UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

CAMPUS PROF.DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAURÍCIO CASTRO GONÇALVES DE JESUS

HISTÓRIA DA MATEMÁTIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA E ABORDAGENS DIDÁTICAS

ARRAIAS (TO)

2020

MAURÍCIO CASTRO GONÇALVES DE JESUS

HISTÓRIA DA MATEMÁTIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA E ABORDAGENS DIDÁTICAS

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins-Câmpus Universitário de Arraias/Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, para a obtenção do título de licenciado em Matemática, sob a orientação da Profª. Drª Alcione Marques Fernandes

Orientadora: Profª. Drª Alcione Marques Fernandes

ARRAIAS – TO

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

J58h Jesus, Maurício Castro Gonçalves de .

História da Matemátização da Braquistócrona e abordagens didáticas. / Maurício Castro Gonçalves de Jesus. – Arraias, TO, 2020.

47 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2020.

Orientadora : Alcione Marques Fernandes

1. Braquistócrona. 2. Curva Cicloide. 3. Construção material concreto manipulável. 4. Software Geogebra. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

FOLHA DE APROVAÇÃO

MAURÍCIO CASTRO GONÇALVES DE JESUS

HISTÓRIA DA MATEMÁTIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA E ABORDAGENS DIDÁTICAS

Monografia apresentada à UFT- Universidade Federal do Tocantins, Campus Universitário de Arraias//Prof. Dr. Sérgio Jachinto Leonor. Curso de Licenciatura em Matemática. Foi avaliada para obtenção do título de licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 09/12 / 2020

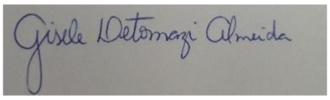
Banca Examinadora

Profª. Drª. Alcione Marques Fernandes (UFT)

Orientadora

Prof. Dr. Ivo Pereira da Silva (UFT)

Examinador 1



Profª Me. Gisele Detomazi Almeida (UFT)

Examinador 2

Arraias, 2020

À minha querida mãe Adriana Aparecida de Castro, ao meu pai Maurício Gonçalves de Jesus (in memoriam), meus irmãos Eduardo Castro Gonçalves de Jesus e Carlos Castro Gonçalves de Jesus, ao meu reverencioso e dignificante tio Leandro Barros e o saudoso amigo Ales Ricardo

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus familiares que me apoiaram do começo ao término da graduação, tanto financeiramente quanto moralmente.

Á minha mãe Adriana Aparecida de Castro, aos meus irmãos Eduardo e Carlos Castro Gonçalves de Jesus e ao meu tio Leandro Barros.

À Professora Doutora Alcione Marques Fernandes pelas orientações prestadas na elaboração deste trabalho. E, a Professora, Me. Gisele Detomazi Almeida e o Professor, Dr. Ivo pelas contribuições.

Ao meu celebre amigo que se encontra em outro plano espiritual, Ales Ricardo pelos conselhos e a colaboração ao longo dos primeiros períodos.

A Proest pelos programas de assistência estudantil assistidas como os auxílios de permanência e a casa dos estudantes.

Aos meus ilustres amigos de jornada Manelson Gomes Carvalho, Cristh Junio Pereira Carvalho, Deyfila da Silva Lima, Ronilton Alves Magalhães, Dilesmar Francisco e Wanderson Mamedes (in memoriam).

Ressalto meus agradecimentos a minha namorada, melhor amiga e companheira Natália Rodrigues Conceição, pelo carinho, compreensão, amor e principalmente por sempre me apoiar em todas as minhas decisões.

Ao amigo Pedro José Florencio da Silva pelo auxílio com o CorelDraw e a disposição para se locomover até o laboratório de cortes de placas em MDF e seu irmão Elder Nunes pela doação da placa de MDF.

Agradeço de antemão a todos que, de alguma forma, passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje.

RESUMO

Neste trabalho, tratamos sobre os estudos de um problema lançado no século XVII Johann Bernoulli a todos Matemáticos renomados naquele período, que o mesmo deu o nome de Braquistócrona, esse problema consiste em descobrir qual é a curva que corresponde a descida mais rápida de uma determinada partícula, que pela ação da gravidade se deslocará de um ponto mais alto até o outro mais baixo no menor tempo possível, na primeira publicação fora sua própria solução foi apresentada a resposta elaborada por Leibniz, após a republicação surgiram outras duas, sendo os autores Jakob Bernoulli, Isaac Newton, todas as respostas remetiam a curva Cicloide como resposta, sendo que foram obtidas através de caminhos aleatórios. O contexto histórico da Braquistócrona abrange o descobrimento de diversas propriedades interessantes, que foram fundamentais para a implementação de otimizações para o uso da sociedade como as construções das montanhas russas ou até mesmo nas construções de pistas de *skate half´piper*. Em seguida, sabendo da eficiência do uso do material concreto manipulável no processo de ensino e aprendizagem, que habilita compreender com facilidades conceitos Matemáticos abstratos elaboramos uma maquete para retirar dúvidas sobre a solução do problema. Além do mais, interagimos o problema da Braquistócrona com ferramentas tecnológicas, utilizando o software gratuito intitulado como Geogebra, traçamos passo a passo de como construir tais curvas e concluir que a Cicloide é a solução.

Palavra-chave: Braquistócrona, curva Cicloide, construção material concreto manipulável, software Geogebra.

ABSTRACT

In the work, we deal with the studies of a problem launched in the 17th century Johann Bernoulli to all renowned mathematicians in that period, which he named Brachistochronous, this problem consists in discovering which curve corresponds to the fastest descente of a given particle, which by the action of gravity will move from a higher point to a lower point in the shortest possible time, in the first publication out of its own solution the answer elaborated by Leibniz was presented, after the republiction two others appeared, the authors being Jakob Bernoulli,Isaac Newton, all the answers refer to the cycloid curve as an answer, and they were obtained through random paths. The historical context of Brachistochronous includes the Discovery of several interesting properties, which were fundamental for the implementation of optimizations for the use of Society such as the onstruction of roller coasters or even the construction of half piper skate rinks. Then, knowing the efficiency of the use of manipulable concrete material in the teaching and learning process, which enables us to easily understand abstract mathematical concepts, we designed a model to remove doubts about the solution of the problem. In addition, we interact with Brachistochronous problem with technological tools, using the free software instituted as Geogebra we trace step by step how to build such curves and conclude that the cycloid is the solution.

Key-words: Brachistochronous, Cycloid curve, manipulable concrete material construction, Geogebra software.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este presente trabalho tem como foco adentrar nos aspectos históricos e Matemáticos da elaboração e as respectivas soluções do problema da Braquistócrona, cujos registros históricos das soluções publicadas e a rotulação do problema são transmitidas sem levar em conta os princípios Matemáticos nas quais cada personagem dessa trajetória incorporou para chegar a cada solução e respectivamente a formulação do problema da Braquistócrona.

Esta pesquisa surgiu na leitura do texto "História da Matemática uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas" da autora Tatiana Roque, coma intenção de captar informações sobre a história do Cálculo Infinitesimal, chegamos a este tema pouco explorado em nosso curso de Licenciatura em Matemática. Porém, no século XVII, um problema lançado por Bernoulli, fez aparecer os primeiros registros do símbolo de integral em uma das possíveis respostas implementado por Jakob, que serviu de utilização para a elaboração do cálculo de máximos e mínimos proporcionado por Euler e Lagrange.

Um dos propósitos centrais da pesquisa é evidenciar os processos Matemáticos de como Johann Bernoulli formulou esse problema intrigante e o que serviu de alicerce para construção deste problema, investigando os princípios Matemáticos nas quais se centrou, bem como elencar os princípios Matemáticos que cada autor utilizou para a elaborar a solução do problema Matemático a essas conclusões tão prestigiadas naquela época.

Pertencente a irreverente Família Bernoulli, que esteve presente nas principais contribuições à Matemática no século XVIII, XVIII e XIX, essa obstinação pela Matemática deu início pelos Irmãos Johann Bernoulli e Jakob Bernoulli, quando frequentemente conviviam com as publicações de Leibniz na *Acta Eruditorum.*

> Com um número surpreendente de matemáticos e cientistas de escol entre seus membros, a família Bernoulli, da Suíça, ocupa um lugar ímpar na história da ciência (em particular na da matemática). Pode-se dizer que tudo começou no final do século XVII com os dois irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748). Ambos os irmãos se bandearam para a matemática, deixando outros interesses e outras carreiras, quando começaram a aparecer na Acta eruditorum os artigos de Leibniz. Eles estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas (EVES, 2011, p.463).

Braquistócrona deriva-se de duas palavras gregas, *brachistos* que significa menor, e *chronos,* que significa tempo (latim, "menor tempo"). Com isso o trabalho se dá em provar que existe uma curva, na qual o caminho mais rápido não é a reta correspondente a AB, embora seja o mais curto, o caminho mais rápido é uma curva bem conhecidas pelos Geômetras, que recebeu o nome de Cicloide intitulado por Galileu (1564 -1643), que estudou a curva. Isso torna -se relevante e ao mesmo tempo intrigante, pois mostra a origem do problema da Braquistócrona que induz qualquer pessoa a pensar, por exemplo, que, entre dois pontos A e B dados em um plano vertical, uma partícula móvel M em repouso em A faz a trajetória AB pela qual a partícula M, desce sobre seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B, no espaço de tempo mais curto, geralmente é pensado por leigos que esse espaço seja uma reta, porém é a mesma curva cicloide.

A solução deste problema é de suma importância para otimização de diversas áreas da ciência como a Biomatemática no estudo da dinâmica das populações, quando o objetivo de estudo é a estrutura de formação de Moléculas complexas, bem como na distribuição da rede de energia elétrica de um país, cujo problema consiste em manter serviços essenciais funcionando e levar a população com qualidade, sendo que, a rede elétrica tem uma quantidade limitada de energia a ser produzida.

De certa forma, é nítida a percepção que a Braquistócrona nos possibilita como futuros Professores de Matemática efetuar o ensino e aprendizagem, através da abordagem interdisciplinar das disciplinas estudadas ao longo do curso de licenciatura em Matemática.

O segundo capítulo trata do contexto histórico da Braquistócrona, onde evidenciamos os Personagens que participaram da rotulação do problema, bem como as respectivas soluções, dessa forma citamos suas inúmeras propriedades, além de expor quem a descobriu e o que acarretou com a descoberta de cada propriedade.

No terceiro e quarto capítulo adotamos propostas didáticas para o ensino e aprendizagem, enriquecendo o trabalho possibilitamos que demais professores de Matemática ao ter contato com este presente trabalho possam ensinar a solução da Braquistócrona de diversas maneiras a seus alunos.

Notamos que Braquistócrona nos possibilita a construção de um material didático concreto manipulável, no terceiro capítulo será relatado a construção do material, que auxiliará uma melhor compreensão contextualizada do problema no mundo contemporâneo, ou seja, facilitará com que reconhecemos aplicabilidade da solução do problema, além de explorar outras curiosidades da curva Cicloide, como a propriedade Tautócrona.

O experimento foi construído na Universidade Federal do Tocantins, Campus Arraias, no laboratório de Educação Matemática com a utilização dos materiais adquiridos no mesmo local.

Essa atividade terá a intenção de interagir com alunos do Ensino Médio, através do debate reflexivo sobre o problema, proporcionando-os conhecer as propriedades da curva cicloide, de tal modo o material ficará exposto no mesmo local de construção, facilitando o acesso a todos que venham a estudar o problema

Na perspectiva de ensinar matemática através de um recurso tecnológico, no quarto capítulo apresentamos o software Geogebra escolhido para favorecer o processo de ensino aprendizagem de Matemática, que auxiliará a assimilação das propriedades da Cicloide.

A utilização do software Geogebra justifica-se pois nos dias atuais ferramentas tecnológicas são comuns na rotina de quase todos os cidadãos, utilizaremos esse recurso com a intenção de proporcionar uma gama de conhecimento que engloba o conteúdo do problema.

De certa forma, o intuito é que os discentes desenvolvem a capacidade de analisar e interpretar as propriedades da Cicloide através de ferramentas tecnológicas, toda via os alunos devem refletir e construir um pensamento crítico favorecendo a aprendizagem e a reflexão sobre da Matemática.

.

2 CONTEXTO HISTÓRICO DA BRAQUISTÓCRONA

Neste capítulo deixaremos explícito o processo histórico de como se perpetuou o problema da Braquistócrona desde a formulação do problema até as elaborações das respostas implementadas pelos respectivos Matemáticos renomados do século XVII, além do mais exploraremos algumas de suas propriedades intrigantes, bem como iremos detalhar de como se constrói uma Cicloide.

Em 1696 foi publicado, conforme Gusmán (1990), um desafio mencionado pelo Suíço Johann Bernoulli I (1667-1748), na revista austríaca *Acta Eruditorum* da cidade Leipzig a todos os Matemáticos da época ou a qualquer mente suficientemente engenhosa, de tal forma a conseguir solucionar o problema que recebeu o nome de Braquistócrona:

> Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais curto *(*BERNOULLI apud TAGLIOLATTO, 2015, p. 19).

Braquistócrona deriva-se de duas palavras gregas, *brachistos* que significa menor, e *chronos*, que significa tempo (latim, "menor tempo"). É notório que qualquer pessoa desprovida de conhecimentos essenciais científicos, tenha a convicção que o percurso mais curto seja simultaneamente o mais rápido, com isso o trabalho se dá em provar que existe uma curva, na qual o caminho mais rápido entre dados dois pontos AB no mesmo plano vertical, não é a semirreta correspondente a estes pontos, embora seja o mais curto, o mais rápido é uma curva bem conhecida pelos Geômetras, que recebeu o nome de Cicloide como intitulado por Galileu (1564 –1643), que estudou a curva.

Tagliolatto (2015) nos diz que, apenas Leibniz (1646-1716) comunicou Bernoulli no prazo proposto de seis meses, que havia encontrado a solução do problema no período previsto e reiterou mais tempo para verificar se a solução seria refutada por outros Matemáticos estrangeiros, além de proporcionar a possibilidade de o problema chegar em outros países.

Levando em conta que os veículos de informações naquele período, não tinham tecnologia suficiente para facilitar o acesso às notícias tidas como importantes, pois custava certo tempo para alcançar toda a população almejada, Bernoulli então acatou o pedido de Leibniz.

Em 1697 Bernoulli república o problema reescrevendo-o da seguinte forma:

> Determinar a curva que junta dois pontos dados, a diferentes distâncias na horizontal e não na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob o seu próprio peso, e começando o seu movimento no ponto superior, desce mais rapidamente até ao ponto inferior *(*BERNOULLI apud TAGLIOLATTO, 2015, p. 19).

Dessa forma possibilitou que o problema fosse explorado por intelectuais renomados de outras nações como França, Alemanha, Inglaterra e outras nações, tendo em vista que a paternidade do Cálculo estava em disputa naquele determinado momento na sociedade.

Com isso, na segunda publicação Bernoulli faz menções ao mérito de resolver tal questão e crava que:

> Dificilmente há algo que mais grandiosamente estimule espíritos nobres e engenhosos para trabalhos que conduzam ao aumento do conhecimento do que propor problemas simultaneamente difíceis e úteis, e que através da solução dos mesmos, e por nenhum outro modo, lhes permitam atingir a fama e construir para si próprios monumentos eternos para a posteridade;
> [...] oferecemos àquele homem de nobre sangue, um prêmio, composto por honras, elogios e aplausos; assim coroaremos, honraremos e exaltaremos, pública e privadamente, por carta e por palavra, a perspicácia do nosso grande Apollo. (SMITH apud TAGLIOLATTO, 2015, p. 19).

Ainda na republicação do problema, Bernoulli cita diversos gênios que estudaram a solução, como o Francês Blaise Pascal (1623-1662), que em sua última passagem pelos estudos em ciências exatas, estudou a curva junto ao seu contemporâneo, porém de mesma nacionalidade Pierre de Fermat por meio de correspondências, algumas dessas cartas se tornaram artefato histórico e cita consequentemente as conjecturas das pesquisas, como o Princípio de Fermat, ou princípio do tempo mínimo, que nos diz, que a Luz, ao propagar–se de um ponto para outro, escolhe o caminho para o qual o tempo de percurso é mínimo mesmo que, para tal, se tenha de desviar relativamente ao caminho mais curto.

De acordo com Andrada e Ferreira Filho (2015), quatro soluções foram apresentadas a Bernoulli ao final do período proposto da republicação, contando com a sua própria resposta, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Jakob Bernoulli (1655-1705) seu Irmão mais velho, e Isaac Newton (1643-1727) chegaram a possíveis soluções.

Segundo Macedo (2004) sabendo Johann Bernoulli, amigo de Leibniz, que a reputação científica disputada entre Leibniz e Newton pela criação do cálculo estava em xeque, o desafio teria de todo modo, o intuito de desafiar Newton.

A curiosidade é que o problema necessitaria de conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, cuja paternidade, como vimos, estava sendo discutida na época em meio a um período contemporâneo que proporcionar desafios Matemáticos seria uma prática comum no ramo científico.

Conforme Andrada e Ferreira Filho (2015), a palavra Braquistócrona nos direciona também ao período em que o Italiano Galileu Galilei nascido em Pisa, estudou qual era a curva que correspondia a mais rápida descida de um corpo sob ação da gravidade entre dois pontos horizontalmente separados e situados em níveis com alturas diferentes, essa indagação foi retirada de um simples ato de observação ao assistir uma missa na Catedral de Pisa, notou que a lâmpada fora da abóboda posta para o Raio da Luz ter um maior alcance, se movimentava de um lado para o outro.

Além do mais, observou que o tempo de oscilação não dependia do tamanho do arco, ou seja:

> Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação. Posteriormente, por experiências, ele mostrou que o período de um pêndulo em movimento também independe do peso de sua massa oscilante, dependendo assim apenas do comprimento de sua haste (EVES, 2011, p.353).

Há relatos que foi esse problema Físico- Matemático que despertou o olhar de Galileu pela Matemática e o fez abandonar seus anos iniciais em Medicina, impulsionado por seu pai, que era um fiel incentivador de que Galileu direcionasse suas energias e seu tempo aos estudos. Galileu erroneamente achava que um quadrante de circunferência ligando os dois pontos era a solução.

A história esperou até Bernoulli encontrar que a solução correta era uma semicicloide invertida ligando os dois pontos.

Tratando da curva Cicloide devemos citar suas ricas e interessantes propriedades descobertas ao longo do tempo, tendo em vista, que sua otimização tem extrema relevância para a evolução de diversos ramos científicos e causou muita discórdia e concordância entre os Matemáticos renomados no século XVI e XVII, na elaboração de algumas propriedades.

Figura 1: Curva Cicloide

Fonte: Elaborado pelo Autor

Se tomarmos uma roda de qualquer veículo e sobre ela marcarmos um ponto fixo visível em qualquer parte da mesma, esse ponto irá gerar uma curva Cicloide após o veículo se movimentar tanto para frente como para trás, ou seja, se inserirmos um círculo no eixo das abcissas e sobre a circunferência denotarmos um ponto fixo e girarmos o círculo o mesmo descreverá uma curva Cicloide.

Figura 2: Círculo gerador da Cicloide

Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 3: Trajetória do círculo gerador

Fonte: Elaborado pelo Autor

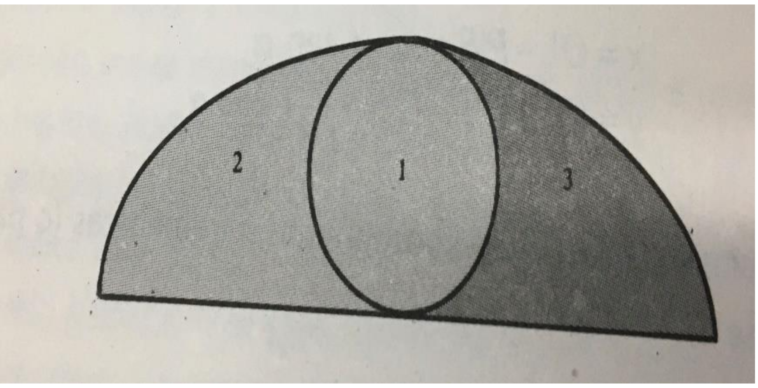
Figura 4: Final da trajetória do círculo

Fonte: Elaborado pelo Autor

A área delimitada por um arco de Cicloide e o eixo das abcissas é igual a três vezes a área do círculo que lhe dá origem, esta interessante propriedade foi descoberta por Galileu.

Segundo Gúzman (1990) através de um método simples e eficiente, Galileu recortou as respectivas figuras em madeira, precisou apenas de uma balança para verificar que área por debaixo da Cicloide era três vezes maior que a do círculo que a gerou.

Figura 5: Propriedade descoberta por Galileu



Fonte: Gúzman, 1990, p.162

Raciocínio simples, porém, muito útil, através de um experimento Galileu conseguiu naquele determinado momento conjecturar a área por debaixo do arco da Cicloide e ficou claro que seria aproximadamente igual a 3

> Galileu inseguro com o método de resolução, pelo fato de o resultado ter dado exatamente igual a três, acabou conjecturando π como a área por debaixo da cicloide, mas não por causa da resposta ser igual a 3,14 aproximadamente. Mas, sim porque π é um número muito próximo de três (GÚZMAN, 1990, p.162).
> .

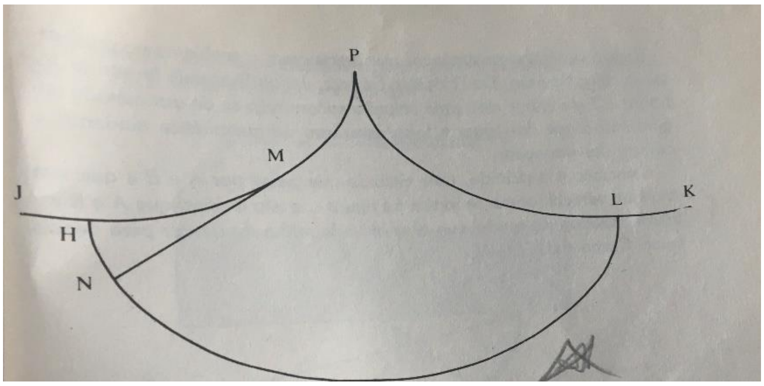
Gúzman (1990) afirma que um pouco adiante, porém no mesmo século, um Francês, chamado Roberval, e um discípulo Italiano, Torricelli, demonstraram que a área por debaixo da Cicloide é exatamente três vezes a área do círculo do comprimento que lhe dá origem.

Um pouco adiante, veio à tona o Cálculo do comprimento de um arco de Cicloide, consequentemente Roberval e Torricelli descobriram que o comprimento de um arco de Cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante que a gerou.

Com isso foi notável naquele tempo que outras propriedades não demorariam a serem descobertas se estudassem a fundo tal curva, dessa forma, muitos dos Matemáticos célebres da época entraram em conflito, pelo motivo de quem tinha descoberto primeiro essa ou aquela propriedade.

Tagliolatto (2015, p.21) nos traz que, *se pendurar um pêndulo e colocar dois arcos de uma Cicloide como batentes, este descreverá uma Cicloide igual à que gerou os arcos*, já esta propriedade foi descoberta por um Físico e Matemático Holandês fascinado por relógios de pêndulos chamado Christiaan Huygens (1629-1695), que residiu em Paris na França, boa parte de sua vida.

Figura 6: Movimentação do Pêndulo



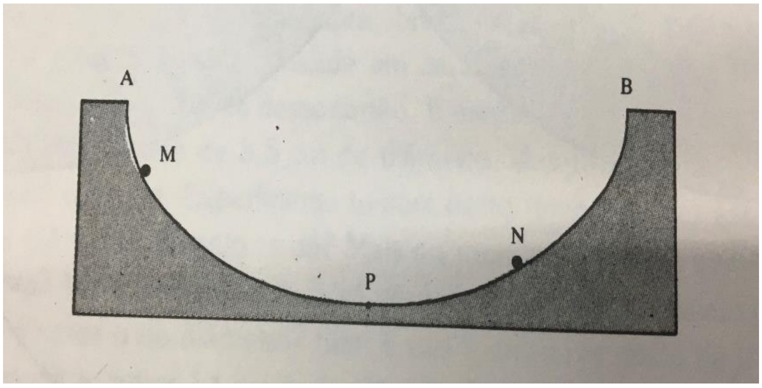
Fonte: Gúzman, 1990, p.162

Segundo Guzmán (1990, p.174).

> Huygens tinha estudado a fundo os relógios de pêndulos e observou que, quando um relógio tem uma variação na amplitude da oscilação do pêndulo, deixa de medir o tempo corretamente. Mas, se o peso do pêndulo se movesse não numa circunferência, como no pêndulo normal, mas ao longo de uma cicloide, então, mesmo que a amplitude de oscilação aumentasse ou diminuísse, o período do pêndulo continuaria a ser mesmo.

Ou seja, se pegarmos uma curva Cicloide invertida, ligada pelo ponto A e por B e sobre ela deixar descer duas partículas M e N em diferentes alturas, ambas se encontrarão no mesmo instante no ponto P mais baixo da curva.

Figura 7: Propriedade Tautócrona



Fonte: Gúzman, 1990, p.162

Huygens nomeou essa propriedade como Tautócrona, e ainda encontrou diversas aplicações para esta, como as construções dos relógios de pêndulos, jamais visto antes por alguém naquele período.

O nome "Tautócrona" também vem do grego *tautos* (mesmo) e *chronos* (tempo) e, agora, neste caso, falamos da curva que faz com que um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) atinja o ponto baixo da curva após um intervalo de tempo que independa da altura em que foi solto.

Desse modo, segundo Caetano (2008) o problema da Tautócrona foi solucionado por Christiaan Huygens em 1659. Ele provou geometricamente em seu *"Horologium oscillatoruim"* que a curva (tautócrona) era uma Cicloide. Esta solução foi depois usada para resolver o problema da curva braquistócrona.

2.1 Respectivas tratativas das soluções de Bernoulli e Newton

Em maio de 1697, a *Acta Eruditorum* publicou quatro soluções entregues à Bernoulli no período imposto da republicação, conforme apresentado no tópico anterior, os autores das respectivas respostas foram Gottfried Wilhelm Leibniz, Jakob Bernoulli seu irmão mais velho, e Isaac Newton, Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver tão célebre problema por sua engenhosidade: ele, como os demais Matemáticos, deixaram explícito que a solução era uma curva Cicloide invertida.

Johann Bernoulli obviamente ao lançar o problema já sabia a solução, sem o uso do Cálculo Variacional, pois não havia sido descoberto naquele presente momento. Sua resposta transformou- se em um clássico da Literatura Matemática, pois tinha como base o estudo da Refração da Luz, estruturada no Princípio de Fermat e tendo como ferramentas fundamentais os princípios de Matemática com foco na Geometria Cartesiana de René Descartes e na Física voltada para os estudos do fenômeno óptico.

De acordo com Batista, Freire e Moreira (2006), o problema considerado por Fermat consistia em saber qual o caminho escolhido por um Raio de Luz entre dois pontos situados em meios de índice de refração diferentes, sabendo que em cada meio existe um índice de refração diferente, ou seja, o feixe de Luz tem velocidades diferentes em meios de propagações distintas e o menor de todos seria o índice do ar no vácuo, onde a Luz se propaga com menos densidade. Além do mais, Fermat verificou que esse percurso correspondia a Lei de Snell da refração:

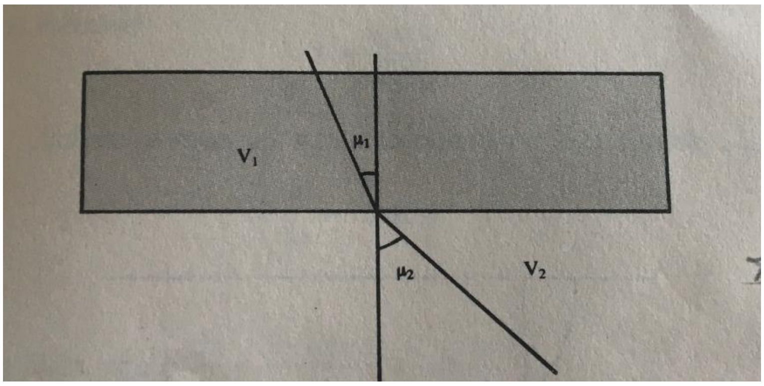
$$\frac{n1}{n2} \times \frac{sen\,\theta 2}{sen\,\theta 1} = \frac{n1.sen\,\theta 1}{n2.sen\,\theta 2}$$

Utilizando a Lei de Snell e sabendo que o índice de refração no meio de propagação que queremos saber é igual a velocidade da Luz no vácuo dividida pela velocidade da Luz no meio de propagação proposto ficou claro que correspondia a uma curva o percurso de menor tempo.

Conforme Gúzman (1990) Bernoulli chegou à conclusão de que cada meio de propagação que um feixe de Luz passa, existe um índice de refração e ao mudar de um meio de propagação para o outro a velocidade do feixe de Luz diminui no meio seguinte, porém sempre constante no meio de propagação devido, assim a Lei da refração nos diz que:

$$\frac{sen\,\mu 1}{v1} = \frac{sen\,\mu 2}{v2} = constante = K.$$

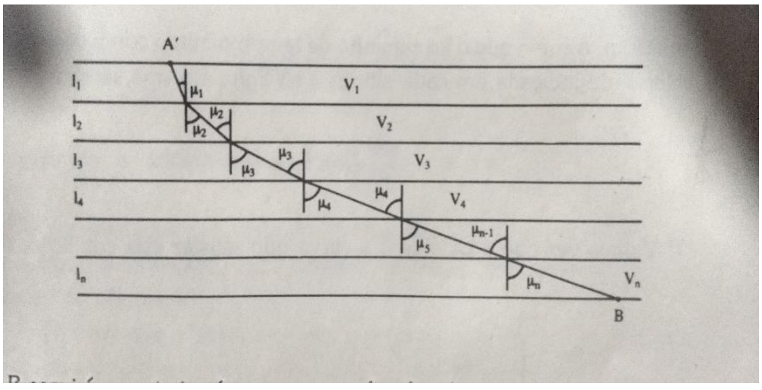
Figura 8: Comportamento de um feixe de Luz



Fonte: Gúzman, 1990, p.162

Com isso ficou fácil provar que a Cicloide era a curva que correspondia ao problema, bastou Bernoulli adotar uma sucessão de camadas com índices de refração decrescente horizontais, tal que n1 > n2 > n3 > n4, ..., e com diferentes velocidades, v1, v2, v3, que ligam os pontos A até B, como mostra a figura a Figura 9.

Figura 9: Sucessões de camadas de propagação



Fonte: Gúzman, 1990, p.162

Dessa forma, provando as deduções de Snell que afirma que quando a luz troca de meios onde sua velocidade varia, como o ar e a água, ela acaba assumindo um ângulo para melhor fazer uso do trajeto, com finalidade de sempre escolher o caminho mais rápido. Essa solução virou um Clássico da Matemática Clássica, pois quem apresentou o problema não esperava uma resposta baseada nas ideias do Cálculo Infinitesimal porque como vemos Bernoulli precisou apenas das noções de Geometria e Óptica.

Jakob Bernoulli solucionou o problema usando Cálculo em um trabalho onde se usou o termo *Integral* pela primeira vez.

Já Isaac Newton não admitia ser desafiado por pessoas com menos capacidade intelectual e mental que a sua própria, ou seja, ninguém. Por sempre vencer os desafios Matemáticos que transitavam em seu tempo. Um dos seus feitos, foi proposto por Bernoulli, e consistia em descobrir a trajetória de uma curva.

Segundo Macedo (2004, p. 9) John Conduitt, amigo e biógrafo de Newton, o diretor da Casa da Moeda posto arrumado por Newton, através de John, ficou sabendo do desafio lançado, “regressou muito cansado a sua casa as quatro da tarde, entretanto não se recolheu para dormir até ter resolvido o problema, o qual lhe ocupou até as quatro da manhã”.

No dia seguinte, Newton enviou um manuscrito com a solução, em latim e anônima, a Montagu, que era o presidente do jornal *Royal Society*, com o encargo de publicá-la e mandá-la a Bernoulli. Segundo Jon Pipper, conta-se que quando Bernoulli recebeu o manuscrito anônimo, adivinhou de imediato seu autor e exclamou:
“O Leão se reconhece pelas marcas de suas garras! ”.

3 PROPOSTA DIDÁTICA: CONSTRUÇÃO DO MATERIAL CONCRETO MANIPULÁVEL

Sabendo que a Matemática não é bem aceita por boa parte dos alunos, conforme aponta Silveira (2002), existe um pré-conceito de que a Matemática é difícil, chata, misteriosa e ainda, muitos alunos se sentem envergonhados por não conseguirem aprender, havendo um bloqueio em seu aprendizado por conta desse pré-conceito. Para assegurar o ensino de qualidade e desmistificar esses e outros paradigmas criado pelos alunos em torno da matéria de Matemática, recorremos à utilização do material concreto manipulável como um meio didático, facilitando a assimilação do conteúdo por parte dos discentes. Este tipo de recurso é um meio sofisticado para aproximar os alunos dos conceitos apresentados em sala de aula, proporcionando uma ampla reflexão e diversificando o modo de aprendizagem.

De acordo com Mendes (2009), o pensamento Matemático é uma construção humana que se desenvolve dentro de um contexto, que necessita ser amplamente compreendida por todos e não somente por um grupo pequeno de especialistas.

Com isso devemos pensar em metodologias eficazes que façam a Matemática ser acessível a todos os cidadãos e não só a um grupo seleto de estudiosos, principalmente aqueles alunos nas séries fundamentais com um alto grau de dificuldade para assimilar os conceitos Matemáticos.

Segundo Mendes (2009), o uso de materiais concretos no ensino da Matemática é uma ampla alternativa didática que contribui para a realização de intervenções do professor na sala de aula durante o semestre letivo. Os materiais são usados em atividades que o próprio aluno, geralmente em grupos pequenos, desenvolve na sala de aula.

Esse tipo de atividade torna o discente responsável pelo entendimento do conteúdo Matemático a ser assimilado, ao contato direto com o material concreto descobrirá novas estruturas Matemáticas, assim despertando o interesse nos indivíduos.

> Para Reys (1971) esses materiais devem ser tocados, sentidos, manipulados e movimentados pelos alunos. Podem ser extraídos das aplicações do dia a dia, como balança, trena, fita métrica, fio de prumo, entre outros, ou podem ser confeccionados com a finalidade de representar ideias matemáticas, como o quadrante, o ábaco, astrolábio plano, blocos lógicos, entre outros (MENDES, 2009, p. 25).

É fundamental que o professor note a relevância de associar a atividade manipulativa com as operações Matemáticas realizadas em cada aula, evidenciando que o material concreto faz parte efetivamente do processo cognitivo de aprendizagem.

Conforme Rodrigues e Gazire (2012), os materiais didáticos manipuláveis constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria Matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa.

Dessa forma os materiais manipuláveis devem ser incentivadores da aprendizagem Matemática dos alunos em diferentes níveis de escolaridade, e consequentemente favorecendo a abstração Matemática auxiliando no processo cognitivo, através da manipulação individual ou em grupo.

Nessa linha de raciocínio, o material concreto manipulável tem papel fundamental na compreensão das ideias pré-estabelecidas em sala de aula, pois, a partir deste ponto de partida ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender Matemática, favorecendo uma aprendizagem pela formação de ideias.

Os estudos sobre a eficácia do material concreto manipulável vêm bem antes do que podemos imaginar, diversos educadores prestigiados deixaram claro a relevância de aprender com o apoio visual ou visual tátil ao longo do tempo.

De acordo com Comenius (1650, apud LORENZATO, 2006), por volta de 1650, Comenius (1592-1671) escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto para abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos, e que só se aprende fazendo.

> Comenius, considerado o pai da Didática, dizia em sua obra "Didática Magna" (1657) que *"- ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude às próprias coisas, ao invés das suas sombras"* (PONCE, 1985, p. 127).

Dessa forma, uma parcela de professores de Matemática, pensa que os conteúdos abstratos devem ser tratados de forma que antecedem a atividade pedagógica com o uso do material concreto manipulável, porém, Comenius deixou claro que para o ensino com eficiência devemos adotar a prática inversa deste tipo de pensamento.

Conforme Lorenzato (2006), aproximadamente cem anos depois, Rousseau indicou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem. Pestalozzi e Froebel, por volta de 1800, também tiveram a concepção que o ensino deveria iniciar-se pelo concreto. Em meados de 1900, Dewey confirmava o pensamento de Comenius, ressaltando a relevância da experiência direta como fator básico para construção do conhecimento.

Mais recentemente, a Médica e Educadora Italiana Maria Montessori (1870-1952), após experiências com crianças excepcionais, desenvolveria, no início do século XX, vários materiais manipulativos destinados à aprendizagem da Matemática. Estes materiais, com forte apelo à "percepção visual e tátil", foram posteriormente estendidos para o ensino de classes normais.

> Maria Montessori acreditava não haver aprendizagem sem ação: "Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração" (AZEVEDO, 1979, p. 27).

Conforme Lorenzato (2006) Vygotsky, na Rússia, e Brunner, nos Estados Unidos, chegaram à conclusão de que as experiências no mundo real constituem o percurso para as pessoas elaborarem seu próprio raciocínio.

Porém, um dos relatos mais antigos sobre o uso do material concreto manipulável na aprendizagem, foi descrito por nada mais, nada menos que o célebre Arquimedes, ele pontuou fatos sobre a facilidade com que se assimila o conteúdo Matemático trazido do uso do material concreto manipulável.

> Seria injusto faltar o registro a um excepcional Matemático que percebeu a influência do ver e do fazer na aprendizagem: Arquimedes. Ele evidenciou isso quando escreveu a Erastóstenes, mais ou menos no ano 250 a.C., dizendo: "é meu dever comunicar-te particularidades de certo método que poderá utilizar para descobrir, mediante a mecânica, determinadas verdades Matemáticas[...] as quais pude eu pude demonstrar, depois, pela Geometria" (NICOLET apud LORENZATO, 1967, p.5).

O debate em torno desse método de ensino deve ser constante, dessa forma devemos ampliar a discursão em torno do uso material concreto manipulável, por ser um aspecto importante no ensino e aprendizagem.

De acordo com Nacarato (2005), no Brasil o debate em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemáticas surgiu na década de 1920. Esse período foi marcado pelo surgimento de uma tendência no Ensino de Matemática que ficou conhecida como *Empírico Ativista,* originário dos pensamentos Escolanovistas que se contrapunham ao modelo Tradicional de ensino na qual o centro das atenções seria o professor no processo de ensino e aprendizagem.

> Segundo Fiorentini (1995) na concepção empírico-ativista, o aluno passa a ser considerado o centro do processo e os métodos de ensino- tendo como pressupostos a descoberta e o princípio de que "aprende-se a fazer fazendo"- se pautavam em atividades, valorizando a ação, a manipulação e a experimentação. (FIORENTINI apud NACARATO,2005, p.1).

O conteúdo científico proposto pelo problema da Braquistócrona no século XVI e XVII apenas os principais Matemáticos conseguiam compreender, porém ficou acessível ao entendimento de todos aqueles que o almejam compreender a partir da ascensão da

Transposição Didática, que com algumas mudanças de símbolos e códigos deixaram os conteúdos acessíveis assimilação de todos.

> De acordo com Chevallard (1991) um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de "transposição didática. " (Chevallard, 1991, p. 39)

A Transposição Didática é a ciência que esta incumbida de modificar o conhecimento de um saber, é transformar um conhecimento científico em um conteúdo didático, ela surgiu na França, com o sociólogo Michel Verret (1927-2017) que publicou na sua tese em 1965, e Yves Chevallard (1946-) em 1985 em suas teorias e livros, eles eram os Matemáticos que transformavam conhecimentos complexos em conteúdos de fácil compreensão.

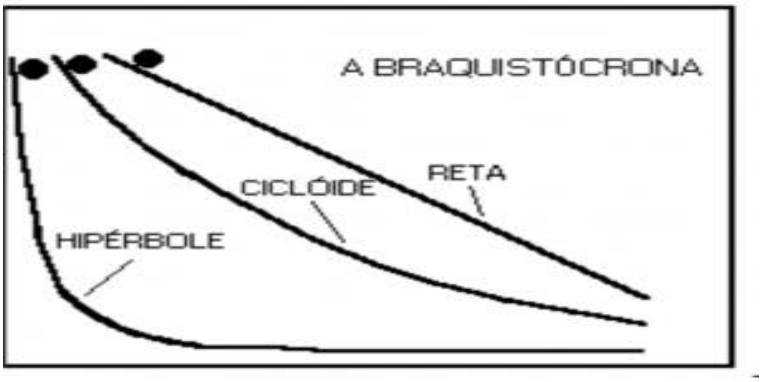
3.1 Descrição da construção do material concreto manipulável.

Nesta etapa do trabalho descreveremos minuciosamente passo a passo como foi construído um material concreto manipulável vinculado com o problema científico estudado neste trabalho, conhecida até então como Braquistócrona.

Já vimos que esse fato pode ser abordado para o ensino e aprendizagem de diversas formas, desde métodos computacionais com o uso de softwares ou até mesmo no quadro negro no qual estamos habituados de costume, sendo mais específico tratando- se do problema da Refração da Luz, assim respaldado pela eficiência do lúdico no processo de ensino e aprendizagem, é de suma importância que todos que estejam aptos a verificarem e se a profundarem nas inúmeras riquezas das propriedades da curva Cicloide, através do material concreto manipulável e que possam construir um modelo idêntico para retirarem suas próprias conclusões visuais e palpáveis. Primeiramente, devemos citar que essa circunstância da construção do material concreto, contou com a colaboração de diversas pessoas que serão mencionadas nos agradecimentos, nenhuma menos importante que a outra, pois todas foram peça chave para a conclusão desta etapa.

Inicialmente tivemos que desenhar as curvas Cicloide, Hipérbole e a Reta com o auxílio do software Geogebra, usando as curvas encontradas na internet, adequamos as próprias curvas as exigências do software, em seguida tivemos apenas que alinhar as pontas de cada curva, no qual o ponto mais alto será o de início das descidas e o ponto mais baixo o de chegada.

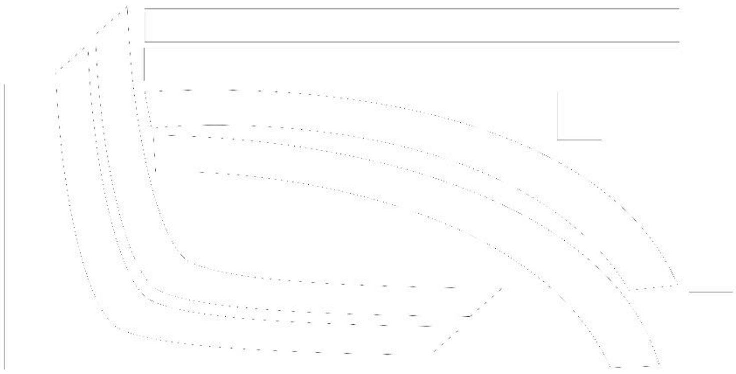
Figura 10: Curva Hipérbole, Cicloide e Reta



Fonte: Seara da ciência

Em seguida, com a colaboração do colega de turma importamos as imagens elaboradas anteriormente no Software CorelDraw, assim vetorizamos de acordo com a melhor dimensão proporcional a sala no qual irá ficar exposto o material concreto manipulável na universidade.

Figura 11: Vetorização das Curvas



Fonte: Elaborada pelo autor

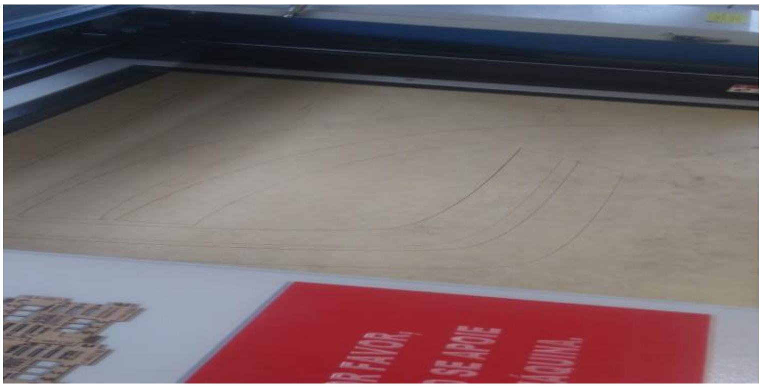
Após, fomos em direção a uma unidade especializada em cortes a laser de placas de fibras de madeira de média densidade, conhecida como MDF, que é constituída por uma aglutinação de fibras de madeira com resinas de sintéticos e outros aditivos.

Figura 12: Laboratório de corte a laser de placa de MDF

Fonte: Acervo do autor

É importante ressaltar que a unidade especializada em cortes de MDF é uma instituição pública, ou seja, qualquer pessoa que tenha um projeto ou maquete para imprimir e deseja utilizar a máquina de corte a laser, tem o direito de utilizá-la, mas antes, os coordenadores do projeto verificam se o trabalho a ser imprimido está de acordo com as funcionalidades da máquina, se não estiver os mesmos coordenadores irão adequar o trabalho para que ocorra a impressão do trabalho, em seguida apenas colocamos a placa de MDF na máquina e esperamos.

Figura 13: Placa de MDF na máquina de corte a laser



Fonte: Acervo do autor

Na sequência retiramos os retalhos para verificar se ocorreu algum erro de corte, geralmente os retalhos são guardados para que haja uma reutilização dos espaços que sobraram da placa de MDF.

Figura 14: Finalização do corte das curvas

Fonte: Acervo do autor

Por fim, apenas tivemos o trabalho de encaixar as bitolas nos devidos lugares, pintar de preto o material por completo e apertamos as porcas de acordo com cada curva para certificarmos que o material concreto manipulável não cairá, assim montamos o material como mostra a figura.

Figura 15: Material concreto manipulável

Fonte: Elaborada pelo autor

3.2 Descrição do experimento sobre o fenômeno da refração da luz

Os conteúdos de Física Óptica e Geometria visto neste trabalho, são acessíveis aos alunos do Ensino Médio e constam tradicionalmente no segundo ano do Ensino Médio regular, dessa forma a compreensão da solução é apta a qualquer aluno do segundo e terceiro ano do Ensino Médio.

O experimento posto nessa sessão nos remete a ideia da qual Bernoulli se baseou para solucionar o problema, e envolvem condições análogas ao fenômeno da Refração da Luz, sendo assim facilita a compreensão, pois a resposta não é intuitiva a qualquer pessoa.

Os materiais a serem utilizados para a realização do experimento foram um aquário transparente retangular com medidas de 50 centímetros de comprimento, 25.5 centímetros de largura, 26.5 centímetros de altura, cedido pela unidade concedente do Estágio Supervisionada IV, localizado na Cidade de Campos Belos/ GO, através de uma das estudantes da própria instituição de ensino e um Raio Laser Verde.

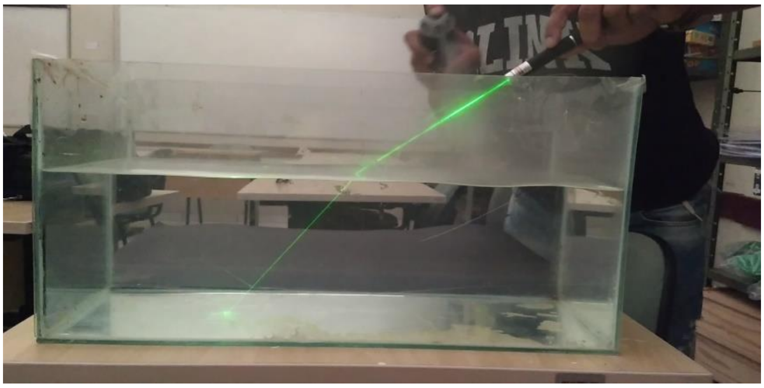
Figura 16: Raio Laser

Fonte: acervo do Autor

Além do mais o experimento foi realizado nas dependências da UFT, mais especificamente no Laboratório de Educação Matemática (LEMAT), próprio para a execução deste tipo de atividade.

Para executar o experimento não ocorreram empecilhos, a maior das dificuldades apresentadas até então foi reunir os materiais essenciais para a conclusão do experimento.

Figura 17: Experimento da Refração da Luz



Fonte: elaborada pelo autor

Notamos que para apreciarmos a Reta inicial entre a superfície da Água e o Raio Laser precisamos de um Desodorante Aerosol, pois essa função Aerosol solta pequenas partículas de duas substâncias misturadas, uma delas é o Propelente que basicamente na maioria dos casos é um Gás Líquido que impulsiona os produtos para fora do recipiente através do Spray, já a outra substância é arbitrária podendo ser Tintas, Desodorante, Inseticidas e outros.

Ao se encontrarem, o Líquido liberado pela função Aerosol do Desodorante deixa exposta a linha do Feixe de Luz do Raio Laser Verde, assim nos possibilitando se deparar com a Reta inicial do nosso experimento para um melhor entendimento da Refração da Luz.

4 PROPOSTA DIDÁTICA: CONSTRUÇÃO DA CURVA CICLOIDE NO SOFTWARE GEOGEBRA

Sabendo que a Matemática é uma ciência fundamental na formação de cidadãos e vista perante os alunos como uma disciplina difícil e com um alto índice de discentes desgostosos com a matéria devido ao fato de não assimilarem o conteúdo ensinado, Almeida, Vieira e dos Santos (2007), nos diz que o resultado de tantos sentimentos negativos que esta matéria proporciona aos estudantes, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não ter acesso ao seu conhecimento vem o sentimento de fracasso pela Matemática. Desse modo, a Matemática ao se configurar para os alunos como algo difícil de compreensão, sendo de pouca utilidade prática, produz representações e sentimentos que vão influenciar no desenvolvimento da aprendizagem.

Com isso a missão do professor é ensinar de uma forma mais compreensível ao cotidiano do aluno sempre priorizando a auto estima positiva, fazendo-o a analisar circunstâncias que possibilita o aprimoramento das ideias Matemáticas trabalhadas em sala de aula.

Levando em conta que o mundo está cada vez mais evoluído com os benefícios dos aparelhos tecnológicos e as novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, a presença da tecnologia no dia a dia dos alunos está cada vez mais evidente, os métodos de ensino clamam por uma modificação significativa, de forma a interagir e se adequar com essa nova realidade.

Segundo Valentin (2014) as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) vêm ocupando novos espaços, tanto educacionais, como empresariais e de lazer. O uso das TICs na educação pode ser uma aliada do professor, diversificando as aulas, proporcionando ao aluno uma visão mais dinâmica e interessante de alguns conteúdos (GUEDES, 2016).

Entretanto, o maior desafio para o professor é integrar essas novas tecnologias aos conteúdos ministrados em sala de aula, pois não basta apenas ter as ferramentas, se não se sabe utilizá-las. Por isso é importante que o professor busque conhecer e aprender sobre a ferramenta tecnológica que pretende usar em sala de aula, para adequá-la ao seu planejamento.

É extensa a discussão sobre a formação de professores especificamente no tocante ao uso das tecnologias na sala de aula. Diante do crescente avanço tecnológico, o professor tem que ir em busca de capacitações para conseguir se adequar aos aparelhos tecnológicos.

Contudo em um mundo cada vez mais marcado pela presença das tecnologias digitais, faz-se necessário que o professor também se adapte a essa nova realidade. Para isso, é preciso buscar formas de se capacitar e se aperfeiçoar para inserir essas novas ferramentas em sua prática pedagógica na sala de aula, como forma de ampliar o processo de ensino e aprendizagem.

O uso das TICs no Ensino de Matemática é um tema que vem ganhando bastante ênfase em congressos, seminários, eventos em geral, pois estas compreendem uma importante alternativa de diversificar o processo de ensino da Matemática (VALENTIM, 2014). Guedes (2016) destaca que as TICs possibilitam novas formas de apreender, onde as informações são processadas rapidamente, tornando as aulas mais atrativas e dinâmicas, proporcionando ao aluno uma visão diferente e interessante dos conteúdos abordados, contribuindo assim, no processo de ensino-aprendizagem.

> Atividades com lápis e papel ou mesmo quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso dos computadores, permitem ao estudante ampliar suas possibilidades de observação e investigação, porque algumas etapas formais do processo construtivo são sintetizadas. (D'AMBROSIO e BARROSO, apud BRASIL, 2008, p.65)

De acordo com Viseu (2009) o uso de recursos tecnológicos no ensino da Matemática, faz com que o aluno consiga desenvolver capacidades de resolução de problemas, autonomia e pensamento crítico, favorecendo para uma aprendizagem mais significativa da Matemática. Também torna possível a consolidação e revisão do conteúdo. No entanto, minhas experiências nos Estágios Supervisionados me possibilitaram notar que nos últimos anos o governo tem investido em Computadores, Tablets e outras mídias, para que se faça uso dessas tecnologias na escola buscando diversificar o ensino. Contudo, o uso das TICs ainda é limitado, e muitas vezes, os Laboratórios de Informática e os demais recursos não são utilizados.

Um dos motivos é que o sistema que rege estes Computadores bloqueia o download de qualquer software ou aplicativo, mesmo que livre e gratuito, não permitindo que se façam alterações além dos que já vem previamente instalado pelo fabricante. Além disso, é necessário e recomendável que o governo implemente políticas públicas educacionais que invistam na formação continuada de Professores, para que os docentes possam fazer uso adequado destes recursos em suas práticas de ensino.

Nessa perspectiva de trabalhar o ensino da Matemática com uso das TICs, levantamos informações do software Geogebra na visualização e construção de gráficos. Neste software os gráficos podem ser construídos facilmente e visualizados pelos alunos rapidamente. Silva (2012) comenta que os alunos possuem muitas dificuldades para interpretar gráficos, pois a construção demanda tempo, e muitas vezes é necessária, para o entendimento de muitos conceitos teóricos, neste sentido, o uso dos softwares agiliza o processo de forma que, os alunos visualizam rapidamente os gráficos e compreendem melhor o que está sendo ensinado, desta forma, as aulas fluem mais rápido.

4.1 Um pouco sobre o software Geogebra

O Geogebra é um software de Matemática dinâmica, o programa tem grande aceitação em diversos países e em diversos níveis de educação. Aliado dos professores, desde as séries iniciais do ensino básico até o ensino superior, o Geogebra traz aos usuários a possibilidade de combinar Geometria, Álgebra, gráficos e Cálculos em um único ambiente.

Devido sua linguagem simples, comandos intuitivos, o software é autoexplicativo, além disso, seu uso pode proporcionar uma fácil manipulação inclusive por usuários sem grandes conhecimentos em Informática.

Utilizando o Geogebra como recurso computacional auxiliar, podem ser descritas curvas no formato de circunferências, Reta, Parábola e Cicloide para a construção de Rampas. Podendo permitir também o estudo dos objetos para raciocínio intuitivo dos alunos por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses de modo interativo e dinâmico, promovendo um inter-relação entre as representações Algébrica, Gráfica e Geométrica do objeto Matemático.

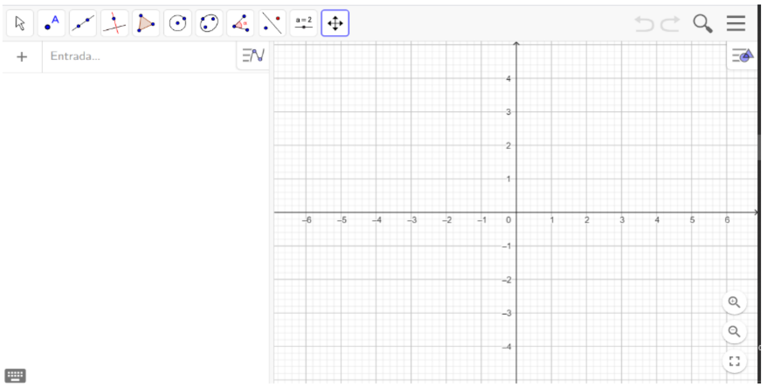
Tendo em vista que o uso da Tecnologia da Informação e Comunicação no ensino de Matemática é de grande relevância no processo de ensino e aprendizagem, utilizando-se ferramentas como o Geogebra deve-se ter uma proposta de ensino clara e objetiva. Podendo então considerar que com tantos recursos, e ainda sendo um software livre, o Geogebra tem ganhado espaço nas novas estratégias de ensino e aprendizagem.

4.2 Construção passo a passo da curva cicloide

Neste tópico trataremos de construir a curva Cicloide passo a passo, com intuito de assimilar melhor a construção, através de um meio didático em conjunto com um software gratuito e acessível sendo o software de grande utilidade para compreender facilmente os conceitos até aqui estudados.

Através da Internet é possível acessar o software Geogebra Classic sem a necessidade de baixar o programa, pois existe uma plataforma online para se conectar com as funções do programa através do link https://www.geogebra.org/classic?lang=pt. Inicialmente, ao entrar no Geogebra online aparecerá na tela inicial todas as funções necessárias para executarmos nosso tutorial com excelência, na primeira janela sendo específico na parte superior irá conter onze ícones essenciais, abaixo a caixa de entrada e centralizado a direita o plano cartesiano como mostra a figura.

Figura 18: Janela inicial do Geogebra



Fonte: Elaborado pelo Autor

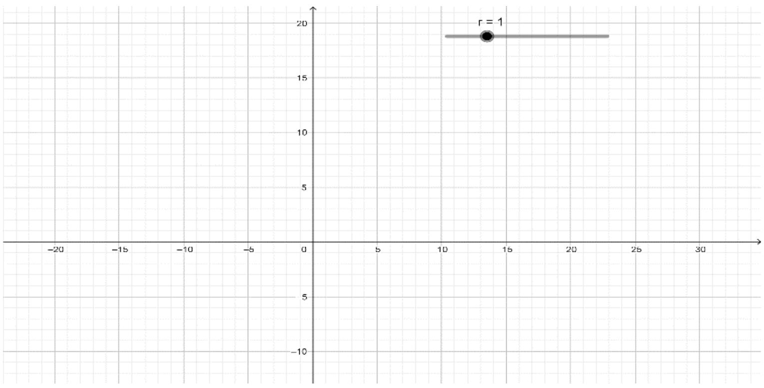
Primeiro passo:

10° ícone.

1° item: controle deslizante.

Depois de clicar na tela do Geogebra e nomear como “r” com intervalo [0,4]

Figura 19: Primeiro Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Este passo nos mostrará o tamanho do círculo que irá construir a curva Cicloide, notemos que o controle deslizante tem que ser sempre igual a 1.

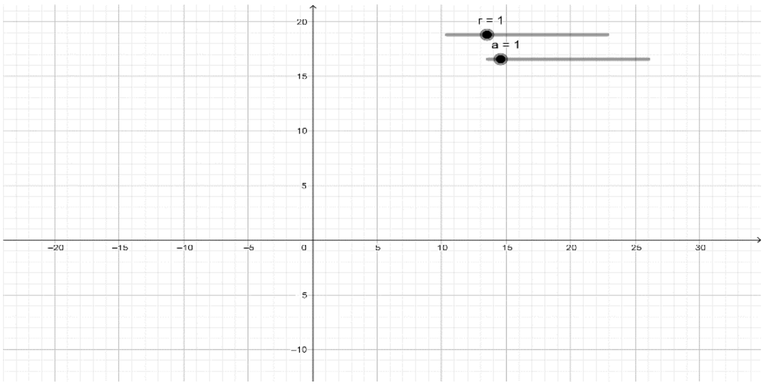
Segundo passo:

10° ícone.

1° item: controle deslizante.

Clicar na tela do Geogebra e nomear como “a” com intervalo [0,4πr].

Figura 20: Segundo Passo, elaboração da Cicloide.



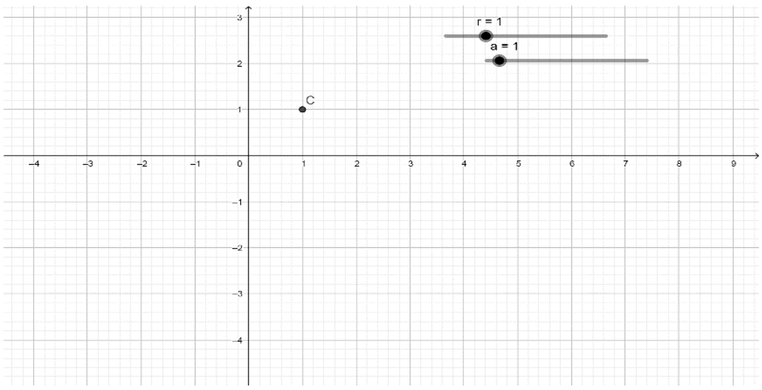
Fonte: Elaborado pelo Autor

Este passo em união com o primeiro, definirá o tamanho do círculo que construirá a curva Cicloide, sendo que o controle deslizante sempre estará igual a 1 também.

Terceiro passo:

Ir na caixa de entrada e criar o ponto C com coordenadas (a, r), com a letra” a” representando os valores do eixo das abcissas e a letra “r” representando os valores do eixo das ordenadas, para representar ponto temos que inserir a letra correspondente ao ponto em maiúsculo, pois só assim o programa entende como um ponto.

Figura 21: Terceiro Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Notemos que aparecerá um ponto C com coordenadas 1 para o eixo das abcissas e 1 para o eixo das ordenadas, essa coordenada foi a propulsora da origem, devido aos dois primeiros passos.

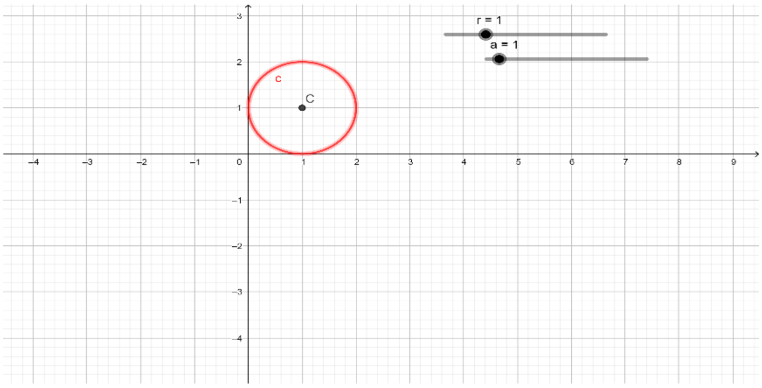
Quarto passo:

6° ícone.

2° item: círculo dados centro e raio.

Clicar no ponto C e colocar raio igual a r.

Figura 22: Quarto Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Logo, será inserido o círculo que descreverá a curva Cicloide.

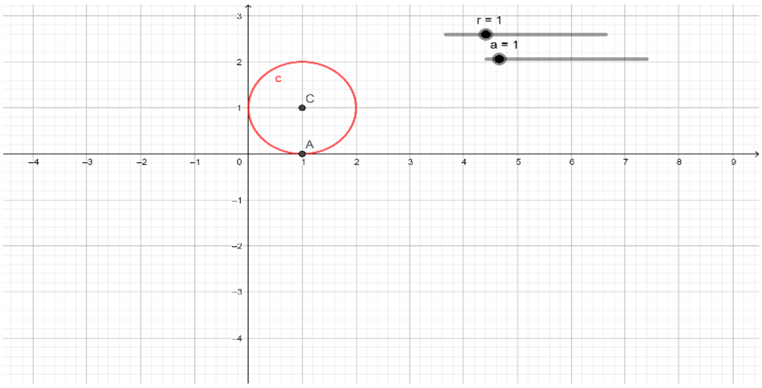
Quinto passo:

2° ícone.

4° item: interseção de dois objetos.

Clicar no círculo e depois no eixo da abcissa, o ponto A será criado, nomeamos por P.

Figura 23: Quinto Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Esse ponto P será o ponto que irá exibir o rastro da curva, após o círculo ir para frente ou para atrás.

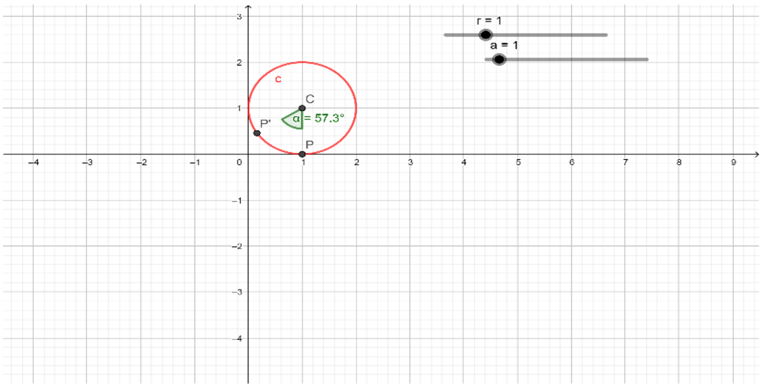
Sexto passo:

8° ícone.

2° item: ângulo com amplitude fixa.

Marcamos o ponto P e C e inserir ângulo igual a a/r.

Figura 24: Sexto Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

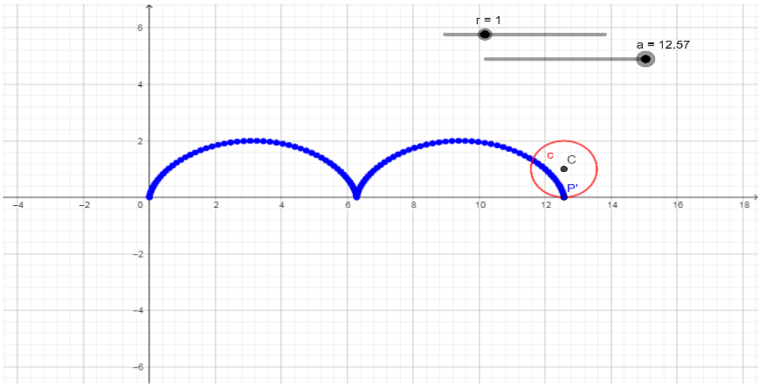
Notemos que, após selecionar o item de ângulo com amplitude fixa, primeiramente temos que clicar no ponto P para a seguir clicar no ponto C, na sequência aparecerá um ponto P' que descreverá a curva, pois se fizermos ao contrário clicar primeiramente no ponto C, o mesmo descreverá a curva Cicloide fora do eixo das abscissas, sendo assim criará certa dificuldade para analisar a Cicloide.

Sétimo passo:

Mudamos a cor de P' e colocar exibir rastro.

Figura 16:

Figura 25: Sétimo Passo, elaboração da Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Assim p' descreve a Cicloide após clicarmos com o botão direito do mouse em cima de P' e selecionarmos a opção exibir rastro, na sequência adentramos nas configurações e mudamos de cor para evidenciar a curva Cicloide.

4.3 Verificação da curva mais rápida: construção passo a passo.

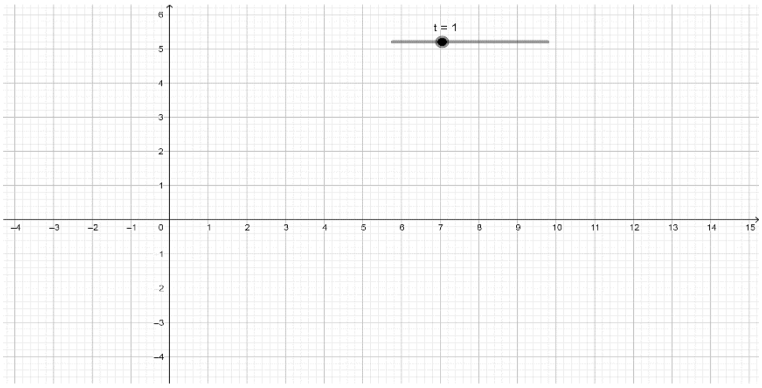
Primeiro passo:

10° ícone.

1° item: controle deslizante.

Criar t, no intervalo [0, π].

Figura 26: Primeiro Passo, verificação da descida.

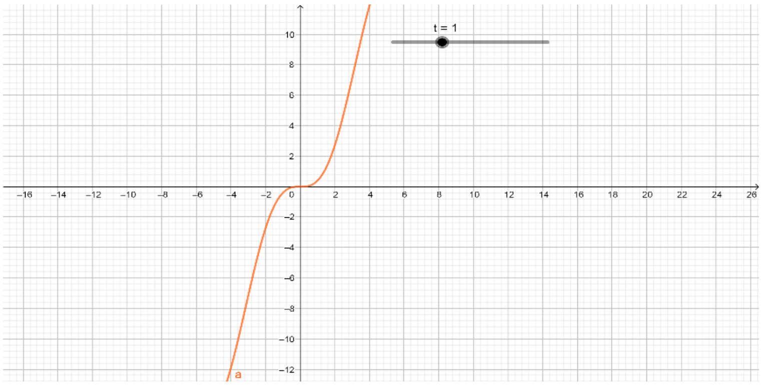


Fonte: Elaborada pelo Autor

Segundo passo:

Inserir na caixa de entrada a função a(t) =2.5t – 2.5sen(t).

Figura 27: Segundo Passo, verificação da descida.

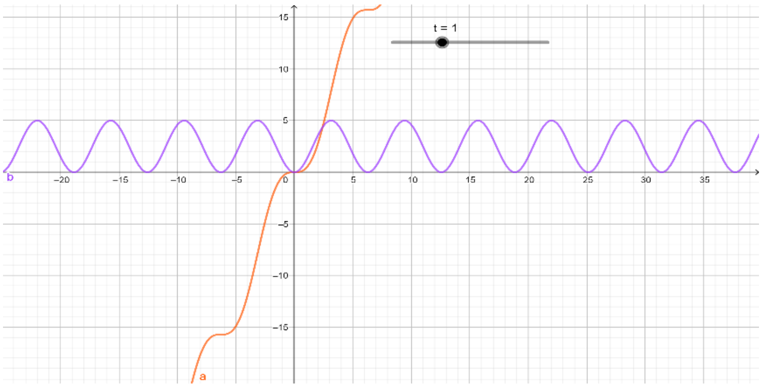


Fonte: Elaborada pelo Autor

Terceiro passo:

Inserir na caixa de entrada a função b(t) =2.5 - 2.5cos(t).

Figura 28: Terceiro Passo, verificação da descida.

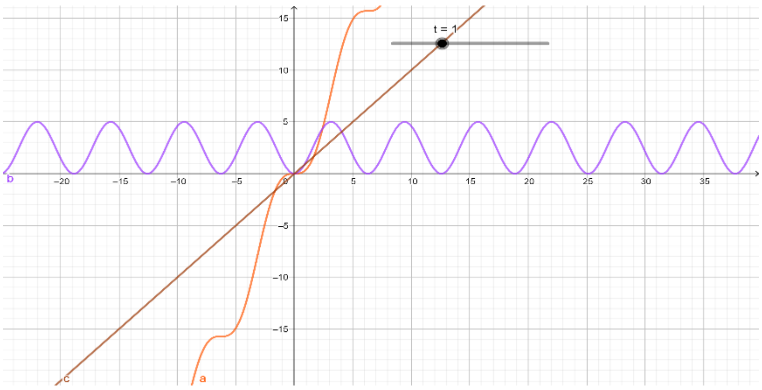


Fonte: Elaborada pelo Autor

Quarto passo:

Inserir na caixa de entrada a função c(t) = t.

Figura 29: Quarto Passo, verificação da descida.

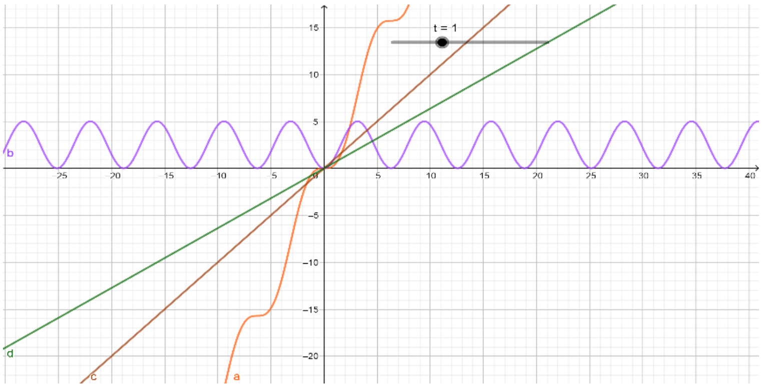


Fonte: Elaborada pelo Autor

Quinto passo:

Inserir na caixa de entrada a função d(t) = 5/7.85t.

Figura 30: Quinto Passo, verificação da descida.

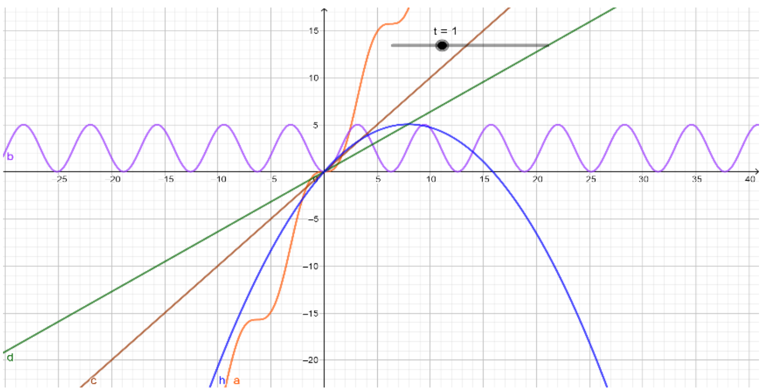


Fonte: Elaborada pelo Autor

Sexto passo:

Inserir na caixa de entrada a função h(t) = -0.08t^2 + 1.27t.

Figura 31: Sexto Passo, verificação da descida.

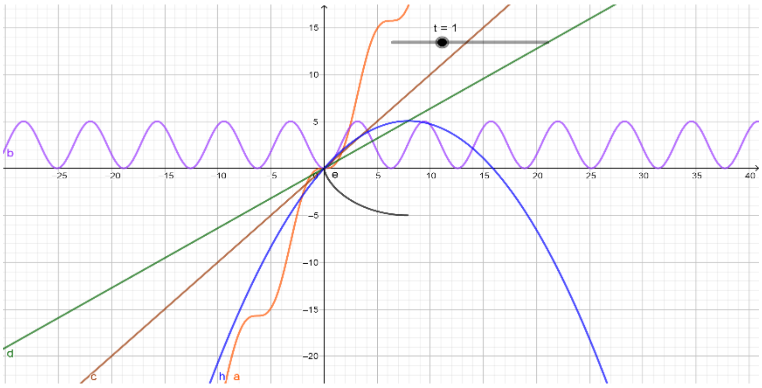


Fonte: Elaborada pelo Autor

Sétimo passo:

Inserir na caixa de entrada a curva (a(t), -b(t), t, 0, π), em seguida apertar o ENTER.

Figura 32: Sétimo Passo, verificação da descida.

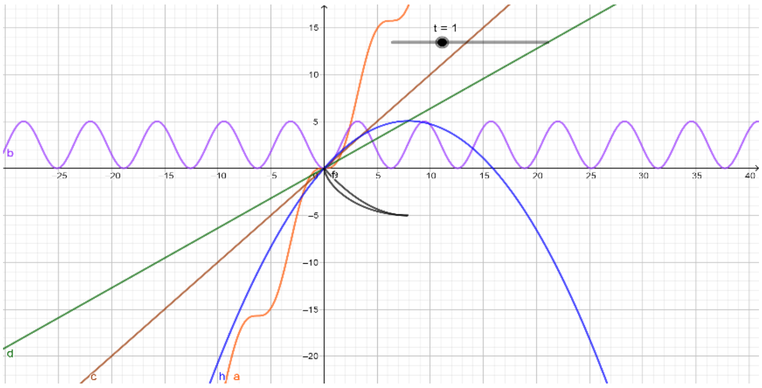


Fonte: Elaborada pelo Autor

Oitavo passo:

Inserir na caixa de entrada a curva (c(t), -h(t), t, 0, 7.85), em seguida apertar o ENTER.

Figura 33: Oitavo Passo, verificação da descida.

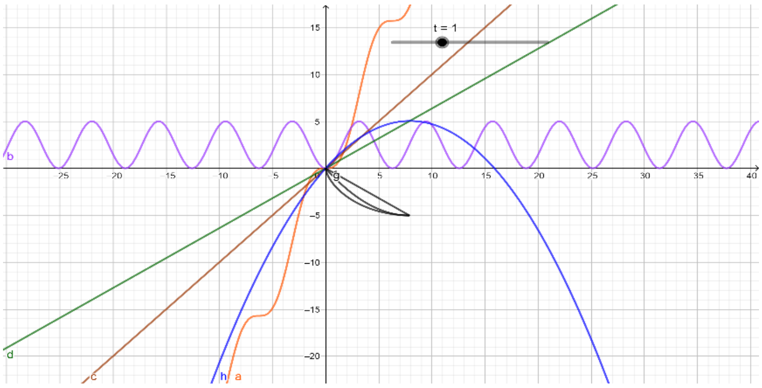


Fonte: Elaborada pelo Autor

Nono passo:

Inserir na caixa de entrada a curva (c(t), -d(t), t, 0, 7.85), em seguida apertar a tecla ENTER.

Figura 34: Nono Passo, verificação da descida.



Fonte: Elaborada pelo Autor

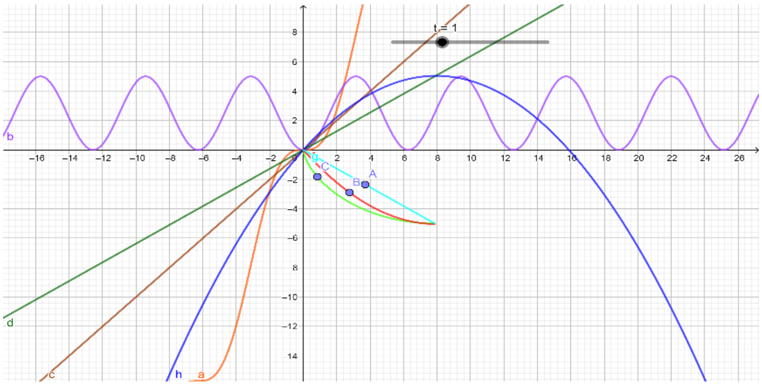
Décimo passo:

2° ícone.

2° item: Ponto em objeto.

Clicar sobre os gráficos: da Reta, da Cicloide, da Parábola.

Figura 35: Décimo Passo, verificação da descida.



Fonte: Elaborada pelo Autor

Notamos que neste tópico as curvas onde os pontos A, B e C irão deslizar tomaram cores onde a curva verde representa a Cicloide, a curva vermelha representa uma parte de uma Parábola, já a curva em azul claro representa uma Reta, onde que para os pontos deslizarem sobre as respectivas curvas devemos apertar o play simultaneamente em cada ponto, para de fato podemos verificar qual a curva de descida mais rápida.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante ressaltar, que para o desempenho e conclusão deste presente trabalho as disciplinas Informática, História da Matemática, Didática da Matemática e Física assistidas ao longo do curso de Licenciatura em Matemática teve papel fundamental, dessa forma possibilitou a compreensão abrangente destes conteúdos, por exemplo, na parte histórica conhecemos um fato importe que serviu de utilização desde seu descobrimento até os dias atuais, bem como auxiliou no aprimoramento do manuseio e criação de materiais didáticos manipulável concreto, além do mais complementou o conhecimento do software Geogebra adquiridos nas aulas de informática.

Com o intuito de interagir com as disciplinas estudadas ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, abordamos conteúdos distintos na resolução deste presente trabalho, favorecendo a interdisciplinaridade facilitamos para que professores em formação possam utilizá-lo no âmbito de sua prática seja em aula ou estágio supervisionado, ensinando-os noções de Física Óptica, Matemática Computacional, e construção de experimento e materiais manipuláveis aos alunos do Ensino Médio.

Além do mais através do contexto histórico da elaboração e a solução da Braquistócrona podemos vivenciar diversas propriedades e curiosidades essenciais para evolução humana em seu período de descobrimento, e por fim abordamos a criação da curva Cicloide em diversos segmentos.

Por parte da Física Óptica, possibilitamos a compreensão da curva Cicloide através do experimento feito utilizando Aquário, Água e o Raio Laiser Verde nas dependências da Universidade Federal do Tocantins.

Em seguida, assegurados pela eficiência do material lúdico no ensino e aprendizagem, fizemos a construção do material concreto manipulável e podemos notar visivelmente e tátilmente que a curva Cicloide é de fato a curva que corresponde ao percurso de descida mais rápida.

Contudo, utilizando recursos computacionais no ensino e aprendizagem de Matemática, fizemos o uso do software Geogebra para construir a curva Cicloide e verificar que a mesma corresponde ao percurso de menor tempo entre dados dois pontos que não estão situados na mesma linha vertical e nem na mesma linha horizontal.

O software Geogebra além de estabelecer-se como um recurso computacional auxiliar no ensino e aprendizagem, permite exploração e interação de modo dinâmico, além de auxiliar na validação das hipóteses formuladas. Dessa forma, possibilitamos com que discentes tenham acesso ao manuseamento do software Matemático.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, de; FERREIRA FILHO. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. **Revista Brasileira de Ensino de física**, Rio de Janeiro, v. 37, n. 2, p.2309-2309, jun. 2015.

AZEVEDO, Edith D. M. *Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano.* In: Revista de Educação e Matemática, n. 3, 1979 (p. 26-27).

BATISTA, Graciliano da Silveira; FREIRE, Cleuton; MOREIRA, José Evangelista. Experiencias com a braquistócrona. **Física na Escola**, Fortaleza, v. 7, n. 2, p.58-60, 2006.

BUSTILLOS, O. V.; SASSINE, A. A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: Scor Tecci, 2011.

BUSSOLA, Daiane Priscila Sampaio; LANGNER, Angélica; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Laboratório de ensino da matemática e materiais manipuláveis: um mapeamento no periódico bolema. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. p. 1-12.

CAETANO, Wellington de Lima. **Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura - Braquistócrona e Tautócrona**. 2008. 34 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CHEVALLARD, Yves. **la transposition didactique:** du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensee Sauvage, 1991.

GUEDES, C. S.; SILVA, C. R.; MORAES FILHO, R. A. **O Uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação como recurso didático pelos professores do curso de Licenciatura em Matemática**, Revista EDaPECI São Cristóvão (SE) v.16. n. 2, p. 299-319 Maio /ago. 2016.

GUSMÁN, M. d. Aventuras Matemáticas. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1990.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino da matemática e materiais manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). O Laboratório de Ensino da Matemática na formação de professores. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MACEDO, Daniel Leal. **Aplicações do cálculo variacional: braquistócrona e o princípio de Fermat.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2004. 33 p.

MENDES, Iram Abreu. O uso de materiais concreto. In: MENDES, Iram Abreu. **Tendências metodológicas no ensino da matemática.** 2. ed. São Paulo: Livraria da física, 2009. Cap. 1. p. 23-55.

PONCE, Aníbal. *Educação e luta de classes.* São Paulo: Cortez, 1985.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, jun. 2012.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lucia S. B. dos. **Dificuldades na aprendizagem matemática**. 2007. 41 f. Tese (Doutorado) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo, Sao Paulo, 2007. Cap. 4.

SILVEIRA, M. R. A. “Matemática é difícil”: Um sentido pré conceito na fala dos alunos, 2002. Disponível em: http://ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf acesso em :11 de novembro de 2019.
EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 1d. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848p.

TAGLIOLATTO, Ana Luísa Sader. **Braquistócrona.** 2015. 56 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista " Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

VALENTIM, E. S. **O software Winplot e a prática pedagógica do professor de matemática.** Monografia apresentada ao curso de especialização fundamentos da educação da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Campina Grande, 2014.

VIEIRA, Clovis Guerim; ROSA, Ramon Junio Gonçalves; FREITAS, Wellington Damaceno de. O problema da braquistócrona: uma proposta para o ensino. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 4, n. 2, p.94-104, maio 2016.

VISEU, F. **A formação do professor de matemática, apoiada por um dispositivo de integração virtual no estágio pedagógico**. Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade de Minho, 2009.