UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RAFAEL PIMENTA ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE: QUESTIONAMENTO SOBRE A INSERÇÃO DESTE COMO CONTEÚDO A SER ABORDADO NO ENSINO MÉDIO

ARRAIAS-TO
2020

RAFAEL PIMENTA ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE: QUESTIONAMENTO SOBRE A INSERÇÃO DESTE COMO CONTEÚDO A SER ABORDADO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante.

ARRAIAS-TO
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A474e Alves, Rafael.

UM ESTUDO SOBRE OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE: QUESTIONAMENTO SOBRE A INSERÇÃO DESTE COMO CONTEÚDO A SER ABORDADO NO ENSINO MÉDIO. / Rafael Alves. – Palmas, TO, 2021.

79 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2021.

Orientador: Thiago Rodrigues Cavalcante

1. Critérios de Divisibilidade. 2. Teorema de Sebá. 3. Números Parentes. 4. Ensino de Matemática no Ensino Médio. I. Título

CDD 510

RAFAEL PIMENTA ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADES: QUESTIONAMENTO SOBRE A INSERÇÃO DESTE COMO CONTEÚDO A SER ABORDADO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins-UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 26 de fevereiro de 2021

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante - UFT/ProfMat - Arraias
Orientador-presidente

Prof. Dr. Marcos Tulio Alves de Carvalho - IFGoiano
Examinador

Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita - UFT/ProfMat - Arraias
Examinador

Arraias - TO
2021

Ao senhor de todas as coisas.
À minha família Lourdes Aparecida Pimenta Alves, Marajá Alves, Ana Carlina Pimenta Alves e Sarah Cristina da Costa Sousa.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, agradeço:

A Deus, que me deu forças, saúde e paz todos esses anos.

A minha família Marajá Alves, Lourdes Aparecida Pimenta Alves, Ana Carolina Pimenta Alves e Sarah Cristina da Costa Sousa que me deram atenção, carinho e amor.

Ao Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, por ser um ótimo professor, por todos ensinamentos e orientações para conclusão do curso.

Aos professores Dirlei Ruscheinsky, Keidna Cristiane, Gisele Detomazi, Eudes Antônio e Élis Gardel que proporcionaram grandes contribuições na minha formação, sempre de forma atenciosa e amigável.

Aos meus amigos Davi, Matheus, Paulo, Edson, Celso, Paulo Ricardo, Jabson, Amanda, Rodrigo, Indiara, Isabel, Vilmar, Valeria e Ramiz que me acompanharam até o fim dessa jornada.

A todos os professores e funcionários da UFT.

A UFT – Universidade Federal do Tocantins.

A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.

(Albert Einstein)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar os Critérios de Divisibilidade não usuais, transpor os conhecimentos científicos do conteúdo para a linguagem escolar e propor, através de duas atividades e problemas curiosos, a inserção deste conteúdo no Ensino Médio. Considerando que os Critérios de Divisibilidades são conteúdos abordados na educação básica de forma simples e limitada aos critérios por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100$ e 1000, apenas por meio de investigação matemática, pretendemos ampliar o ambiente de estudo através da inserção de critérios divisibilidade por 7, 11, 13, etc. Para auxiliar os docentes, foram desenvolvidas duas propostas de atividades que visam deixar de maneira didática a inserção desse conteúdo no Ensino Médio. Assim, partimos da problemática de que podemos iniciar o conteúdo de forma diferente do tradicional sempre com o objetivo de chamar a atenção dos alunos e estimular o aprendizado do mesmo. Neste contexto, o presente trabalho carateriza-se como pesquisa bibliográfica com metodologia exploratória, em que a consulta de materiais como artigos, dissertações, livros e outras fontes, são primordiais. No decorrer deste trabalho, buscamos entender os aspectos históricos e como os Critérios de Divisibilidade foram perdendo espaço nos livros didáticos da rede pública de ensino, conhecer suas limitações e sua relevância para o exercício da matemática no cotidiano dos alunos. Entendemos que essas ações podem ser ferramentas facilitadoras no processo de aquisição do conhecimento matemático por parte dos educandos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de ser possivelmente mais atrativo pela abordagem sugerida. Concluímos o trabalho considerando propostas interessantes para iniciar o conteúdo, assim podendo servir de base para aprofundamentos e pesquisas posteriores.

Palavras-Chave: Critérios de Divisibilidade; Teorema de Sebá; Números Parentes; Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Abstract

The present work has as main objective to study the unusual Divisibility Criteria, to transpose the scientific knowledge of the content to a school language and to propose, through two curious activities and problems, the insertion of this content in High School. Cognos that the Divisibility Criteria are content in basic education in a simple way and limited to the criteria for $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100$ and 1000, only through mathematical investigation, we intend to expand the study environment through the insertion of divisibility criteria by 7, 11, 13, etc. To assist teachers, two activity proposals have been developed that aim to make the insertion of this content in high school in a didactic way. Thus, we start from the problem that we can start the content differently from the traditional one, always with the objective of attracting the students' attention and stimulating their learning. In this context, the present work is characterized as bibliographic research with exploratory methodology, in which the consultation of materials such as articles, dissertations, books and other sources, are essential. In the course of this work, we sought to understand the historical aspects and how the Divisibility Criteria were losing space in the textbooks of the public school system, to know their limitations and their consequences for the exercise of mathematics in the students' daily lives. We understand that these actions can be facilitating tools in the process of acquiring mathematical knowledge by students, contributing to the development of logical reasoning, in addition to being possibly more attractive due to the suggested approach. We concluded the work with interesting proposals to start the content, thus being able to serve as a basis for further research and further research.

Keywords: Divisibility Criteria; Sebá theorem; Relative Numbers; Teaching of Mathematics in High School.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quadro de $1672cm^2$ 69
Figura 2 – Pacotes com peças 70
Figura 3 – Quebra Cabeça 70

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 12

2 RESULTADOS PRELIMINARES . . . 16
2.1 Operações no Conjunto $\mathbb{Z}$ . . . 16
2.2 Princípio da boa ordem e indução matemática . . . 18
2.3 Binômio de Newton . . . 20
2.4 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$ . . . 21
2.4.1 Propriedades de divisibilidade . . . 21
2.5 Congruência modular . . . 27
2.6 Sistema de Numeração . . . 29

3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE . . . 31
3.1 Critério de divisibilidade por 2 . . . 32
3.2 Critério de divisibilidade por 3 . . . 32
3.3 Critério de divisibilidade por 4 . . . 34
3.4 Critério de divisibilidade por 5 . . . 35
3.5 Critério de divisibilidade por 6 . . . 36
3.6 Critério de divisibilidade por 7 . . . 37
3.7 Critério de divisibilidade por 9 . . . 40
3.8 Critério de divisibilidade por 10 . . . 44
3.9 Critério de divisibilidade por 11 . . . 44
3.10 Critério de divisibilidade por 13 . . . 46
3.11 Critério de divisibilidade por 17 . . . 47
3.12 Critério de divisibilidade por 19 . . . 49
3.13 Critério de divisibilidade por 23 . . . 54
3.14 Critério de divisibilidade por 29 . . . 55
3.15 Critério de divisibilidade por 31 . . . 57
3.16 Critério de divisibilidade para qualquer $p > 5$ . . . 59

4 NÚMEROS PARENTES . . . 64
4.1 Números Parentes . . . 64

5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES . . . 68
5.1 Propostas de Atividades . . . 68
5.1.1 Proposta de Atividade 1 . . . 68
5.1.2 Proposta de Atividade 2 . . . 73

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 77

REFERÊNCIAS 79

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objetivo fazer um estudo bibliográfico dos critérios de divisibilidade, questionar a inserção destes no ensino médio e, por fim, propor duas atividades que possibilitem o uso dos critérios de divisibilidade como ferramento na resolução de problemas do ensino médio atual. Desejamos transpor conhecimentos da matemática científica para uma linguagem escolar e organizar sequências didáticas que possibilitem a utilização deste deste conteúdo como ferramenta para a educação básica, uma vez que estes são apresentados resumidamente nos livros didáticos no ensino fundamental.

Segundo Brasil [1], as primeiras ideias sobre o livro didático no Brasil surgiram em 1929, com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que consiste na distribuição dos livros didáticos para estudantes da rede publica. O PNLD é o mais antigo dos programas com esse caráter e, ao decorrer dos anos, se transformou muitas vezes.

Portanto, é interessante analisarmos essas mudanças a fim de entender como os critérios de divisibilidade estão sendo abordados no ensino da Matemática na Educação Básica. Brockveld [2], faz uma análise onde é verificado como os critérios de divisibilidade vêm sendo apresentados nos livros didáticos no decorrer da história do Brasil.

Verificou-se que os livros do início do século XX eram totalmente formais, abstratos, com demonstrações de teoremas e proposições voltadas para o ensino médio, tendo livros com mais de quatro mil exercícios. Enquanto isso, os livros mais atuais perderam totalmente essa abstração, trazendo uma linguagem simples e resumida, voltada para o ensino fundamental, criando um déficit no material didático, principalmente para os alunos interessados em participar de olimpíadas ou seguir nos estudos da ciência exatas e da terra.

Segundo Silva e Búrigo ([3], p. 09),

> O ensino desses critérios de divisibilidade, sem uma explicação do por que isso funciona, faz com que pense que a sua finalidade fosse somente o aluno resolver muito mais rápido o seu cálculo. Sabendo que a aplicação dessa prova ocorria em todo o final do ano, todos os alunos teriam que estar preparados para terem a sua aprovação.

Segundo Brasil [4], os critérios de divisibilidade são uma das habilidades específicas de Matemática exigidas no Ensino Fundamental. É cobrado o estudo dos critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100$ e 1000, apenas por meio de investigação matemática.

Durante o curso de mestrado profissional ProfMat, mais precisamente na disciplina de Aritmética, nos deparamos com diversas situações problemas que nos exigem o estudo aprofundado de Conjuntos Numéricos. Ao realizar esse estudo, tivemos a possibilidade de, ao rever o tópico Divisibilidade Numérica, nos atentarmos para critérios de divisibilidade não usuais, até mesmo negligenciados, alguns nem citados em livros didáticos da Educação Básica.

Ao analisarmos tais problemas de divisibilidade e alguns critérios, nos coube a dúvida do por quê tais conceitos não serem vistos no ensino básico? Se trata, portanto, de uma lacuna que há na educação básica. Deste modo, nos questionamos *por que os critérios de divisibilidade* $7, 11, 13$*, etc não são estudados na educação básica? E também como abordar e simplificar alguns desses critérios no ensino médio atual?*

Ribeiro e Tábuas ([5], p. 21) afirmam que "um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão". Essa afirmação é válida quando estamos apenas preocupados em saber se um número é divisível por outro ou não, mas quando objetivamos entender todo o processo e estudar características especiais de alguns números é de fundamental importância estudar as propriedades dos demais critérios.

Alguns conceitos preliminares são de grande importância para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos. Claramente o ensino dos critérios de divisibilidade não usuais juntamente com metodologias que proporcionam interações entre os alunos e materiais concretos podem auxiliar os discentes em sua aprendizagem. Entender a matemática possibilita a criação de um pensamento lógico em diversas áreas como biologia, física e outras. Portanto, trabalhar com vários recursos permite ao professor novas possibilidades de ensino tornando uma aula curiosa e divertida.

Para Braumann ([6], p. 05),

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão 'detectivesca' indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Neste contexto, a experiência de sala se mostra que, quando se envolve desafios, reflexões, dinâmicas e exercícios curiosos, os conteúdos são absorvidos com maior facilidade. Atualmente existem diversas formas de trazer à tona em sala de aula momentos que motivam o pensamento crítico e a discussão dos alunos. Atividades que usam materiais manipuláveis ou diálogos sobre números que possuem propriedades interessantes são duas dessas maneiras de incentivo.

Portanto, neste trabalho pretendemos fazer um estudo bibliográfico dos critérios de divisibilidade que, ao decorrer dos anos, foram perdendo lugar nos livros didáticos das escolas públicas do Brasil, propor a inserção desses conteúdos como ferramenta no ensino médio através de duas propostas de atividades e incentivá-los neste sentido. Como exemplo, temos a Questão 30 do nível 3 do Banco de Questões-OBMEP 2020 [7], que trás um número com características especiais, o denominado *Números Parentes* e através dela conseguimos expor uma relação destes números com divisibilidade. Mais precisamente, a Questão apresenta o seguinte enunciado:

Seja ab um número inteiro de dois dígitos. Um inteiro positivo $n \in \mathbb{N}$ *é um parente de ab se:*

i) O dígito das unidades de n *também é b.*

ii) Os outros dígitos de n *são distintos de zero e somam a.*

Por exemplo, os parentes de 31 *são* $31, 121, 211$ *e* 1111. *Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.*

Contudo, reservamos um capítulo para discorrer sobre esta questão e extrair deste conjunto propriedades relevantes no estudo da divisibilidade, com o intuito de trazer para sala de aula questões que irão agregar à prática de ensino aprendizagem e proporcionar interações de conteúdos. Acreditamos que essa interação tenha um potencial facilitador no estudo do conteúdo nele abordado.

Esta iniciativa apresentada anteriormente poderá ajudar alunos e professores no processo de ensino aprendizagem, pois possibilita a interação entre os colegas e desperta a curiosidade quando se deparam com questões que exigem um grau maior de conteúdo. A ideia principal é identificar as partes básicas da aritmética já usada nos critérios de divisibilidade mais usuais, e construímos de forma sistemática os critérios de divisibilidade não usais na literatura escolar. Assim este trabalho foi estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, faremos uma revisão do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e da congruência modular, dando ênfase nas propriedades de divisibilidade dos números inteiros, bem como introduzir os conceitos necessários ao entendimento dos próximos capítulos.

No Capítulo 2, apresentaremos definições básicas para o entendimento dos conceitos e demonstrações contidas no Capítulo. Fazemos exemplificações dos critérios de divisibilidade, de modo a apresentar a generalização dos critérios de divisibilidade para todos os números primos maiores do que 5, conhecido como Teorema de Sebá.

No Capítulo 3, apresentaremos propriedades relevantes dos Números Parentes definido no exemplo da introdução, exemplificaremos os mesmos e relacionaremos estes com o tema do trabalho, que são os critérios de divisibilidade.

No Capítulo 4, propomos duas atividades didáticas, cujo objetivo é proporcionar ao professor a possibilidade de uma metodologia dinâmica que incentive os alunos a participarem da aula de forma coletiva além de despertar o interesse e a colaboração dos mesmos nas atividades propostas na construção do seu próprio conhecimento.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste Capítulo faremos uma abordagem sobre o conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$, bem como destacaremos algumas propriedades dos elementos mais relevantes para esta pesquisa. Estes conjuntos são conhecidos como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\} \text{ e } \mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

O objetivo aqui é, a partir das definições, proposições, teoremas e operações dos números naturais e dos inteiros, soma $(a,b) \to a+b$ e multiplicação $(a,b) \to a \cdot b$, construir a teoria necessária para fundamentar o estudo dos critérios de divisibilidade. Dentre estes critérios, destacamos um teorema que é de suma importância no nosso trabalho, que é o teorema de Sebá, o qual consiste em um critério de divisibilidade para qualquer número primo maior do que 5.

2.1 Operações no Conjunto $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números inteiros surgiu no início do Renascimento, quando os matemáticos e comerciantes viram a necessidade de contar, tendo em vista conhecer seus lucros e prejuízos, assim esse conjunto de números foi sistematizado de fato e estabelecido propriedades que os caracterizaram.

As definições, operações, propriedades, teoremas e proposição dos Inteiros fundamentaram toda a teoria da aritmética, contudo a divisibilidade. Neste caso reservamos essa Seção para estudar algumas operações que serão fundamental para o estudo dos critérios de divisibilidade não usuais.

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ possuem as seguintes propriedades

Proposição 2.1.1 (A adição e multiplicação são bem definidas)**.**

Para todos $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a+b = a'+b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$.

Proposição 2.1.2 (A adição e multiplicação são comutativas)**.**

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a+b = b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

Proposição 2.1.3 (A adição e multiplicação são associativas)**.**

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Proposição 2.1.4 (A adição e multiplicação possuem elementos neutros)**.**

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a+0=a$ e $a \cdot 1 = a$.

Proposição 2.1.5 (A adição possui elemento simétrico)**.**

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $b(=-a)$ tal que $a+b=0$.

Proposição 2.1.6 (A multiplicação é distributiva em relação à adição)**.**

Para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$, tem-se $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a \cdot c$.

As seis primeiras propriedades são conhecidas como as leis básicas da Aritmética ou, na estrutura da álgebra moderna, determinam uma estrutura de anel sobre $\mathbb{Z}$.

Para **Ordenar** os inteiros, admitiremos que em $\mathbb{Z}$ também valem as seguintes propriedades:

Proposição 2.1.7. *O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado para adição e para multiplicação, ou seja, para todos $a,b \in \mathbb{N}$, tem-se que $a+b \in \mathbb{N}$ e $ab \in \mathbb{N}$.*

Proposição 2.1.8. *Dados $a,b \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:*

1. $a=b$, *ou*
2. $b-a \in \mathbb{N}$, *ou*
3. $-(b-a) \in \mathbb{N}$.

Para representar a ordenação dos números inteiros e a propriedade Tricotômica utilizaremos a seguintes notações:

Diremos que *a é menor que b*, simbolizado por $a<b$, ou equivalentemente $b>a$.

Diremos que *a é maior que b*, simbolizado por $a>b$, ou equivalentemente $b<a$.

Diremos que *a é menor ou igual a b*, simbolizado por $a \leq b$.

Diremos que *a é maior ou igual a b*, simbolizado por $a \geq b$.

Assim, a tricotomia nos diz que dado $a,b \in \mathbb{Z}$, uma e somente uma, das condições a seguir é verificada

i) $a=b$

ii $a<b$

iii) $a>b$.

Exemplo 2.1.1. *Obviamente* 4 *é menor do que* 6*, portanto para ordena-los usaremos a notação* $4 < 6$ *ou* $6 > 4$*, as duas notações são equivalentes.*

Essas propriedades e operações são de grande importância para o estudo de dois princípios que iremos destacar. Mais precisamente, ao estudar o Princípio da Boa Ordem e o Princípio da Indução Finita, vamos utilizar esta ordenação e eles são fundamentais nas demonstrações que usaremos neste trabalho.

2.2 Princípio da boa ordem e indução matemática

As propriedades relacionadas anteriormente não são suficientes para caracterizar o conjunto dos números inteiros, pois também são válidas em outros conjuntos numéricos, no entanto, podemos verificar a validade do Princípio da Boa Ordem (P.B.O) nos inteiros. Neste sentido é importante conhecermos a definição de limite inferior.

Definição 2.2.1 (Conjunto Limitado Inferiormente)**.** *Diz-se que um subconjunto não vazio* $S \subset \mathbb{Z}$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{Z}$*, se existir* $c \in \mathbb{Z}$ *tal que* $c \leq x$ *para todo* $x \in S$*.*

Definição 2.2.2 (Menor elemento de um Conjunto)**.** *Dado um subconjunto não vazio* $S \subset \mathbb{Z}$ *limitado inferiormente em* $\mathbb{Z}$*. Diz-se que* $a \in S$ *é o menor elemento de* S *se* $a \leq x$ *para todo* $x \in S$*.*

Proposição 2.2.1 (O menor elemento de um conjunto é único)**.** *Dado um subconjunto não vazio* $S \subset \mathbb{Z}$ *limitado inferiormente em* $\mathbb{Z}$*. Se existir o menor elemento* S *ele é único.*

Demonstração. Suponha que existem $a \in S$ e $a' \in S$, $a \neq a'$, simultaneamente menores elementos de S. Então temos que $a \leq a'$ e $a' \leq a$, o que implica que $a = a'$ □

Exemplo 2.2.1. *O conjunto dos números primos é limitado inferiormente e possui um menor elemento.*

Solução 2.2.1. *Seja* $S = \{x; x \text{ é primo}\}$*, obviamente, existe o número* $2 \in \mathbb{Z}$*, tal que* $2 \leq x$ *para todo* x *em* S*. Portanto 2 é o limite inferior do conjuntos dos números primos.*

O Princípio da Boa Ordem é equivalente ao Princípio de Indução Finita (PIF) e é nele que nos baseamos para fazer diversas demonstrações de proposições e teoremas nos Inteiros. É uma ferramenta muito importante quando estudamos a aritmética, com isso apresentaremos sua definição na Proposição a seguir.

Proposição 2.2.2 (Princípio da boa ordem (PBO))**.** *Todo subconjunto* S *não vazio de* $\mathbb{Z}$ *que é limitado inferiormente possui um menor elemento.*

Neste momento iremos definir o conjunto dos números Reais para exemplificar a não validade do princípio da boa ordem em $\mathbb{R}$.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é formado pela união de outros quatro conjuntos numéricos: Naturais $\mathbb{N}$, Inteiros $\mathbb{Z}$, Racionais $\mathbb{Q}$ e Irracionais $\mathbb{I}$. São exemplos de números reais $(2; 5,2; \frac{1}{3})$.

Embora essa definição seja aparentemente intuitiva, o princípio da boa ordem não é válido no conjunto dos números reais. De fato se considerarmos o conjunto S, tal que

$$S = \{x \in \mathbb{Z};\ -2 < x \leq 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

temos que S é limitado inferiormente, onde qualquer inteiro menor ou igual a -2 é uma cota inferior de S, portanto seu menor elemento é o -1. Por outro lado, se consideramos em $\mathbb{R}$, isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x \leq 3\}$$

temos que S é um intervalo semi-aberto de extremos -2 e 3. Como antes S é limitado inferiormente, porém S não possui um menor elemento.

Um outro princípio de suma importância em várias vertentes é o Princípio de Indução, no qual em suma, garantimos uma propriedade de um conjunto avaliando um "apenas"um elemento do conjunto e seu sucessor. Mais precisamente,

Proposição 2.2.3 (Princípio de indução matemática)**.**

O princípio de indução matemática ou princípio de indução finita é uma ferramenta bastante poderosa utilizada em muitas demonstrações de resultados sobre os inteiros. Ela é consequência do princípio da boa ordem e consta no quarto axioma de Peano e que apresentaremos a seguir.

Para $S \subset \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$, de modo que $a \in S$ e para todo $n \in S$ implica que $(n+1) \in S$, então $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\} \subset S$. Em outras palavras, seja $a \in \mathbb{Z}$ e $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que

- $p(a)$ é verdadeiro
- Para todo $n \geq a$, $p(n)$ implica que $p(n+1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

A seguir apresentaremos a definição do Binômio de Newton, onde usaremos a definição e propriedades nas demonstrações dos critérios de divisibilidade do Capítulos 2.

2.3 Binômio de Newton

O Binômio de Newton é de suma importância quando nos deparemos com demonstrações dos critérios de divisibilidade, com isso, reservamos esta seção para caracteriza-lo.

Proposição 2.3.1 (Binômio de Newton)**.** *Sejam x e y inteiros e n um natural. Então:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \tag{2.1}$$

Demonstração. Para a demonstrar esta expansão por Binômio de Newton, vamos precisar utilizar a seguinte relação, conhecida como Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}, \tag{2.2}$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Inicialmente, vamos escrever a expansão (2.1) :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n. \tag{2.3}$$

A técnica utilizada será indução sobre a potência $n \in \mathbb{N}$. A base de indução, será verificada para $n = 0$ e $n = 1$

i) $[n = 0]$ Supondo que a soma $x + y \neq 0$, vemos que $(x+y)^0 = 1$ e por outro lado, $\binom{n}{0} x^0 = 1$ donde segue que a base indutiva é satisfeita.

ii) $[n = 1]$ Para $n = 1$, temos que $(x+y)^1 = x + y$. Na expansão, temos que $\binom{1}{0} x^1 + \binom{1}{1} y^1 = x + y$, portanto o resultado é verdadeiro para $n = 1$.

A hipótese de indução será que o resultado é válido para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(x+y)^k = \binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1} x y^{k-1} + \binom{k}{k} y^k \tag{2.4}$$

e provar que continua sendo satisfeito para o sucessor $(k+1)$.

Inicialmente, vamos multiplicar (2.4) por $(x+y)$, obtendo:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y) \cdot \left[\binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1} x y^{k-1} + \binom{k}{k} y^k \right] \\
(x+y)^{k+1} &= \left[\binom{k}{0} x^{k+1} + \binom{k}{1} x^k y + \ldots + \binom{k}{k-1} x^2 y^{k-1} + \binom{k}{k} x y^k \right] + \\
&+ \left[\binom{k}{0} x^k y + \binom{k}{1} x^{k-1} y^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} x y^k + \binom{k}{k} y^{k+1} \right].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Analisando os termos em (2.5), temos que, tirando o primeiro termo da expansão $\binom{k}{0}x^{k+1}$ e o último $\binom{k}{k}y^{k+1}$, os demais podem ser agrupados, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= \left[\binom{k}{0}x^{k+1}+\left(\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right)x^k y+\ldots+\right.\\ &+ \left.\left(\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right)xy^k+\binom{k}{k}y^{k+1}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aplicando a relação de Relação de Stifel (2.2) em cada um dos termos entre parênteses de (2.6) obtemos:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^k y+\ldots+\binom{k+1}{k}xy^k+\binom{k}{k}y^{k+1}\right]. \tag{2.7}$$

Como $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1$ e $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}=1$, então podemos substituir os mesmos em (2.7):

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k+1}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^k y+\ldots+\binom{k+1}{k}xy^k+\binom{k+1}{k+1}y^{k+1}\right],$$

verificando assim a hipótese de indução. □

A seguir apresentaremos uma Seção sobre divisibilidade dos números inteiros, onde as principais propriedades dos critérios de divisibilidade são fundamentadas por ela, assim é importante que tenhamos o domínio do conteúdo aqui abordado.

2.4 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

No conjunto dos números inteiros, nem sempre é possível efetuar a operação de divisão e ela é a ferramenta principal deste trabalho, portanto é essencial conhecermos a notação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$, para estabelecermos suas principais definições e propriedades.

2.4.1 Propriedades de divisibilidade

Definição 2.4.1. *Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b se, e somente se, existir um inteiro k, tal que $b = ak$. Dizemos também que a é divisor de b, a é fator de b ou b é divisível por a.*

Usaremos a notação $a|b$ para simbolizar que a divide b e que $a \nmid b$ para indicar que a não divide b.

Exemplo 2.4.1. *Note que* $2|8$*, pois existe um inteiro* $k = 4$*, tal que* $8 = 2 \cdot 4$*.*

Exemplo 2.4.2. *Observe que* $5 \nmid 12$*, pois não existe um inteiro* k*, tal que* $12 = 5 \cdot k$*.*

De imediato da definição de divisibilidade, extraímos a seguinte proposição:

Proposição 2.4.1. *Sejam* a, b, c *inteiros não nulos, tem-se que*

i) $1|a,\ a|a,\ a|0$*;*

ii) a *divide* b *se, e somente se,* $|a|$ *divide* $|b|$*;*

iii) se $a|b$ *e* $b|c$*, então* $a|c$*;*

iv) $a|b$ *e* $c|d \Rightarrow ac|bd$*;*

As demonstrações podem ser encontradas em Hefez [8].

Utilizaremos as proposições a seguir como resultados em diversos Teoremas posteriores, por isso expomos aqui as demonstrações das mesmas.

Proposição 2.4.2. *Se* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *são tais que* $a|b$ *e* $a|c$*, então* $a|b + c$*.*

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$, então segue da Definição (2.4.1), temos que existem $z, y \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} b &= az \\ c &= ay \end{aligned}$$

somando as equações anteriores temos que

$$\begin{aligned} b + c &= az + ay \\ b + c &= a(z + y), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $a|b + c$. □

Proposição 2.4.3. *Se* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *são tais que* $a|b$ *e* $a|c$*, então* $a|b - c$*.*

Demonstração. A demonstração é análoga a da Proposição (2.4.2). □

Proposição 2.4.4. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Temos que* $a - b$ *divide* $a^n - b^n$*.*

Demonstração. A prova segue por indução sobre n. Claramente a afirmação é válida para $n = 1$, pois $a - b|(a^1 - b^1) = a - b$. Agora, suponhamos que $a - b|(a^n - b^n)$ e vamos provar que $a - b|(a^{n+1} - b^{n+1})$

Note que

$$\begin{aligned} a^{n+1}-b^{n+1} &= aa^n-bb^n \\ &= aa^n-ba^n+ba^n-bb^n \\ &= (a-b)a^n+b(a^n-b^n). \end{aligned}$$

Da base e hipótese de indução, temos que $a-b|a-b$ e $a-b|a^n-b^n$, decorre então, da última igualdade, que $a-b|a^{n+1}-b^{n+1}$, como queríamos demonstrar. □

Proposição 2.4.5. *Sejam* $a,b\in\mathbb{Z}$ *e* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. *Temos que* $a+b$ *divide* $a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

Demonstração. A prova segue por indução sobre n. Obviamente a afirmação é válida para $n=0$, pois $a+b|(a^1+b^1)$. Suponhamos, agora, que $a+b|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$. Então, fazendo a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1} &= a^2a^{2n+1}-b^2a^{2n+1}+b^2a^{2n+1}+b^2b^{2n+1} \\ &= (a^2-b^2)a^{2n+1}+b^2(a^{2n+1}+b^{2n+1}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Da hipótese de indução, temos que $a+b|b^2(a^{2n+1}+b^{2n+1})$ e do produto da soma pela diferença, temos que $a+b|a^2-b^2$, decorre então que $a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$, como queríamos demonstrar. □

Proposição 2.4.6. *Sejam* $a,b\in\mathbb{Z}$ *e* $n\in\mathbb{N}$. *Temos que* $a+b$ *divide* $a^{2n}-b^{2n}$.

Demonstração. Novamente a demonstração segue por indução sobre n. Obviamente a afirmação é válida para $n=1$, pois $a+b|(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$. Suponhamos, agora, que $a+b|(a^{2n}-b^{2n})$. Fazendo

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)}+b^{2(n+1)} &= a^2a^{2n}-b^2a^{2n}+b^2a^{2n}-b^2b^{2n} \\ &= (a^2-b^2)a^{2n}+b^2(a^{2n}-b^{2n}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Da base $a+b|a^2-b^2$ e, por hipótese de indução, temos que $a+b|(a^{2n}-b^{2n})$, decorre então que $a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$, como queríamos demonstrar. □

Com base nas proposições estudadas anteriormente, enunciaremos, a seguir, a Divisão Euclidiana que consiste na técnica de dividir dois números obtendo um quociente e um resto.

Divisão Euclidiana

Em aritmética, a divisão euclidiana é o processo de dividir dois números inteiros, um pelo outro, de forma que expresse de forma única um quociente e um resto menor que o divisor. Com isso podemos definir a divisão euclidiana através do teorema a seguir.

Teorema 2.4.1. *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Então, existem dois únicos inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leqslant r < |b|.$$

A demonstração pode ser vista em Silva [9] ou a demonstração fica a cargo do leitor, pois exige uma teoria que não é abordada neste trabalho.

Exemplo 2.4.3. *Encontre o número natural que quando dividido por 7 resulta em um quociente 4 e deixa o resto maior possível.*

Solução 2.4.1. *Utilizando a divisão euclidiana temos que o número natural n pode ser escrito da seguinte forma $n = 7 \cdot 4 + r$ sendo $r = \text{máx}\{0,1,2,3,4,5,6\}$, portanto $r = 6$, assim temos que $n = 7 \cdot 4 + 6 = 34$.*

Exemplo 2.4.4. *Encontre os números naturais que quando divididos por 8 deixam o resto igual ao dobro do quociente.*

Solução 2.4.2. *Utilizando a divisão euclidiana temos que o número natural n pode ser escrito da seguinte forma $n = 8 \cdot q + 2q = 10q$, onde $0 \leq 2q < 8$, o que implica em $0 \leq q < 4$, agora basta testar os possíveis valores de q para determinar n.*

$$\begin{aligned}
n &= 10q \quad q \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow \\
n &= 10 \cdot 0 = 0 \\
n &= 10 \cdot 1 = 10 \\
n &= 10 \cdot 2 = 20 \\
n &= 10 \cdot 3 = 30
\end{aligned}$$

Logo os possíveis valores para n são $n = \{0, 10, 20, 30\}$.

Para estudarmos as propriedades a seguir é importante iniciarmos definindo o máximo divisor comum de dois ou mais números, ou seja, para estudarmos o Teorema de Bézout, Lema de Gauss e o Lema de Euclides é necessário o entendimento claro do *mdc*.

Definição 2.4.2. *O máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a,b)$ é o maior inteiro positivo d que é divisor de a e também é divisor de b. Se $mdc(a,b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si ou coprimo, ou seja, o maior inteiro positivo que divide a e também divide b é o 1.*

Definição 2.4.3. *Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números inteiros. Dizemos que $d = mdc(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ se as seguinte condições forem verificadas:*

1. *$d | a_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*

2. *Para qualquer c inteiro, se $c|a_i$ com $i = 1, 2, \cdots, n$, então $c|d$.*

A seguir, apresentaremos algumas proposições que são de fundamentais na estrutura deste trabalho.

Teorema 2.4.2 (Bézout)**.** *Se $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros x e y, tais que $d = ax + by$.*

Deixaremos a demonstração deste Teorema a cargo do leitor ou poderá ser vista em Lopes [10].

Proposição 2.4.7 (Lema de Gauss)**.** *Sejam a, b, e c três inteiros, tais que $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Demonstração. Se $a|bc$, então existe $e \in \mathbb{N}$, tal que $ae = bc$. Mas como $mdc(a, b) = 1$, pela relação de Bézout temos que existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que

$$\begin{aligned} 1 &= am + bn \\ c &= acm + bcn \\ c &= acm + aen \\ c &= a(cm + en) \qquad (2.10) \end{aligned}$$

De (2.10), conclui-se que $a|c$. □

Proposição 2.4.8 (Lema de Euclides)**.** *Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração. Suponha que $p|ab$ e $p \nmid a$, ou seja, $mdc(p, a) = 1$, daí temos da Proposição 2.4.7 que $p|b$. Por outro lado, se $p|ab$ e $p \nmid b$, isto é, $mdc(p, b) = 1$, novamente da Proposição 2.4.7 temos que $p|a$. Logo, se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

□

A seguir, apresentaremos o conjunto dos números primos e algumas de suas propriedades, explorando o fato de o mesmo ser um subconjunto do conjunto dos números inteiros.

Números Primos

Os números primos formam um conjunto que estabelece fundamental importância no estudo da aritmética, pois muitos resultados, teoremas, questões e curiosidades estão relacionadas as suas propriedades e suas características especiais. Portanto é importante conhecermos tal conjunto de números, para podermos fundamentar a teoria dos critérios de divisibilidade, de modo que venhamos estudar um Teorema de Sebá, que estabelece um algoritmo de divisibilidade para qualquer que seja o número primo analisado.

Definição 2.4.4. *Um número inteiro* p *é dito primo, se* $p \neq \pm 1$ *e os únicos divisores de* p *são* ± 1 *e* $\pm p$.

Exemplo 2.4.5. *Os números* $2, 3, 5,$ *e* 7 *são exemplos de primos, já os números* $4, 6, 8$ *e* 9 *são númenos compostos.*

A seguir será apresentado dois teoremas que estaremos usando constantemente como resultado nas demonstrações de proposições, lema etc.

Teorema 2.4.3 (Teorema fundamental da aritmética)**.** *Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único como produto de fatores primos.*

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser visto em Hefez [8]. □

Teorema 2.4.4. *O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma quantidade finita de números primos. Então considere A como o produto de todos os números primos, ou seja,

$$\begin{aligned} A &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \\ A+1 &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 \end{aligned}$$

Note que $A+1$ é sucessor de A e não é primo, pois se fosse primo ele seria fator de A. Do Teorema 2.4.3, temos que certamente $A+1$ é um número composto, no entanto se $A+1$ é composto, então ele será um múltiplo de algum primo p_i para algum $1 \leq i \leq n$ fator de A. Logo existem $k, k' \in \mathbb{Z}$, tais que

$$A+1 = kp_i \tag{2.11}$$

$$A = k'p_i \tag{2.12}$$

substituindo (2.12) em (2.11), temos

$$\begin{aligned} k'p_i + 1 &= kp_i \\ 1 &= kp_i - k'p_i \\ 1 &= p_i(k-k'). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Em (2.13) concluímos que $p_i | 1$ com p_i primo, o que é um absurdo, portanto concluímos que existem infinitos números primos. □

No estudo da divisibilidade é muito comum usarmos o conceito de congruência, no entanto dedicamos a próxima seção ao estudo das principais Propriedades de congruência modular.

2.5 Congruência modular

Apresentaremos uma noção da aritmética dos restos que em nosso cotidiano tem grandes aplicações não só pela teoria, mas principalmente na prática. Essas aplicações podem ser observadas na estrutura dos códigos de barras, identificação das pessoas pelo CPF, criptografia de mensagens, etc.

Definição 2.5.1. *Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se*

$$a \equiv b \mod m.$$

Por exemplo, $19 \equiv 4 \mod 3$, já que os restos da divisão de 19 e de 4 por 3 são iguais a 1.

Quando a relação $a \equiv b \mod m$ for falsa, diremos que a não é congruente a b módulo m. Deste modo, denotaremos por $a \not\equiv b \mod m$.

A seguir, enunciaremos as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva que garantem que a congruência modular é uma relação de equivalências.

Proposição 2.5.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$. Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

i) $a \equiv a \mod m$;

ii) *Se* $a \equiv b \mod m$, *então* $b \equiv a \mod m$;

iii) *Se* $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$, *então* $a \equiv c \mod m$.

Sugerimos que a demonstração desta proposição fique a cargo do leitor ou poderá ser vista em Hefez [8].

Proposição 2.5.2. *Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m | b - a$.*

Demonstração. Sejam $a = mq + r$, com $0 \leq r \leq m$ e $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' \leq m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente, ou seja, o resto e o quociente decorre do Teorema 2.4.1. Logo,

$$b - a = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m | b - a$ já que $|r - r'| < m$. □

Proposição 2.5.3. *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

i) Se $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$*, então* $a+c \equiv b+d \mod m$.

ii) Se $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$*, então* $ac \equiv bd \mod m$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$. Segue da Proposição 2.5.2, que

$$m|b-a \quad \text{e} \quad m|d-c$$

portanto, da definição de divisibilidade, temos que existem $k, k' \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} b-a &= mk && (2.14) \\ d-c &= mk' && (2.15) \end{aligned}$$

somando as equações (2.14) e (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} b-a+d-c &= m(k-k') \\ (b+d)-(a+c) &= m(k-k') \Rightarrow m|(b+d)-(a+c). \end{aligned}$$

Consequentemente, segue da definição de congruência que $a+c \equiv b+d \mod m$.

Para demonstramos o *item ii)*, basta notar que $bd-ac = d(b-a)+a(d-c)$ e, com um raciocínio semelhante, concluir que $m|bd-ac$.

□

Proposição 2.5.4. *Para todos* $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$*, se* $a \equiv b \mod m$*, então tem-se que* $a^n \equiv b^n \mod m$.

Demonstração. A demonstração pode ser feita sem dificuldades com indução sobre n. □

Exemplo 2.5.1. *Ache o resto da divisão de* 7^{10} *por* 51.

Solução 2.5.1. *Note que*

$$\begin{aligned} 7^2 &\equiv -2 \mod 51 \\ (7^2)^5 &\equiv (-2)^5 \mod 51 \\ 7^{10} &\equiv -32 \mod 51 \\ 7^{10} &\equiv 19 \mod 51 \end{aligned}$$

Portanto o resto da divisão de 7^{10} *por* 51 *é* 19.

Proposição 2.5.5. *Sejam* $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$*, com* $m > 1$*. Tem-se que*

$$a+c \equiv b+c \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod m.$$

Exemplo 2.5.2. *Observe que*

$$35 \equiv 5 \mod 10$$
$$84 \equiv 4 \mod 10$$

então, segue da Proposição (2.5.5)*, temos que*

$$35+84 \equiv 5+4 \mod 10$$
$$119 \equiv 9 \mod 10$$

de fato, pois $10|119-9=110$.

Proposição 2.5.6. *Sejam* $a,b,c,d,m \in \mathbb{Z}$*, com* $m>1$ *e* $mdc(c,m)=1$*. Temos que*

$$ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod m.$$

Exemplo 2.5.3. *Notemos que*

$$54 \equiv 30 \mod 8$$
$$6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \mod 8$$

mas como $mdc(6,8) \neq 1$*, então* $9 \not\equiv 5 \mod 8$.

As demonstrações das Proposições (2.5.5) e (2.5.6) poderá ser vistas em Sant'Anna [11].

Proposição 2.5.7. *Sejam* $a,b \in \mathbb{Z} e m,n,m_1,\cdots,m_r$ *inteiros maiores do que 1. Temos que*

i) Se $a \equiv b \mod m$ *e* $n|m$*, então* $a \equiv b \mod n$*;*

ii) $a \equiv b \mod m_i\ \forall i=1,2,\cdots r \Leftrightarrow a \equiv b \mod [m_1,\cdots,m_r]$*;*

iii) Se $a \equiv b \mod m$*, então* $(a,m)=(b,m)$.

Demonstração. A demonstração desta Proposição pode ser vista em Hefez [8]. □

A seguir, apresentaremos o sistema de numeração e suas propriedades, onde estudaremos a mudança de base uma base qualquer para o sistema decimal.

2.6 Sistema de Numeração

É comum utilizarmos o sistema de numeração decimal para representar números. Este modelo é também conhecido como sistema de numeração posicional, onde a posição do dígito indica a potência de 10 que ele representa.

Exemplo 2.6.1. *Represente a decomposição do número 528.*

Solução 2.6.1. *A decomposição do número 528 é dado da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}528 &= 5 \text{ centenas} + 2 \text{ dezenas} + 8 \text{ unidades}\\ 528 &= 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.\end{aligned}$$

Definição 2.6.1 (Sistema de numeração de base b)**.** *Dado um número natural $b > 1$ e o conjunto de símbolos $\{0, 1, 2, 3, 4 \cdots b-1\}$, a sequência de símbolos $(a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_b$, representa um número positivo $(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0)$ no sistema decimal.*

Exemplo 2.6.2. *Represente o número $(1231)_4$ no sistema de numeração decimal.*

Solução 2.6.2. *Vamos mudar o número* 1231 *da base* 4 *para a base* 10.

$$\begin{aligned}(1231)_4 &= 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0\\ &= 64 + 32 + 12 + 1\\ &= 109.\end{aligned}$$

Portanto o número 1231 *na base 4 é representado por* 109 *na base 10.*

Exemplo 2.6.3. *Mude o número* 1325647 *da base 8 para a base 10.*

Solução 2.6.3.

$$\begin{aligned}(1325647)_8 &= 1 \cdot 8^6 + 3 \cdot 8^5 + 2 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0\\ &= 262144 + 98304 + 8192 + 2560 + 384 + 32 + 7\\ &= 371623.\end{aligned}$$

Portanto o número 1325647 *na base 8 é representado por* 371623 *na base 10.*

Neste Capítulo, estudamos algumas premissas da aritmética que fundamentam o estudo dos critérios de divisibilidade, onde falaremos mais no próximo capítulo. Portanto é fundamental a familiaridade do leitor com as propriedades de divisibilidade, de congruência e do sistema de numeração nele exposto para melhor desenvolvimento da leitura.

3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Neste Capítulo, desenvolvemos os critérios de divisibilidade que, em geral, não são ensinado no vistos médio. O principal objetivo deste é analisar tais critérios e desenvolver os possíveis padrões na construção dos algoritmos da divisão para que, ao final do Capítulo, demonstremos o Teorema de Sebá. Aqui o Teorema de Sebá será tratado de maneira sucinta, bem como resultados relevantes no estudo e exercícios aplicados em atividades para alunos do ensino médio.

A proposição a seguir é consequência da expansão da Proposição 2.1, estudo no Capítulo 1 e usaremos constantemente nas resoluções e demonstrações dos critérios de divisibilidade.

Proposição 3.0.1. *Dado $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então existe um $k \in \mathbb{Z}$, tal que vale a equação $(a+1)^n = ak+1$.*

Demonstração. A demonstração segue por indução sobre n.

Para n=1, temos que $(a+1)^1 = a \cdot 1 + 1$.

Suponha que a proposição $P(n)$, $(a+1)^n = a \cdot k + 1$ seja válida. Queremos mostrar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Considere que

$$\begin{aligned} (a+1)^{n+1} &= (a+1)^n (a+1)^1 \\ &= (ak+1)(a+1) \\ &= a^2k + ak + a + 1 \\ &= a(ak+k+1)+1. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

A seguir apresentaremos os critérios de divisibilidade estudados no ensino fundamental bem como os critérios de divisibilidade não usais, evidenciando suas propriedades e aplicações em sala de aula. Apresentaremos exemplos que poderão ser usados pelos discentes no decorrer da aula com objetivo de chamar a atenção e instigar a curiosidade dos alunos.

Para os teoremas a seguir, iremos considerar a e n números naturais e os a_i números naturais variando de 0 a 9.

3.1 Critério de divisibilidade por 2

Teorema 3.1.1. *Um número natural a é divisível por* 2 *se, e somente se, a é par.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{N}$ um número escrito na base 10, isto é

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \tag{3.1}$$

onde, $0 \leq a_i \leq 9$ e $\forall 1 \leq i \leq n$ com $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $10 = 2 \cdot 5$, ou seja, $2|10^k \; \forall 1 \leq k \leq n$. Então, segue de (3.1), que

$$\begin{aligned} 2|a &\Leftrightarrow 2|a_0 10^0 \\ &\Leftrightarrow 2|a_0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 2r, r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, de (3.2), temos que a_0 é par. □

Exemplo 3.1.1. *Os números $n = 784538$ e $m = 125873$ são divisíveis por 2?*

Solução 3.1.1. *Note que o número n termina em* 8*, ou seja, n é par, portanto n é divisível por* 2*. Por outro lado m termina em* 3*, logo m é ímpar assim ele não é divisível por 2.*

É fácil notar que os critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6$ e 9 é facilmente aplicável ao ensino fundamental e médio, portanto é importante trabalharmos de modo a incentivar os alunos com situações problemas, afim de motiva-los e enriquecer o processo de ensino aprendizagem.

3.2 Critério de divisibilidade por 3

Teorema 3.2.1. *Um número natural a é divisível por* 3 *se, e somente se, a soma dos algarismos de a é divisível por* 3*. Mais precisamente,* $3 \mid a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *se, e somente se,* $3 \mid a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

Demonstração. Como foi feito no critério de divisibilidade por 2, vamos escrever um número arbitrário $a \in \mathbb{Z}$ na base 10, ou seja, $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, onde cada a_i é um algarismo. Neste caso, para o intuito de seguir com nossa demonstração, vamos decompor o número $10 = (9+1)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_n (9+1)^n + \cdots + a_2 (9+1)^2 + a_1 (9+1) + a_0 \end{aligned}$$

utilizando a Proposição (3.0.1), temos que existem $k, \cdots, k_n$ inteiros, tais que

$$\begin{aligned} a &= a_n(k_n 9+1)+\cdots+a_2(k_2 9+1)^2+a_1(9+1)+a_0 \\ &= 9(a_n k_n+\cdots+a_2 k_2+a_1)+a_n+\cdots+a_2+a_1+a_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Logo, por (3.3), temos que a será divisível por 3 se, e somente se,

$$3 \mid a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2.1. *Verifique se o número* 3654891 *é divisivel por* 3

Solução 3.2.1. *O número* 3654891 *é divisível por 3 se, e somente se,.*

$$\begin{aligned} 3 &\mid 3+6+5+4+8+9+1=36 \\ 3 &\mid 3+6=9. \end{aligned}$$

De fato, 3 *divide* 9*, então* 3 *divide* 3654891*.*

Exemplo 3.2.2. *Verifique se o número* 325447 *é divisivel por* 3

Solução 3.2.2. *O número* 325447 *é divisível por 3 se, e somente se,*

$$\begin{aligned} 3 &\mid 3+2+5+4+4+7=25 \\ 3 &\mid 2+5=7. \end{aligned}$$

Como, 3 *não divide* 7*, então* 3 *não divide* 325447*.*

Exemplo 3.2.3. *Em um número natural N de* 9 *algarismos, tem-se: os algarismos das unidades simples, unidades de milhar e unidade de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhão iguais a z. Prove que N é divisível por* 3*.*

Solução 3.2.3. *Seja N o número de* 9 *algarismos citado no enunciado, então*

$$\begin{aligned} N &= zyxzyxzyx \\ &= z10^8+y10^7+x10^6+z10^5+y10^4+x10^3+z10^2+y10+x \\ &= z10^2(10^6+10^3+1)+y10(10^6+10^3+1)+x(10^6+10^3+1) \\ &= (z10^2+y10+x)(10^6+10^3+1) \\ &= (z10^2+y10+x)(1000000+1000+1) \\ &= (z10^2+y10+x)(1001001). \end{aligned}$$

Mas como $1+0+0+1+0+0+1=3$, então 1001001 *é divisível por* 3*. Assim N é divisível por* 3*.*

3.3 Critério de divisibilidade por 4

Teorema 3.3.1. *Um número natural* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *é divisível por* 4 *se, e somente se, o número* $a_1 10 + a_0$ *for é divisível por* 4.

Demonstração. Dado um número natural a devidamente escrito na base 10, temos que

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= 100(a_n 10^{n-2} + \cdots + a_2) + a_1 10 + a_0 \end{aligned}$$

Como $4|100(a_n 10^{n-2} + \cdots + a_2)$, então 4 divide a se, e somente se, $4|a_1 10 + a_0$. □

Exemplo 3.3.1. *Verifica se o número* 3232 *é divisível por* 4.

Solução 3.3.1. *O número* 3232 *é divisível por 4 se, e somente se,* $a_1 \cdot 10 + a_0$ *for divisível por 4.*

$$4|3232 \Leftrightarrow 4|3 \cdot 10 + 2 = 32.$$

De fato 32 *é divisível por* 4, *então* 3232 *também é divisível por* 4.

Exemplo 3.3.2. *Verifica se o número* 325648801 *é divisível por* 4.

Solução 3.3.2. *O número* 325648801 *é divisível por 4 se, e somente se,* $a_1 \cdot 10 + a_0$ *for divisível por 4.*

$$4|325648801 \Leftrightarrow 4|0 \cdot 10 + 1 = 1.$$

Como 1 não é divisível por 4, *então* 325648801 *não é divisível por* 4.

Exemplo 3.3.3. *Determine o resto da divisão do* 4 *do número* $n = 206180 + 3920 + 121 + 943$.

Solução 3.3.3. *Para determinar o resto da divisão do número* n *por* 4, *não é necessário fazer as somas e posteriormente efetuar as divisões, basta analisar os restos de cada parcela isoladamente e em seguida efetuar a soma. Para isso usaremos o critério de divisibilidade por* 4.

- *A parcela* 206180 *deixa resto* 0 *na divisão por* 4, *pois* 80 *é múltiplo de* 4.
- *A parcela* 3920 *deixa resto* 0 *na divisão por* 4, *pois* 20 *é múltiplo de* 4.
- *A parcela* 121 *deixa resto* 1 *na divisão por* 4, *pois* 20 *é múltiplo de* 4.
- *A parcela* 943 *deixa resto* 3 *na divisão por* 4, *pois* 40 *é múltiplo de* 4.

Agora basta somar os restos $0 + 0 + 1 + 3 = 4$ *e* 4 *deixa resto* 0 *na divisão por* 4.

3.4 Critério de divisibilidade por 5

Teorema 3.4.1. *Um número natural $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for 0 ou 5.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Portanto,

$5|a \Leftrightarrow 5|a_0$, ou seja $a_0 = 5k$ com $0 \leq k \leq 9$.

□

Exemplo 3.4.1. *Verifica se o número 3254165 é divisível por 5.*

Solução 3.4.1. *O número 3254165 é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for 0 ou 5. Portanto 3254165 é divisível por 5, pois termina em 5.*

Exemplo 3.4.2. *Verifica se o número $a = 23651$ é divisível por 5.*

Solução 3.4.2. *Utilizaremos o Teorema 3.4.1 para verificar se o número $a = 23651$ é divisível por 5, para isso, basta observar se o algarismo das unidades é 0 ou 5. Neste caso, o número $a = 23651$ não é divisível por 5, pois o algarismo das unidades é 1.*

Exemplo 3.4.3. *Mostre que o produto $ab0 \cdot cde$ sempre é divisível por 5.*

Solução 3.4.3. *Note que o resto da divisão de $ab0$ por 5 é 0. Já o resto da divisão de cde por 5 é igual a e se $e < 5$ ou $5 - e$ se $5 \leq e \leq 9$, em ambos os casos ao efetuar o produto por 0 o resultado é 0 e portanto $5|0$.*

Exemplo 3.4.4. *Qual é o algarismo das unidades do número $n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2013$?*

a) 0

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

Solução 3.4.4. *Inicialmente, note que n é um número múltiplo de 5, portanto pelo critério de divisibilidade, temos que o algarismo das unidades de n é 0 ou 5, no entanto, n é ímpar, pois é formado pelo produto de fatores ímpares, logo o algarismo das unidades de n é 5.*

3.5 Critério de divisibilidade por 6

Teorema 3.5.1. *Um número natural* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *é divisível por* 6 *se, e somente se,* n *for divisível simultaneamente por* 2 *e* 3*.*

Demonstração. Uma justificativa desse critério vem do Teorema Fundamental da Aritmética - TFA (2.4.3), de fato notemos, que a decomposição em fatores primos do 6 é $6 = 2 \cdot 3$. Se a é múltiplo de 2, então $a = 2p$ e se a é múltiplo de 3, então $a = 3q$ com p, q inteiros, logo

□

Exemplo 3.5.1. *Verifica se o número* 33642 *é divisível por* 6*.*

Solução 3.5.1. *O número* 33642 *é divisível por 6 se, e somente se, ele for divisível por 2 e 3. Inicialmente note que o número* 33642 *é par, então podemos concluir que é divisível por 2. Agora basta verificar se* 33642 *é divisível por 3 e, para isso, usaremos o Teorema 3.2.1.*

$$
\begin{aligned}
3 &\mid 33642 \Leftrightarrow \\
3 &\mid 3+3+6+4+2 = 18
\end{aligned}
$$

De fato 18 é divisível por 3. Concluímos que $a = 33642$ *é divisível por 2 e por 3, então a é divisível por 6.*

Exemplo 3.5.2. *Verifica se o número* 32365265 *é divisível por* 6*.*

Solução 3.5.2. *Como o número* 32365265 *é impar, então* 32365265 *não é divisível por 2, portanto, concluímos que* 32365265 *não é divisível por 6.*

Exemplo 3.5.3. *Mostre que o triplo da soma de* 4 *números consecutivos é sempre divisível por* 6*.*

Solução 3.5.3. *Sejam* $a, a+1, a+2, a+3$ *quatro números consecutivos e seja* X *o triplo da soma desses númenos, então*

$$
\begin{aligned}
X &= 3[a + (a+1) + (a+2) + (a+3)] \\
&= 3(4a+6) \\
&= 12a + 18 \\
&= 6(2a+3) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

como 6 *é divisível por* 2 *e também por* 3*, então concluímos que (3.4) é divisível por* 6*.*

3.6 Critério de divisibilidade por 7

O critério de divisibilidade por 7 é considerado muito difícil e na maioria dos casos não é estudado no ensino da educação básica, porém existem algumas variações deste critério. Para tornar mais fácil a decidir qual estratégia usar no ensino deste critério, a seguir explanaremos três deles.

Teorema 3.6.1. *Sejam b o algarismos das unidade e a os demais algarismos, $10a+b$, é divisível por 7 se, e somente se, $a-2b$ for divisível por 7.*

Demonstração. Suponha que existe uma $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\begin{aligned} a-2b &= 7k, \quad \text{logo} \\ 10a-20b &= 7\cdot 10k \\ 10a-21b+b &= 7k' \\ 10a+b &= 7k'+21b \\ 10a+b &= 7(k'+3b) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto $10a+b$ é divisível por 7.

Suponha agora que $10a+b=7q$, com $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 10a+21b-20b &= 7q \\ 10a-20b &= 7q-21b \\ 10a-20b &= 7q' \\ 10(a-2b) &= 7q' \end{aligned}$$

Como $mdc(10,7)=1$, da proposição (2.4.7), podemos concluir que $7|(a-2b)$. □

Exemplo 3.6.1. *Verifique se 350 é divisível por 7.*

$$\begin{aligned} 7 \quad &| \quad 350 = 35\cdot 10+0 \Leftrightarrow \\ 7 \quad &| \quad 35-2\cdot 0 = 35 \Leftrightarrow \\ 7 \quad &| \quad 3-2\cdot 5 = -7 \end{aligned}$$

Como 7 divide -7, então 7 divide 350.

Teorema 3.6.2. *Um número natural $n = n_r\cdots n_2n_1n_0$, com $0 \leq n_i \leq 9$, escrito na base 10, é divisível por 7, se, e somente se,*

$$n_2n_1n_0 - n_5n_4n_3 + n_8n_7n_6 - n_{11}n_{10}n_9 + \cdots \equiv 0 \mod 7. \tag{3.6}$$

Demonstração. Sabemos que $10^3 \equiv -1 \mod 7$, $10^6 \equiv 1 \mod 7$, $10^9 \equiv -1 \mod 7$ e assim sucessivamente. Da decomposição de números inteiros, temos que

$$\begin{aligned} n &= n_0 + 10n_1 + 10^2 n_2 + 10^3 n_3 + 10^4 n_4 + 10^5 n_5 + 10^6 n_6 + \cdots + 10^r n_r \\ n &= n_2 n_1 n_0 + 10^3(n_3 + 10n_4 + 10^2 n_5) + 10^6(n_6 + 10n_7 + 10^2 n_8) + \cdots \end{aligned}$$

Note que, dos resultados supracitados, obtemos

$$\begin{aligned} n_2 n_1 n_0 &\equiv n_2 n_1 n_0 \mod 7 \\ 10^3(n_3 + 10n_4 + 10^2 n_5) &\equiv -(n_3 + 10n_4 + 10^2 n_5) \mod 7 \\ 10^6(n_6 + 10n_7 + 10^2 n_8) &\equiv (n_6 + 10n_7 + 10^2 n_8) \mod 7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Somando todas as congruências, teremos

$$n \equiv n_2 n_1 n_0 - (n_3 + 10n_4 + 10^2 n_5) + (n_6 + 10n_7 + 10^2 n_8) \cdots \mod 7$$

Ou seja,

$$n \equiv n_2 n_1 n_0 - n_5 n_4 n_3 + n_8 n_7 n_6 \cdots \mod 7$$

portanto,

$$n \text{ é divisível por 7, se, e somente se, } n_2 n_1 n_0 - n_5 n_4 n_3 + n_8 n_7 n_6 \cdots \equiv 0 \mod 7.$$

□

Exemplo 3.6.2. *Mostre que* 120399048 *é divisível por 7.*

Solução 3.6.1. *O número* 120399048 *é divisível por 7 se, e somente se,*

$$7 \mid 048 - 399 + 120 = 231.$$

$231 = 7 \cdot 33$, *então o número* 120399048 *é divisível por 7.*

Exemplo 3.6.3. *Mostre que* 106011312424 *é divisível por 7.*

Solução 3.6.2. *O número* 106011312424 *é divisível por 7 se, e somente se,*

$$7 \mid 424 - 312 + 011 - 106 = 17.$$

Como 7 não divide 17, então o número 106011312424 *não é divisível por 7.*

Teorema 3.6.3. *O número natural* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *é divisível por 7 se, e somente se,* $b = a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 5a_0$ *também for divisível por 7.*

Demonstração. Suponha que b seja múltiplo de 7, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\begin{aligned} b &= a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1+5a_0 = 7k, \\ b &= a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1+ = 7k-5a_0, \qquad (3.7) \\ a &= a_n10^n+\cdots+a_210^2+a_110+a_0 \\ a &= 10(a_n10^{n-1}+\cdots+a_210^1+a_1)+a_0 \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Substituindo (3.7) em (3.8), temos

$$\begin{aligned} a &= 10(7k-5a_0)+a_0 \\ a &= 70k-49a_0 = 7(10k-7a_0) = 7k' \end{aligned}$$

Suponha agora que a seja múltiplo de 7, ou seja,

$$\begin{aligned} a &= a_n10^n+\cdots+a_210^2+a_110+a_0 = 7k \\ &= 10(a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1)+a_0 = 7k \\ &= 10(a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1)+a_0+49a_0 = 7k+49a_0 \\ &= 10(a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1)+50a_0 = 7(k+7a_0) \\ &= 10(a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1+5a_0) = 7k' \end{aligned}$$

Como $mdc(10,7)=1$, segue da proposição (2.4.7) que 7 divide $a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1+5a_0$.

Como $5 \equiv -2 \mod 7$, então o Teorema (3.6.3) pode ser visto como: O número natural $a = a_n10^n+\cdots+a_210^2+a_110+a_0$ é divisível por 7 se, e somente se, $b = a_n10^{n-1}+\cdots+a_210+a_1-2a_0$ também for divisível por 7.

□

Exemplo 3.6.4. *Mostre que o número* 36543 *não é divisível por* 7.

Solução 3.6.3. *O número* 36543 *é divisível por 7 se, e somente se*

$$\begin{aligned} 7 &\mid 3654+5\cdot 3 = 3669 \\ 7 &\mid 366+5\cdot 9 = 411 \\ 7 &\mid 41+5\cdot 1 = 46. \end{aligned}$$

Como 7 não divide 46 então 7 não divide 36543.

Exemplo 3.6.5. *Mostre que o número* 8643 *não é divisível por* 7.

Solução 3.6.4. *O número* 8643 *é divisível por 7 se, e somente se*

$$
\begin{aligned}
7 &\mid 864+5\cdot 3=879\\
7 &\mid 87+5\cdot 9=132\\
7 &\mid 13+5\cdot 2=23.
\end{aligned}
$$

Como 7 não divide 23 então 7 não divide 8643.

Exemplo 3.6.6. *Um número de 6 dígitos $X=abcdef$ satisfaz a propriedade que $abc-def$ é divisível por 7. Prove que X também é divisível por 7.*

Solução 3.6.5.

$$
\begin{aligned}
X &= abcdef\\
&= a10^5+b10^4+c10^3+d10^2+e10+f\\
&= 10^3(a10^2+b10+c10)+(d10^2+e10+f)\\
&= 10^3(abc)+(def)\\
&= 10^3(abc)+(abc)-(abc)+(def)\\
&= 1001(abc)-(abc-def)
\end{aligned}
$$

Aplicando o critério de divisibilidade por 7, temos 7/1001 se, e somente se

$$
\begin{aligned}
7 &\mid 100+5\cdot 1=105\\
7 &\mid 10+5\cdot 5=35
\end{aligned}
$$

e de fato 35 é claramente divisível por 7, então 1001 é divisível por 7. Assim concluímos que X é divisível por 7, pois por hipótese $abc-def$ também é divisível por 7.

3.7 Critério de divisibilidade por 9

Iremos construir a ideia do critério de divisibilidade por 9 utilizando dois problemas e um teorema com uma propriedade bastante curiosa. Essa propriedades possibilitará a construção de um critérios de divisibilidade de um número escrito numa base r por $r-1$.

Problema 3.7.1. *Mostre que o número* $(102012)_3$ *é representado por uma quantidade par na base 10.*

Solução 3.7.1. *Fazendo a mudança de base do número* $(102012)_3$ *para a base 10, temos*

$$
\begin{aligned}
(102012)_3 &= 1\cdot 3^5+0\cdot 3^4+2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+1\cdot 3^1+2\cdot 3^0\\
&= 243+54+3+2\\
&= (302)_{10}
\end{aligned}
$$

De fato o número é representado por uma quantidade par na base 10. Embora seja um problema simples, esse problema foi escolhido de forma conveniente para podermos conjecturar um padrão. Por outro lado observe

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1\cdot(2+1)^5+0\cdot(2+1)^4+2\cdot(2+1)^3+0\cdot(2+1)^2+1\cdot(2+1)^1+2\cdot(2+1)^0\\ &= 1\cdot(2+1)^5+2\cdot(2+1)^3+1\cdot(2+1)^1+2\end{aligned}$$

Existem $k_1, k_2, k_2' \in \mathbb{Z}$*, tais que*

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1\cdot(2\cdot k_1+1)+2\cdot(2\cdot k_2+1)+1\cdot(2+1)+2\\ &= 2\cdot k_1+1+2\cdot k_2'+2+2+1+2\\ &= 2(k_1+k_2'+1)+1+2+1+2 \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Como $2(k_1+k_2'+1)$ *é múltiplo de 2, então (3.9) será par se, e somente se,* $1+2+1+2$ *for múltiplo de 2. Neste caso, essa condição é verificada, pois* $1+2+1+2=6$ *e note que 6 é a soma dos algarismos de* $(102012)_3$.

Problema 3.7.2. *Sobre qual condição o número* $(abc)_6$ *é divisível por 5?*

Solução 3.7.2. *Fazendo a mudança de base do número* $(abc)_6$ *para a base 10, temos*

$$\begin{aligned}(abc)_6 &= a\cdot 6^2+b\cdot 6^1+c\cdot 6^0\\ &= a\cdot(5+1)^2+b\cdot(5+1)^1+c\cdot(5+1)^0\end{aligned}$$

Portanto, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$*, tal que*

$$\begin{aligned}(abc)_6 &= a\cdot(5k_1+1)+b\cdot(5+1)+c\\ &= a\cdot 5\cdot k_1+a+b\cdot 5+b+c\\ &= 5(a\cdot k_1+b)+a+b+c \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Portanto o (3.10) será divisível por 5 se a soma $a+b+c$ *for múltipla de 5. Note novamente que a soma* $a+b+c$ *é exatamente a soma dos algarismos do número* $(abc)_6$*. Essa propriedade não acontece por acaso, o teorema a seguir mostra um critério de divisibilidade que é de grande relevância para essa trabalho.*

Teorema 3.7.1. *Um número* $a=(a_na_{n-1}\cdots a_1a_0)_r$ *é divisível por* $r-1$*, se a soma* $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ *for divisível por* $r-1$.

Demonstração. De forma análoga aos problemas anteriores, escreveremos o número $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$ na base 10.

$$\begin{aligned} a &= a_n(r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1} + \cdots + a_1(n)^1 + a_0(n)^0 \\ &= a_n[(r-1)+1]^n + a_{n-1}[(r-1)+1]^{n-1} + \cdots + a_1[(r-1)+1]^1 + a_0 \end{aligned}$$

Portanto, existem $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} a &= a_n[k_n(r-1)+1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r-1)+1] + \cdots + a_1[(r-1)+1] + a_0 \\ &= (r-1)(a_n k_n + a_{n-1}k_{n-1} + \cdots + a_1) + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Concluirmos, então que (3.11) é divisível por $(r-1)$ se a soma $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ for múltipla de $(r-1)$. □

Portanto, temos o critério de divisibilidade por 9 como um caso particular do Teorema (3.7.1), assim o critério de divisibilidade por 9 se caracteriza no Teorema (3.9.1).

Teorema 3.7.2. *Um número $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ escrito na base 10 é divisível por 9, se a soma $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ for divisível por 9.*

Teorema 3.7.3. *Um número $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$ é divisível por $r+1$, se a soma $a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0$ for divisível por $r+1$.*

Demonstração. De forma análoga aos problemas anteriores, escreveremos o número $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$ na base 10.

$$\begin{aligned} a &= a_n(r)^n + a_{n-1}(r)^{n-1} + \cdots + a_1(n)^1 + a_0(n)^0 \\ &= a_n[(r+1)-1]^n + a_{n-1}[(r+1)-1]^{n-1} + \cdots + a_1[(r+1)-1]^1 + a_0 \end{aligned}$$

Neste caso, dividiremos o problema em duas situações, observe como resultado da Proposição (3.0.1) que existem $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$, tais que

Se n um número par

$$\begin{aligned} a &= a_n[k_n(r+1)+1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r+1)-1] + \cdots + a_1[(r+1)-1] + a_0 \\ &= (r+1)(a_n k_n + a_{n-1}k_{n-1} + \cdots + a_1) + a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Portanto, (3.12) será divisível por $r+1$, se a soma $+a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0$ for divisível por $r+1$.

Se n um número ímpar

$$\begin{aligned} a &= a_n[k_n(r+1)-1] + a_{n-1}[k_{n-1}(r+1)+1] + \cdots + a_1[(r+1)-1] + a_0 \\ &= (r+1)(a_n k_n + a_{n-1}k_{n-1} + \cdots + a_1) - a_n + a_{n-1} - \cdots - a_1 + a_0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

De forma análoga, (3.13) será divisível por $r+1$, se a soma $-a_n + a_{n-1} - \cdots - a_1 + a_0$ for divisível por $r+1$. $\square$

Exemplo 3.7.1. *Verifique se o número* 323181 *é divisível por 9.*

Solução 3.7.3. *O número* 323181 *é divisível por 9 se, e somente se,*

$$9|3+2+3+1+8+1 = 18. \tag{3.14}$$

Como 9 divide 18, então 9 divide 323181.

Exemplo 3.7.2. *Verifique se o número* 985648 *é divisível por 9.*

Solução 3.7.4. *O número* 985648 *é divisível por 9 se, e somente se,*

$$9|9+8+5+6+4+8 = 40. \tag{3.15}$$

Como 9 não divide 40, então 9 não divide 985648.

Exemplo 3.7.3. *Usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?*

Solução 3.7.5. *A resposta é não, para justificar, suponha por absurdo que existem dois desses números inteiros m,n, tais que $m|n$ e considere sem perda de generalidade $m<n$. Da Proposição (2.4.3), temos que se*

$$m|m \text{ e } m|n \quad \Rightarrow \quad m|n-m \tag{3.16}$$

note que $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ e $9 \nmid 28$, portanto $9 \nmid m$ e $9 \nmid n$, pois a soma dos algarismos de m e n são iguais a 28. Por outro lado, como $28 \equiv 1 \mod 9$, então

$$\begin{aligned} m &\equiv 1 \mod 9 \\ n &\equiv 1 \mod 9 \\ n-m &\equiv 0 \mod 9 \Rightarrow 9|n-m \end{aligned} \tag{3.17}$$

usando o item ii) da Proposição (2.5.7) em (3.16) e (3.17), teremos

$$n-m \equiv 0 \mod [m,9] \tag{3.18}$$

mas como $9 \nmid m$ *e* $m > 9$*, então* $mdc(m,9) = 1$ *o que implica em* $[m,9] = 9m$*, portanto* $9m|n-m$*, assim* $n-m = 0$ *que é impossível, pois* $m \neq n$ *ou* $|9m| \leq |n-m|$*, logo*

$$\begin{aligned} |9m| &\leq |n-m| \Rightarrow \\ 9m &\leq n-m \Rightarrow \\ 10m &\leq n. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Neste caso (3.19) é absurdo, pois m *e* n *possuem a mesma quantidade de algarismos, portanto* $10m$ *possuirá um algarismo a mais que* n*, logo* $10m \geq n$*, ou seja, é absurdo supor a existência do* m,n*, tais que* $m|n$*.*

3.8 Critério de divisibilidade por 10

Teorema 3.8.1. *Seja número* $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ *escrito na base 10, uma condição suficiente para que* a *seja divisível por 10, é que* a_0 *seja 0.*

Demonstração. Como $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, então pondo 10 em evidência obtemos: $a = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 10) + a_0$, portanto a é divisível por 10 se, somente se, a_0 for divisível por 10, ou seja, $a_0 = 0$, uma vez que $0 \leq a_i \leq 9$ com $0 \leq i \leq n$. □

Exemplo 3.8.1. *Verifique se o número* $n = 36580$ *é divisível por 5 e por 10.*

Solução 3.8.1. *De acordo com os critérios de divisibilidade o número* $n = 36580$ *é divisível por 5 e por 10, pois termina em 0.*

Exemplo 3.8.2. *Verifique se o número* $m = 32565$ *é divisível por 10.*

Solução 3.8.2. *O número* $m = 32565$ *não é divisível por 10, pois o algarismos das unidades é 5.*

3.9 Critério de divisibilidade por 11

Uma das formas de demonstrar o critério de divisibilidade por 11 é tratarmos como um caso particular do Teorema (3.7.3), ou seja, considerarmos $r = 10$, logo obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.9.1. *Um número* $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)$ *escrito na base 10 é divisível por 11, se a soma* $a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0$ *for divisível por 11.*

Outra forma de verificar um critério de divisibilidade por 11 é dado a seguir.

Teorema 3.9.2. *Um número* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ *é divisível por 11 se, e somente se,* $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - a_0$ *for divisível por 11.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 11, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - a_0 = 11k$, daí

$$\begin{aligned} &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 - 10a_0 = 110k \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 110k + 11a_0 \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 11(10k + a_0) \\ a &= 11k' \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 11,

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 11k \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 11k \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 - 11a_0 = 11k - 11a_0 \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 - a_0) = 11(k - a_0) \end{aligned}$$

Como $mdc(10, 11) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 11 divide $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 - a_0$. □

Exemplo 3.9.1. *Verifique se o número* 30514 *é divisível por 11.*

Solução 3.9.1. *O número* 30514 *será divisível por 11 se, e somente se,*

$$11 | 4 - 1 + 5 - 0 + 3 = 11$$

Como 11 divide 11, então temos que 11 *divide* 30514.

Exemplo 3.9.2. *Verifique se o número* 32514 *é divisível por 11.*

Solução 3.9.2. *O número* 30514 *será divisível por 11 se, e somente se,*

$$11 | 4 - 1 + 5 - 2 + 3 = 9$$

Como 9 não divide 11, então temos que 11 *não divide* 32514.

Exemplo 3.9.3. *Descubra último número divisível por 11 menor que 23412.*

Solução 3.9.3. *Aplicando o critério de divisibilidade por 11, temos que* $2 - 3 + 4 - 1 + 2 = 4$*, como* $11 \nmid 4$*, então* $11 \nmid 23412$*. Agora, fazendo a diferença* $23412 - 4 = 23408$ *e assim obtemos o último número menor do que 23412 que é divisível por 11, para verificar, basta fazer* $2 - 3 + 4 - 0 + 8 = 11$ *e* $11 | 11$.

3.10 Critério de divisibilidade por 13

Teorema 3.10.1. *Um número* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ *é divisível por 13 se, e somente se,* $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 4a_0$ *for divisível por 13.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 13, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 4a_0 = 13k$, daí

$$
\begin{aligned}
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 40a_0 = 130k \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 130k - 39a_0 \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 13(10k - 3a_0) \\
a &= 13k' \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 13,

$$
\begin{aligned}
a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 13k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 13k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 + 39a_0 = 13k + 39a_0 \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 4a_0) = 13(k + 3a_0)
\end{aligned}
$$

Como $mdc(10, 13) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 13 divide $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 4a_0$. □

Exemplo 3.10.1. *Verifique se o número* 12356 *é divisível por 13.*

Solução 3.10.1. *O número* 12356 *será divisível por 13 se, e somente se,*

$$
\begin{aligned}
13 &\mid 1235 + 4 \cdot 6 = 1259 \\
13 &\mid 125 + 4 \cdot 9 = 161 \\
13 &\mid 16 + 4 \cdot 1 = 20.
\end{aligned}
$$

Como 13 não divide 20, então temos que 13 *não divide* 12356.

Exemplo 3.10.2. *Verifique se o número* 3055 *é divisível por 13.*

Solução 3.10.2. *O número* 3055 *será divisível por 13 se, e somente se,*

$$
\begin{aligned}
13 &\mid 305 + 4 \cdot 5 = 325 \\
13 &\mid 32 + 4 \cdot 5 = 52 \\
13 &\mid 5 + 4 \cdot 2 = 13.
\end{aligned}
$$

Como 13 divide 13, então temos que 13 *divide* 3055.

Exemplo 3.10.3. *Sejam a e b números naturais tais que $2a+b$ é divisível por 13. Qual das alternativas a seguir contém outro múltiplo de 13?*

a) 91a + b

b) 92a + b

c) 93a + b

d) 94a + b

e) 95a + b

Solução 3.10.3. *Como $2a+b$ é divisível por 13, então $2a+b = 13k$ com $k \in \mathbb{Z}$.*

$$\begin{aligned} 2a+b &= 13k \\ b &= 13k-2a \end{aligned} \tag{3.22}$$

substituindo (3.22) nos itens, temos do item c) que

$$\begin{aligned} 93a+b &= 93a+13k-2a \\ &= 91a+13k \\ &= 13(7a+k) \end{aligned}$$

logo, apenas o item c) pode ser múltiplo de 13.

3.11 Critério de divisibilidade por 17

Teorema 3.11.1. *Um número $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 17 se, e somente se, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - 5a_0$ for divisível por 17.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 17, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) - 5a_0 = 17k$, daí

$$\begin{aligned} &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 - 50a_0 = 170k \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 170k + 51a_0 \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 17(10k + 3a_0) \\ a &= 17k' \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 17,

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 17k \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 17k \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 - 51a_0 = 17k - 51a_0 \\ &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 - 5a_0) = 17(k - 3a_0) \end{aligned}$$

Como $mdc(10,17) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 17 divide $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 - 5a_0$. $\square$

Exemplo 3.11.1. *Verifique se o número* 6120 *é divisível por 17.*

Solução 3.11.1. *O número* 6120 *será divisível por 17 se, e somente se,*

$$\begin{aligned} 17 &\mid 612 - 5 \cdot 0 = 612 \\ 17 &\mid 61 - 5 \cdot 2 = 51 \\ 17 &\mid 5 - 5 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Como 17 divide 0, então temos que 17 *divide* 6120*.*

Exemplo 3.11.2. *Verifique se o número* 9845 *é divisível por 17.*

Solução 3.11.2. *O número* 9845 *será divisível por 17 se, e somente se,*

$$\begin{aligned} 17 &\mid 984 - 5 \cdot 5 = 959 \\ 17 &\mid 95 - 5 \cdot 9 = 50 \\ 17 &\mid 5 - 5 \cdot 0 = 5. \end{aligned}$$

Como 17 não divide 5, então temos que 17 *não divide* 9845*.*

Exemplo 3.11.3. *Qual o valor de b para que o número $n = 22b4$ seja divisível por 17.*

Solução 3.11.3. *Aplicando o critério de divisibilidade por 17, temos 17 divide $n = 22b4$ se, e somente se*

$$\begin{aligned} 17 &\mid 22b4 \\ 17 &\mid 22b - 5 \cdot 4 \\ 17 &\mid 22b - 20 \\ 17 &\mid 20b \\ 17 &\mid 20 - 5b \end{aligned}$$

como $17 | 20 - 5b$, então existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $20 - 5b = 17k$, logo

$$\begin{aligned} 20 - 5b &= 17k \\ 17k + 5b &= 20 \end{aligned} \tag{3.24}$$

a equação (3.24), pode ser facilmente resolvida uma vez que $0 \leq b \leq 9$ e $k \in \mathbb{Z}$, basta tomar $k = 0$, daí temos que $5b = 20$, logo $b = 4$. Neste caso $17 | 2244$.

3.12 Critério de divisibilidade por 19

Teorema 3.12.1. *Um número* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ *é divisível por 19 se, e somente se, o número* $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 2a_0$ *for divisível por 19.*

Demonstração. Temos que $a = (a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0)$ é divisível por 19 se, e somente se $(a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0) = 19k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Segue desta última identidade que, $19 \mid (a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0)$ se, e somente se

$$\begin{aligned} a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 &= 19 \cdot k \\ 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1\right) &= 19 \cdot k - a_0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Neste momento, temos como objetivo obter um múltiplo de 19 conveniente para esta demonstração. Mais precisamente, precisamos de um número na forma $(19 \cdot \overline{k} \cdot a_0)$ de modo que no lado esquerdo de (3.25) obtenhamos um múltiplo de 10 e na outra parte um de 19. Ao analisarmos os múltiplos de 19, $\{19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, \ldots\}$, verificamos que subtraindo $(170 \cdot a_0)$ em ambos os lados de (3.25), temos que :

$$\begin{aligned} 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1\right) - 170 \cdot a_0 &= 19 \cdot k - a_0 - 170 \cdot a_0 \\ 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 17 \cdot a_0\right) &= 19 \cdot k - 171 \cdot a_0 \\ 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 17 \cdot a_0\right) &= 19 \cdot (k - 9 \cdot a_0) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que a identidade (3.26) juntamente com o fato do m.d.c.$(10, 19) = 1$, implica que

$$19 \mid \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 17 \cdot a_0\right). \tag{3.27}$$

Para finalizarmos essa prova, basta observar que $-17 \equiv 2 \bmod 19$. □

Observação 3.12.1. *O termo* $\left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 17 \cdot a_0\right)$ *não está devidamente escrito na base* 10*, pois o algarismo das unidades* a_0 *está multiplicado por um número maior do que* 9*. Reescrevendo esta expressão e substituindo em* (3.26)*, obtemos*

$$\begin{aligned} 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - a_0 \cdot 17\right) &= 19 \cdot (k - 9 \cdot a_0) \\ 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - a_0 \cdot 10 - 7 \cdot a_0 \cdot\right) &= 19 \cdot \overline{k} \\ 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + (a_2 - a_0) \cdot 10 + a_1 - 7 \cdot a_0\right) &= 19 \cdot \overline{k} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Não é difícil verificar, via a identidade (3.28) *e com um argumento análogo ao utilizado na demonstração do Teorema* (3.12.1)*, que* $19 \mid (a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0)$ *se, e somente se*

$$19 \mid \left(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + (a_2 - a_0) \cdot 10 + a_1 - 7 \cdot a_0\right). \tag{3.29}$$

Um questionamento relevante é:

Para que serve a expressão (3.29) *sendo que a* (3.27) *é mais simples e direta?*

Antes de responder tal questionamento e provar outros resultados, vamos listar alguns exemplos para mostrar que as duas expressões se equivalem, ou seja, determinam números múltiplos e não múltiplos de 19.

Exemplo 3.12.1. *Seja* $a = 258 \cdot 19 = 4902$ *um múltiplo de* 19*. Vamos determinar múltiplos de* 19 *a partir de* $a = 4902$ *utilizando* (3.27) *e* (3.29).

Note que $a = 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2$, ou seja, temos que $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 9$ e $a_3 = 4$. Substituindo esses valores em (3.27), temos que

$$\begin{aligned} 19 &\mid (490 - 17 \cdot 2) \\ 19 &\mid 456, \end{aligned}$$

o que é verdadeiro, já que $19 \cdot 24 = 456$. Vamos repetir o processo para o número 456:

$$\begin{aligned} 19 &\mid 45 - 17 \cdot 6 \\ 19 &\mid -57, \end{aligned}$$

que é verdadeiro novamente.

Agora, vamos verificar a identidade (3.28) com este mesmo número $a = 4902$. Novamente, temos que $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 9$ e $a_3 = 4$. Utilizando esses valores em (3.28), temos que

$$\begin{aligned} 19 &\mid [4(9-2)0 - 7 \cdot 2] \\ 19 &\mid 456, \end{aligned}$$

o que é verdadeiro, já que $19 \cdot 24 = 456$. Repetindo o processo mais uma vez, temos que

$$\begin{aligned} 19 &\mid (4-6)5 - 7 \cdot 6 \\ 19 &\mid -25 - 7 \cdot 6. \end{aligned}$$

Aqui encontramos um problema, pois -2 na última expressão é um algarismo e não pode ser diferente de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Para solucionar este problema, utilizamos novamente a noção de congruência. Como estamos trabalhando com a divisão por 19, temos que $-2 \equiv 17 \bmod 19$. Portanto,

$$\begin{aligned} 19 &\mid 175 - 7 \cdot 6. \\ 19 &\mid 133, \end{aligned}$$

o que é verdadeiro. Aplicando o processo novamente, agora para o número 133, temos que

$$\begin{aligned} 19 &\mid (1-3)3-7\cdot 3 \\ 19 &\mid 173-7\cdot 3. \\ 19 &\mid 152. \end{aligned}$$

Como $152 = 19\cdot 8$, determinamos mais um múltiplo de 19 utilizando (3.29). Repetindo o processo, obtemos $76 = 19\cdot 4$, posteriormente $95 = 5\cdot 19$ e sucessivamente geram múltiplos de 19.

Neste momento, vamos verificar que para um número não múltiplo de 19, as expressões (3.27) e (3.29) não são satisfeitas. Vamos analisar um número com algarismos semelhantes ao 4902 para facilitar a compreensão do leitor.

Exemplo 3.12.2. *Seja* $a = 4912$ *um não múltiplo de* 19*. Neste caso, temos que* $a = 4\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 2$*,* $a_0 = 2$*,* $a_1 = 1$*,* $a_2 = 9$ *e* $a_3 = 4$*. Analisando* (3.27)*, para esses valores, se* $19 \mid 4912$*, então*

$$\begin{aligned} 19 &\mid 491-17\cdot 2 \\ 19 &\mid 457. \end{aligned}$$

Repetindo , temos que

$$\begin{aligned} 19 &\mid 49-17\cdot 1 \\ 19 &\mid 32, \end{aligned}$$

o que não é verdadeiro e portanto $19 \nmid 4912$.

Substituindo os algarismos de $a = 4912$ *em* (3.29) *temos que, se* $19 \mid 4912$*, então*

$$\begin{aligned} 19 &\mid 4(9-2)1-7\cdot 2 \\ 19 &\mid 457. \end{aligned}$$

Aplicando (3.29) *para* 457*, temos que*

$$\begin{aligned} 19 &\mid (4-7)5-7\cdot 7 \\ 19 &\mid 165-49 \\ 19 &\mid 116 \end{aligned}$$

Note que, em $(4-7) = -3 \equiv 16\, mod 19$*. Para reduzir o número* 116*, repetimos o processo mais uma vez:*

$$\begin{aligned} 19 &\mid (1-6)1-7\cdot 6 \\ 19 &\mid 141-42 \\ 19 &\mid 99, \end{aligned}$$

o que é uma contradição e segue que $19 \nmid 4912$.

Agora vamos à alguns exemplos com números com mais algarismos.

Exemplo 3.12.3. *Seja* $a = 584 \cdot 19 = 11096$ *um múltiplo de* 19.

Note que $a = 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6$. Caso não soubéssemos que esse número é múltiplo de 19, procederíamos substituindo esses valores em (3.27), ou seja,

$$\begin{aligned} 19 &\mid 1109 - 17 \cdot 6 \\ 19 &\mid 1007. \end{aligned}$$

Como este número ainda é alto, vamos repetir o processo:

$$\begin{aligned} 19 &\mid 100 - 17 \cdot 7 \\ 19 &\mid -19, \end{aligned}$$

que é verdadeiro.

Agora, vamos verificar a identidade (3.28) com este mesmo número $a = 11096$, isto é,

$$\begin{aligned} 19 &\mid 11(0-6)9 - 7 \cdot 6 \\ 19 &\mid 11(13)9 - 42 \\ 19 &\mid 1(23)9 - 42 \\ 19 &\mid 1239 - 42. \end{aligned}$$

O interessante neste exemplo e que pode causar estranheza ao leitor é o que foi grafado em vermelho. Na primeira passagem, utilizamos a congruência, $-6 \equiv 13 \bmod 19$ e na segunda aplicamos o fato de o número 13 "fazer papel"de um algarismo, logo somamos 13 com 110 o que resulta em 123. Lembrando que se trata de uma posição numérica e não do número 13 em si. Continuando os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} 19 &\mid 1197 \\ 19 &\mid 1(-6)9 - 7 \cdot 7. \\ 19 &\mid 1(13)9 - 49. \\ 19 &\mid 239 - 49. \\ 19 &\mid 190. \end{aligned}$$

Que claramente é uma verdade, ou seja, $19 \mid 190$.

No próximo exemplo, vamos considerar um número arbitrário $a = 123456789$ e verificar se este é, ou não é, divisível por 19.

Exemplo 3.12.4. *Seja* $a = 123456789$ *vamos verificar se* a *é ou um múltiplo de* 19.

Note que $a = 1 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9$. Inicialmente vamos utilizar (3.27), ou seja, $19 \mid 123456789$ se, e somente se

$$\begin{array}{rcl}
19 & \mid & 12345678 - 17 \cdot 9 \\
19 & \mid & 12345525 \\
19 & \mid & 1234552 - 17 \cdot 5 \\
19 & \mid & 1234467 \\
19 & \mid & 123446 - 17 \cdot 7 \\
19 & \mid & 123327 \\
19 & \mid & 12332 - 17 \cdot 7 \\
19 & \mid & 12213 \\
19 & \mid & 1221 - 17 \cdot 3 \\
19 & \mid & 1200,
\end{array}$$

que claramente não é divisível por 9.

No próximo exemplo vamos utilizar a identidade (3.28) para verificar se o número 987654321 é divisível por 19.

Exemplo 3.12.5. *Considerando* $a = 987654321$ *vamos verificar se* a *é divisível de* 19.

Note que $a = 9 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$. Ao substituirmos os algarismos de a em (3.29), temos que $19 \mid 987654321$ se, e somente se

$$\begin{array}{rcl}
19 & \mid & 987654(3-1)2 - 7 \cdot 1. \\
19 & \mid & 987654(2)2 - 7. \\
19 & \mid & 98765415 \\
19 & \mid & 98765(4-5)1 - 7 \cdot 5. \\
19 & \mid & 98765(-1)2 - 45. \\
19 & \mid & 98765(18)2 - 45.
\end{array}$$

Nesta última expressão, analisamos que 18 representa um algarismo. Portanto, como foi feito anteriormente, $19 \mid 987654321$ se, e somente se

$$\begin{aligned}
19 &\mid 98765682-45.\\
19 &\mid 9876637\\
19 &\mid 9876(6-7)3-7\cdot 7.\\
19 &\mid 9876(18)3-49.
\end{aligned}$$

Como foi feito anteriormente, analisando (18) como um algarismo, temos que $19 \mid 987654321$ se, e somente se

$$\begin{aligned}
19 &\mid 98765682-45.\\
19 &\mid 987783-49\\
19 &\mid 987737.\\
19 &\mid 987(7-7)3-7\cdot 7.\\
19 &\mid 98703-49.\\
19 &\mid 98654.
\end{aligned}$$

Procedendo com a analise, vemos que $19 \mid 987654321$ se, e somente se

$$\begin{aligned}
19 &\mid 98(6-4)5-7\cdot 4.\\
19 &\mid 9975-285\\
19 &\mid 9(9-7)4-7\cdot 7.\\
19 &\mid 875.\\
19 &\mid (8-5)7-7\cdot 5.\\
19 &\mid 37-35,
\end{aligned}$$

onde temos que $19 \nmid 2$.

3.13 Critério de divisibilidade por 23

Teorema 3.13.1. *Um número $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 23 se, e somente se, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 7a_0$ for divisível por 23.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 19, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 7a_0 = 23k$, daí

$$
\begin{aligned}
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 70a_0 = 230k \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 230k - 69a_0 \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 23(10k - 3a_0) \\
a &= 23k' \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 23,

$$
\begin{aligned}
a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 23k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 23k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 + 69a_0 = 19k + 69a_0 \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 7a_0) = 23(k + 3a_0)
\end{aligned}
$$

Como $mdc(10,23) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 23 divide $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 7a_0$. □

Exemplo 3.13.1. *Verifique se o número $n = 9246$ é divisível por 23.*

Solução 3.13.1. *O número $n = 9246$ será divisível por 23 se, e somente se*

$$
\begin{aligned}
23 &\mid 924 + 7 \cdot 6 = 966 \\
23 &\mid 96 + 7 \cdot 6 = 138 \\
23 &\mid 13 + 7 \cdot 8 = 69.
\end{aligned}
$$

69 é claramente divisível por 23, então $n = 9246$ também será.

Exemplo 3.13.2. *Verifique se o número $n = 9856$ é divisível por 23.*

Solução 3.13.2. *O número $n = 9246$ será divisível por 23 se, e somente se*

$$
\begin{aligned}
23 &\mid 985 + 7 \cdot 6 = 1027 \\
23 &\mid 102 + 7 \cdot 7 = 151 \\
23 &\mid 15 + 7 \cdot 1 = 22.
\end{aligned}
$$

Como 22 não é divisível por 23, então $n = 9856$ também não é divisível por 23.

3.14 Critério de divisibilidade por 29

Teorema 3.14.1. *Um número $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 29 se, e somente se, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 3a_0$ for divisível por 29.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 29, ou seja, $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + 3a_0 = 29k$, daí

$$\begin{aligned}
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 30a_0 = 290k \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 290k - 29a_0 \\
&= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 29(10k - a_0) \\
a &= 29k' \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 29,

$$\begin{aligned}
a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 = 29k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 = 29k \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 + 29a_0 = 29k + 29a_0 \\
&= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 3a_0) = 29(k + a_0)
\end{aligned}$$

Como $mdc(10, 29) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 29 divide $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1 + 3a_0$. □

Exemplo 3.14.1. *Verifique se o número $n = 1044$ é divisível por 29.*

Solução 3.14.1. *Aplicando o critério de divisibilidade por 29, temos $29|1044$ se, e somente se*

$$\begin{aligned}
29 &\mid 104 + 3 \cdot 4 \\
29 &\mid 116 \\
29 &\mid 11 + 3 \cdot 6 \\
29 &\mid 29
\end{aligned}$$

de fato $29|29$, então concluímos que $29|1044$.

Exemplo 3.14.2. *Verifique se o número $n = 956$ é divisível por 29.*

Solução 3.14.2. *Aplicando o critério de divisibilidade por 29, temos $29|956$ se, e somente se*

$$\begin{aligned}
29 &\mid 95 + 3 \cdot 6 = 133 \\
29 &\mid 11 + 3 \cdot 3 = 20.
\end{aligned}$$

Como 29 não divide 20, então 29 não divide 956.

3.15 Critério de divisibilidade por 31

Teorema 3.15.1. *Um número $a = a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110^1 + a_0$ é divisível por 31 se, e somente se, $b = (a_n10^{n-1} + \cdots + a_210^1 + a_1) - 3a_0$ for divisível por 31.*

Demonstração. Suponha que b seja divisível por 31, ou seja, $b = (a_n10^{n-1} + \cdots + a_210^1 + a_1) - 3a_0 = 31k$, daí

$$\begin{aligned} &= a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110 - 30a_0 = 310k \\ &= a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110 + a_0 = 310k + 31a_0 \\ &= a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110 + a_0 = 31(10k + a_0) \\ a &= 31k' \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por outro lado, suponha que a seja múltiplo de 31,

$$\begin{aligned} a &= a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110^1 + a_0 = 31k \\ &= 10(a_n10^{n-1} + \cdots + a_210 + a_1) + a_0 = 31k \\ &= 10(a_n10^{n-1} + \cdots + a_210 + a_1) + a_0 - 31a_0 = 31k - 31a_0 \\ &= 10(a_n10^{n-1} + \cdots + a_210 + a_1 - 3a_0) = 31(k - a_0) \end{aligned}$$

Como $mdc(10, 31) = 1$, segue da proposição (2.4.7) que 31 divide $a_n10^{n-1} + \cdots + a_210 + a_1 - 3a_0$. □

Exemplo 3.15.1. *Verifique se o número $a = 620$ é divisível por 31.*

Solução 3.15.1. *31 divide 620 se, e somente se*

$$\begin{aligned} 31 &\mid 62 - 3 \cdot 0 = 62 \Leftrightarrow \\ 31 &\mid 6 - 3 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

De fato 31 divide 0, então 31 divide 620.

Exemplo 3.15.2. *Verifique se o número $a = 1582$ é divisível por 31.*

Solução 3.15.2. *31 divide 1582 se, e somente se*

$$\begin{aligned} 31 &\mid 158 - 3 \cdot 2 = 152 \Leftrightarrow \\ 31 &\mid 15 - 3 \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

Como 31 não divide 9, então 31 não divide 1582.

Algumas observações importantes: Sejam $a = a_n10^n + \cdots + a_210^2 + a_110^1 + a_0$ e $b = a_n10^{n-1} + \cdots + a_210^1 + a_1 + xa_0$, sendo x os valores determinados nos critérios de divisibilidade estudados. É importante ressaltar que a e b não necessariamente deixam o mesmo resto na divisão por p, no entanto existe uma relação entre os mesmos. Para esclarecer esta afirmação, usaremos o critério de divisibilidade por 11. Considere $x = -1$ e suponha que

$$b = a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 - a_0 \equiv k \mod 11 \tag{3.33}$$

Com $0 \leq k \leq 10$, multiplicando (3.33) por 10, temos

$$\begin{aligned} a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 - 10a_0 &\equiv 10k \mod 11 \\ a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 - 11a_0 &\equiv 10k \mod 11 \\ a - 11a_0 &\equiv 10k \mod 11 \end{aligned}$$

mas como $-11a_0 \equiv 0 \mod 11$, então $a \equiv 10k \mod 11$. Notemos que quando $k = 0$, obtemos $b \equiv 0 \mod 11 \Rightarrow a \equiv 0 \mod 11$, porém quando $k \neq 0$, obtemos $b \equiv k \mod 11 \Rightarrow a \equiv 10k \mod 11$, ou seja, uma congruência é múltipla da outra.

Em outras palavras podemos observar que se $b \equiv 3 \mod 11$, então $a \equiv 30 \mod 11$, assim temos que b deixa resto 3 na divisão por 11 e a deixa resto 8 na divisão por 11, portanto concluímos que os restos não são preservados. Como resultado, Silva (2019, p. 47), apresenta a seguinte tabela.

k	Resto da divisão de b por 11	Resto da divisão de a por 11
0	0	0
1	1	10
2	2	9
3	3	8
4	4	7
5	5	6
6	6	5
7	7	4
8	8	3
9	9	2
10	10	1

Tabela 1 – Resto da divisão por 11.

Notemos que não se faz necessário dividir um número a por 11 para saber seu resto, para isso basta dividir $10k$. Para facilitar, vejamos um exemplo.

Exemplo 3.15.3. *Qual é o resto da divisão de 2722 por 11.*

Solução 3.15.3. *Aplicando o Critério de divisibilidade por 11, temos*

$$\begin{aligned} a &= 2722 \Rightarrow \\ b &= 272-2=270 \end{aligned}$$

por outro lado, temos que $270 \equiv 6 \mod 11$*. Portanto* $10 \cdot 6 = 60 \equiv 5 \mod 11$*. Ou seja, 2722 deixa resto 5 na divisão por 11.*

Essa relação também se aplica para os primos 13 e 17, isto significa que se a deixa resto k na divisão por 13 ou 17, então b deixa resto $10k$ na divisão por 13 ou 17. Assim, apresentamos a generalização desses critérios.

Teorema 3.15.2. *Um número* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ *é divisível por um primo* $p \geq 11$ *se, e somente se,* $b = (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + x a_0$ *for divisível por* p*, onde* x *é a menor solução natural do sistema de congruência linear* $10x \equiv 1 \mod p$*.*

Demonstração. Suponha que $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ seja divisível por p. Considere

$$\begin{aligned} b &= (a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + x a_0 \Rightarrow \\ 10b &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 10 x a_0 \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + 10 x a_0 + a_0 - a_0 \\ &= a + 10 x a_0 - a_0 \\ &= a + a_0(10x-1) \end{aligned} \tag{3.34}$$

por hipótese $p|a$, então para que (3.34) seja divisível por p, $a_0(10x-1)$ deve ser divisível por p. Note que $p \nmid a_0$, pois $p \geq 11$ e $0 \leq a_0 \leq 9$, logo $10x-1$ deve ser divisível por p, em ou palavras $10x - 1 \equiv 0 \mod p \Rightarrow 10x \equiv 1 \mod p$. □

Abaixo, segue o Teorema de Sebá que é a generalização dos critérios de divisibilidade para qualquer número primo maior do que 5, este é um resultado muito importante para a pesquisa, pois ela nos permite, de forma resumida, conhecer e estabelecer relações de divisibilidade entre números inteiros e com os números primos. Embora não seja abordado nos livros didáticos do ensino médio atual, essa ferramenta é muito poderosa quando se trata de teoria dos números e merece atenção especial ao alunos que buscam participar de olimpíadas e torneios educacionais.

3.16 Critério de divisibilidade para qualquer $p > 5$

Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo $p > 5$. Obrigatoriamente devemos ter, como último algarismo de p, os números $1, 3, 7$ ou 9. Em outras palavras, devemos ter:

Caso 01 **O número primo p tem final** 1

Reescrevendo p na base 10, temos que

$$p = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0, \tag{3.35}$$

onde cada índice $a_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e a potência $n \in \mathbb{N}$. Podemos reescrever (3.35) da seguinte forma: $\dfrac{p-1}{10} = y \in \mathbb{N}$.

Caso 02 **O número primo p tem final** 3

Reescrevendo p na base 10, temos que

$$p = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0, \tag{3.36}$$

Multiplicando (3.36) por 7, obtemos:

$$\begin{aligned} 7p &= 7a_n \cdot 10^n + \cdots + 7a_2 \cdot 10^2 + 7a_1 \cdot 10^1 + 21 \cdot 10^0 \\ &= 7a_n \cdot 10^n + \cdots + 7a_2 \cdot 10^2 + (7a_1 + 2) \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0, \end{aligned}$$

o que implica em $\dfrac{7p-1}{10} = y_1 \in \mathbb{N}$.

Caso 03 **O número primo p tem final** 7

Reescrevendo p na base 10, temos que

$$p = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0, \tag{3.37}$$

Multiplicando (3.37) por 3, obtemos:

$$\begin{aligned} 3p &= 3a_n \cdot 10^n + \cdots + 3a_2 \cdot 10^2 + 3a_1 \cdot 10^1 + 21 \cdot 10^0 \\ &= 3a_n \cdot 10^n + \cdots + 3a_2 \cdot 10^2 + (3a_1 + 2) \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0, \end{aligned}$$

o que implica em $\dfrac{3p-1}{10} = y_2 \in \mathbb{N}$.

Caso 04 **O número primo p tem final** 9

Reescrevendo p na base 10, temos que

$$p = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0, \tag{3.38}$$

Multiplicando (3.38) por 9, obtemos:

$$\begin{aligned} 9p &= 9a_n \cdot 10^n + \cdots + 9a_2 \cdot 10^2 + 9a_1 \cdot 10^1 + 81 \cdot 10^0 \\ &= 9a_n \cdot 10^n + \cdots + 9a_2 \cdot 10^2 + (9a_1 + 8) \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente $(9a_1 + 8)$ é menor do que 10^2, pelo fato de que $0 < a_1 < 9$. Este fato implica em $\dfrac{9p-1}{10} = y_3 \in \mathbb{N}$.

Portanto para qualquer número primo $p > 5$,

$$\frac{p-1}{10} = y \in \mathbb{N},\ \frac{3p-1}{10} = y_1 \in \mathbb{N},\ \frac{7p-1}{10} = y_2 \in \mathbb{N},\ \frac{9p-1}{10} = y_3 \in \mathbb{N}.$$

Neste momento, vamos determinar critérios para que um número natural $a \in \mathbb{N}$ seja divisível por este primo $p > 5$. Para tanto, vamos escrever n, na base 10, ou seja, $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ onde os coeficiente $a_i \in [0,9]$ e a potência $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.16.1. *Se p é um número primo $p > 5$, que tem final 1, então p divide $n = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ se, e somente se p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{p-1}{10}\right) a_0$*

Demonstração. Temos que p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{p-1}{10}\right) a_0$ se, e somente se

$$\begin{aligned} p \ &| \ a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{a_0 p - a_0}{10}\right) \\ &| \ \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 10 - a_0 p + a_0}{10} \\ &| \ \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 10 + a_0 - a_0 p}{10} \\ &| \ \frac{a - a_0 p}{10}. \end{aligned}$$

Como p divide $a_0 p$ independente de a_0, então p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{p-1}{10}\right) a_0$ se, e somente se p divide a. $\square$

De forma semelhante, conseguimos provar as seguintes proposições:

Proposição 3.16.2. *Se p é um número primo $p > 5$, que tem final 3, então p divide $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ se, e somente se p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{7p-1}{10}\right) a_0$*

Proposição 3.16.3. *Se p é um número primo $p > 5$, que tem final 7, então p divide $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ se, e somente se p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{3p-1}{10}\right) a_0$*

Proposição 3.16.4. *Se p é um número primo $p > 5$, que tem final 9, então p divide $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ se, e somente se p divide $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - \left(\frac{9p-1}{10}\right) a_0$*

Exemplo 3.16.1. *Utilizando o Teorema de Sebá verifique se o número $n = 2050$ é divisível por 41.*

Solução 3.16.1. *Utilizando a Proposição (3.16.1), inicialmente iremos calcular o número*

$$\frac{p-1}{10} = \frac{41-1}{10} = 4, \tag{3.39}$$

o número $n = 2050$ *será divisível por 41 se, e somente se*

$$41 \mid 205 - 4 \cdot 0 = 205 \Leftrightarrow$$
$$41 \mid 20 - 4 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$41 \mid 0$$

De fato 0 é divisível por 41, então concluímos que 2050 também é divisível por 41.

Exemplo 3.16.2. *Utilizando o Teorema de Sebá verifique se o número* $n = 591683$ *é divisível por 47.*

Solução 3.16.2. *Utilizando a Proposição (3.16.3), inicialmente iremos calcular o número*

$$\frac{3p-1}{10} = \frac{3 \cdot 47 - 1}{10} = 14, \tag{3.40}$$

o número $n = 591683$ *será divisível por 47 se, e somente se*

$$47 \mid 59168 - 14 \cdot 3 = 59126 \Leftrightarrow$$
$$47 \mid 5912 - 14 \cdot 6 = 5828 \Leftrightarrow$$
$$47 \mid 582 - 14 \cdot 8 = 470 \Leftrightarrow$$
$$47 \mid 47 - 14 \cdot 0 = 47 \Leftrightarrow$$
$$47 \mid 47.$$

De fato 47 é divisível por 47, então concluímos que 591683 também é divisível por 47.

Exemplo 3.16.3. *Utilizando o Teorema de Sebá verifique se o número* $n = 10539506$ *é divisível por 83.*

Solução 3.16.3. *Utilizando a Proposição (3.16.2), inicialmente iremos calcular o número*

$$\frac{7p-1}{10} = \frac{7 \cdot 83 - 1}{10} = 58, \tag{3.41}$$

o número $n = 10539506$ *será divisível por 83 se, e somente se*

$$83 \mid 1053950 - 58 \cdot 6 = 1053602 \Leftrightarrow$$
$$83 \mid 105360 - 58 \cdot 2 = 105244 \Leftrightarrow$$
$$83 \mid 10524 - 58 \cdot 4 = 10292 \Leftrightarrow$$
$$83 \mid 1029 - 58 \cdot 2 = 913 \Leftrightarrow$$
$$83 \mid 91 - 58 \cdot 3 = -83 \Leftrightarrow$$
$$83 \mid -83.$$

Como -83 é divisível por 83, então o número 10539506 também é divisível por 83.

Exemplo 3.16.4. *Utilizando o Teorema de Sebá verifique se o número* $n = 7615939$ *é divisível por 109.*

Solução 3.16.4. *Utilizando a Proposição (3.16.4), inicialmente iremos calcular o número*

$$\frac{9p-1}{10} = \frac{9 \cdot 109 - 1}{10} = 98, \tag{3.42}$$

o número $n = 7615939$ *será divisível por 109 se, e somente se*

$$\begin{aligned}
109 &\mid 761593 - 98 \cdot 9 = 760711 \Leftrightarrow \\
109 &\mid 76071 - 98 \cdot 1 = 75973 \Leftrightarrow \\
109 &\mid 7597 - 98 \cdot 3 = 7303 \Leftrightarrow \\
109 &\mid 730 - 98 \cdot 3 = 436
\end{aligned}$$

Como $436 = 109 \cdot 4$*, ou seja, 436 é divisível por 109, então o número 7615939 também é divisível por 109.*

Neste capítulo apresentamos os critérios de divisibilidade visto no ensino fundamenta de forma mais aprofundada e também os critérios que não são apresentados aos alunos tanto do ensino fundamental quanto médio, assim construímos o critério que descreve o algoritmo para qualquer primo maior do que 5. Embora seja uma teoria bastante abstrata, podemos atrair os alunos utilizando meios que facilite a inserção deste conteúdo na educação básica, assim o próximos capítulos tem como objetivo apresentar alguns meios que tem um potencial facilitador no processo de ensino aprendizagem.

4 NÚMEROS PARENTES

Neste capítulo estudaremos um conjunto de números denominados *Números Parentes*. Esse conjunto apresenta algumas características especiais relacionadas com divisibilidade, além de problemas envolvendo esse tipo de teoria comumente encontrados na OBMEP ou em outros programas que exigem um nível mais técnico da matemática. Sendo assim, traremos uma abordagem como possibilidade de aplicação no ensino médio das escolas públicas do Brasil.

Introduziremos os Números Parentes através da Questão 30 do nível 3 encontrada no Banco de Questão-OBMEP2020.

4.1 Números Parentes

Definição 4.1.1. *Seja ab um número inteiro de dois dígitos. Um inteiro positivo $n \in \mathbb{N}$ é um parente de ab se:*

i) O dígito das unidades de n também é b.

ii) Os outros dígitos de n são distintos de zero e somam a.

Exemplo 4.1.1. *Por exemplo, os parentes de 31 são 31, 121, 211 e 1111.*

Exercício 1. *Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.*

Solução 4.1.1.

Vamos dividir a solução desse problema considerando três casos:

i) Se $a = 1$ e n é parente de ab, então a única possibilidade é $n = 1b$, esse número é sempre solução, pois $1b|1b$, mas como $0 \leq b \leq 9$, então os números $ab \in \{10, 11, 1213, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, dividem todos os seus parentes.

ii) Se $a = 2$, temos duas soluções: $2b|2b$ e $2b|11b$, o que implica em

$$\begin{aligned} 2b &\mid 11b - 2b \\ 2b &\mid 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + b - (2 \cdot 10 + b) \\ 2b &\mid 90 \end{aligned}$$

onde $0 \leq b \leq 9$, ou seja, $2b$ é divisor de 90, portanto, $2b \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$, que é impossível, pois $20 \leq 2b \leq 29$ e não existe divisor de 90 neste intervalo.

iii) Se $a \geq 3$, em particular, temos que: $ab|\,(a-3)\,21b$ e $ab|\,(a-3)\,12b$, o que implica em $ab|\,[(a-3)\,21b-(a-3)\,12b] = 90$, então ab é divisor de 90 e $ab \geq 30$, podemos concluir que $ab \in \{30, 45, 90\}$.

Se n é parente de 30, então n termina em 0 e a soma de seus dígitos é um múltiplo de 3. Portanto, n é múltiplo de $10 \cdot 3 = 30$.

Se n é parente de 45, então $n = A \cdot 10 + 5$, em que A é um número cuja soma dos dígitos é 4. Como a soma dos dígitos de n é um múltiplo de 9, n também é múltiplo de 9. Além disso, como n termina em 5, então n também é múltiplo de 5. Portanto, n é múltiplo de $9 \cdot 5 = 45$.

Se n é parente de 90, então $n = A \cdot 10$, em que A é um número cuja soma dos dígitos é 9. Como n termina em 0 e é múltiplo de 9, segue que n é múltiplo de $9 \cdot 10 = 90$.

Logo, os únicos inteiros positivos que dividem todos os seus parentes são $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45, 90\}$.

Proposição 4.1.1. *A diferença de um número parente x de ab por ab sempre é divisível por 10.*

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $ab = a10 + b$, fazendo a diferença $x - ab$, temos

$$\begin{aligned} x - ab &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b - (a10 + b) \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + (a_1 - a)10 \\ &= 10[a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + (a_1 - a)]. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.1.2. *A soma de um número x parente de ab por ab sempre par.*

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $ab = a10 + b$, fazendo a soma $x + ab$, temos

$$\begin{aligned} x + ab &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b + (a10 + b) \\ &= a_n (2 \cdot 5)^n + \cdots + a_2 (2 \cdot 5)^2 + (a_1 + a)(2 \cdot 5) + 2b \\ &= a_n 2^n \cdot 5^n + \cdots + a_2 2^2 \cdot 5^2 + (a_1 + a)(2 \cdot 5) + 2b \\ &= 2[a_n 2^{n-1} \cdot 5^n + \cdots + a_2 2 \cdot 5^2 + (a_1 + a)5 + b]. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.1.3. *A diferença de dois parentes x e y de ab é sempre divisível por 10.*

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $y = b_t 10^t + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b$, fazendo $x - y$, temos

$$x - y = (a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b) - (b_t 10^t + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b)$$

Sem perda de generalidade, considere $n \geq t$.

$$\begin{aligned} x - y &= (a_n 10^n + \cdots a_t 10^t + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b) - (b_t 10^t + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b) \\ &= a_n 10^n + \cdots + (a_t - b_t) 10^t + \cdots + (a_2 - b_2) 10^2 + (a_1 - b_1) 10. \end{aligned}$$

Claramente, $10 | x - y$ □

Proposição 4.1.4. *A soma de dois parentes x e y de ab é sempre divisível por 2.*

Demonstração. Sejam $x = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + b$ e $y = b_t 10^t + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b$, fazendo $x + y$, temos

$$x + y = a_n 10^n + \cdots + (a_t + b_t) 10^t + \cdots + (a_2 + b_2) 10^2 + (a_1 + b_1) 10 + 2b$$

Obviamente, $2 | x + y$. □

Proposição 4.1.5. *Se x e y são dois números parentes de um número ab qualquer, então $10 | x + 9y$.*

Demonstração.

$$x + 9y = a_n 10^n + \cdots + (a_t + 9b_t) 10^t + \cdots + (a_2 + 9b_2) 10^2 + (a_1 + 9b_1) 10 + 10b.$$

Portanto, concluímos que $10 | x + 9y$. □

De forma similar, podemos demonstrar que $10 | x - 11y$, para quaisquer parentes x e y de ab.

Proposição 4.1.6. *A diferença de dois parentes x e y de ab é sempre divisível por 9.*

Demonstração. De fato, $x - y = (a_n 10^n + \cdots + (a_t - b_t)10^t + \cdots + (a_1 + b_1)10$. Neste momento, usaremos o Proposição (3.0.1) para observar que

$$
\begin{aligned}
10^n &= (9+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k} \cdot 1^i \\
&= \binom{n}{0} 9^n + \binom{n}{1} 9^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} 9^1 + \binom{n}{n} 9^0 \\
&= 9^n + n9^{n-1} + \cdots + n9 + 1 \\
&= 9(9^{n-1} + n9^{n-2} + \cdots + n) + 1 \\
&= 9k + 1 \text{ com } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
x - y &= a_n(9k_1 + 1) + \cdots + (a_t - b_t)(9k_t + 1) + \cdots + (a_1 - b_1)(9 + 1) \\
&= (9k_n a_n + \cdots + 9k_t a_t + 9a_1) + a_n + \cdots + a_1 - 9k_t b_t - \cdots - 9b_1 - b_t - \cdots - b_1 \\
&= 9k_a + a_n + \cdots + a_1 - 9k_b - b_t - \cdots - b_1 \\
&= 9k + a - a \qquad (4.1) \\
&= 9k.
\end{aligned}
$$

Note que em (4.1) os somatórios $a_n + \cdots + a_1$ e $-b_t - \cdots - b_1$ são sempre iguais a a, uma vez que x e y é parente de ab. □

Atualmente existem diversas metodologias de ensino. Dentre essas metodologias, podemos citar as que usam questões, conteúdos, exemplos, entre outras técnicas, que desafiam e instigam a curiosidade dos alunos. De fato essa técnica tem um potencial facilitador em termos de ensino aprendizagem, bem como impulsiona a participação e o interesse dos alunos. Tendo isso em mente, apresentamos neste capítulo um exercício que acreditamos que foge das atividades tradicionais aplicadas na educação básica. O intuito de trabalhar algumas propriedades de divisibilidade e, em seguida, apresentaremos duas propostas de atividades com objetivo de enriquecer a aula e trabalhar de forma simplificada os critérios de divisibilidade não usuais.

5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentaremos duas propostas de atividades que podem ser desenvolvidas pelos professores no Ensino Médio, com o objetivo de inserir os critérios de divisibilidade de forma dinâmica e didática. Embora muitos critérios de divisibilidade não sejam estudados, esse conteúdo pode fazer parte do cotidiano do aluno desde o ensino fundamental. Assim as atividades propostas terão como foco principal os critérios que não são estudados na educação básica atual.

As atividades propõem a introdução dos critérios de divisibilidade no Ensino Médio por meio de divisões, cálculo de áreas, o raciocínio lógico, etc. Desenvolvemos sugestões de atividades que acreditamos fugir dos padrões tradicionais e que as mesmas têm um potencial facilitador para aquisição do conhecimento no processo de Ensino e Aprendizagem, além de conceber que a forma que se introduz o conteúdo também é fundamental para a mesma.

Neste momento serão desenvolvidas propostas de atividades para o ensino dos critérios de divisibilidade.

5.1 Propostas de Atividades

5.1.1 Proposta de Atividade 1

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Conteúdo: Critérios de divisibilidade.

Objetivos: O objetivo desta atividade é exercitar o raciocínio, fixar o conteúdo anteriormente apresentado e trabalha-lo de forma dinâmica e didática aprimorando o trabalho coletivo entre os alunos.

Pré-requisitos: É necessário que os alunos saibam aplicar os critérios de divisibilidade, as quatro operações básicas da matemática e tenham conhecimento dos conceitos de áreas de figuras planas.

Duração: 2 horas aula.

Grupos: Para execução da atividade será formado equipes que podem se compostas de 5 alunos.

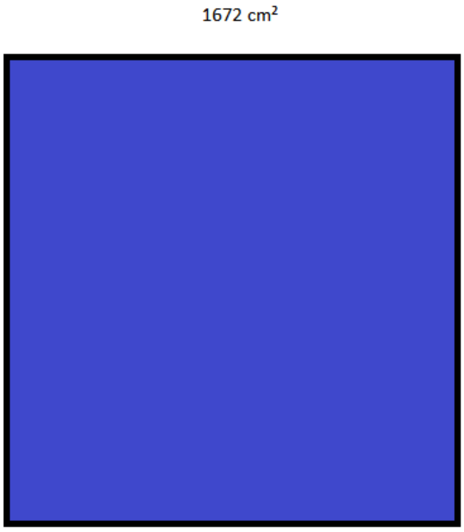
Avaliação: A avaliação será contínua e de forma processual, acompanhando o desempenho do aluno no que se refere a colaboração e participação nas atividades, sua produtividade, interesse, trabalho em equipe, raciocínio, habilidade de organizar as ideias e no desenvolvimento oral e escrito no decorrer da atividade.

Recurso Didático: Quadro branco, pincel para quadro braco, quebra-cabeça, apagador e cronometro.

Desenvolvimento da atividade:

Inicialmente o professor deverá realizar um sorteio para definir os integrantes de cada equipe, que poderão ser de 5 componentes, em seguida será entregue a cada grupo um quadro com $1672cm^2$ de área, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Quadro de $1672cm^2$



Fonte: Próprio autor.

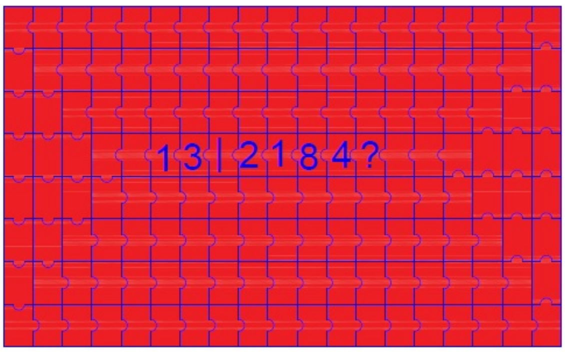
Em seguida, será entregue a cada grupo três pacotes com peças de quebra cabeça, em que cada pacote terão peças iguais de $7cm^2$, $11cm^2$ e $13cm^2$ de área, respectivamente, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Pacotes com peças

Fonte: Próprio autor.

Após isso, será cronometrado o tempo que cada grupo levará para montar o quebra-cabeça sobre o quadro, afim de preenchê-lo completamente sem que sobre peças. Esperamos que os alunos pensem em uma estratégia para escolher o pacote correto, neste caso cada grupo deverá descobrir se 1672 é divisível por 7, 11 ou 13 sem realizar a divisão de fato. Ao montar o quebra-cabeça será formado uma pergunta que o grupo deverá responder e em seguida o grupo deverá eleger algum representando para apresentar a resposta para a turma no quadro. O quebra-cabeça pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 – Quebra Cabeça



Fonte: Próprio autor.

O ideal é que os quebra-cabeça tenha um desenho para auxiliar os alunos na montagem. A Figura 3 é apenas uma ideia para fabricação ou compra do material. Os exercícios que aparecerão após a montagem, poderá ser de diferentes assuntos, mas neste caso, como a proposta é a inserção dos critérios de divisibilidade não usuais na educação básica, podemos abordar questões que estejam relacionados com divisibilidade.

O exercício do quebra-cabeça, pode ser simplesmente resolvido usando o critério de divisibilidade por 13, deste modo

$$\begin{aligned} 13 &\mid 2184 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 218+4\cdot 4=234 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 23+4\cdot 4=39 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 39. \end{aligned}$$

E claramente 39 é divisível por 13, assim 2184 é sim divisível por 13.

A seguir apresentaremos alguns resultado esperados da atividade e uma lista de exercícios que poderá ser usado na dinâmica.

Resultados Esperados

Como de costume, esperamos diferentes atitudes dos grupos envolvidos. São elas:

Os grupos podem tentar montar os quebra-cabeça usando as peças de $7cm^2$, $11cm^2$ e $13cm^2$ e por tentativa descobrir qual a que se encaixa perfeitamente no quadro, de fato essa é uma estratégia bastante utilizada pelos alunos ao fazer a escolha da metodologia de solucionar um problema, essa prática poderá consumir muito tempo do grupo trazendo uma desvantagem para o mesmo.

Os grupos podem tentar realizar a divisão do número 1672 por 7, 11 e 13 e observar os restos. Como $1672 \equiv 6 \mod 7$, $1672 \equiv 0 \mod 11$ e $1672 \equiv 8 \mod 13$, obviamente 1672 é divisível apenas por 11, então os alunos deverão escolher o pacote cuja peças têm $11cm^2$ de área, assim garantiremos que as peças se encaixarão perfeitamente no quadro.

Os grupos podem utilizar os critérios de divisibilidade ensinados pelo professor anteriormente como ferramenta para resolver o problema, assim os alunos deveriam fazer apenas uma verificação de se 1672 é divisível por $7cm^2$, $11cm^2$ e $13cm^2$. A verificação segue

$$\begin{aligned} 7 &\mid 1672 \Leftrightarrow \\ 7 &\mid 167+5\cdot 2=177 \Leftrightarrow \\ 7 &\mid 17+5\cdot 7=52 \Leftrightarrow \\ 7 &\mid 5+5\cdot 2=15 \end{aligned}$$

Claramente 15 não é divisível por 7, então 1672 também não é divisível por 7.

$$\begin{aligned} 11 &\mid 1672 \Leftrightarrow \\ 11 &\mid 1-6+7-2=0 \Leftrightarrow \\ 11 &\mid 0 \end{aligned}$$

Como 0 é divisível por 11, então 1672 também é divisível por 11.

$$\begin{aligned} 13 &\mid 1672 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 167+4\cdot 2=175 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 17+4\cdot 5=37 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 3+4\cdot 7=31 \Leftrightarrow \\ 13 &\mid 3+4\cdot 1=7 \end{aligned}$$

Claramente 7 não é divisível por 13, então 1672 também não é divisível por 13.

Deste modo, esperamos que os alunos escolham o pacote com peças de $11cm^2$ para iniciar a atividade.

Alguns exercícios que podem ser usados na atividade:

Problema 5.1.1. *O número* $235ab$*, de 5 algarismos, é par, é divisível por 5 e é divisível por 3. Calcule a soma dos possíveis valores de* a*.*

Solução 5.1.1. *Utilizando o Critério de divisibilidade por 5 visto na Seção (3.4), temos que* $b=0$ *ou* $b=5$*, mas como* $235ab$ *é par, concluímos que* $b=0$*, novamente usando o critério de divisibilidade por 3 visto na Seção (3.2), temos que* $2+3+5+a+0=3k$ *com* $k\in\mathbb{Z}$*, logo* $10+a=3k$*, portanto* $a=\{2,5,8\}$*, uma vez que* $0\leq a\leq 9$*. Contudo soma dos possíveis valores para a é 15.*

Problema 5.1.2. *Determine o valor de* a *de modo que o número* $7a4$ *seja divisível por 18.*

Solução 5.1.2. *Para que* $7a4$ *seja divisível por 18, inicialmente demover ter que* $7a4$ *seja divisível por 2 e por 9, pois* $18=2\cdot 9$*.* $7a4$ *é de fato divisível por 2, poir* $a_0=4$ *que é par, portanto basta impor a condição de que* $7a4$ *deve ser divisível por 9 que encontraremos a sem dificuldades.*

$$\begin{aligned} 9 &\mid 7a4 \Leftrightarrow \\ 9 &\mid 7+a+4 \Leftrightarrow \\ 9 &\mid 11+a. \end{aligned}$$

Como $0\leq a\leq 9$*, então devamos ter que* $a=7$*, para obter* $9|18$*, assim* 774 *deixa resto 0 ao ser dividido por 18.*

Problema 5.1.3. *Mostre que se* $7|a+3b$*, então* $7|13a+11b$.

Solução 5.1.3. *Como* $7|a+3$*, então temos por definição que existe* k *inteiro, tal que*

$$\begin{aligned} a+3b &= 7k \Rightarrow \\ 13a+39b &= 7(13k) \Rightarrow \\ 13a+11b+28b &= 7(13k) \end{aligned}$$

Como $7|28b \quad \forall b \in \mathbb{Z}$*, então* $7|13a+11b$*. Como queríamos demonstrar.*

Problema 5.1.4. *Verifique se o número 30536 é divisível por 31.*

Solução 5.1.4. *Para resolução deste problema utilizaremos o critérios de divisibilidade visto na Seção (3.15), do Capítulo 2.*

$$\begin{aligned} 31 &\mid 30536 \Leftrightarrow \\ 31 &\mid 3053 - 3\cdot 6 = 3035 \Leftrightarrow \\ 31 &\mid 303 - 3\cdot 5 = 288 \Leftrightarrow \\ 31 &\mid 28 - 3\cdot 8 = 4. \end{aligned}$$

Obviamente, $31 \nmid 4$*, portanto verificamos que* $31 \nmid 30536$.

Problema 5.1.5. *Verifique se o número 441844 é divisível por 29.*

Solução 5.1.5. *Para resolução deste problema utilizaremos o critérios de divisibilidade visto na Seção (3.14), do Capítulo 2.*

$$\begin{aligned} 29 &\mid 441844 \Leftrightarrow \\ 29 &\mid 44184 + 3\cdot 4 = 44196 \Leftrightarrow \\ 29 &\mid 4419 + 3\cdot 6 = 4437 \Leftrightarrow \\ 29 &\mid 443 + 3\cdot 7 = 464 \Leftrightarrow \\ 29 &\mid 46 + 3\cdot 4 = 58 \Leftrightarrow \\ 29 &\mid 5 + 3\cdot 8 = 29. \end{aligned}$$

De fato, como $29|29$*, concluimos que* $29|441844$.

5.1.2 Proposta de Atividade 2

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Conteúdo: Critérios de divisibilidade.

Objetivos: O objetivo desta atividade é proporcionar aos alunos a aplicação dos critérios de divisibilidade para resolver problemas.

Pré-requisitos: É necessário que os alunos saibam aplicar os critérios de divisibilidade, as quatro operações básicas da matemática e tenham conhecimento dos conceitos de volume de figuras espaciais.

Duração: 2 horas aula.

Grupos: Para execução da atividade será formado equipes que podem se compostas de 5 alunos.

Avaliação: A avaliação será contínua e de forma processual, acompanhando o desempenho do aluno no que se refere a colaboração e participação nas atividades, sua produtividade, interesse, trabalho em equipe, raciocínio, habilidade de organizar as ideias e no desenvolvimento oral e escrito no decorrer da atividade.

Recurso Didático: Cubo com $76cm$ de aresta, paralelepípedos com $17cm^3$, $19cm^3$ e $23cm^3$ de volume, caneta e formulário de questionamentos.

Desenvolvimento da atividade:

Inicialmente o professor deverá realizar um sorteio para definir os integrantes de cada equipe, que poderão ser de 5 componentes. Em seguida será entregue a cada grupo um formulário com alguns questionamentos que devem ser respondidas no decorrer da atividade, um cubo com $76cm$ de aresta e paralelipípedos de $17cm^3$, $19cm^3$ e $23cm^3$ de volume.

O professor deverá, através de investigação, levantar alguns questionamentos ao decorrer da atividade, por exemplo:

Questionamento 1: Qual a diferença entre um cubo e um paralelepípedo?

Questionamento 2: Qual é o volume do cubo de 76 cm de aresta?

Questionamento 3: Há possibilidade dos paralelepípedos de $17cm^3$ de volume se encaixar perfeitamente dentro do cubo?

Questionamento 4: Há possibilidade dos paralelepípedos de $19cm^3$ de volume se encaixar perfeitamente dentro do cubo?

Questionamento 5: Há possibilidade dos paralelepípedos de $23cm^3$ de volume se encaixar perfeitamente dentro do cubo?

Questionamento 6: Qual do paralelepipédicos se encaixa perfeitamente no cubo e quantos são necessários para preenche-lo?

Questionamento 7: Qual estratégia você utilizou para resolver o problema?

Questionamento 8: Qual é a relação do cubo com o paralelepípedo que se encaixou perfeitamente?

Questionamento 9: Por que não conseguimos encaixar os demais paralelepípedos?

Resultados esperados

Esperamos que inicialmente o aluno calcule o volume do cubo utilizando a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ V &= 76^3 \\ V &= 438976cm^3 \end{aligned}$$

Em seguida, os grupos deverão verificar 438976 é divisível por 17, por 19 ou por 23, assim

$$\begin{aligned} 17 &\mid 438976 \Leftrightarrow \\ 17 &\mid 43897 - 5 \cdot 6 = 43867 \Leftrightarrow \\ 17 &\mid 4386 - 5 \cdot 7 = 4351 \Leftrightarrow \\ 17 &\mid 435 - 5 \cdot 1 = 430 \Leftrightarrow \\ 17 &\mid 43 - 5 \cdot 0 = 43 \Leftrightarrow \\ 17 &\mid 4 - 5 \cdot 3 = -11 \end{aligned}$$

Claramente -11 não é divisível por 17, então 438976 também não é divisível por 17.

$$\begin{aligned} 19 &\mid 438976 \Leftrightarrow \\ 19 &\mid 43897 + 2 \cdot 6 = 43909 \Leftrightarrow \\ 19 &\mid 4390 + 2 \cdot 9 = 4408 \Leftrightarrow \\ 19 &\mid 440 + 2 \cdot 8 = 456 \Leftrightarrow \\ 19 &\mid 45 + 2 \cdot 6 = 57 \Leftrightarrow \\ 19 &\mid 5 + 2 \cdot 7 = 19 \end{aligned}$$

Obviamente $19|438976$, pois $19|19$.

$$
\begin{aligned}
23 &\mid 438976 \Leftrightarrow \\
23 &\mid 43897+7\cdot 6=43939 \Leftrightarrow \\
23 &\mid 4393+7\cdot 9=4456 \Leftrightarrow \\
23 &\mid 445+7\cdot 6=487 \Leftrightarrow \\
23 &\mid 48+7\cdot 7=97 \Leftrightarrow \\
23 &\mid 9+7\cdot 7=58
\end{aligned}
$$

Claramente 58 não é divisível por 23, então 438976 também não é divisível por 23.

O interessante destas atividades é trabalhar as habilidades dos alunos de interpretação e resolver o problema utilizando divisibilidade. A ideia principal não é saber o resultado da divisão de fato, mas sim saber se é possível dividir ou não. Muitos problemas como esses aparecem no nosso cotidiano até mesmo ao dividir uma conta com os amigos em um restaurante. Portanto, tais conceitos é fundamental para os alunos e também para a vida fora do ambiente escolar.

Embora seja considerado um conteúdo difícil e muito técnico, as novas metodologias de ensino vieram para auxiliar nós docentes da Educação Básica e é fundamental que usemos a mesma. Assim, cada vez mais estaremos em constante desenvolvimento e poderemos nos tornar professores responsáveis por cultivar táticas e estratégias que se adaptam aos diferentes tipos de alunos, afim de melhorar o desempenho dos alunos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos as construções dos critérios de divisibilidade dos números que, segundo a Base Nacional Comum Curricular BNCC, são apresentados no ensino médio e fundamental. Além disso, construímos também os critérios de divisibilidade para alguns números primos. Vale ressaltar que essa formalização pode ser estendida para qualquer primo, como ficou apresentado no Teorema de Sebá. Tínhamos como objetivo principal despertar o interesse e a curiosidade dos alunos e propor algumas atividades que podem ser utilizada pelos docentes da educação básica para inserir este assunto no ensino médio.

Inicialmente fizemos uma revisão bibliográfica no que diz respeito ao conjunto dos números inteiros e definimos como Resultados Preliminares o capítulo onde estudamos as principais características, definições, axiomas, propriedades, teoremas, proposições, quem fundamentam e embasam a teoria dos critérios de divisibilidade.

Em seguida apresentamos de forma simplificada os critérios de divisibilidade para os números que comumente não são ensinados na educação básica. Essa teoria poderá ser utilizada como material de apoio para alunos e professores que estejam interessados neste assunto. Apresentamos também algumas metodologias para inserção deste conteúdos no ensino médio, foram elas duas propostas de atividades e a contextualização do conteúdo através de questões curiosas.

Como professor da Educação Básica, cursar o PROFMAT foi essencial e me proporcionou um olhar diferenciado no que diz respeito ao conteúdo ensinado e a metodologia aplicada. Inserir os critérios de divisibilidade não usuais é um desafio e nós professores devemos usar estratégias didáticas metodológicas, com objetivo de facilitar a inserção de conteúdos, uma vez que há pouco material com essa temática disponível.

Contudo, esse trabalho poderá também ter a finalidade de servir como estado da arte na formação inicial e continuada dos docentes, bem como permitir, através das propostas de atividades, uma aula dinâmica e didática podendo ser uma ferramenta que irá contribuir junto as aulas tradicionais assim complementando o processo ensino aprendizagem, uma aula divertida, curiosa e prendendo a atenção dos alunos.

De fato, trabalhar esse conteúdo é uma proposta desafiadora, mas com o auxílio das atividades que utilizam os materiais manipuláveis, se torna mais acessível aos alunos a prática deste conteúdo. Portanto, podemos inserir o conteúdo de forma simples utilizando essa nova tendência educacional e assim alcançaremos os resultados desejados.

Embora a educação brasileira deu um salto nas últimas décadas, ela ainda é um grande desafio e, muitas vezes, a fragilidade do nosso sistema está no alicerce da educação básica. Portanto, as novas metodologias são ferramentas essenciais na construção de uma base sólida e eficaz, seja ela através de materiais manipuláveis, tecnologias, modelagem matemática, investigação matemática, entre outras. Essas metodologias não vieram para substituir o sistema tradicional, mas sim para complementá-lo, afim de proporcionar uma aula rica e poderosa.

Nossa pesquisa não se encerra por aqui. Desejamos trazer uma abordagem através de publicações de artigos utilizando essa temática. Cabe ainda estudos sobre Números Parentes e sobre propriedades associadas a eles, bem como o estudo e a formulação de alguns problemas que façam uso dos critérios de divisibilidade não usuais, buscando sempre relacionar com atividades que possam facilitar a inserção deste conteúdo no ensino médio atual.

Referências

[1] BRASIL, Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF, MEC, 2017.

[2] BROCKVELD, P. **Critérios de divisibilidade nos livros didáticos: de 1918 a 2015**. Florianópolis, SC, 2016.

[3] SILVA, M. B. O.; BÚRIGO, E. Z. **Divisibilidade em um caderno do ensino primário dos anos 1950**. Pelotas, RS, XV Seminário Temático, 2007.

[4] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, MEC, 2017.

[5] RIBEIRO, H. S; TÁBOAS, C. M. G. **RPM 06 - Sobre critério de divisibilidade.** São Carlos, SP, 2020.

[6] BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F.

[7] FEITOSA, C. A. S; **OBMEP - Banco de questões 2020**. Rio de Janeiro, IMPA, 2020.

[8] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

[9] SILVA, T. P; **Critérios de divisibilidade: usuais, incomuns e curiosos**. Mestrado Profissional - PROFMAT, João Pessoa, PB, 2019.

[10] LOPES, D; **Bézout e Outros Bizus**. 18ª Semana Olímpica – São José do Rio Preto, SP, 2017.

[11] SANT'ANNA, I. K; **A Aritmética Modular como Ferramenta para as Séries Finais do Ensino Fundamental**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – Rio de Janeiro, RJ, 2013.