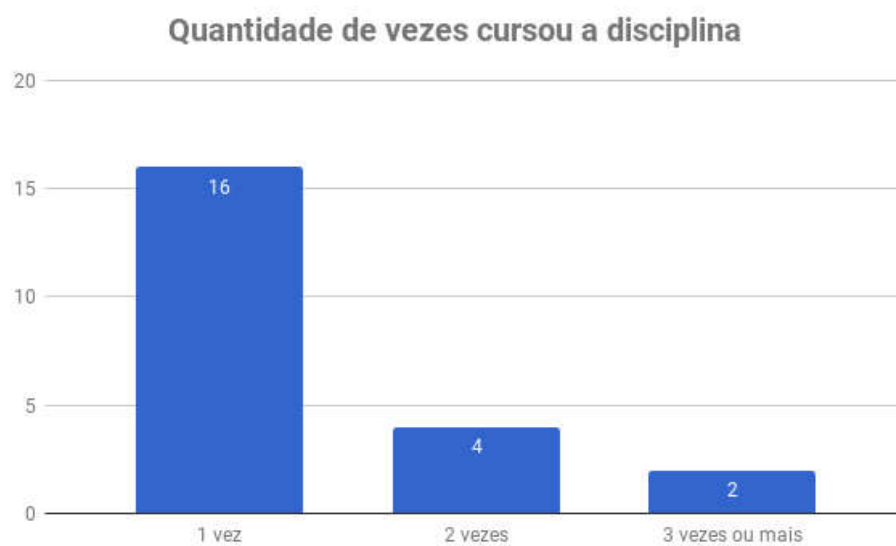


Figura 5.30 – Quantitativo de vezes cursando a disciplina

Diante desses dados, buscou entender se os alunos que já estavam fazendo a disciplina mais de 1 vez e com o sistema ajudou a compreender os conceitos e conteúdos e todos os estudantes relataram que após o uso ajudou bastante, inclusive alguns comentaram que melhorou suas notas.

Em relação o uso do recurso tecnológico para o processo de aprendizagem durante as aulas, os alunos responderam que a plataforma é uma excelente recurso tecnológico para o aprendizado e com ela tornou mais dinâmico o aprendizado, pois nela podem encontrar recursos como vídeo aulas, exercícios resolvidos, material complementar, tudo com um conteúdo bem explicado, tempo de resposta das resolução excelente e apresenta um passo a passo da resolução, relataram os estudante a respeito dessa tecnologia.

6 CONCLUSÃO

6.1 Conclusões

Atualmente na era da tecnologia, em que praticamente todas as pessoas dispõem de recursos tecnológicos, como celulares, computadores, *tablets*, entre outros, observa-se que tais ferramentas mudaram os paradigmas de ensino e aprendizagem, tendo em vista que antes limitavam-se somente a um quadro, giz e professor. Hodiernamente a existência de sistemas que auxiliam no estudo de conteúdos de áreas diversas estão ganhando espaço, de forma que o objetivo deste trabalho colaciona com essa ideia.

As aplicações da Álgebra Linear estão presentes em diversas áreas, dentre elas a computação, para a sua aplicação faz-se necessário que o estudante tenha que aprender os conceitos e métodos da Álgebra Linear para aplicá-los em problemas, no entanto, muitos estudantes relatam sentir dificuldade em relação a disciplina.

O trabalho em questão traz a aplicação prática dos conceitos e métodos para o desenvolvimento da plataforma de ensino e aprendizagem, com objetivo de auxiliar os acadêmicos no aprendizado dos conteúdos da disciplina e para verificar se o *software* foi eficaz como método para o aprendizado dos acadêmicos. Foi realizada comparação entre duas turmas, sendo elas 2017-1, a qual não utilizou o sistema e a 2017-2 que utilizou.

O desenvolvimento da plataforma abordou técnicas e metodologias da computação, onde foi aplicada a metodologia de desenvolvimento ágil *scrum*, bem como a utilização de *frameworks* para o desenvolvimento e para validação das expressões de entradas foram aplicados expressões regulares. Desse modo, em conjunto com todos esses recursos foi concluído o desenvolvimento e assim os acadêmicos a utilizaram no decorrer do período para o aprendizado dos conteúdos.

Como estava previsto no objetivo proposto do trabalho o desenvolvimento de uma plataforma para auxiliar no aprendizado dos discentes da disciplina de Álgebra Linear e avaliar se com o sistema iria melhorar o aprendizado dos mesmos, a partir de tal tecnologia constatou-se com pesquisas iniciais que os índices de evasões da disciplina são elevados, à vista disso, foi proposto o desenvolvimento do sistema. E com a utilização da plataforma por parte dos estudantes foi identificado que o sistema realmente auxiliou no aprendizado de acordo com os questionários aplicados e os resultados obtidos nas avaliações elaboradas pela docente, que em comparação com as avaliações do período anterior as notas foram melhores.

Portanto, a plataforma AlfaGebra contribuiu para o aprendizado dos estudantes, visto que a mesma apresenta recursos que complementaram o aprendizado dos estudantes, pois ela processa o cálculo de sistemas de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares, mostrando assim o passo a passo da resolução, o que é o diferencial.

6.2 Trabalhos Futuros

A partir do desenvolvimento da plataforma AlfaGebra surgem portas para o desenvolvimento de novos trabalhos com o mesmo nicho, tais como desenvolvimento de novos módulos para o sistema em relação a área de cálculo diferencial e integral. Outro trabalho também seria um estudo com um público maior como não somente na Universidade Federal do Tocantins em específico o curso de Ciência da Computação, mas aos demais cursos da universidade que apresentam a disciplina, bem como também as demais instituições de ensino da cidade de Palmas-TO.

Em relação aos novos módulos, poderiam também realizar pesquisas em cima de cálculo diferencial e integral e identificar se com a aplicação de um sistema desse tipo irá auxiliar no aprendizado dos estudantes.

O sistema atualmente está disponível em duas versões, sendo uma voltada para acesso a web e outro para celulares e estar disponível somente na versão para o sistema operacional Android, desse modo, o desenvolvimento para outras plataformas também é de grande valia.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. E. de. **Solução de equações diferenciais acopladas pela técnica de transformada integral e computação simbólica. 96 f. Dissertação de Mestrado.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 1996.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear.** 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Harper Row do Brasil, 1986.

BORTOLOSSI, D. U. P. e. W. M. R. H. J. Computação simbólica no ensino médio com o *software* gratuito geogebra. **Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra**, v. 1, p. 1–6, 2012.

CABRAL, A. L. C. F. e M. A. P. Aprendizagem de conceitos de Álgebra linear. In: **XIII Conferência Interamericana de educação matemática - CIAEM.** [S.l.]: CIAEM, 2011. p. 1–12.

CACIONE, C. E. dos S. **Avaliação da aprendizagem: Desvelando concepções de licenciandos do curso de música. 138 f. Dissertação de mestrado.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2004.

CAMPOS, L. M. L. de. Uso de ferramentas educacionais na disciplina de cálculo diferencial e integral. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 1, p. 1–10, 2015.

CARDOSO, M. N. **O uso do software Matlab para o estudo de alguns tópicos de Álgebra Linear. 16 f. Monografia.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Católica de Brasília, 2005.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. (Mestrado em Educação Matemática).** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

CORRÊA, V. A. **Aplicação da computação simbólica na resolução de problemas de condução de calor em cilindros vazados com condições de contorno convectivas. 141 f. Tese de doutorado.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2007.

DATRINO, I. F. D. e. P. H. M. R. C. Avaliação como processo de ensino-aprendizagem. **Anhanguera Educacional - Revista de Educação**, v. 13, p. 1–18, 2010.

DORIER, J.-L. État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 18, p. 191–230, 1998.

FERNANDEZ, A. H. e Cecília de S. **Introdução à Álgebra Linear.** [S.l.]: Editora SBM, 2016.

FILHO, B. S. da S. **Curso de Matlab 5.1: Introdução à Solução de problemas de engenharia.** 2. ed. [S.l.]: Programa Prodenge / Sub-Programa Reenge, 2003.

- FURTADO, A. L. C. **Dificuldade na aprendizagem de conceitos abstratos da álgebra linear: 2009-2010. Dissertação de Mestrado.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- GILAT, A. **Matlab com Aplicações em Engenharia.** 4. ed. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- HOFFMANN, J. **Avaliação Mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade.** 18. ed. [S.l.]: Porto Alegre: Mediação, 2010.
- HOPCROFT, F. D. U. e. R. M. J. E. **Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.** 5. ed. [S.l.]: Campus, 2002.
- LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações.** [S.l.]: LTC, 2011.
- LEVITHAN, J. G. e S. **Expressões Regulares Cookbook.** 1. ed. [S.l.]: São Paulo: Harper Row do Brasil, 2011.
- LIBÂNIO, J. C. **Didática.** [S.l.]: Cortez Editora, 1990.
- LIMA., L. de Araújo Lima e Antonio Gilson Barbosa de. Uso do software mathematica como ferramenta de auxílio ao ensino de graduação de engenharia mecânica. In: **XXVIII COBENGE.** [S.l.]: ABENGE: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2000. p. 1-7.
- MARCHETTO, R. Utilização do software matlab como recurso tecnológico de aprendizagem na transformação de matrizes em imagens. **REVEMAT**, v. 1, p. 1-13, 2016.
- POOLE, D. **Álgebra Linear: uma introdução moderna.** 4. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.
- RAVINDRANATH L. THIAGARAJAN, A. B. H. M. S. Code in the air: simplifying sensing and coordination tasks on smartphone in. In: **Proc. of Hot-Mobile**, 2012.
- RODRIGUES, J. R. F. **Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear: Base e dimensão de um Espaço Vetorial. 153 f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciência e Matemática).** Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2009.
- ROJAS, L. R. e A. Tutorial sobre algebra computacional com programação. **Cadernos do IME: Série Informática**, v. 18, p. 1-8, 2005.
- SANTOS, A. R. dos Santos e Patrícia Cristina Sousa dos. O programa gap como ferramenta de ensino e aprendizagem de Álgebra e uma reflexão das dificuldades da disciplina Álgebra i. **Workshop de Álgebra UFG-CAC**, v. 1, p. 1-14, 2014.
- SILVA, B. M. da Silva Santana e Maria Aparecida Alves da. Ensino e aprendizagem de cálculo: a partir do uso de softwares matemáticos. **III CONEDU - Congresso Nacional de Educação**, v. 1, p. 1-8, 2016.
- SILVA, J. C. L. e. **Uso de gamificação como instrumento de avaliação da aprendizagem.** São Paulo, Brasil: Revista da FATEC Zona Sul, 2015.

SOMMERVILLE, I. **Engenharia de Software**. [S.l.]: Editora Pearson, 9ª Edição, 2013.

WINTERLE, A. S. e P. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Editora McGraw-Hill, 1987.

WU, H. Computer aided teaching in linear algebra. **School of Science Beijing Institute of Technology**, v. 1, p. 1–3, 2004.

A APÊNDICE

Apêndice I

Especificação de Requisitos de *Software*

AlfaGebra

Versão 1.0.01

Preparado por Osmir Custódio Mariano e
Jhonatan Sousa Santiago

Universidade Federal do Tocantins

May, 2018

Conteúdo

1	Introdução	4
1.1	Objetivos deste documento	4
1.2	Público Alvo	4
1.3	Escopo do produto	4
1.3.1	Nome do produto e de seus componentes principais	4
1.4	Descrição do produto	4
1.5	Referências	5
2	Descrição Geral	6
2.1	Perspectiva do Produto	6
2.2	Função do Produto	6
2.3	Características de Classes de Usuário	6
2.4	Ambiente Operacional	6
3	Requisitos específicos	8
3.1	Identificação dos requisitos	8
3.2	Prioridades dos requisitos	8
3.3	Descrição dos requisitos	8
3.3.1	Requisitos Funcionais	8
3.3.2	Requisitos não funcionais	13
3.3.3	Requisitos de licença	13

Histórico de Revisões

Nome	Data	Descrição das alterações	Versão
Osmir Mariano e Jhonatan Santiago	01/08/2017	Levantamento de Requisitos	V1.0.0
Osmir Mariano e Jhonatan Santiago	01/05/2018	Alterações de Requisitos	V1.0.01

1 Introdução

1.1 Objetivos deste documento

Este documento tem por objetivo apresentar todas as informações técnicas e funcionais sobre o sistema de cálculos de Álgebra Linear, AlfaGebra. O *software* visa auxiliar os acadêmicos dos cursos de Ciência da Computação, Matemática e Engenharias, mas inicialmente a proposta é somente para o curso de Ciência da Computação, depois será expandido para os demais cursos. Ao longo deste documento serão apresentadas informações pertinentes sobre a concepção do projeto, definições dos requisitos funcionais e não funcionais e interface homem-computador.

1.2 Público Alvo

O principal público alvo do sistema serão os acadêmicos dos curso de Ciência da Computação em específicos os da disciplina de Álgebra Linear. Ao qual será um sistema que apresentará recursos e conteúdo da área para que venha auxiliar no aprendizado dos mesmos.

1.3 Escopo do produto

O AlfaGebra é um *software* matemático para resolução de problemas de Álgebra Linear, apresenta como objetivo auxiliar no aprendizado dos acadêmicos. O sistema por ser para o ensino e aprendizagem apresentará como requisitos uma parte voltada para os aspectos teóricos, exercícios resolvidos e opção para que o usuários forneça expressões e assim o sistema irá descrever todo o passo a passo da resolução do problema.

1.3.1 Nome do produto e de seus componentes principais

- **Produto:** AlfaGebra.
- **Componentes principais:** Apresentação de conteúdos teóricos, exercícios resolvidos e opção para inserção de expressões para que assim o sistema possa realizar o cálculo.

1.4 Descrição do produto

O *software* AlfaGebra, será desenvolvido com as seguintes características: métodos de ensino através de conteúdos teóricos, exercícios resolvidos e uma opção para inserção de

expressões e assim o sistema tratar e mostrar o resultado com descrição de como chegou no resultado.

1.5 Referências

Pressman, Roger S. Engenharia de software: uma abordagem profissional. 7ª Edição.”Ed: McGraw Hill (2011).

SOMMERVILLE, I.Engenharia de Software. 8. ed. [S.l.]: Pearson Addison, 2007.

2 Descrição Geral

AlfaGebra apresenta como objetivo auxiliar os alunos da Universidade Federal do Tocantins em específico o curso de Ciência da Computação na disciplina de Álgebra Linear. Inicialmente, no aprendizado, em virtude dessa disciplina apresentar índices de evasões e reprovações elevadas. A Universidade Federal do Tocantins atualmente conta com aproximadamente de 280 (duzentos e oitenta) alunos por semestre que cursam a disciplina de Álgebra Linear nos cursos da área de exata. Com o objetivo de minimizar esses índices, o sistema propõe disponibilizar um *software* em versão para *desktop* para o sistema operacional Windows.

2.1 Perspectiva do Produto

Espera que com a utilização do AlfaGebra possa melhorá os altos índices de evasões da disciplina em cada semestre e também contribuir para o ensino e aprendizagem dos acadêmicos, tornando as aulas mais dinâmicas, ao invés do modelo tradicional de quadro, giz e professor.

2.2 Função do Produto

O AlfaGebra deve auxiliar os acadêmicos das áreas de exatas no aprendizado dos conteúdos da disciplina de álgebra linear: sistema de equações lineares, espaço vetorial e transformações lineares, deste modo, tentando minimizar os índices de reprovações e evasões da disciplina.

2.3 Características de Classes de Usuário

A principal características dos usuários são os acadêmicos que apresentam dificuldades em absorver os conteúdos da disciplina de Álgebra Linear e que se sentem desmotivados ao estudar com abordagem da metodologia tradicional.

2.4 Ambiente Operacional

Para o desenvolvimento da plataforma será utilizada como ferramentas de programação web, sendo elas Javascript, HTML5 e CSS3, além destes outros recursos serão implementados, como alguns *frameworks*, tais como Bootstrap e algumas aplicações para otimizar entre elas Disqus para comentários dentro da plataforma. E para o versionamento de

código será adotada o Git e para armazenamento do repositório será utilizado a plataforma Bitbucket.

3 Requisitos específicos

3.1 Identificação dos requisitos

Por convenção e para facilitar a identificação dos requisitos, a referência é feita de acordo com o esquema abaixo:

Identificador = [Siglas da Subseção primeira letra | Numeração em ordem crescente]

3.2 Prioridades dos requisitos

Para estabelecer a prioridade dos requisitos, foram adotadas as denominações: essencial, importante e desejável. Na tabela 1 segue a descrição do significado de cada uma dessas denominações.

Tabela 3.1: Descrição das prioridades dos requisitos

Prioridade	Descrição
Essencial	Estes são requisitos sem o qual o sistema não entra em funcionamento. Esses requisitos são essenciais e tem que, ser implementados impreterivelmente.
Importante	Estes são requisitos sem o qual o sistema entra em funcionamento, mas de forma não satisfatória. Esses requisitos devem ser implementados, mas se não forem, poderá ser utilizado.
Desejável	Estes são os requisitos que não compromete as funcionalidades básicas do sistema, ou seja, o sistema pode funcionar de forma satisfatória sem ele.

3.3 Descrição dos requisitos

3.3.1 Requisitos Funcionais

[RF01] Versão Web

O sistema deve ser desenvolvido em versão para Web com a linguagem de programação Javascript, sendo composto por três módulos: Sistemas de Equações Lineares; Espaço Vetorial; e Transformações Lineares.

Prioridade

Essencial

[RF02] Cálculo matriz linha reduzida

O sistema deve permitir que o usuário entre com expressões matemáticas para realizar o cálculo da matriz linha reduzida à forma escada. Usando para resolução das três operações elementares. Permutação da i -ésima e j -ésima linhas ($L_i \rightarrow L_j$); multiplicação da i -ésima linha por um escalar não nulo k ($L_i \rightarrow k * L_i$); e substituição de i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha ($L_i \rightarrow L_i + K * L_j$).

Prioridade

Essencial

[RF03] Demonstrar se satisfaz ou não a forma escada

O sistema deve mostrar para o usuário, quando não satisfeito a matriz linha reduzida à forma escada, as operações que não abrangem, bem como também, mostrar que é forma escada e seus respectivos resultados.

Prioridade

Importante

[RF04] Cálculo método de Gauss

O sistema deve ser capaz de realizar cálculos utilizando o método de Gauss.

Prioridade

Essencial

[RF05] Entrada de expressões

O sistema deve possuir um campo para entrada de expressões para que o usuário entre e assim o sistema realize o cálculo.

Prioridade

Essencial

[RF06] Classificação de sistema

O sistema deve ser capaz de classificar um sistema em: uma única solução; qualquer número real terá solução; e não existe solução.

Prioridade

Importante

[RF07] Apresentação gráfica

O sistema para cálculos de classificação de sistema, deve mostrar além do resultado um gráfico de tal situação do cálculo.

Prioridade

Importante

[RF08] Apresentação passo a passo

O sistema deve mostrar o resultado e todo o passo a passo que gerou o resultado.

Prioridade

Importante

[RF09] Identificação de espaço vetorial

O sistema deverá identificar a partir de expressões fornecidas pelo o usuário se é ou não espaço vetorial.

Prioridade

Importante

[RF10] Identificação de subespaço vetorial

O sistema deverá identificar a partir de expressões fornecidas pelo o usuário se é ou não subespaço vetorial.

Prioridade

Importante

[RF11] Combinação linear

Através do sistema deverá ser possível identificar se um vetor é combinação linear de outros vetor.

Prioridade

Importante

[RF12] Determinação de subespaço gerado

O sistema deverá realizar o cálculo para determinar o subespaço gerado de um determinado vetor.

Prioridade

Importante

[RF13] Dependência Linear

O sistema deverá verificar e classificar se um determinado conjunto são linearmente dependente e linearmente independente.

Prioridade

Importante

[RF14] Base de um espaço vetorial

No sistema deverá ser possível realizar o cálculo de base de um espaço vetorial.

Prioridade

Importante

[RF15] Cálculo da matriz de mudança de base

A partir do sistema deverá ser possível realizar o cálculo da matriz de mudança de base.

Prioridade

Importante

[RF16] Matriz de uma transformação linear

O sistema deve ser capaz de representar a matriz de uma transformação linear

Prioridade

Essencial

[RF17] Núcleo de uma transformação linear

O sistema deve ser capaz de representar o núcleo de uma transformação linear

Prioridade

Essencial

[RF18] Imagem de uma transformação linear

O sistema deve ser capaz de representar a imagem de uma transformação linear

Prioridade

Essencial

[RF19] Operações com transformações lineares

O sistema deve fazer cálculos com operações de transformações lineares, operações do tipo adição, multiplicação por escalar, etc.

Prioridade

Essencial

[RF20] Calcular Dilatações ou Contrações

O sistema deve realizar dilatações ou contrações em transformações lineares

Prioridade

Essencial

[RF21] Calcular Reflexões

O sistema deve ser capaz de realizar operações de reflexões

Prioridade

Essencial

[RF22] Calcular Rotações

O sistema deve ser capaz de realizar operações de rotações

Prioridade

Essencial

[RF23] Calcular Cisalhamentos

O sistema deve realizar operações cisalhamentos

Prioridade

Essencial

3.3.2 Requisitos não funcionais

Usabilidade

[RNF24] O sistema será desenvolvido para que o usuário utilize com facilidade e praticidade, através de uma interface agradável, textos bem visíveis e uma fácil navegação através de abas para separar e organizar as sessões (módulos).

Desempenho

[RNF25] O sistema apresentará um tempo limite para processamento dos cálculos e processamento dos resultado rápido.

Disponibilidade

[RNF26] O sistema estará a todo tempo disponível para o usuário, desde que o mesmo o tenha acesso a um computador que tenha internet e um navegador.

Acessibilidade

[RNF27] A interface do sistema com o usuário final deve ser adequada as adaptações e personalizações que permitam sua utilização por usuários com necessidades especiais. Essas opções devem ser compatíveis com software especializados que possam vir a ser acoplado, bem como seguir orientações específicas de acessibilidade de interface.

3.3.3 Requisitos de licença

[RL28] O sistema de ensino e aprendizagem em álgebra linear deverá ser distribuído sob a licença GNU *General Public License* (Licença Pública Geral), devendo ser asseguradas às liberdades de uso, acesso ao código fonte e distribuição.

Apêndice II - Primeira etapa de avaliação

Formulário de avaliação de desempenho

1. Qual foi a sua maior dificuldade com a disciplina?
 - Falta de tempo para dedicação ao estudo
 - Falta de clareza do professor
 - Desprovimento de disciplinas pré-requisitos
 - Falta de interação com professor
 - Alto nível de abstração da disciplina
 - Não consegui entender a matéria
 - Outras

2. Por quantas vezes já está cursando a disciplina?
 - 1 vez
 - 2 vezes
 - 3 ou mais

3. Qual o método de estudo utilizado?
 - Estudo em grupo
 - Estudo através de listas de exercícios
 - Sanar dúvidas em atendimentos com professor
 - Estudo individual
 - Estudo através de livros
 - Sanar dúvidas na sala de aula
 - Outros

4. Se fosse disponibilizado algum recurso tecnológico para auxiliar no estudo/aprendizagem da álgebra linear, você usaria?
 - Sim
 - Não
 - Talvez

5. O que você achou da ideia de um recurso tecnológico para auxiliar no estudo/aprendizado?
 - Excelente
 - Boa
 - Razoável
 - Ruim
 - Péssima

6. Quais conteúdos gostaria que fossem abordados nesses recursos tecnológico? OBS: Pode marcar mais de um item.
 - Sistemas de equações Lineares
 - Espaços Vetoriais
 - Transformações lineares

7. Como você classifica seu aprendizado na disciplina de Álgebra Linear até o presente momento?

- Excelente
- Bom
- Regular
- Ruim
- Péssimo

8. Em relação ao seu curso, você considera que essa disciplina é:

- Importante
- Tem alguma importância
- Pouco importante

9. Qual o grau de dificuldade da disciplina?

- Alto
- Médio
- Razoável
- Fácil

10. Com que frequência você procura o professor(a) (fora da aula) para tirar suas dúvidas?

- Muita frequência
- Razoável
- Poucas
- Nunca procurei

11. Após cursar a disciplina, seu interesse pelo assunto aumentou? (Para aqueles que já cursaram mais de um vez a disciplina)

- Sim
- Não

12. Cite um ou mais pontos fortes da disciplina.

.....

13. Que sugestões você daria para melhorar a disciplina?

.....

14. Quais suas dificuldades ao estudar álgebra linear?

.....

15. O que você considera mais difícil na álgebra Linear?

.....

16. Você conhece ou já fez uso de algum sistema que te auxiliou no estudo da álgebra linear?

.....

17. Se sim, qual(is)?

.....
.....

18. Quais os recursos (seja eles tecnológicos ou não) que o seu professor utilizou para o ensino da disciplina?

.....
.....

19. Se fosse desenvolvido um sistema para auxiliar você aluno, no aprendizado da Álgebra Linear, a qual esse apresentaria um tutorial dos principais conteúdos da Álgebra e opção em que o aluno entre com a expressão e o sistema mostre o passa-a-passo da resolução. Marque o quanto ele ajudaria?

- Ajudaria muito
- Ajudaria, mas prefiro não utilizar
- Ajudaria Pouco
- Não ajudaria

20. Em sua opinião a utilização desse sistema durante as aulas ou fora possibilitará mais dinamismo e aprendizado da matéria?

- Sim
- Não
- Não sei

Apêndice III - Segunda etapa de avaliação

Formulário de avaliação do aprendizado - Módulo Sistemas de Equações Lineares

1. Em relação a plataforma AlfaGebra, você utilizou para estudar os conteúdos de sistemas de equações lineares?
 - Sim
 - Não

2. Caso seja não. Porquê?

.....

.....

3. A plataforma ajudou você a entender melhor os conteúdos de sistemas de equações lineares, visto que o sistema demonstra a resolução mostrando o passo a passo do cálculo?
 - Sim
 - Não

4. Cite um ou mais pontos fortes da plataforma AlfaGebra em relação ao módulo de sistemas de equações lineares.

.....

.....

5. Cite um ou mais pontos fracos da plataforma AlfaGebra em relação ao módulo de sistemas de equações lineares.

.....

.....

6. Em relação a estrutura da plataforma, no item **Calcular Expressões**, este item apresentou algum problema que impediu você de aprender os conceitos presentes nele?

.....

.....

7. Em relação a estrutura da plataforma, no item **Material de Estudos**, este item apresentou conteúdos satisfatório para seu aprendizado?

.....

.....

8. Por quantas vezes já está cursando a disciplina?
 - 1 vez
 - 2 vezes
 - 3 ou mais vezes

9. Após cursar a disciplina sem a utilização da plataforma e agora cursando com a plataforma, como você avalia seu conhecimento. Você acha que a plataforma ajudou

() Ruim
()

Apêndice IV - Segunda etapa de avaliação

Formulário de avaliação do aprendizado - Módulo Espaço Vetorial

1. Em relação a plataforma AlfaGebra, você utilizou para estudar os conteúdos de espaços vetoriais?
 - Sim
 - Não

2. Caso seja não. Porquê?

.....

.....

3. A plataforma ajudou você a entender melhor os conteúdos de espaços vetoriais, visto que o sistema demonstra a resolução mostrando o passo a passo do cálculo?
 - Sim
 - Não

4. Cite um ou mais pontos fortes da plataforma AlfaGebra em relação ao módulo de espaços vetoriais

.....

.....

5. Cite um ou mais pontos fracos da plataforma AlfaGebra em relação ao módulo de espaços vetoriais.

.....

.....

6. Em relação a estrutura da plataforma, no item **Calcular Expressões**, este item apresentou algum problema que impediu você de aprender os conceitos presentes nele?

.....

.....

7. Em relação a estrutura da plataforma, no item **Material de Estudos**, este item apresentou conteúdos satisfatório para seu aprendizado?

.....

.....

8. Por quantas vezes já está cursando a disciplina?
 - 1 vez
 - 2 vezes
 - 3 ou mais vezes

9. Após cursar a disciplina sem a utilização da plataforma e agora cursando com a plataforma, como você avalia seu conhecimento. Você acha que a plataforma ajudou você a compreender melhor os conceitos de espaços vetoriais (Para aqueles que já cursaram mais de uma vez a disciplina)?

.....

.....

10. Após o estudo dos conteúdos de espaços vetoriais, qual sua opinião com a ideia da implementação de exemplos didáticos e material complementar dentro da plataforma ?
- Excelente
 - Boa
 - Razoável
 - Ruim
 - Péssima
11. Após estudar o conteúdo pela plataforma, seu interesse pelo assunto de espaços vetoriais aumentou?
- Sim
 - Não
12. Que sugestões você daria para melhorar o módulo de espaços vetoriais?
-
-
13. Após o uso do sistema, qual sua opinião com a ideia da implementação de video aulas dentro do módulo de espaços vetoriais?
- Excelente
 - Boa
 - Razoável
 - Ruim
 - Péssima
14. Em relação a documentação do sistema, ela foi útil para aprender a utilizar a plataforma de ensino e aprendizagem ?
- sim () não
15. No quesito layout gráfico do sistema, na sua opinião o módulo de espaços vetoriais estava atrativo e dinâmico para a utilização do aluno ?
- sim () não
16. O que mais chamou atenção no modulo de espaços vetoriais ?
-
-
17. O que você achou da ideia de um recurso tecnológico para auxiliar no estudo/aprendizado?
- Excelente
 - Boa
 - Razoável
 - Ruim
 - Péssima