



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

CAIO MATHEUS FONTINELE DOS SANTOS

**UMA PROPOSTA DIDÁTICO-MATEMÁTICA PARA O USO DA ESCALA DE
PLANCK**

ARAGUAÍNA - TO
2019

CAIO MATHEUS FONTINELE DOS SANTOS

**UMA PROPOSTA DIDÁTICO-MATEMÁTICA PARA O USO DA ESCALA DE
PLANCK**

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína para obtenção do título de Licenciado em Física, sob orientação do Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

ARAGUAÍNA - TO
2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

S237p Santos, Caio Matheus Fontinele dos.
Uma proposta didático-matemática para o uso da escala de Planck. / Caio Matheus Fontinele dos Santos. – Araguaína, TO, 2019.
56 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins –
Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Física, 2019.
Orientador: Matheus Pereira Lobo

1. Escala de Planck. 2. Física moderna. 3. Buraco negro. 4.
Fótons. I. Título

CDD 530

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

CAIO MATHEUS FONTINELE DOS SANTOS

**UMA PROPOSTA DIDÁTICO-MATEMÁTICA PARA O USO DA ESCALA DE
PLANCK**

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT –
Universidade Federal do Tocantins – Campus de
Araguaína, Curso de Licenciatura em Física para
a obtenção do título de Licenciado em Física e
aprovada em sua forma final pelo Orientador e
pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 12 / 12 / 2019 .

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo (orientador), UFT



Prof. Dr^a. Érica Cupertino Gomes. convidado (examinador), UFT



Prof. Dr^a. Regina Lélis de Sousa. convidado (examinador), UFT

*“Os maiores êxitos não são os que fazem mais ruído e sim
nossas horas mais silenciosas”.*

Friedrich Nietzsche

Agradecimentos

Ao chegar ao final dessa caminhada de quase quatro anos, percebo o quão rápido ela se passou em minha percepção. E há somente uma palavra que define todo o sentimento que sinto com essa conquista: gratidão. Primeiramente, agradeço imensamente aos meus pais Maria Leonildes e Benedito Andrade, por todo amor, zelo e incentivo, sendo o meu alicerce sempre. Nada disso seria possível sem sua força de vontade, buscando de todas as formas proporcionar o melhor para mim e meus irmãos. Gostaria de agradecer aos meus irmãos, que junto com meus pais são minha verdadeira família, me apoiando em todos os momentos, em especial a que sempre cuidou de todos e nos amparou em diversos momentos, sendo como uma segunda mãe para mim, Ana Carolina.

Agradeço ao professor Dr. Matheus Pereira Lobo por todos esses anos de convivência, pelo apoio e incentivo nos estudos, com quem pude aprender bastante nesses anos de orientação no LABID, sou muito grato por todas as oportunidades e ensinamentos concedidos a mim. Agradeço também de forma geral ao Colegiado de Física da Universidade Federal do Tocantins, por contribuírem na minha formação da melhor forma.

Em especial, gostaria de agradecer à professora Dr^a Sheyse Martins de Carvalho, aos demais professores e colegas por todos esses anos de convivência e trabalho em prol do Clube de Astronomia Sophia Brahe. Uma das melhores experiências da minha graduação foram no desenvolvimento dos inúmeros projetos aos quais nos dedicamos.

Por fim, gostaria de explicitar meus sinceros agradecimentos a todos os colegas com quem convivi nesses anos, por todas as companhias das quais pude desfrutar, algumas delas além do curso de Física. Em especial, gostaria de destacar meus colegas da turma 2016/1. Ao lado de vocês pude aproveitar os melhores momentos desses últimos anos. Levarei para sempre comigo cada momento.

Muito obrigado a todos!

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, um estudo teórico sobre a escala de Planck com enfoque em uma abordagem conceitual e matemática, porém de forma didática acerca do tema. Nele é realizado a demonstração das unidades de Planck e de possíveis caminhos para a escala de Planck. Em relação às unidades de Planck, a partir da análise dimensional, verificamos seis das unidades básicas dessa escala (massa, tempo, comprimento, energia, temperatura e densidade) que foram utilizadas nas seções posteriores. Além disso, trabalhamos doze caminhos para a escala de Planck, três deles de autoria própria, e nove, desenvolvidos de forma didática e simplificada das principais referências deste trabalho.

Palavras-chave: escala de Planck, física moderna, buraco negro, fótons.

Abstract

In this work, we present a theoretical study on the Planck scale focusing on a didactic conceptual and mathematical approach on the subject. We showed the Planck units and possible paths to the Planck scale. Regarding the Planck units, from the dimensional analysis, we verified six of the basic units of this scale (mass, time, length, energy, temperature and density). In addition, twelve paths to the Planck scale are worked out, three of them of our own authorship, and nine developed in a didactic and simplified way from the main references here in.

Keywords: Planck scale, modern physics, black hole, photons.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	OBJETIVOS	12
2.1	Objetivo geral	12
2.2	Objetivos específicos	12
3	DEMONSTRAÇÃO DAS UNIDADES DE PLANCK	13
4	A RELATIVIDADE ESPECIAL E O PRINCÍPIO DA INCERTEZA	17
4.1	A Relatividade especial	17
4.2	Relação massa-energia	18
4.3	O Princípio da incerteza	18
5	DOZE CAMINHOS PARA A ESCALA DE PLANCK	20
5.1	O raio de Schwarzschild e o comprimento de Planck	20
5.2	A energia do Fóton e a energia de Planck	23
5.3	Temperatura de um buraco negro de Planck	24
5.4	A densidade de energia do Universo por meio da escala de Planck	26
5.5	Dispersão de ondas de matéria na curvatura do espaço-tempo	28
5.6	Evaporação Hawking de um buraco negro	30
5.7	O microscópio de Heisenberg	33
5.8	A curvatura do espaço devido a um único fóton	36
5.9	Comprimindo um determinado volume	40
5.10	Medindo as propriedades de um determinado volume	43
5.11	A densidade de energia do campo gravitacional	45
5.12	A equivalência das forças gravitacional e elétrica por meio da escala de Planck	50
	Considerações finais	53
	REFERÊNCIAS	55

1 Introdução

O século XX trouxe uma verdadeira revolução científica em diversas áreas, transformando totalmente a maneira como conhecíamos a natureza. A Física teve um salto enorme em meio a essa revolução, com inúmeras novas teorias e comprovações experimentais, o que ainda na primeira década, trouxe a tona uma das teorias mais fascinantes e bem sucedidas da atualidade, a Mecânica Quântica [1].

O físico alemão Max Planck (1858 - 1947) foi o pioneiro pela nova teoria, sugerindo as primeiras ideias de “quantização”, ao solucionar o problema da radiação de corpo negro, problema esse que não tinha solução pela Física Clássica, onde os dados teóricos e experimentais divergiam drasticamente (um corpo negro seria um objeto teórico capaz de absorver todo e qualquer quantidade de radiação térmica incidente sobre ele, não havendo reflexão em relação a essa radiação incidente). Dessa forma, Planck viria a elaborar a hoje conhecida lei de Planck, que daria início a “era Quântica” na Física [2].

O cerne da lei de Planck consistia em considerar que a energia transmitida não necessariamente deveria ocorrer de forma contínua e ininterrupta, mas sim discretizada, em pequenos “pacotes” de energia, aos quais ele nomeou de *quantum* (cujo plural é *quanta*). Ao utilizar essa proposição, anunciou a resolução do fenômeno até então, sem explicação aparente, formulando uma nova teoria da radiação térmica, que de certa forma complementava as leis experimentais da época, elaborada por John Willian Strutt (1842 - 1919) conhecido como 3º Barão de Rayleigh e Sir James Jeans (1877 - 1946), ainda no início do século XX. Essa nova ideia dos pacotes de energia viria a ser utilizada mais tarde pelo também físico alemão Albert Einstein (1879 - 1955) na explicação do efeito fotoelétrico, dando maior destaque e veracidade a nova teoria [3].

Na mesma época em que Planck já pensava nas primeiras concepções da Mecânica Quântica, mais precisamente em 1899, ele também propôs um sistema de unidades que unificava as três principais constantes fundamentais c , G e h em grandezas como tempo, massa e comprimento. Elas são respectivamente, a velocidade da luz, a constante gravitacional e a constante de Planck, introduzida por ele próprio na criação de sua teoria. Seus símbolos e valores são:

$$\begin{aligned}
 G &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \text{ (ou } m^3/\text{kg s}^2\text{)}, \\
 c &= 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}, \\
 h &= 6,60 \times 10^{-34} \text{ Js}, \\
 \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js (ou } \text{kg m}^2/\text{s}\text{)}.
 \end{aligned}$$

Usamos colchetes em uma grandeza física quando queremos destacar apenas sua dimensão (unidades) e não seus valores. Dessa forma temos:

$$[G] = m^3 / kg \ s^2,$$

$$[c] = m/s,$$

$$[h] = [\hbar] = Js \text{ ou } (kg \ m^2/s).$$

Porém, daqui em diante omitiremos os colchetes para simplificar a notação.

Essas três constantes apresentam uma característica peculiar, ocorre que elas são dimensionalmente independentes, o que significa que nenhuma combinação entre elas é adimensional. Sendo assim, essas constantes naturais representam os pilares básicos da Física, sendo eles os fenômenos gravitacionais, relativísticos e quânticos que de certa forma se encontram relacionados na escala de Planck, como ficou conhecida essa nova forma de representar as unidades básicas através das constantes fundamentais. Por isso, espera-se que a escala de Planck esteja relacionada com o espaço-tempo quântico ou com a gravidade quântica, sendo uma característica de tais representações [4].

A escala de Planck está intimamente relacionada à Mecânica Quântica e suas grandezas geralmente se encontram em escalas tão ínfimas que, por exemplo, para termos uma ideia, estamos mais próximos da ordem de grandeza do tamanho do Universo observável, cerca de $10^{26} \ m$ do que da escala de Planck. Outro exemplo bastante pertinente para termos ideia dessa comparação, tem relação com a energia. Os experimentos atuais que envolvem partículas a altas energias, da ordem de $10^3 \ GeV$, e os raios cósmicos de mais alta energia detectados até hoje, com cerca de $10^{12} \ GeV$ estão bem abaixo da energia de Planck que é da ordem de $10^{19} \ GeV$ [4].

As motivações por trás do interesse em se estudar a escala de Planck são muitas, visto que seu real entendimento pode esclarecer muitas das dúvidas existentes envolvendo a Mecânica Quântica, ainda não completamente compreendida, e da Relatividade Geral, que embora venha tendo cada vez mais provas cabíveis de sua veracidade, se encontra de certa forma, a longos passos de sua unificação com a teoria quântica. As grandezas presentes na escala de Planck estão intimamente relacionadas à Cosmologia, na qual seus valores descrevem as condições de um Universo primitivo pós Big Bang, sendo muito pertinente suas indagações com respeito à matéria e energia escura, com as quais pode ter alguma relação.

Além da Mecânica Quântica, a Relatividade também foi uma das grandes conquistas do século XX. A gravidade presente na teoria da Relatividade Geral é puramente clássica, ou seja, exclui os fenômenos quânticos. Acredita-se que na escala de Planck, essas duas grandes teorias devam se unir onde os efeitos relativísticos seriam comparáveis aos efeitos quânticos,

culminando em uma teoria de gravidade quântica, algo almejado desde o século passado, mas que talvez ainda esteja longe de ser alcançada, embora cada vez mais tenhamos trabalhos árduos sendo executados em áreas como a teoria das cordas e a gravidade quântica em loop, por exemplo. Tendo em vista esse panorama, podemos notar o quão importante são os estudos envolvendo a escala de Planck, pois ela pode representar um limite para as nossas teorias Físicas atuais, e compreendendo nossos limites poderemos avançar em busca de teorias mais completas [5].

As grandezas da escala de Planck utilizadas neste trabalho estão indicadas na Tabela 1. Na próxima seção será demonstrada cada unidade (comprimento, tempo, massa, energia, temperatura e densidade) em termos das constantes fundamentais, onde os valores numéricos aparecem na última coluna.

Tabela 1 – Grandezas da escala de Planck

GRANDEZA	EQUAÇÃO	VALOR NUMÉRICO/ UNIDADE (SI)
Comprimento de Planck (l_p)	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}}$	$1,6 \times 10^{-35} \text{ m}$
Tempo de Planck (t_p)	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}}$	$5,4 \times 10^{-44} \text{ s}$
Massa de Planck (M_p)	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}}$	$2,2 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Energia de Planck (E_p)	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G}}$	$1,956 \times 10^9 \text{ J}$
Temperatura de Planck (T_p)	$\sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G \cdot k_B^2}}$	$1,4 \times 10^{32} \text{ K}$
Densidade de Planck (ρ_p)	$\frac{c^5}{\hbar \cdot G^2}$	$5,1 \times 10^{96} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Fonte – [4, 5]

Como última ressalva, é importante destacar que este trabalho é uma extensão do artigo intitulado “Uma proposta didático-matemática para o uso da escala Planck: dos fótons aos buracos negros” [6], e assim sendo, está diretamente vinculado ao mesmo, tendo partes de seu conteúdo em trechos ou na íntegra. No capítulo 3 e nas seções 5.1, 5.2 e 5.3, é utilizado substancialmente, conteúdo do referido artigo, porém, com vários acréscimos e maior discussão e desenvolvimento, a fim de tornar o que este trabalho se propõe a ser, uma discussão mais profunda e completa sobre o tema.

2 Objetivos

2.1 Objetivo geral

O trabalho possui como principal objetivo fazer um estudo aprofundado sobre doze possíveis caminhos para a escala de Planck de forma didática, mantendo o rigor matemático, a fim de transmitir a importância de seu estudo para as áreas da Física.

2.2 Objetivos específicos

- Demonstrar por meio da análise dimensional, as principais grandezas físicas associadas com a escala de Planck.
- Apresentar conceitos e objetos de estudo da Física moderna com as quais é possível alcançar resultados na escala de Planck.
- Expor a importância do estudo da escala de Planck para examinar os limites das teorias físicas.

3 Demonstração das unidades de Planck

Nesta seção será desenvolvida a demonstração de várias das unidades da escala de Planck por meio da análise dimensional, visando apresentar as unidades que serão utilizadas no decorrer das próximas seções.

A partir de agora poderemos verificar a ampla aplicabilidade da análise dimensional, que consiste basicamente em prever resultados de problemas físicos com base nas unidades das grandezas físicas envolvidas. A utilidade dessa poderosa ferramenta se encontra justamente em sua simplicidade, ao utilizar a intuição física, ou seja, com base na dependência das grandezas envolvidas em um problema, conseguir resolvê-lo sem, de fato, resolvê-lo [7].

Utilizando as unidades das constantes em questão, devemos obter uma combinação que resulte em uma grandeza com dimensão de comprimento (m), que será o comprimento de Planck. Assim, inicialmente multiplicamos as unidades de \hbar por G :

$$\hbar \cdot G = \left(\frac{kgm^2}{s} \right) \cdot \left(\frac{m^3}{kgs^2} \right) = \frac{m^5}{s^3}. \quad (3.1)$$

Após isso, fazendo a razão do resultado final de (3.1) por c^3 ,

$$m^2 = \left[\frac{\left(\frac{m^5}{s^3} \right)}{c^3} \right] = \left[\frac{\left(\frac{m^5}{s^3} \right)}{\left(\frac{m^3}{s^3} \right)} \right] = \left(\frac{\hbar \cdot G}{c^3} \right), \quad (3.2)$$

verifica-se uma medida de comprimento dependente apenas das três constantes fundamentais. Assim, extraindo a raiz quadrada do resultado (3.2), temos a dimensão de comprimento, representando o comprimento de Planck (l_p),

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}}. \quad (3.3)$$

Acredita-se que esse valor seja um limite de comprimento até mesmo para o domínio quântico, e que na escala de Planck, a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica devem estar de alguma forma unificadas e seus efeitos devem ser comparáveis [5, 6].

Para encontrarmos o tempo de Planck, primeiramente realizamos o mesmo procedimento, multiplicando as unidades de \hbar por G , obtendo, assim, o mesmo resultado de (3.1). Em seguida, dividimos (3.1) por c^5 , resultando em

$$s^2 = \left[\frac{\left(\frac{m^5}{s^3} \right)}{c^5} \right] = \left[\frac{\left(\frac{m^5}{s^3} \right)}{\left(\frac{m^5}{s^5} \right)} \right] = \left(\frac{\hbar \cdot G}{c^5} \right). \quad (3.4)$$

A partir de (3.4), extraímos a raiz quadrada para obtermos o tempo de Planck,

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}}. \quad (3.5)$$

Esse resultado corresponde ao tempo decorrido para a luz percorrer o comprimento de Planck (l_p). Para tempos menores que esse, a Física como a conhecemos atualmente não consegue descrever com precisão os fenômenos, não tendo significado físico falarmos em tempos menores que o tempo de Planck [6, 8].

Para obtermos a massa de Planck, utilizamos a mesma ideia dos cálculos anteriores. Multiplicando as unidades de \hbar por c , temos

$$\hbar \cdot c = \left(\frac{kgm^2}{s} \right) \cdot \left(\frac{m}{s} \right) = \left(\frac{kgm^3}{s^2} \right). \quad (3.6)$$

Dividindo (3.6) por G ,

$$kg^2 = \left[\frac{\left(\frac{kgm^3}{s^2} \right)}{\left(\frac{m^3}{kgs^2} \right)} \right] = \left(\frac{\hbar \cdot c}{G} \right). \quad (3.7)$$

Finalmente, extraímos a raiz quadrada de (3.7). Assim como nos casos anteriores, obtemos a massa de Planck a partir das três constantes fundamentais,

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}}. \quad (3.8)$$

De acordo com [8], tem-se que esta era a massa do universo após $10^{-43}s$ do Big Bang, ou seja, após decorrido o tempo de Planck, o Universo primordial possuía uma massa equivalente à massa de Planck. Em outras palavras, o universo teve sua origem caracterizada pelo tempo, comprimento e massa de Planck, em um período de evolução do Universo primitivo, conhecido convenientemente como era de Planck [6].

Para obtermos a energia de Planck, precisamos combinar as constantes de forma a encontrar um valor com dimensão de energia, que no Sistema Internacional (S.I.) é dada em Joules ($[J] = kg \frac{m^2}{s^2}$). Primeiramente, multiplicamos as unidades de \hbar por c^5 :

$$\hbar \cdot c^5 = \left(\frac{kgm^2}{s} \right) \cdot \left(\frac{m^5}{s^5} \right) = \left(\frac{kgm^7}{s^6} \right). \quad (3.9)$$

Agora, dividimos (3.9) pelas unidades de G para obtermos um valor com dimensão de energia:

$$J^2 = \left[\frac{\left(\frac{kgm^7}{s^6} \right)}{\left(\frac{m^3}{kgs^2} \right)} \right] = \left(\frac{\hbar \cdot c^5}{G} \right). \quad (3.10)$$

Dessa forma, extraímos a raiz quadrada do resultado final e obtemos uma grandeza com dimensão de energia, por meio de uma nova combinação das três constantes fundamentais [6]:

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G}}. \quad (3.11)$$

Por fim, precisamos encontrar a temperatura (em Kelvin), combinando as constantes fundamentais como fizemos anteriormente. Primeiramente combinamos as unidades de \hbar , c^5 e G da mesma forma que foi realizado em (3.10),

$$\left(\frac{\hbar \cdot c^5}{G} \right) = \left[\frac{\left(\frac{kgm^7}{s^6} \right)}{\left(\frac{m^3}{kgs^2} \right)} \right] \cdot \left(\frac{m^5}{s^5} \right) = \left(\frac{kg^2 m^4}{s^4} \right). \quad (3.12)$$

Em seguida, efetuamos a divisão de (3.12) por $[k_B^2] = \frac{m^4 K g^2}{s^4 K^2}$, sendo $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \left(\frac{m^2 \cdot kg}{K \cdot s^2} \right)$ a constante de Boltzmann. Portanto, temos que a temperatura (em Kelvin) ao quadrado vale:

$$K^2 = \left[\frac{\left(\frac{kgm^7}{s^6} \right)}{\left(\frac{m^4 K g^2}{s^4 K^2} \right)} \right] = \left(\frac{\hbar \cdot c^5}{G} \right) \cdot \frac{1}{k_B^2} = \frac{\hbar \cdot c^5}{G \cdot k_B^2}. \quad (3.13)$$

Podemos escrever essa última expressão de uma forma mais fundamental, extraindo a raiz de (3.13) para, enfim, obtermos um valor com dimensão de temperatura. Combinando, além das três constantes fundamentais como havíamos feito anteriormente, uma nova constante, a constante de Boltzmann, geralmente relacionada a fenômenos termodinâmicos [6].

$$T_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G \cdot k_B^2}}. \quad (3.14)$$

A última unidade que iremos mostrar será a densidade de Planck (ρ_p), que pode ser obtida pela razão da massa pelo volume, nesse caso, a massa de Planck pelo comprimento de Planck. Assim, o que temos que fazer é a razão da massa de Planck por uma potência do comprimento de Planck, ou seja, buscar uma combinação entre as constantes fundamentais que tenha a dimensão de densidade, que no S.I é dado por $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$. Desse modo, temos:

$$\rho_p = \frac{M_p}{l_p^3}. \quad (3.15)$$

Tendo em mente a equação (3.1), vamos fazer algo semelhante, multiplicando as unidades de h por G^2 . Fazendo as simplificações necessárias, chegamos a uma combinação das unidades:

$$\hbar \cdot G^2 = \left(\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \right) \cdot \left(\frac{\text{m}^6}{\text{kg}^2 \text{s}^4} \right) = \frac{\text{m}^8}{\text{kg} \text{s}^5}. \quad (3.16)$$

Agora, fazemos a razão entre as unidades de c^5 pelo resultado final de (3.16) para obtermos uma combinação que tenha as unidades de (3.15),

$$\rho = \left[\frac{c^5}{\left(\frac{\text{m}^8}{\text{kg} \text{s}^5} \right)} \right] = \left[\frac{\left(\frac{\text{m}^5}{\text{s}^5} \right)}{\left(\frac{\text{m}^8}{\text{kg} \text{s}^5} \right)} \right] = \frac{c^5}{\hbar \cdot G^2} \quad (3.17)$$

Assim, podemos escrever a densidade de Planck em sua forma final e mais conhecida:

$$\rho_p = \frac{c^5}{\hbar \cdot G^2}. \quad (3.18)$$

É interessante notar na equação (3.18) que, diferente das outras unidades de Planck mostradas, a densidade de Planck não possui uma raiz quadrada e não depende de outras constantes além de c , G e h . Diferente da temperatura, por exemplo, que ainda depende da constante de Boltzmann k_B . Segundo [8], durante os primeiros instantes do Universo, toda a sua massa (a massa de Planck) estava concentrada em um ínfimo local do espaço, da ordem do comprimento de Planck, a uma densidade descomunal da ordem de $10^{96} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a densidade de Planck [8].

4 A Relatividade especial e o Princípio da incerteza

4.1 A Relatividade especial

A Relatividade Especial (ou Relatividade Restrita) foi desenvolvida no final do século XIX e início do século XX pelo físico alemão Albert Einstein, sendo oficialmente publicada em 1905. No mesmo ano, que viria a ser conhecido como o *annus mirabilis* de Einstein, ele publicou seus trabalhos sobre o efeito fotoelétrico, aplicando sua perspicaz interpretação dos *quanta* de energia, propostos por Planck, o que mais tarde lhe renderia o prêmio nobel de Física (1921), além dos trabalhos envolvendo o Movimento Browniano [9].

A Relatividade estuda as diferenças nas medidas físicas realizadas em dois diferentes locais ou referenciais que estão em movimento relativo. Mais tarde, Einstein viria a expandir sua teoria, chamada agora de Relatividade Geral (RG), na qual considerava referenciais em qualquer tipo de movimento, ou seja, esses poderiam estar acelerados, o que não ocorria na Relatividade Restrita (RR), na qual todos os referenciais eram inerciais. Um referencial inercial pode ser descrito como aquele ao qual se pode aplicar a lei da inércia, ou seja, se um corpo não estiver submetido a quaisquer forças externas que alterem seu movimento, para um referencial inercial, ele deve estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU) [9].

Einstein admitiu, em sua teoria, dois postulados fundamentais, que definiam um ponto de partida e a base para toda a argumentação a respeito da mesma. São eles:

1º Postulado - Princípio da Relatividade - As leis da Física são as mesmas para todos os sistemas de referência inerciais.

2º Postulado - Princípio da invariância da velocidade da luz - A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, não dependendo da velocidade de sua fonte.

Tendo como ponto de partida esses dois postulados, Einstein apresentou em obras posteriores, outros conceitos e ideias ao analisar a sua recém publicada teoria da relatividade. Desses trabalhos advém a, talvez, mais famosa equação da física, $E = M \cdot c^2$, que representa a equivalência massa-energia, trazendo consigo implicações profundas na maneira como víamos esses dois conceitos pela Física Clássica. Vamos conhecer um pouco mais sobre essa relação.

4.2 Relação massa-energia

Além dos efeitos relativísticos na cinemática, consequências diretas dos postulados, como a dilatação temporal e a contração de comprimento, podemos destacar os que ocorrem na dinâmica, agora denominada dinâmica relativística. Após a publicação oficial da teoria da relatividade especial em 1905, Einstein deduziu a partir dessas fundamentações, uma nova relação que descrevia o elo fundamental existente entre massa e energia, equacionada da seguinte forma [10]:

$$E = M \cdot c^2; \quad (4.1)$$

onde, na equação (4.1), E é a energia relativística do sistema, M a massa, e c a velocidade da luz no vácuo. A principal conclusão que podemos tirar da relação (4.1) é que mesmo em repouso, a massa possui uma quantidade de energia que lhe é inerente, associada diretamente a sua massa m [10].

Essa relação não tem valor apenas teórico, mas sua validade experimental é muito importante nos dias atuais, já que, por exemplo, as usinas nucleares funcionam com base nesse princípio (o processo envolvido em questão é a fissão nuclear). Um ponto importante a ser destacado é a estrutura da relação, que possui a massa multiplicada por um fator muito grande, c^2 , o que implica que mesmo para pequenos valores de massa (valores cotidianos, por exemplo) a quantidade de energia armazenada devido a sua massa é muito alta [10].

4.3 O Princípio da incerteza

O princípio da incerteza foi formulado por Werner Karl Heisenberg (1901 - 1976) e logo se tornou um dos princípios mais fundamentais e de maior identidade para a nova teoria que vinha quebrando paradigmas desde seu surgimento, com Max Planck. Heisenberg é também conhecido pela elaboração de uma das primeiras, das várias formulações que a Mecânica Quântica viria a ter, a conhecida Mecânica Quântica Matricial [11].

Segundo Heisenberg, não se pode conhecer com precisão máxima e de forma simultânea, duas grandezas físicas quaisquer como a posição X e momento p_x de uma partícula, por exemplo. O âmago dessa proposição se encontra no fato do princípio da incerteza apresentar um limite fundamental com o qual podemos conhecer pares de propriedades físicas. Essa precisão máxima é proporcional à constante de Planck, e não está relacionada com a falta de precisão de nossos aparelhos de medição ou possíveis lacunas que a teoria poderia ter, mas sim com uma característica fundamental da natureza [12].

Dessa forma, mesmo que tenhamos aparelhos ideais para realizar as medições, não obteremos uma medida com precisão maior que a permitida pelo princípio da incerteza. A equação formal relaciona ambas as grandezas da seguinte forma:

$$\Delta_x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.2)$$

Na inequação (4.2), Δx representa a incerteza na medida da posição da partícula, Δp_x representa a incerteza na medida da componente x do momento da partícula, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ é a constante de Planck reduzida.

O princípio da incerteza trouxe a tona as já cada vez mais notáveis diferenças e incoerências entre as teorias clássicas e a Mecânica Quântica. Na Física Clássica, conhecendo com exatidão, a posição e o momento de uma partícula, em um sistema isolado e em um certo instante, podemos determinar o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo futuro, por isso a Mecânica Clássica é conhecida como determinística [12].

Como o princípio da incerteza é válido tanto teórica quanto experimentalmente, e tendo em vista a equação (4.2), podemos, por exemplo, diminuir a incerteza em uma das quantidades físicas que não temos interesse, a fim de obter uma precisão maior na outra grandeza desejada, ou seja, quanto maior a imprecisão tivermos em uma grandeza, conseqüentemente, maior precisão teremos na outra. Portanto, a restrição que existe na medição não diz respeito a uma grandeza individual, mas sim a medição simultânea de ambas as grandezas. Tendo em vista essa ideia, podemos entender o motivo da Mecânica Quântica ser conhecida como probabilística, e não determinística como explicado anteriormente [11, 12].

Esta seção introdutória apresenta informações e fornece embasamento para as seções que se seguem. Nelas, serão apresentados 12 caminhos possíveis para a escala de Planck, nos quais serão utilizadas ideias deste capítulo e outros conceitos além dos já apresentados, sobre Relatividade e Mecânica Quântica, que serão devidamente explicados em suas respectivas seções. Cada caminho será guiado por uma ideia ou objetivo, que terá como resultado grandezas e quantidades na escala de Planck.

5 Doze caminhos para a escala de Planck

Os caminhos presentes nas seções 5.1, 5.2 e 5.3 foram desenvolvidos pelos autores, enquanto os demais foram desenvolvidos de forma didática a partir das principais referências do trabalho, sendo as seções 5.4 a 5.6 da referência [5] e as seções 5.7 a 5.12 da referência [4]. É válido destacar que a escolha em usar a constante de Planck h ou a constante de Planck reduzida \hbar é arbitrária, sendo adotado o primeiro caso quando tratarmos do fóton e sua energia, e o segundo caso para os demais, assim como presente na literatura.

5.1 O raio de Schwarzschild e o comprimento de Planck

Karl Schwarzschild (1873 - 1916), físico alemão, foi o responsável por apresentar a primeira solução para as complicadas equações de Albert Einstein sobre a teoria da Relatividade Geral (RG), poucos meses após sua publicação oficial. As soluções apresentadas por Schwarzschild apresentam campos gravitacionais gerados por fontes esféricas e homogêneas de matéria sem rotação, trazendo a tona indícios valiosos do que mais tarde viriam a ser conhecidos como buracos negros, corpos bastante peculiares que intrigam a Física ainda nos dias de hoje [13, 14].

Outra consequência clara das soluções de Schwarzschild é a existência de um raio crítico (que passaria a ser denominado raio de Schwarzschild) que uma vez atingido por um corpo massivo, nada poderia escapar do seu campo gravitacional, nem mesmo a luz, sendo essa uma das principais características desses corpos [13, 14]. Essa constante r_s pode ser identificada como

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (5.1)$$

onde G é a constante gravitacional, M é a massa da matéria envolvida e c a velocidade da luz no vácuo.

A solução de Schwarzschild foi tão valiosa e de certa forma curiosa (visto que Schwarzschild se encontrava em pleno campo de batalha, na Rússia, durante a primeira Guerra Mundial) que foi reconhecido pelo próprio Einstein, sendo citado no artigo posterior que consolidaria a Relatividade Geral, publicado em meados de 1916 (os artigos que seriam a base da RG foram publicados em Novembro de 1915) [14].

Nesta seção, o objetivo é encontrar a razão entre o raio de Schwarzschild (r_s) da partícula fundamental responsável pela interação eletromagnética, o fóton, e o comprimento de Planck, a fim de compararmos esses valores, ou seja, o intuito é encontrarmos quanto o raio limite de

um fóton representa do comprimento de Planck. De forma resumida, o raio de Schwarzschild é uma medida do limite inferior de comprimento que todo corpo material possui, pois ao ser ultrapassado, a matéria envolvida colapsa gravitacionalmente em um ponto extremamente denso. Assim, caso o corpo atinja um comprimento inferior ao de seu raio de Schwarzschild (r_s) haverá o surgimento de uma singularidade, ou seja, o corpo se transformará em um buraco negro [13]. Para um melhor entendimento sobre métricas, bem como da solução de Schwarzschild, o leitor pode consultar a referência [15].

Devemos escrever o raio de Schwarzschild (r_s) do fóton em função das constantes fundamentais c , G e \hbar . Para isso, vamos utilizar as equações para o raio de Schwarzschild (5.1), a equação de energia relativística (4.1), a energia do fóton (E_f) e a equação clássica da velocidade de uma onda (c):

$$E_f = h\nu, \quad (5.2)$$

$$c = \lambda\nu. \quad (5.3)$$

O fóton não possui massa, visto que toda sua massa está convertida em energia. Dessa forma, por meio da equivalência massa-energia (4.1), iremos mensurar um massa efetiva para o fóton, que seria sua massa caso possuísse uma. Colocando a massa em evidência na equação (4.1), e substituindo (5.2) e (5.3) em (4.1), obtemos uma expressão para a massa efetiva do fóton,

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \quad (5.4)$$

Substituindo esse resultado na equação do raio de Schwarzschild (5.1), obtemos uma expressão para o raio desse fóton que depende das constantes fundamentais da escala de Planck,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{(2G) \cdot \left(\frac{h}{\lambda c}\right)}{c^2} = \frac{2Gh}{\lambda c^3}. \quad (5.5)$$

Em seguida, substituindo o comprimento de onda (λ) em (5.5) pelo comprimento de Planck, temos:

$$r_s = \frac{2Gh}{l_p c^3}. \quad (5.6)$$

Finalmente, fazendo a razão entre a equação (5.6) e o comprimento de Planck (l_p) presente na Tabela I, temos:

$$\frac{r_s}{l_p} = \left[\frac{\left(\frac{2Gh}{l_p c^3} \right)}{l_p} \right] = 2 \rightarrow r_s = 2l_p. \quad (5.7)$$

Com base no resultado (5.7), verificamos dois fatos importantes. Primeiro, ao substituímos o comprimento de onda do fóton pelo comprimento de Planck na expressão (5.6), obtivemos o menor fóton possível de existir na natureza, visto que esse é teoricamente o menor comprimento possível. Ao fazermos a razão do seu raio limite pelo comprimento de Planck e obtermos o valor 2, verificamos que o raio limite desta partícula é o dobro do comprimento de Planck, como mostra a Figura 1 [6].

Na escala de Planck, os aspectos quânticos da gravidade se tornam notáveis e o espaço-tempo possivelmente adquire uma estrutura discreta, ou seja, quantizada. De acordo com [16] esse fato nos induz a seguinte pergunta: “O que é o espaço-tempo na escala de Planck?” Quando formos capazes de entender essa questão, seremos capazes de formular uma teoria quântica da gravidade, fazendo a união da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica, um dos feitos mais almejados da Física Contemporânea. Embora já existam muitos trabalhos em relação ao tema, principalmente envolvendo a teoria de cordas e a gravitação quântica em loop, talvez ainda estejamos muito longe de tal realização [5, 6, 16].

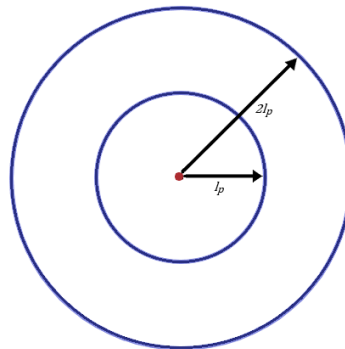


Figura 1 – Fóton com raio limite equivalente ao dobro do comprimento de Planck. (Fonte: própria).

5.2 A energia do Fóton e a energia de Planck

Nesta seção, partiremos da equação de energia do fóton (5.2), buscando descobrir sua energia em função das constantes fundamentais da escala de Planck. Primeiramente, substituímos a equação de velocidade da onda (5.3) na frequência ν e, em seguida, substituímos a expressão do raio de Schwarzschild (5.1) no comprimento de onda do fóton, como fizemos anteriormente, já que buscamos a energia do menor fóton possível de existir na natureza [6]. Assim, temos:

$$E_f = h\nu = h \cdot \left(\frac{c}{\lambda}\right) = h \cdot \left[\frac{c}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)}\right] = \frac{hc^3}{2GM}. \quad (5.8)$$

Substituindo M por $\left(\frac{E}{c^2}\right)$ da equação relativística (4.1), e omitindo o índice f na energia, ou seja, representamos a partir de agora $E_f = E$, temos

$$E = \left[\frac{hc^3}{\left(\frac{2GE}{c^2}\right)}\right] = \frac{hc^5}{2GE}. \quad (5.9)$$

Isolando o termo de energia, agora presente nos dois membros de (5.9), obtemos:

$$E^2 = \frac{hc^5}{2G} \quad \text{ou} \quad E = \sqrt{\frac{hc^5}{2G}}. \quad (5.10)$$

Em seguida, fazemos a razão entre essa energia do fóton e a energia de Planck (3.11), a fim de verificar o quanto dessa energia representa da energia de Planck:

$$\frac{E}{E_p} = \left(\frac{\sqrt{\frac{hc^5}{2G}}}{\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}}\right) = \sqrt{\frac{hc^5 G}{2G \hbar c^5}} = \sqrt{\frac{h}{2\hbar}} = \sqrt{\pi} \simeq 1,77. \quad (5.11)$$

De forma mais conclusiva, podemos escrever:

$$E = 1,77 \cdot E_p. \quad (5.12)$$

Dessa forma, conseguimos traçar características específicas desse fóton. Como fizemos o comprimento de onda igual ao comprimento de Planck (l_p), calculamos o fóton com o menor comprimento de onda, ou seja, o menor fóton possível de existir na natureza. Pela relação (5.2), se esse fóton possui o menor comprimento de onda possível, temos também um fóton com máxima frequência, visto a relação de proporcionalidade dessas grandezas, o que conseqüentemente, por meio de sua equação, nos apresenta um fóton com máxima energia [6].

5.3 Temperatura de um buraco negro de Planck

Nesta seção, nosso objetivo é calcular qual a temperatura de um buraco negro com as dimensões da escala de Planck. Os buracos negros são os objetos mais densos do universo, propriedade adquirida ao atingir o raio limite conhecido como raio de Schwarzschild, onde toda sua massa é comprimida em um volume pequeno, deformando o espaço-tempo de tal forma que nada pode escapar, a partir do momento em que se ultrapassa o horizonte de eventos. Os buracos negros mais simples previstos pela Relatividade Geral são chamados de buracos negros de Schwarzschild, caracterizados por serem estáticos, esféricos e por serem desprovidos de carga elétrica [6, 13].

Embora a confirmação experimental das teorias envolvendo a escala de Planck seja bastante complicada, a física teórica busca de forma incessante interpretações naturais para ideias matemáticas, como ocorreu com a singularidade dos buracos negros. Outro exemplo é a radiação prevista por Hawking que envolve a energia de Planck, onde se acredita que buracos negros podem ter uma temperatura conhecida como “temperatura Hawking”. Assim, nos estágios finais da evaporação dos buracos negros, a radiação Hawking emitida por esse buraco negro deverá ter a energia de Planck, fato que ainda não foi observado, mas que os teóricos acreditam ser verdade [4, 6].

O fenômeno descrito anteriormente pode ser explicado pelo fato de que, quanticamente, os buracos negros emitem certo espectro de radiação, revelando que esses objetos astronômicos possuem propriedades termodinâmicas, como temperatura e entropia, fatos esses descobertos por Jacob David Bekenstein e Stephen Willian Hawking na segunda metade do século XX. A temperatura emitida pelos buracos negros é conhecida como radiação Hawking.

Podemos conceber a origem da radiação Hawking (ou “temperatura Hawking”) de forma simples e resumida. Classicamente, buracos negros não deveriam emitir nenhum espectro de radiação, existindo apenas absorvendo matéria e energia, sem nunca emití-las. Porém, do ponto de vista da Mecânica Quântica, existe um fenômeno que pode explicar a emissão de radiação térmica dos buracos negros. Ao redor do horizonte de eventos do buraco negro existe o surgimento de partículas virtuais (basicamente, partículas que existem em um curto período de tempo), de forma espontânea, a partir do vácuo. Quando ocorre o surgimento de um par de partícula-antipartícula, por exemplo, a antipartícula pode ser absorvida pelo buraco negro, fazendo com que a partícula que não foi absorvida pelo buraco negro passe de virtual a real, devido ao fato de que essa não irá possuir mais sua contraparte para se aniquilar, fato que ocorre no encontro desses pares, segundo a Física de Partículas. É justamente essas partículas remanescentes que constituem o que denominamos de radiação Hawking [7, 17].

É possível descobrir a temperatura, ou seja, a radiação térmica emitida desses objetos por meio da equação (5.13), como sugere as referências [5] e [6]

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M_b}, \quad (5.13)$$

onde M_b é a massa do buraco negro e k_B a constante de Boltzmann, utilizada na dedução da temperatura de Planck.

A temperatura de um buraco negro é inversamente proporcional a sua massa ($T \propto \frac{1}{M_b}$). Isso significa que quanto menor a massa do buraco negro, maior sua temperatura, como é o nosso caso já que a massa de Planck é da ordem de 10^{-8} kg e a temperatura correspondente é muito alta, da ordem de 10^{31} K. Conforme destacado em [7], “A temperatura de um buraco negro é de natureza quântica, já que se anula quando h é desprezível” [6].

Por meio da equação (5.13), iremos obter a temperatura de um buraco negro de Planck, isto é, que possua como raio de Schwarzschild o comprimento de Planck. Para isso, iremos utilizar a equação (5.1), com $r_s = 2l_p$ (poderíamos utilizar l_p , porém utilizaremos $2l_p$ por conveniência de simplificação), e substituir o raio de Schwarzschild pelo comprimento de Planck (l_p):

$$r_s = \frac{2GM_b}{c^2}, \quad M_b = \frac{c^2 r_s}{2G} \quad (5.14)$$

Agora que temos um valor de massa, podemos substituir M de (5.14) em (5.13). Assim, obtemos

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B \left(\frac{c^2 l_p}{G}\right)} = \frac{\hbar c}{8\pi k_B l_p} \sim 10^{31} K. \quad (5.15)$$

Esse resultado já é conhecido [5]. Como observado na Tabela 1, esse valor é cerca de dez vezes menor do que a temperatura de Planck. Após um período de 10^{-43} s do Big Bang, essa era a temperatura de toda a matéria que existia até então, que estava em uma rápida expansão acelerada com elevada densidade e a uma temperatura colossal [8, 6].

O fato de a temperatura dos buracos negros serem inversamente proporcionais a sua massa nos traz algumas conclusões importantes. Para massas de buracos negros supermassivos, teremos temperaturas ínfimas, menores até mesmo que a temperatura da radiação cósmica de fundo, que permeia o vácuo, tornando ainda mais difícil o processo de detecção desse espectro de radiação térmica. Já para a massa de Planck (muito pequena, se comparada à massa anterior), temos uma temperatura muito alta, próximo da temperatura de Planck. Embora ainda não detectada, teóricos acreditam que a radiação Hawking deva existir [17].

5.4 A densidade de energia do Universo por meio da escala de Planck

Nosso objetivo para essa seção envolverá conceitos de cosmologia, o que difere um pouco dos outros caminhos mostrados até agora. Utilizando o princípio da incerteza e com base em um experimento mental, calcularemos a densidade de energia do Universo, assumindo certos critérios que serão explicados a seguir. Considerar algo dessa magnitude pode fugir da descrição das leis da Mecânica Quântica e da Relatividade Geral, já que estamos trabalhando na escala de Planck, mas como se trata de um experimento mental podemos explorar teoricamente os significados fornecidos por tal consideração [5].

O século XX foi um período célebre para as descobertas físicas de modo geral, tanto para o surgimento de teorias completamente inovadoras, quanto para alavancar áreas com certo desenvolvimento até então. A Cosmologia foi uma das áreas que se favoreceu desses grandes avanços, tendo grande reconhecimento ainda nessa época, principalmente devido as contribuições na parte observacional. Esta área pode ser definida como a ciência responsável pelo estudo do Universo na forma mais literal da palavra, buscando reponder problemas desde qual sua origem, até descrever todas as etapas de sua evolução, visando ainda entender sua estrutura e composição [18].

Muitos dos avanços obtidos pela cosmologia no século XX se deve a Edwin Powell Hubble (1889-1953), considerado um dos astrônomos de maior relevância científica, responsável pela denominada Lei de Hubble e pela descoberta da expansão do Universo. Após os trabalhos de Albert Einstein serem publicados, astrônomos como Willem de Sitter (1872 - 1934) tentaram estabelecer a relação entre a Relatividade Geral e Cosmologia. O próprio Einstein se dedicou a trabalhos que envolvessem esse tema, propondo a famosa constante cosmológica, ao acreditar que as propriedades do espaço-tempo eram estáticas, assim como também acreditava De Sitter [19].

Ao observar a então nebulosa de Andrômeda (na verdade se tratava da galáxia de Andrômeda), por meio do efeito Doppler, Hubble propôs sua lei que relacionava as velocidades das fontes com a distância da fonte da seguinte forma:

$$v = H \cdot d. \quad (5.16)$$

Aqui, H é uma constante, denominada constante de Hubble, cuja unidade é $km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$, sendo pc a unidade astronômica de medida de distâncias *parsec*, v é a velocidade da fonte no instante da emissão e d é a distância que separa o observador da fonte. O Universo como

o conhecemos é descrito por uma métrica conhecida como Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Nela, o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico em relação a qualquer ponto, possuindo uma origem de onde a densidade de matéria divergiria. Friedmann, um dos principais responsáveis por essa métrica, estimou por meio de suas soluções expansionistas das equações de Einstein certos ciclos de expansão e contração do Universo [19].

Para executar nossa proposição iremos utilizar o princípio da incerteza, já apresentado na equação (4.2), porém com uma pequena diferença, iremos relacionar as grandezas de energia e tempo, e não momento e posição como mostrado anteriormente. Assim, nossa equação será:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.17)$$

Pela equação (4.1), sabemos que $\Delta E = \Delta M \cdot c^2$ e pela equação (3.15) que $M = \rho \cdot V$, onde V é o volume da esfera de Hubble. Dito isso, vamos considerar, de acordo com [5] para nosso Universo, um formato esférico que obedeça a métrica citada anteriormente, com um raio de $R \sim H^{-1}c$, que é o raio de Hubble, c é a velocidade da luz no vácuo, e como idade para o Universo, $\Delta t \sim H^{-1}$. Todos esses parâmetros são impostos ao considerarmos nosso Universo como uma esfera de Hubble, possuindo assim um volume de Hubble. É importante resaltar que a grandeza que estamos querendo determinar é ρ que agora representa a densidade cosmológica de energia do Universo [5]. Escrevendo o princípio da incerteza para as grandezas supracitadas, temos

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) (\Delta t) \simeq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.18)$$

Agora substituímos os valores de R e Δt na última parte da equação (5.18),

$$\left[\frac{4}{3} \pi (H^{-1}c)^3 \rho \right] (H^{-1}) \simeq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.19)$$

Reescrevendo a equação acima e simplificando, obtemos

$$\left(\frac{8}{3H^4} \pi \rho c^3 \right) = \hbar. \quad (5.20)$$

Fazendo uso de um último recurso, substituímos na equação (5.20) a equação $H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho$ conhecida como equação de Friedmann, a fim de obtermos a densidade em função apenas das

constantes fundamentais, ρ será dado por [5],

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \frac{c^7}{G^2 \hbar}, \quad (5.21)$$

Simplificando toda a expressão por c^2 , temos

$$\frac{\rho}{c^2} = \frac{3}{8\pi} \frac{c^5}{G^2 \hbar}, \quad (5.22)$$

Dessa forma, podemos finalizar o desenvolvimento, identificando a expressão $\left(\frac{c^5}{G^2 \hbar}\right)$ já conhecida, com a densidade de Planck [5],

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \rho_P. \quad (5.23)$$

O valor de (5.23) é bastante significativo, pois já podíamos supor um alto valor de densidade de energia, visto que consideramos um Universo com toda sua matéria em um tempo de existência da ordem de $\sim 10^{-44}$ s. É importante destacar que obtivemos um valor de densidade de energia para um Universo com toda sua energia contida em um volume de raio considerável, e ainda sim, esse valor se mostrou múltiplo da densidade de Planck.

5.5 Dispersão de ondas de matéria na curvatura do espaço-tempo

A motivação para esse caminho se baseia na propagação de ondas de matéria e em seu espalhamento, quando incidem na curvatura do espaço-tempo, principal efeito relativístico presente na RG. Pelo princípio da dualidade onda-partícula de Louis de Broglie (1892 - 1987), sabemos que partículas podem ter características de ondas e vice-versa, ou seja, essas duas nuances distintas fazem parte do mesmo sistema, coexistindo em uma superposição quântica, até que seja feita a medição e o sistema colapse em um dos observáveis, como é bem conhecido na Mecânica Quântica. Dessa forma, podemos interpretar esse fenômeno como se as ondas possuíssem massa (característica de uma partícula) e devido a isso, fossem afetadas pela curvatura do espaço-tempo, o que causaria o seu espalhamento ao se encontrarem com tal deformação [5].

O fenômeno do qual estamos tratando é o espalhamento da onda, onde a energia incidente em um ponto é desviada em diversas direções, sendo talvez o mais famoso fenômeno dessa natureza, o espalhamento Compton, devido à colisão de um fóton com um elétron, onde o fóton transfere energia para o mesmo, mudando sua direção. O espalhamento de uma onda não deve ser confundido com o fenômeno de dispersão.

A dispersão de uma onda eletromagnética, por exemplo, pode ser notada ao observar um raio de luz branca atravessar um prisma, como ocorreu no famoso experimento realizado por Isaac Newton. Nele, devido as diferentes frequências e comprimentos de onda das ondas monocromáticas, componentes da luz branca, serem diferentes, ao mudar o meio de propagação, o índice de refração também muda, ocorrendo a nítida separação dos vários componentes luminosos que formam a luz branca [20].

Retomando nossa proposição, uma condição para que ocorra o espalhamento da onda de matéria é que o comprimento de onda λ deve ser próximo da curvatura L do espaço-tempo, pois se λ fosse muito maior que L , por ser muito energética, a onda não sentiria a deformação no espaço, se propagando em um espaço praticamente plano. Para o outro caso, com λ muito menor que L , ele passaria pela grande deformação, sem sentir tais efeitos por não interferir em sua propagação, como a luz ao passar por o buraco de uma fechadura por exemplo. Nesse caso a luz não sofre difração (outro efeito ondulatório, diferente da dispersão e do espalhamento) pois seu comprimento de onda é muito menor que as dimensões do orifício ao qual atravessa, passando através do orifício sem nenhum tipo de efeito ou empecilho em sua propagação.

Considerando que nossa onda de matéria está associada a uma partícula de massa m , o comprimento de onda Compton dessa partícula que sofre espalhamento na curvatura do espaço-tempo é dado por

$$\lambda = \frac{h}{mc}, \quad (5.24)$$

Onde em (5.24), além da constante de Planck h , λ é o comprimento de onda da onda de matéria, m a massa associada à partícula e c a velocidade da luz no vácuo.

A escala de Planck será alcançada quando a curvatura do espaço-tempo for causada pela própria massa m associada à onda-partícula, e esse raio de curvatura L for comparável ao comprimento de onda Compton dessa partícula. Levando em consideração a seguinte aproximação $\lambda \sim L$, analisando a equação alternativa para a massa de Planck, podemos exprimir uma relação entre a massa m e o raio de curvatura L [5],

$$M_p = \frac{l_p c^2}{G}, \quad m = \frac{L c^2}{G}, \quad \frac{m}{L} = \frac{c^2}{G} = \frac{M_p}{l_p}. \quad (5.25)$$

Fazendo a substituição de λ por L na equação do comprimento de onda Compton (5.24), temos,

$$\lambda = \frac{h}{mc}; \quad L \sim \frac{h}{mc}. \quad (5.26)$$

Como a massa da partícula está associada à curvatura do espaço-tempo pela expressão (5.25), fazemos a substituição

$$L = \frac{h}{\left(\frac{Lc^2}{G}\right) \cdot c}. \quad (5.27)$$

Fazendo as simplificações

$$L^2 = \frac{h \cdot G}{c^3}. \quad (5.28)$$

Como a constante de Planck pode ser escrita na forma $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, simplificamos a equação no numerador e denominador por 2π , a fim de obter

$$L = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = \sqrt{2\pi} \cdot l_p \simeq 2.41l_p. \quad (5.29)$$

O resultado apresentado na equação (5.29) mostra que quando a escala de Planck for atingida, a energia que essa onda de matéria carrega é a responsável pela curvatura do espaço-tempo, e é justamente essa curvatura que impede a sua propagação, caso seja muito energética nesse ponto [5]. Como sabemos, o comprimento de Planck é um valor de comprimento limite, onde não existe a possibilidade de $\lambda < l_p$, não havendo propagação da onda, caso isso aconteça. Agora, analisando o resultado presente na equação (5.29), concluímos que a curvatura do espaço é um múltiplo do comprimento de Planck; e por $L \sim \lambda$, o comprimento de onda também o será, ou seja, esse é o menor valor de λ que uma onda de matéria pode ter, para que sofra espalhamento no raio de curvatura do espaço-tempo, visto que assumimos para m um valor múltiplo da escala de Planck, conforme descrito na equação (5.25).

5.6 Evaporação Hawking de um buraco negro

Para esse caminho, iremos utilizar como ideia central os buracos negros como na seção 5.3, com enfoque também nas propriedades termodinâmicas já também discutidas. Um buraco negro esférico e estático de massa M_b (buraco negro de Schwarzschild) emite um espectro de radiação térmica conforme a equação (5.13) descreve. Como já falado na seção 5.3, os buracos negros podem de certa forma, deixar de existir, “evaporando” a sua massa através da radiação térmica emitida. É justamente esse ponto que iremos abordar nesse caminho, para qual massa do buraco negro ocorre a irradiação de N partículas de comprimento de onda λ_{max} [5].

A lei de deslocamento de Wien, elaborada em 1893 por Wilhelm Wien (1864 - 1928), descreve a radiação térmica emitida em picos de comprimentos de onda máximos λ_{max} e teve diversas comprovações experimentais desde sua concepção. Ela recebeu esse nome descritivo devido ao fato de que o comprimento de onda no qual a emissão de radiação é máxima varia com a temperatura de acordo com a relação [1]

$$\lambda_{max} \cdot T = b \quad \text{ou} \quad \lambda_{max} \propto \frac{1}{T}, \quad (5.30)$$

onde b é uma constante de valor

$$\lambda_{max} \cdot T = b = \frac{hc}{4.9651k_B} \simeq 2.8978 \cdot 10^{-3} m \cdot K \quad (5.31)$$

Agora, utilizando a lei de deslocamento de Wien e a equação (5.13) para a temperatura do buraco negro, vamos determinar para qual comprimento de onda λ_{max} ocorre máxima emissão [5],

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{hc}{4.9651k_B} \cdot \frac{8\pi Gk_B M_b}{\hbar c^3}. \quad (5.32)$$

Lembrando da relação $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e fazendo as simplificações, chegamos ao resultado final para λ_{max} ,

$$\lambda_{max} = \frac{8\pi^2}{4.9651} \cdot \frac{2GM_b}{c^2} \simeq 15.90 r_s. \quad (5.33)$$

Esse resultado mostra que grande quantidade da radiação térmica emitida pelo buraco negro ocorre para além do seu raio de Schwarzschild, ou seja, para além do seu horizonte de eventos. A perda de energia será comparável à massa do buraco negro, por isso vamos descobrir qual a energia necessária para consumir toda sua massa em uma rajada de partículas pela equação (5.2). Fazendo a substituição de (5.3) na equação de energia derivada por Planck e Einstein, teremos [5]

$$E = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda_{max}}. \quad (5.34)$$

Fazendo a aproximação $15.90r_s \simeq 16r_s$ em λ_{max} e substituindo a equação (5.1) na parte final de (5.34) obtemos,

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda_{max}} \simeq \frac{hc}{16r_s} = \frac{hc}{16 \cdot \left(\frac{2GM_b}{c^2}\right)} = \frac{hc^3}{32GM_b}. \quad (5.35)$$

Assumindo $N = 2$, por exemplo, podemos estimar a massa do buraco negro consumida, pela equação de energia relativística (4.1). É evidente que nosso processo não é extremamente rigoroso, porém, podemos estimar valores aceitáveis como fizemos em todos os caminhos anteriores. Substituindo o valor da energia E pela última parte da equação (5.35), a relação resultante é [5]

$$E = M \cdot c^2; \quad M_b \simeq \frac{NE}{c^2} = (2) \cdot \left(\frac{hc^3}{32GM_b} \right) \cdot \frac{1}{c^2}. \quad (5.36)$$

Fazendo as possíveis simplificações, obtemos para a massa do buraco negro,

$$M_b \simeq \sqrt{\frac{hc}{16G}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot M_p \sim 0.627M_p. \quad (5.37)$$

É importante resaltar que a massa de Planck não é a menor massa possível na natureza, visto que a massa de prótons e elétrons são menores que essa, por exemplo.

5.7 O microscópio de Heisenberg

A partir daqui, os caminhos para a escala de Planck irão envolver cada vez mais o princípio da incerteza, assim como o que será desenvolvido adiante, nesta seção. Porém, antes de enunciar a problemática, vamos abordar o experimento imaginário no qual ela se baseia, com o intuito de entendermos melhor seus detalhes. Trata-se do experimento mental conhecido como microscópio de Heisenberg.

A ideia central do experimento se baseia em medir com toda precisão possível, o momento de uma partícula, como o elétron por exemplo. Para isso, vamos utilizar um microscópio que nos possibilite tal feito, ou seja, vamos utilizá-lo para observar diretamente a partícula. De uma análise simples desse problema, podemos notar o surgimento do princípio da incerteza de forma fundamental. O mero fato de “observar” (para observar a partícula precisamos incidir fótons, ou seja, precisamos iluminá-la, é isso que nos possibilita “ver” o elétron, o fóton de luz que é espalhado por ele) causará uma perturbação na partícula observada, gerando a incerteza, que é inerente ao experimento [4, 11, 21].

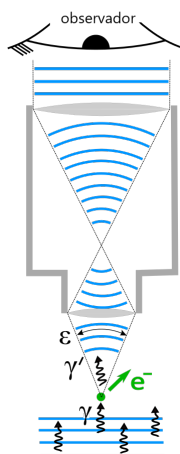


Figura 2 – Esquema do microscópio de Heisenberg (fonte: wikimedia commons).

Um detalhe crucial para o sucesso do experimento é fazer com que o comprimento de onda (λ) da radiação utilizada para iluminar a partícula seja um tanto menor quanto possível, o que aumenta significativamente a precisão da medição, visto que a precisão na medição do momento da partícula é aproximadamente igual ao comprimento de onda da radiação utilizada, por isso geralmente é considerada pela literatura a utilização dos raios gama. Ao incidir a radiação sobre a partícula, parte dela é espalhada ao atingir seu destino de forma a atingir a lente do microscópio [4, 11]. De acordo com as leis da óptica (o leitor interessado nesse e em outros conceitos de óptica pode consultar a referência [15] para um melhor entendimento acerca do

tema), a incerteza na posição é dada por [4]

$$\Delta x \cong \frac{\lambda}{\text{sen}(\epsilon)}. \quad (5.38)$$

Na equação (5.38), λ é o comprimento de onda da radiação utilizada para visualizar o fóton e ϵ é o ângulo de espalhamento do fóton proveniente da partícula. Por meio do efeito Compton, o fóton espalhado imprime à partícula um momento da ordem de $\frac{h}{\lambda}$. Existe uma imprecisão fundamental na medida desse valor de momento, já que não podemos conhecer com exatidão o ângulo ao qual o fóton foi espalhado, sendo abrangido por toda a extensão de ϵ [4, 11]. Dito isso, para a incerteza no valor do momento, podemos escrever

$$\Delta p \cong p \cdot \text{sen}(\epsilon) = \left(\frac{h}{\lambda}\right) \text{sen}(\epsilon). \quad (5.39)$$

Por fim, sintetizando todas essas informações e utilizando o princípio da incerteza propriamente dito, e expresso na equação (4.2), obtemos o valor que caracteriza a incerteza para nosso experimento,

$$\Delta x \cdot \Delta p = \left[\frac{\lambda}{\text{sen}(\epsilon)}\right] \cdot \left(\frac{h}{\lambda}\right) \text{sen}(\epsilon) \approx \hbar. \quad (5.40)$$

A resolução desse problema leva em consideração a lei da conservação do momento e considera um caso ideal onde para todos os efeitos apenas um fóton foi utilizado para observar a partícula, fóton esse que foi espalhado por ela e atinge a objetiva do microscópio. Fazendo essas considerações podemos tentar diminuir ao máximo as perturbações causadas pela nossa observação. Para esse problema que estamos prestes a resolver de forma detalhada, vamos acrescentar os efeitos gravitacionais que um único fóton gera na análise das incertezas em cada medida [4].

A energia de um único fóton é descrita pela equação (5.2). Se considerarmos sua relação de equivalência entre massa e energia, como apresentado na equação (4.1), podemos escrever uma massa efetiva para o fóton, e devido a isso, considerar suas possíveis interações gravitacionais [4],

$$E = M \cdot c^2, \quad M = \frac{E}{c^2}, \quad M_{ef} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (5.41)$$

Tendo em vista a equação (5.3), podemos escrever ainda, na seguinte forma:

$$M_{ef} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad M_{ef} = \frac{h}{c \cdot \lambda}. \quad (5.42)$$

Essa massa efetiva do fóton gera uma força gravitacional sobre a partícula observada no microscópio. Essa força gravitacional imprime uma aceleração que torna a posição da partícula ainda mais imprecisa de se determinar. Vamos utilizar a Mecânica Clássica para estimar a aceleração e a mudança de posição da partícula devido aos efeitos gravitacionais [4],

$$\Delta a_g = \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{G \cdot M_{ef}}{r_{ef}^2}. \quad (5.43)$$

Na equação (5.43), r_{ef} denota uma distância média para que ocorra a interação. Substituindo o último resultado de (5.42) no termo M_{ef} , temos

$$\Delta a_g \approx \frac{G \cdot M_{ef}}{r_{ef}^2} = \frac{G \cdot \left(\frac{h}{\lambda \cdot c}\right)}{r_{ef}^2} = \frac{G \cdot h}{\lambda \cdot c \cdot r_{ef}^2}. \quad (5.44)$$

A velocidade que caracteriza o sistema é a velocidade do fóton, c , que é obtido naturalmente de

$$\frac{r_{ef}}{t_{ef}} \approx c. \quad (5.45)$$

Em (5.45), t_{ef} representa o tempo médio para que ocorra a interação. Agora, a contribuição gravitacional para a incerteza na posição é dada por

$$\Delta x_g = \Delta a_g \cdot t_{ef}^2 = \frac{G \cdot h}{\lambda \cdot c} \cdot \left(\frac{t_{ef}^2}{r_{ef}^2}\right). \quad (5.46)$$

O produto $\Delta a_g \cdot t_{ef}^2$ tem dimensão de comprimento (dado em metros no S.I) o que justifica o cálculo da variação de posição. Como $\frac{r_{ef}}{t_{ef}} \approx c$, o último termo da equação (5.46) fica

$$\frac{t_{ef}^2}{r_{ef}^2} \approx \frac{1}{c^2}. \quad (5.47)$$

Substituindo (5.47) em (5.46), a variação da posição da partícula será dada por

$$\Delta x_g \approx \frac{G \cdot h}{\lambda \cdot c} \cdot \frac{1}{c^2} \approx \frac{G \cdot h}{\lambda \cdot c^3} \approx l_p^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (5.48)$$

De acordo com o princípio da incerteza, e tendo em mente a resolução do problema do microscópio de Heisenberg, sem levar em conta os efeitos gravitacionais, a posição é dada por

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar \quad \text{ou} \quad \Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p}. \quad (5.49)$$

Acrescentando os efeitos gravitacionais a fim de obtermos um princípio da incerteza generalizado e considerando que a incerteza no valor da posição tenha um valor mínimo equivalente ao comprimento de Planck (comprimentos de onda muito pequenos) $\left(\frac{\hbar}{\Delta p} \approx l_p\right)$, obtemos

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} + l_p^2 \cdot \left(\frac{\Delta p}{\hbar}\right). \quad (5.50)$$

Concluindo a equação (5.50) por meio da substituição dos valores correspondentes, chegamos ao resultado final

$$\Delta x \approx l_p + l_p^2 \cdot \left(\frac{1}{l_p}\right) = 2 \cdot l_p. \quad (5.51)$$

Com base no resultado (5.51), a incerteza mínima na posição da partícula, considerando os efeitos gravitacionais do fóton, corresponde a um fóton com comprimento de onda da ordem de l_p e energia E_p . Esse resultado também mostra que não podemos obter uma medida para a posição, com precisão maior que uma unidade do comprimento de Planck. É relevante, do ponto de vista experimental, ainda que estejamos falando de um experimento mental, analisar o significado físico por trás desse resultado, já que pode existir uma distância mínima até onde seja possível obter valores com algum significado físico [4].

5.8 A curvatura do espaço devido a um único fóton

Neste novo caminho para a escala de Planck, vamos utilizar como ideia base, a viagem da luz entre dois pontos previamente demarcados, e separados por uma distância l . Vamos analisar a viagem de um único fóton emitido de A até encontrar seu destino, em B , com o intuito de medir o valor do comprimento l . Esse fóton, de comprimento de onda λ , tem uma massa efetiva M_{ef} (assim como o fóton do capítulo anterior), e devido à equivalência massa-energia, isso implicará em efeitos gravitacionais aos quais influenciaram diretamente na medição do comprimento l . O esquema do experimento mental pode ser visto a seguir [4].

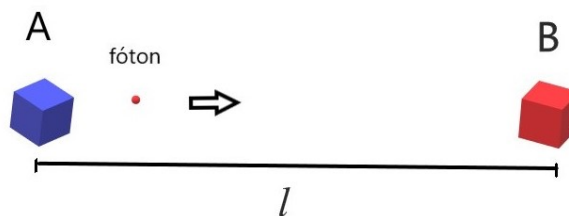


Figura 3 – Esquema do fóton emitido de A até B , percorrendo um comprimento l (fonte: própria).

Devido à dualidade onda-partícula, o fóton apresenta essas duas características, tanto de partícula como de onda. Dessa forma, cada uma delas deve ser analisada ao mensurarmos o comprimento, pois ambas contribuem para essa medição. Como discutido na seção 5.5, a característica ondulatória da luz imprime um limite para o qual podemos medir com precisão o comprimento l , pois estamos limitados a medir com uma precisão maior ou igual ao comprimento de onda do fóton, ou seja, λ [4].

Mais precisamente, fótons com comprimentos de onda muito pequenos (no nosso caso, menores que λ) são dotados de alta energia, o que poderia perturbar bastante o sistema, impedindo uma medição precisa. Assim sendo, temos uma incerteza que é fundamental ao sistema, devido às características ondulatórias do fóton, que pode ser expressa como

$$\Delta l_w = \lambda, \quad (5.52)$$

onde Δl_w denota a incerteza devido às propriedades ondulatórias da luz, e λ o comprimento de onda do fóton já comentado [4].

A Relatividade Geral (RG) compreende um amplo estudo sobre a gravidade e seus efeitos, sendo, talvez o mais famoso, a curvatura do espaço-tempo devido à massa, propriedade intrínseca da matéria. Tanto matéria quanto energia podem curvar o espaço-tempo, e a métrica fornece a distância entre eventos próximos ocorridos no espaço. Para dois eventos quaisquer, ocorridos a uma distância dx um do outro, em um espaço curvo, essa distância entre os corpos é dada por [4]

$$dx' = dx \sqrt{1 - \frac{2\phi}{c^2}}, \quad (5.53)$$

onde dx' é a distância entre os eventos, levando-se em conta a curvatura do espaço, e dx a distância, caso não houvesse curvatura (espaço plano). Na equação (5.53), ϕ representa o potencial newtoniano, que para um corpo de massa M e distância r até a fonte do campo gravitacional, é equacionado como [4]

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (5.54)$$

Por série de Taylor podemos aproximar o termo da raiz quadrada da equação (5.53), e obter uma expressão mais simplificada e que demonstre de forma mais evidente o fator de curvatura do espaço. Dito isso, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots, \quad (5.55)$$

onde $f(x)$ é a função aproximada e a uma constante. Para o nosso caso, uma aproximação geral de uma função, usamos $a = 0$, e expandimos a função até o segundo termo da série (5.55), o que resulta em

$$\left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{2\phi}{c^2} \simeq 1 - \frac{\phi}{c^2}. \quad (5.56)$$

Com base nessa expansão, a equação (5.53) toma a nova forma

$$dx' \simeq dx \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right). \quad (5.57)$$

Um resumo do que foi visto até agora pode ser expresso no fato de que a distorção do espaço-tempo é uma medida do campo gravitacional e a equação (5.53) representa a distância entre dois eventos próximos no espaço-tempo. A distorção fracionária do espaço-tempo (δ) pode ser expressa pela equação [4, 22]

$$\delta \approx \frac{|\phi|}{c^2}. \quad (5.58)$$

Tudo o que foi discutido até agora nesta seção sobre a gravidade será usado para o cálculo do comprimento l . Primeiramente vamos obter o potencial newtoniano (em módulo) para um único fóton. Partindo de (5.54), e recordando as equações (4.1) e (5.2), fazemos as devidas substituições [4],

$$\phi = \frac{GM}{r} = \frac{GM_{ef}}{l} = \frac{G \cdot \left(\frac{E}{c^2}\right)}{l} = \frac{G \cdot (h\nu)}{lc^2} = \frac{G\hbar}{lc\lambda}. \quad (5.59)$$

Calculando a deformação no espaço devido a presença do fóton, obtemos

$$\Delta l_g \approx l \left(\frac{\phi}{c^2}\right) = l \left[\frac{(G\hbar)}{lc\lambda}\right] = \frac{G\hbar}{c^3\lambda} = \frac{l_p^2}{\lambda}. \quad (5.60)$$

Esse resultado já é conhecido, obtivemos o mesmo valor na equação (5.48) para a incerteza presente na posição do fóton, devido aos seus efeitos gravitacionais, na seção 5.7. Assim como fizemos naquele caso, novamente iremos fazer a soma da incerteza devido as características ondulatórias do fóton com as incertezas devido à curvatura do espaço gerada por ele. Simbolizando por Δl a incerteza geral na medição do comprimento l , fazemos

$$\Delta l \approx \Delta l_w + \Delta l_g = \lambda + \frac{l_p^2}{\lambda}. \quad (5.61)$$

A partir daqui, podemos considerar alguns casos e tirar conclusões e interpretações físicas com base nos resultados. Primeiramente, podemos considerar um caso extremo, onde o comprimento de onda do fóton seja equivalente ao comprimento de Planck ($\lambda = l_p$). Para esse caso, partindo do resultado de (5.61), calculamos o valor da incerteza total Δl para esse caso

$$\Delta l = \lambda + \frac{l_p^2}{\lambda} = l_p + \frac{l_p^2}{l_p} = 2l_p. \quad (5.62)$$

Desse resultado podemos fazer algumas considerações relevantes. Inicialmente, a maior precisão com a qual podemos medir o comprimento l é da ordem do comprimento de Planck, já que a incerteza resulta em um múltiplo do comprimento l_p . Como o fóton tem comprimento de onda também igual a l_p , então a distorção no espaço causada por ele é a mínima possível, nesse caso, equivalente a $2l_p$ [4].

Para uma segunda análise, vamos considerar apenas a incerteza gravitacional e constatar para quais casos o fóton curva ou não o espaço. Primeiramente, vamos considerar o caso mais extremo ($\lambda = l_p$). Dessa forma, temos

$$\Delta l_g = \frac{l_p^2}{\lambda} = \frac{l_p^2}{l_p} = l_p. \quad (5.63)$$

De (5.63), percebemos que $\Delta l_g = l_p$, ou seja, a mínima distorção do espaço devido a um único fóton é o comprimento de Planck, l_p .

Agora, vamos supor que $\lambda > l_p$, ou seja, um caso onde o fóton tenha um comprimento de onda superior ao comprimento de Planck. Equacionando a partir do resultado final de (5.60), podemos escrever nossa análise como

$$\Delta l_g = \frac{l_p^2}{\lambda} > l_p. \quad (5.64)$$

A partir da condição $\lambda > l_p$, multiplicamos ambos os lados por l_p ,

$$\lambda > l_p = \lambda \cdot l_p > l_p^2 = \frac{l_p^2}{\lambda} < l_p. \quad (5.65)$$

Substituindo o valor de $\frac{l_p^2}{\lambda}$ por Δl_g de acordo com a equação (5.60),

$$\Delta l_g < l_p. \quad (5.66)$$

O resultado de (5.66) demonstra que a curvatura do espaço devido a um único fóton, com comprimento de onda maior que o comprimento de Planck ($\lambda > l_p$) não é acessível e experimentalmente irrealizável visto que seu valor Δl_g é menor que o comprimento de Planck l_p [4, 22].

5.9 Comprimindo um determinado volume

Nesta seção, iremos estudar as consequências de comprimir um determinado volume (intrinsecamente tridimensional), de dimensões espaciais iguais a l e de massa M , até atingirmos um ponto onde seja impossível continuar a compressão. Com isso, estamos buscando, essencialmente, descobrir para quais valores de massa e de comprimento irá ocorrer tal limite natural que nos impedirá de continuar. A partir de agora esse será o objetivo desta seção.

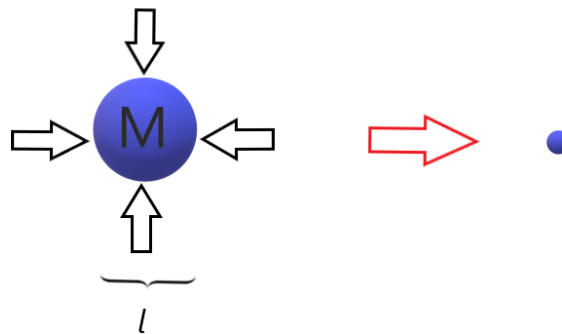


Figura 4 – Compressão do volume de massa M até o limite físico permitido (fonte: própria).

Sabemos que gravitacionalmente, existe um limite de comprimento para o qual podemos encolher toda a matéria de determinado volume sem perder suas propriedades originais, o raio de Schwarzschild, expresso na equação (5.1). Dessa forma, o primeiro limite fundamental se trata de um valor de comprimento que podemos escrever como

$$l \approx \frac{GM}{c^2}. \quad (5.67)$$

Tendo em vista que o valor do diâmetro desse volume é expresso por l , o raio de Schwarzschild será a metade do valor da equação (5.1), $r_s = \frac{l}{2}$. Disso, decorre o valor apresentado na equação (5.67).

Se esse volume ultrapassar o limite de comprimento imposto pela gravidade, acontece o que já foi discutido anteriormente, o sistema entra em colapso de tal forma que a matéria irá adquirir uma singularidade, se transformando, dessa forma, em um buraco negro. Além dos

efeitos gravitacionais influenciarem nos valores que estamos buscando, a Mecânica Quântica também infere seus limites, que podemos explicitar por meio do princípio da incerteza. Utilizando o princípio da incerteza na forma que adquirimos na seção 5.7, podemos mensurar o momento linear das partículas que compõem o material,

$$\Delta_x \Delta_p \approx \hbar; \quad l \cdot \Delta_p \approx \hbar; \quad \Delta_p \approx \frac{\hbar}{l}. \quad (5.68)$$

A energia presente neste volume é dada pela equação (4.1) que em sua forma completa é escrita como

$$E^2 = M^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2, \quad (5.69)$$

onde E é a energia total do sistema, M a massa e p o momento linear das partículas que o compõem, sendo c a velocidade da luz no vácuo.

A equação (5.69) representa a versão mais geral da famosa equação de energia de Einstein, a já comentada equação (4.1). Essa forma, na verdade, é um caso particular, onde o referencial adotado é o da própria partícula tendo, portanto, momento linear nulo ($p = 0$). Considerando agora que a energia da massa M que estamos comprimindo é a do fóton, podemos utilizar a equação (5.69), com a condição $M = 0$. Devido a isso, a equação torna-se

$$E^2 = M^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2, \quad E^2 = p^2 \cdot c^2, \quad E = pc. \quad (5.70)$$

De posse do valor do momento linear dado pelo resultado final de (5.68), podemos calcular a incerteza no valor da energia. Para isso iremos utilizar a forma diferencial do último valor de (5.70), ou seja, $\frac{dE}{dp} = c$,

$$E = p \cdot c, \quad \text{ou} \quad \frac{dE}{dp} = c, \quad \frac{\Delta E}{\Delta p} = c. \quad (5.71)$$

Aplicando agora, em (5.71), os valores obtidos nas equações (5.67) e (5.68), obtemos o valor da incerteza para ΔE ,

$$\Delta E \approx c \cdot \Delta p, \quad \Delta E \approx \frac{\hbar c}{l}. \quad (5.72)$$

Observando o último valor apresentado pela equação (5.72), notamos a relação de proporcionalidade inversa entre ΔE e l , ou seja, quando aumentamos nossa precisão na medição do comprimento l , fazemos ele tão pequeno que aumentamos a incerteza na medição da quantidade ΔE que passa a assumir o valor de $E = 2M \cdot c^2$. Esse valor de energia nos fornece uma

informação crucial, na verdade o fator 2 presente na equação. Haverá a criação de pares de partícula-antipartícula ao redor da massa M . Isso significa que teremos energia suficiente para duas partículas, isto é,

$$\Delta E = 2Mc^2 = M \cdot c^2 + M \cdot c^2. \quad (5.73)$$

Colocando em termos mais claros, o que temos é o aumento da quantidade de energia que antes era apenas suficiente para uma partícula, assumir o dobro, o que fornece naturalmente, energia para a existência de mais uma partícula. Esse processo é bem conhecido pela Física de partículas, que estuda a criação de pares de partículas e antipartículas no vácuo devido a processos como esse.

A energia das partículas na natureza existe em múltiplos inteiros, expressos pela equação $\Delta E = NM \cdot c^2$, onde N é justamente os valores inteiros para os quais a energia pode assumir. A criação de pares de partícula-antipartícula causaria um distúrbio no sistema, já que atrapalharia o processo de compressão, pois o surgimento dessas partículas ao redor da massa M aumentaria o comprimento l , contrapondo o fato de estarmos diminuindo o mesmo comprimento.

Dito isso, para que não haja a criação dos pares de partículas já mencionados, temos uma condição para os valores que N pode assumir, sendo que a priori satisfaça a condição $\Delta E < 2M \cdot c^2$. Assim sendo, $N = 2$ não pode ocorrer, ou seja, o único valor possível seria $N = 1$, resultando em $\Delta E < M \cdot c^2$. Igualando o valor limite para a energia com o obtido em (5.72), obtemos

$$M \cdot c^2 = \frac{\hbar c}{l}; \quad l = \frac{\hbar}{Mc}. \quad (5.74)$$

Esse valor já é conhecido na literatura, como o comprimento de onda Compton. Por fim, temos dois valores fundamentais que impõem seus limites ao processo de compressão, o raio de Schwarzschild devido aos efeitos gravitacionais e o comprimento de onda Compton, devido às retrições quânticas, sendo esses valores, respectivamente, diretamente e inversamente proporcionais a massa M . Nosso valor final, que expressa o limite em conjunto destas características, é obtido igualando-os,

$$l = \frac{GM}{c^2} = \frac{\hbar}{Mc}; \quad M^2 = \frac{\hbar c}{G}; \quad M = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = M_p. \quad (5.75)$$

Calculando o valor do comprimento de onda Compton para a massa de Planck, obteremos

o comprimento l equivalente ao comprimento de Planck, como segue

$$l = \frac{\hbar}{M_p c}, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_p. \quad (5.76)$$

Podemos concluir então, com base nos resultados das equações (5.76) e (5.75) que a máxima compressão do volume ocorre na escala de Planck, não sendo possível atingir um valor de comprimento menor que o comprimento de Planck, ao comprimir um determinado volume. Para valores inferiores a esse, a gravidade e a Mecânica Quântica não descrevem com precisão o que de fato ocorre.

5.10 Medindo as propriedades de um determinado volume

Nesta seção, estudaremos os efeitos da medição das propriedades de um determinado volume de dimensões espaciais iguais a l . Para isso, iremos utilizar uma “sonda”, visando a obtenção das propriedades físicas do conteúdo contido no volume l^3 . Nossa sonda será um pulso de luz, mais precisamente, um fóton, e a partir dele tentaremos descobrir todas as características do conteúdo presente no volume analisado [4].

As propriedades do volume podem sofrer alterações significantes a depender da interação do fóton com a matéria contida nele, pois o fóton pode adicionar energia ao sistema de forma a alterar suas características. Por isso, as medições devem ser feitas no intervalo de tempo equivalente a [4]

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{l}{c}. \quad (5.77)$$

Na equação (5.77), admitimos que o comprimento a ser percorrido é l , e $v = c$, a velocidade do fóton. Existem algumas restrições para realizar a medição, como a energia do fóton, por exemplo. Como a frequência é dada por $\left(\nu = \frac{c}{l}\right)$, podemos escrever a energia de acordo com a equação (5.2), como [4]

$$E_f = h\nu, \quad E_f = \frac{hc}{l} \quad (5.78)$$

Sabendo que a energia do fóton pode ser vista como uma massa efetiva, e de posse do valor de energia em (5.78), a massa efetiva é dada por [4]

$$M_{ef} = \frac{E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{hc}{l}\right) = \frac{h}{cl}. \quad (5.79)$$

Como utilizaremos um fóton como um mediador, a fim de obter através dele, as informações presentes no volume de dimensões l , seus efeitos de distorção do espaço-tempo podem alterar a medição. Dessa forma, calculando a distorção fracionária do espaço-tempo devido à massa efetiva do fóton, já vista na seção 5.7, na equação (5.58), fazemos [4]

$$\delta \approx \frac{\Delta l}{l} = \frac{|\phi|}{c^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{GM_{ef}}{r}\right) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{Gh}{cl^2} = \left(\frac{Gh}{c^3}\right) \cdot \frac{1}{l^2} = \frac{l_p^2}{l}. \quad (5.80)$$

Quando l se torna pequeno o suficiente, a medição se torna caótica, devido à geometria sofrer alterações drásticas pela distorção do espaço-tempo. Quando o comprimento l é tão ínfimo a ponto de ocorrer $l \simeq l_p$, então o comprimento de onda do fóton e as dimensões do volume aderem à escala de Planck, e a medição não pode ser feita [4] como mostrado na equação a seguir,

$$\delta \approx \frac{|\phi|}{c^2} = \frac{l_p^2}{l} = \frac{l_p^2}{l_p} = l_p. \quad (5.81)$$

De (5.81), podemos constatar uma informação bastante curiosa. O fato de a distorção do espaço-tempo ser da ordem de l_p , a própria distorção do fóton impede a sua propagação, o que naturalmente inviabiliza a medição [4].

De forma alternativa, podemos ver essa limitação na medição, do ponto de vista do volume, analisando os resultados da interação do fóton com a matéria. O fóton insere no conteúdo do volume sua massa efetiva, induzindo um colapso gravitacional devido à violação do raio limite. Dessa forma, ao calcularmos o raio de Schwarzschild, expresso na equação (5.1), podemos evidenciar a formação de um buraco negro, como segue [4]

$$l = r_s = \frac{GM}{c^2} = \frac{GM_{ef}}{c^2} = \frac{G}{c^2} \cdot \left(\frac{h}{cl}\right) = \frac{Gh}{c^3} \cdot \left(\frac{1}{l}\right). \quad (5.82)$$

Identificando o comprimento de Planck no resultado final de (5.82), podemos concluir que

$$l^2 = \frac{Gh}{c^3}; \quad l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}. \quad (5.83)$$

Por fim, concluímos que na escala de Planck, as tentativas de medir as propriedades físicas em uma determinada região falham, pois nesse regime, altas energias estão envolvidas, e existe a formação de objetos bastante exóticos, como buracos negros, ou outros que podem fugir das interpretações da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica. Além, é claro, das altas distorções do espaço-tempo que podem ocorrer devido a geometrias bastantes peculiares [4].

5.11 A densidade de energia do campo gravitacional

Para esse novo caminho, almejamos a densidade de energia de um campo gravitacional gerado por uma massa M , contida em uma esfera oca de raio R , ou seja, a massa está distribuída na superfície da esfera. Para mensurarmos o valor da densidade de energia (ρ_g), vamos considerar pequenas massas infinitesimais dM sendo movidas do infinito até a superfície da esfera, ou seja, até R (devido à atração gravitacional) [4].

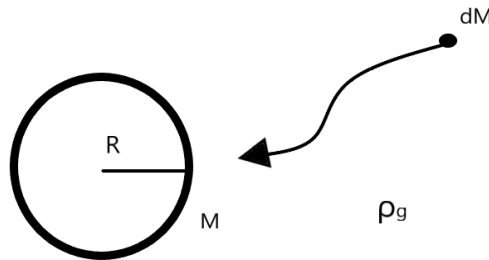


Figura 5 – Pequenas massas infinitesimais dM sendo movidas do infinito até a superfície da esfera (fonte: própria).

Para obtermos os valores que buscamos, partiremos da teoria newtoniana, representando a energia do campo gravitacional, por meio da Física Clássica. Assim, tendo em mente a energia do campo gravitacional gerada pela esfera de massa M e raio R , podemos escrever a seguinte equação

$$dE = -\frac{GMdM}{R}. \quad (5.84)$$

Integrando a equação (5.84) em relação a M , obtemos o valor total da energia presente no campo gravitacional,

$$\int dE = \int \left(-\frac{GMdM}{R} \right), \quad (5.85)$$

$$E = -\frac{G}{R} \int MdM, \quad (5.86)$$

$$E = -\frac{GM^2}{2R}. \quad (5.87)$$

O sinal negativo em (5.87) se deve ao fato de que a força gravitacional é do tipo atrativa. Buscando escrever de forma mais geral a equação da densidade de energia do campo gravitacional,

podemos fazer uma analogia simples entre esse campo e o campo elétrico, articulando de forma mais precisa com o campo elétrico gerado por um capacitor de placas planas paralelas [4].

Considerando um capacitor de placas planas e finitas, sabemos que a energia potencial total armazenada entre as placas é dada por $U = \frac{1}{2}CV^2$, onde C é a capacitância do capacitor, e V a diferença de potencial entre as placas. Sabendo também que o volume entre as placas é dado pelo produto da área das placas pela distância entre elas, Ad , podemos obter o valor da densidade de energia do campo elétrico, efetuando a seguinte divisão [23]

$$\rho_E = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}. \quad (5.88)$$

Em (5.88), efetuamos a divisão da energia do capacitor pelo volume entre as placas, a fim de obter uma expressão de densidade de energia do campo elétrico, simbolizada por ρ_E . Admitindo que o potencial V entre as placas é dado por $V = Ed$, e a capacitância para esse capacitor é dada por $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, obtemos a seguinte expressão para ρ_E ,

$$\rho_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \quad (5.89)$$

Inicialmente, temos algumas considerações importantes sobre a equação (5.89). Notamos que a densidade de energia é diretamente proporcional ao quadrado do campo elétrico, sendo a equação de densidade de energia composta ainda de uma constante que multiplica o valor do campo elétrico. A relevância dessa equação não se restringe apenas para o caso do capacitor de placas paralelas, pois embora tenha sido deduzida para essa configuração geométrica, a equação (5.89) é válida até mesmo no vácuo, e para qualquer configuração geométrica do capacitor. Sendo assim, podemos entender que a energia está sendo armazenada no próprio campo elétrico, e que embora o vácuo seja comumente descrito como um lugar totalmente isento de matéria, ele pode conter campos elétricos, por exemplo, e portanto, conter energia [23].

Tendo em mente essa analogia entre o campo elétrico e gravitacional, podemos construir uma equação semelhante para a densidade do campo gravitacional, supondo que ele tenha a mesma estrutura da equação (5.89). Considerando que o campo gravitacional é dado por $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$, temos

$$\rho_g = \lambda \left(\vec{\nabla}\phi \right)^2, \quad (5.90)$$

onde podemos identificar na equação (5.90) uma constante λ , da mesma forma que em (5.89), e o quadrado do campo, no nosso caso, o campo gravitacional, definido como o gradiente de \vec{g} . A constante λ pode ser determinada por meio de uma integração de ρ_g em todo o volume existente,

do infinito até a superfície da esfera, ou seja, até R . Lembrando que o elemento de volume em coordenadas esféricas dV é dado por $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$, a relação de equivalência entre as integrais que necessitamos executar é [4]

$$\int \rho_g dV = \int \lambda (\vec{\nabla}\phi)^2 dV = \lambda \int (\vec{\nabla}\phi)^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad (5.91)$$

Para resolver a integral descrita por (5.91), vamos adotar o seguinte algoritmo: primeiramente iremos obter o valor de $(\vec{\nabla}\phi)^2$, e em seguida, calcularemos de fato, a integral, em cada uma das coordenadas, segundo os limites de integração. Em coordenadas esféricas, o gradiente de um escalar genérico a é dado por

$$(\vec{\nabla}a) = \frac{\partial a}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial a}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (5.92)$$

Lembrando que o valor do potencial newtoniano ϕ é dado pela equação (5.54), notamos que o gradiente será dado apenas em função de r . Dessa forma, fazemos

$$(\vec{\nabla}\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r}, \quad (\vec{\nabla}\phi) = \frac{GM}{r^2}, \quad (\vec{\nabla}\phi)^2 = \frac{G^2 M^2}{r^4}. \quad (5.93)$$

Em (5.93), fizemos o gradiente ao quadrado pois precisamos dele para efetuar a integração descrita por (5.91). Agora de fato, calculamos a densidade do campo gravitacional sobre todo o volume entre as massas dM e as esfera de massa M e raio R em coordenadas esféricas [4],

$$\rho_g = \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{G^2 M^2}{r^4} \right) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi, \quad (5.94)$$

$$\rho_g = \int_R^\infty \left(\frac{G^2 M^2}{r^4} \right) r^2 \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (5.95)$$

$$\rho_g = G^2 M^2 \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} \right) \cdot [-\cos(\pi) + \cos(0)] \cdot (2\pi - 0), \quad (5.96)$$

$$\rho_g = \frac{4\pi G^2 M^2}{R}. \quad (5.97)$$

Lembrando que em (5.96) a razão em relação ao infinito tende a zero, e essa fração pode ser desconsiderada. Agora que encontramos o valor da densidade de energia, podemos igualar seu valor ao presente na equação (5.87) e obter o valor da constante λ ,

$$\lambda \cdot \left(\frac{4\pi G^2 M^2}{R} \right) = -\frac{GM^2}{2R}. \quad (5.98)$$

Aplicando as simplificações necessárias e isolando λ em (5.98),

$$\lambda = -\frac{1}{8\pi G}. \quad (5.99)$$

Agora, retornando na equação (5.90), podemos escrever a relação final para a densidade de energia, substituindo λ pelo valor encontrado em (5.99),

$$\rho g = -\frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{8\pi G}. \quad (5.100)$$

Considerando o resultado obtido na seção 5.10, que trata da precisão ao realizar a medição das propriedades de um certo volume, verificamos que esse valor equivale à energia $E_f = \frac{\hbar c}{l}$ de um único fóton, ou seja, esse resultado nos impõe um limite de energia na medição. Tendo em mente a expressão de densidade, $\rho = \frac{M}{V}$, podemos representar a mesma expressão, de acordo com os valores obtidos para a densidade de energia do campo gravitacional da seguinte forma [4],

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \rho \cdot V = M, \quad \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{8\pi G} \cdot l^3 \simeq \frac{\hbar c}{l}. \quad (5.101)$$

Sabemos que o valor de $\vec{\nabla}\phi$ pode ser expresso como a derivada parcial do potencial newtoniano em relação a r , como mostra a primeira parte da equação (5.93). Assim, concluímos que $(\vec{\nabla}\phi)^2$ pode ser aproximado para

$$(\vec{\nabla}\phi)^2 \simeq \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 \simeq \left(\frac{\Delta\phi}{l}\right)^2. \quad (5.102)$$

Na equação (5.102), fizemos a seguinte consideração, $\partial r \simeq l$, onde o comprimento l é a dimensão do espaço onde estamos medindo ρg . Assim, fazemos a substituição de (5.102) em (5.101) para obtermos o valor de $\Delta\phi$, ou seja, executando a aproximação $(\vec{\nabla}\phi)^2 \simeq \left(\frac{\Delta\phi}{l}\right)^2$, temos

$$\frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{8\pi G} \cdot l^3 \simeq \frac{\hbar c}{l}, \quad (5.103)$$

$$(\vec{\nabla}\phi)^2 \simeq \frac{\hbar c}{l^4} \cdot 8\pi G, \quad (5.104)$$

$$\left(\frac{\Delta\phi}{l}\right)^2 \simeq \frac{\hbar c}{l^4} \cdot 8\pi G, \quad (5.105)$$

$$(\Delta\phi)^2 \simeq \frac{\hbar c}{l^2} \cdot 8\pi G, \quad (5.106)$$

$$\Delta\phi \simeq \frac{\sqrt{\hbar c G}}{l} \cdot \sqrt{8\pi}. \quad (5.107)$$

Por fim, calculando a distorção do espaço-tempo dada pela equação (5.58) gerada pela energia do campo gravitacional, que é equivalente a $\frac{\Delta l}{l}$, fazemos

$$\frac{\Delta l}{l} \simeq \frac{\Delta\phi}{c^2} \simeq \left(\frac{\sqrt{\hbar c G}}{l} \cdot \sqrt{8\pi} \right) \cdot \frac{1}{c^2}, \quad (5.108)$$

$$\frac{\Delta l}{l} \simeq \sqrt{\frac{\hbar c G}{c^4}} \cdot \frac{\sqrt{8\pi}}{l}, \quad (5.109)$$

$$\Delta l \simeq \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \cdot \sqrt{8\pi}, \quad (5.110)$$

$$\Delta l \simeq \sqrt{8\pi} \cdot l_p, \quad (5.111)$$

$$\Delta l \simeq 5,01 l_p. \quad (5.112)$$

Dessa forma, concluímos, por exemplo, que para uma região de comprimento l , a distorção do espaço devido à energia presente no campo gravitacional é de aproximadamente cinco vezes o comprimento de Planck l_p [4].

5.12 A equivalência das forças gravitacional e elétrica por meio da escala de Planck

Como nosso último caminho para a escala de Planck, vamos explorar a equivalência de duas forças fundamentais que permeiam nosso dia a dia ainda que passem despercebidas pela maioria das pessoas. Mais precisamente, iremos buscar o valor de massa para qual ocorre a igualdade de intensidade entre as forças gravitacional e elétrica, e para isso iremos fazer a igualdade direta das equações que caracterizam e descrevem cada uma das forças [4].

Na natureza, existem apenas quatro forças fundamentais, pelo menos conhecidas atualmente, e todas as interações existentes podem ser explicadas por meio delas. Em ordem crescente de intensidade, considerando cada força em seu meio de atuação onde se manifesta com máxima intensidade, podemos citá-las: força gravitacional, força fraca, força eletromagnética e força forte. O fato da força gravitacional ser a mais fraca, em termos de intensidade, pode nos surpreender, já que ela geralmente nos é citada como a responsável por efeitos grandiosos relacionados a estrelas e planetas, mas o que ocorre é um pequeno equívoco, pois é esse justamente o fator que a caracteriza como tal. Para que ela seja perceptível no mundo macroscópico, é necessário uma grande quantidade de massa, da ordem de planetas e estrelas, como já comentado, o que a faz desprezível quando discutida em relação a fontes com massas cotidianas, por exemplo [24].

Já em relação às demais forças, a força forte pode ser encontrada no núcleo atômico, entre prótons e nêutrons, os mantendo unidos, já a força fraca pode ser percebida, por exemplo, em certos tipos de decaimento radioativo. Ambas possuem uma característica em comum, possuem um alcance muito curto, e devido a isso não são percebidas no mundo macroscópico, apenas no regime quântico, apesar da força forte ser cerca de 100 vezes mais forte que a força elétrica em relação a pequenas distâncias, como nas interações atômicas. Isso não ocorre com a força fraca, sendo essa muitas vezes mais fraca, em termos de intensidade, que a força eletromagnética [24].

A grande maioria das interações que ocorrem em nosso cotidiano se deve à força eletromagnética, como o atrito e a força normal (forças de contato), não sendo exagero afirmar que com exceção da gravidade, todas as interações que vivenciamos em nosso dia a dia são de natureza eletromagnética. Explicitando as comparações entre a força eletromagnética e a força gravitacional como feita em [3], percebemos o quão grande é a diferença de intensidade entre elas, já que “a repulsão elétrica entre dois elétrons é 10^{42} vezes maior que sua atração gravitacional” [24].

Partindo para nossas condições, vamos assumir dois corpos de massas iguais, M , ambos carregados igualmente, com uma carga e , que por definição é a carga do elétron de valor aproximado $e = -1,602 \times 10^{-19}$ C. A expressão para o módulo da força gravitacional entre

duas massas quaisquer é dada por [4]

$$F_g = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}. \quad (5.113)$$

Na equação (5.113), G é a já citada constante gravitacional, M_1 e M_2 são as massas dos respectivos corpos e r a distância que os separa. Já a força elétrica entre dois corpos carregados quaisquer, é definida como

$$F_e = K_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \quad (5.114)$$

Na equação (5.114), K_e é a constante eletrostática ou também conhecida como constante de Coulomb, funcionando como uma constante de proporcionalidade, sendo definida como $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. De forma similar a (5.113), q_1 e q_2 são as cargas dos respectivos corpos carregados, enquanto r é a distância que os separa [24].

Para encontrarmos a medida de equivalência entre as duas forças, faremos a igualdade entre as equações (5.113) e (5.114), ou seja, $F_g = F_e$. Assim, escrevendo as equações de força de acordo com nossas condições iniciais, e simplificando até isolar o valor de M , temos

$$F_g = F_e, \quad \frac{G \cdot M^2}{r^2} \simeq \frac{K_e \cdot e^2}{r^2}, \quad M^2 = \frac{K_e \cdot e^2}{G}. \quad (5.115)$$

Sabendo que existe uma constante que descreve justamente a razão entre essas duas forças podemos inseri-la na equação (5.115). Trata-se da constante de estrutura fina, α , definida como $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ ou $\alpha = \frac{K_e \cdot e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$. Ela foi proposta pelo físico alemão Arnold Sommerfeld, no surgimento da teoria quântica, no início do século XX, ao estudar as linhas espectrais dos átomos de hidrogênio. Ela representa, como já comentado, a razão entre as forças elétrica e gravitacional em unidades fundamentais, sendo muito útil em vários campos da física moderna, como a teoria da Eletrodinâmica Quântica, estabelecendo relações entre a interação de fótons e elétrons [25].

Manipulando e aplicando α no resultado de (5.115), obtemos

$$\alpha = \frac{K_e \cdot e^2}{\hbar c}, \quad e^2 = \frac{\hbar c \alpha}{K_e}, \quad (5.116)$$

$$M^2 \simeq \alpha \cdot \frac{\hbar c K_e}{G K_e} = \alpha \cdot \frac{\hbar c}{G}. \quad (5.117)$$

Já conhecemos o valor de $\frac{\hbar c}{G}$, que é a massa de Planck (mais especificamente, M_p^2). Dessa forma fazemos a substituição na equação (5.117), e obtemos o valor de M

$$M^2 \simeq \alpha \cdot M_p^2; \quad M \simeq \sqrt{\alpha} \cdot M_p. \quad (5.118)$$

Como sabemos que o valor numérico da constante α é dado por $\alpha \simeq \frac{1}{137}$, denotamos a massa M como sendo

$$M = \sqrt{\frac{1}{137}} \cdot M_p = 0,085 \ M_p. \quad (5.119)$$

Esse resultado denota que a equivalência entre as forças gravitacional e elétrica deve ocorrer em algumas ordens de magnitude da massa de Planck, assim como explicita que é necessário energias da ordem da energia de Planck, para observarmos tal relevância das forças gravitacionais no mundo microscópico. A teoria da eletrodinâmica quântica, por exemplo, despreza os efeitos gravitacionais em escala quântica, mas como mostra o resultado (5.119), na escala de Planck tais efeitos não podem ser ignorados [4].

Considerações finais

A escala de Planck é considerada a menor escala presente na natureza, onde não conseguimos aplicar e descrever com máxima eficácia o que de fato ocorre em um regime de comprimentos ínfimos e altas energias como esse. Assim, ao analisar casos como os discutidos neste trabalho, percebemos o quão peculiar é a Física nesse âmbito, apresentando-se sempre como um limite, ou talvez, uma fronteira que ao atravessarmos, precisamos repensar se nossas já consolidadas teorias físicas são realmente válidas ou não [4, 5].

Ao estudarmos as fronteiras e entender como ultrapassá-las, podemos obter informações e resultados que podem nos fazer reavaliar e rever nossos conceitos mais fundamentais, concebendo assim novas teorias antes pensadas como impossíveis, transformando essa busca em uma verdadeira revolução para a Física. Embora a comprovação experimental e observação direta desses fenômenos sejam atualmente inviáveis, o simples fato de considerarmos que sejam reais e possíveis já apresenta seu valor. Várias teorias modernas da Física, como a Gravidade Quântica em Loop, Eletrodinâmica Quântica e Teoria das Super Cordas trabalham em regime quântico, principalmente a Teoria das Super Cordas que tem como objeto de estudo as mais fundamentais estruturas existentes, onde os fenômenos na escala de Planck são relevantes e precisam ser levados em consideração. Dessa forma parece impensável conceber deduções nessas áreas sem um alto conhecimento do que ocorre na fronteira determinadas pelas unidades de Planck [4, 5].

As unidades de Planck remontam diretamente a uma época em que nosso Universo era extremamente distinto do que observamos hoje em sua maioria, conhecido na Cosmologia como era de Planck. Esse Universo primitivo apresentaria temperatura e densidade exorbitantes, bem como energia extremamente elevadas, numa época onde as quatro forças fundamentais conhecidas atualmente ainda estariam unificadas. As pesquisas em Física Teórica no século XXI vêm buscando mais do que tudo apresentar a Física como uma única vertente, dotada de uma teoria unificada que descreveria todos os fenômenos existentes, a famosa Teoria de Tudo. Entender a escala de Planck é entender as características de uma era onde a maioria das propriedades ainda se apresentavam de certa forma interligadas e unificadas, sendo de suma importância para uma possível teoria quântica da gravidade, algo que teóricos acreditam poder descrever com precisão os fenômenos que ocorrem nesse regime [4, 5].

Vale ressaltar a possível quantização do espaço-tempo, algo ainda quase que completamente desconhecido, sendo um tema bastante especulativo na Física atual. Algo como uma teoria de Gravitação Quântica poderia ser aplicada aos eventos que ocorrem na escala de Planck, explicando-os de forma satisfatória. Uma teoria que unifique Mecânica Quântica e Relatividade

Geral pode nos fornecer os subsídios necessários para o entendimento dos pequenos componentes que formam o espaço-tempo, e apresentar de forma definitiva uma possível relação entre esses conceitos, definindo assim o espaço-tempo na escala de Planck [4, 5, 16].

Referências

- [1] STUDART, N. **A invenção do conceito de quantum de energia segundo Planck**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol 22, nº 4, Dezembro, (2000).
- [2] BASSALO, J. M. F. **Sobre a lei de Rayleigh-Jeans**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol 18, nº 1, pg 30-32, (1996).
- [3] DAVIDOVICH, L. **Os quanta de luz e a ótica quântica**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol 37, nº 4, 4205, (2015).
- [4] ADLER, R. J. **Six easy roads to the Planck scale**. American Journal of Physics, 78, pg 925-932, (2010).
- [5] FARAONI, V. **Three new roads to the Planck scale**. American Journal of Physics, vol 85, 865, (2017).
- [6] SANTOS, C. M F; SILVA, J.M.C; GOMES, E.C; LOBO, M.P. **Uma proposta didático-matemática para o uso da escala Planck: dos fótons aos buracos negros**. (em preparação).
- [7] TRANCANELLI, Diego. **Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 2, e2505 (2016).
- [8] FILHO, Kepler de Souza Oliveira. **O Universo**. Cad. Bras. Ens. Fís., v. 27, n. Especial: p. 698-722, dez. 2010.
- [9] MARTINS, Roberto de Andrade. **O surgimento da teoria da relatividade restrita**. Grupo de História e Teoria da Ciência. Unicamp, pg 1-47.
- [10] VIEIRA, S; BARROS, A; ARAÚJO,I; *et al.* **Uma comparação entre deduções da equação $E = mc^2$** . Revista Brasileira de Ensino de Física, vol 16, nº 2, pg 93-98, (2004).
- [11] CHIBENI, Silvio Seno. **Certezas e incertezas sobre as relações de Heisenberg**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 27, nº 2, p. 181 - 192 (2005).
- [12] ABREGO, J. R. B, *et al.* **Montagem de um conjunto experimental destinado à verificação do princípio da incerteza de Heisenberg**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 35, nº 3, 3312 (2013).

- [13] LOBO, M. P. **No interior do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild**. *Physicae*, n. 6, p. 1-5, (2006).
- [14] SAA, Alberto. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, n° 4, e4201 (2016).
- [15] H. Moysés Nussenzveig. **Curso de Física Básica. vol 4: Ótica, Relatividade, Física Quântica**. Editora Edgard Blücher, 1997.
- [16] ZIZZI, Paola. A. **Spacetime at the Planck Scale: The quantum Computer View**. arXiv: gr-qc/0304032.
- [17] SANTI, N, S, M; SANTARELLI, R. **Desvendando a radiação Hawking**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 41, n° 3, e20180312, 2019.
- [18] ROSENFELD, Rogério. **A Cosmologia**. *Física na Escola*, vol. 6, n° 1, (2005).
- [19] WAGA, Ioav. **A Expansão do Universo**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 22, n° 2, Junho (2000).
- [20] DARTORA, C. A; *et al* **Conceitos básicos sobre a difração e a dispersão de ondas eletromagnéticas**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 33, n° 1, 1307 (2011).
- [21] EISBERG, R; RESNICK, R. **Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Editora Campus, (1979).
- [22] LOBO, M. P; SANTOS, C.M.F; MORAES, T. S. **The Curvature of Space Due to a Photon Is Inaccessible**. OSF Preprints, 4 Sept. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/wru6z>.
- [23] YOUNG, Hugh D; FREEDMAN, Roger A. **Física III - Eletromagnetismo**. 12. ed. São Paulo: 2009.
- [24] GRIFFITHS, David, J. **Eletrodinâmica**. 3ª ed. São Paulo: Editora Pearson, 2011.
- [25] COSTA, I. F. **Variação da Constante de Estrutura Fina Devido a um Escalar Cosmológico**. Vitória - ES. 2018.