



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

LETICIA SILVA CARDOSO

**O DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TRABALHAR
O CONCEITO DE FRAÇÃO COM PROFESSORES DE 4º E 5º ANOS DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

PALMAS - TO

2020

LETICIA SILVA CARDOSO

**O DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TRABALHAR
O CONCEITO DE FRAÇÃO COM PROFESSORES DE 4º E 5º ANOS DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação como requisito parcial à Obtenção do grau de Mestre em Educação.

Orientador: Dr. Idemar Vizolli.

PALMAS – TO

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- C268d Cardoso, Leticia Silva.
O DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TRABALHAR O CONCEITO DE FRAÇÃO COM PROFESSORES DE 4º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL. / Leticia Silva Cardoso. – Palmas, TO, 2020.
344 f.
Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) em Educação, 2020.
Orientador: Idemar Vizelli
1. Educação. 2. Formação Continuada. 3. Sequência Didática. 4. Fração. I.
Titulo

CDD 370

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LETÍCIA SILVA CARDOSO

**O DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TRABALHAR
O CONCEITO DE FRAÇÃO COM PROFESSORES DE 4º E 5º ANOS DO ENSINO
FUNDAMENTAL**


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação.

Orientador: Dr. Idemar Vizolli.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Idemar Vizolli. Orientador, UFT



Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra. Examinador, UFOPA

p.p. 

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá. Examinador, UEPA



Prof. Dr. Carmem Lucia Artioli Rolim. Examinadora, UFT

Local: Palmas, TO

Data de aprovação: 14/02/2020

*Dedico este trabalho a minha amada família-
pai, mãe, irmãos, vó Maria e ao meu querido
namorado Jadson Teles, pelo apoio, carinho e
incentivo em todos os momentos.*

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meu eterno agradecimento primeiramente a Deus pela minha vida, saúde e por me conceder paciência e determinação para concluir o curso de mestrado, bem como pelas experiências e pelo conhecimento que esta pesquisa me proporcionou. E agradeço de forma especial:

Ao meu orientador, professor Dr. Idemar Vizolli, pelo apoio, orientações, incentivos, conhecimento, paciência e por ter acreditado em mim no desenvolvimento dessa desafiadora pesquisa.

Ao professor Ms. Dailson Evangelista Costa, meu orientador de graduação, pelo incentivo a cursar um Mestrado em Educação ou Educação Matemática.

Aos meus tios Luciania Cardoso e Walmir Jacinto de Souza, pelo incentivo à docência, especificamente na Matemática.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação (PPGE), pelos conhecimentos proporcionados.

Aos professores Dr. José Ricardo e Souza Mafra (UFEPA), Dr. Pedro Franco de Sá (UEPA) e Dra. Carmem Lucia Artioli Rolim (UFT), por fazerem parte da banca de qualificação e defesa e sobretudo pelas contribuições proporcionadas.

Aos colegas do PPGE (Programa de Pós-Graduação em Educação) Marcos Barros, Adílio Sabino e Ademir Brandão, pelas vivências, experiências e apoio durante todo o desenvolvimento da pesquisa.

À Secretaria Municipal de Educação de Araguaína (SEMED), por permitir o desenvolvimento desta pesquisa com os professores de 4º e 5º ano da Rede Municipal de Ensino de Araguaína, Tocantins, e por todo o apoio concedido durante o desdobramento da pesquisa.

Aos meus pais Jose Valkley Cardoso e Aurenice Cardoso e aos meus irmãos Eduardo Cardoso e Leonardo Cardoso, pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Ao meu namorado Jadson Teles por todo o carinho, incentivo, compreensão e apoio em todos os momentos.

Aos noventa e oito professores da Rede Municipal de Educação de Araguaína que se dispuseram a participar desta pesquisa.

Enfim, a todos o meu “muito obrigada”.

RESUMO

Esta dissertação resulta da análise das respostas das atividades de 30 professores de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental que atuam na Rede Municipal de Ensino de Araguaína, Tocantins, que participaram de um curso de formação continuada sobre fração. Uma vez que autores como Zabala, Oliveira, Borges Neto et al, dentre outros, indicam que o desenvolvimento de Sequências Didáticas (SD) tem se mostrado salutar no processo de ensino e aprendizagem de matemática, desenvolveu-se uma SD, na qual as atividades consideram a história, equivalência, comparação e significados de fração, bem como as características das quantidades e o uso de diferentes registros de representação semiótica. A SD foi composta de vinte e duas atividades, organizadas em tarefas constituídas de questões a serem resolvidas pelos professores. A pesquisa teve como objetivo analisar os efeitos do desenvolvimento de uma sequência didática considerando a história, equivalência, comparação e significados de fração, bem como as características das quantidades e a utilização de diferentes registros de representação semiótica sobre o conhecimento de fração dos professores participantes do curso. Trata-se de uma pesquisa-ação, de cunho qualitativo, que foi desenvolvida em três etapas: revisão da literatura, elaboração e sistematização da SD, seguida da análise das respostas dos professores. Os resultados indicam que o desenvolvimento SD contribuiu com a ampliação do conhecimento de fração e instrumentalizou os professores em sua ação docente.

Palavras-chave: Educação. Formação continuada. Sequência Didática. Fração.

ABSTRACT

This paper results from the analysis of the answers given to some activities by 30 teachers of Elementary School who work in the Municipal Education System of Araguaína, Tocantins, Brazil, teaching in the 4th and 5th grade, and who participated in an ongoing education training course about fractions. Since authors such as Zabala, Oliveira, Borges Neto et al and others indicate that the development of Didactic Sequences (DS) has proved to be helpful in the process of teaching and learning mathematics, a DS was developed with activities considering history, equivalence, comparison, and meanings of fractions, as well as the characteristics of the quantities and meanings of fractions, as well as the characteristics of the quantities and the use of different semiotic representation records, impacted on the fraction knowledge of the teachers participating in the course. This is a qualitative action research, developed in three stages literature review, preparation and systematization of the DS, and analysis of the teachers' answers. The results indicate that the DS development contributed to expand teachers' knowledge on fraction and it has also instrumentalized them in their teaching action.

Keywords: Education. Continuing education. Didactic Sequence. Fraction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relação professor-saber-aluno na SF	56
Figura 2 - Interação multilateral entre professor e aluno.....	58
Figura 3 - Tipos de questionamentos relacionados à situação-problema	59
Figura 4 - Desenvolvimento da sequência Fedathi.....	61
Figura 5 - Exemplo dos três critérios de congruência semântica	77
Figura 6 - Resolução da atividade 01 tarefa 01	94
Figura 7 - Atividade 01 tarefa 02.....	95
Figura 8 - Atividade 01 tarefa 02.....	96
Figura 9 - Atividade 01 tarefa 02.....	97
Figura 10 - Atividade 02 tarefa 01.....	99
Figura 11 - Atividade 02 tarefa 01.....	99
Figura 12 - Atividade 02 tarefa 02.....	101
Figura 13 - Atividade 02 tarefa 02.....	101
Figura 14 - Atividade 03 tarefa 01.....	104
Figura 15 - Atividade 03 tarefa 01.....	104
Figura 16 - Atividade 03 tarefa 02.....	106
Figura 17 - Atividade 03 tarefa 02.....	106
Figura 18- Atividade 04 tarefa 01.....	108
Figura 19 - Atividade 04 tarefa 01.....	109
Figura 20 - Atividade 04 tarefa 01.....	109
Figura 21 - Atividade 04 tarefa 02.....	111
Figura 22 - Atividade 04 tarefa 02.....	111
Figura 23 - Atividade 04 tarefa 02.....	112
Figura 24 - Atividade 04 tarefa 03.....	113
Figura 25 - Atividade 04 tarefa 03.....	113
Figura 26 - Atividade 05 tarefa 01.....	115
Figura 27 - Atividade 05 tarefa 01.....	116
Figura 28 - Atividade 05 tarefa 01.....	116
Figura 29 - Atividade 05 tarefa 02.....	118
Figura 30 - Atividade 05 tarefa 02.....	118
Figura 31 - Atividade 05 tarefa 02.....	118
Figura 32 - Resolução da atividade 05 tarefa 03	120

Figura 33 - Resolução da atividade 05 tarefa 03	120
Figura 34 - Resolução da atividade 05 tarefa 03	121
Figura 35 - Atividade 06 tarefa 01.....	123
Figura 36 - Atividade 06 tarefa 01.....	123
Figura 37 - Atividade 06 tarefa 01.....	124
Figura 38 - Atividade 06 tarefa 01.....	124
Figura 39 - Atividade 06 tarefa 02.....	126
Figura 40 - Atividade 06 tarefa 02.....	126
Figura 41 - Atividade 06 tarefa 02.....	126
Figura 42 - Atividade 06 tarefa 03.....	128
Figura 43 - Atividade 06 tarefa 03.....	129
Figura 44 - Atividade 06 tarefa 03.....	129
Figura 45 - Atividade 07 tarefas 01 a 05	132
Figura 46 - Atividade 07 tarefas 01 a 05	133
Figura 47 - Texto (parte 1)	134
Figura 48 - Texto (parte 2)	135
Figura 49 - Atividade 07 tarefas 01 a 05 (parte 1).....	136
Figura 50 - Atividade 07 tarefas 01 a 05 (parte 2).....	137
Figura 51 - Atividade 07 tarefas 01 a 05	137
Figura 52 - Atividade 07 tarefas 01 a 05	138
Figura 53 - Atividade 01 tarefa 01.....	151
Figura 54 - Atividade 02 tarefa 01.....	153
Figura 55 - Atividade 02 tarefa 01.....	154
Figura 56 - Atividade 02 tarefa 01.....	154
Figura 57 - Atividade 02 tarefa 01.....	154
Figura 58 - Atividade 02 tarefa 01.....	155
Figura 59 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	156
Figura 60 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	156
Figura 61 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	156
Figura 62 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	157
Figura 63 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	157
Figura 64 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	158
Figura 65 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	158
Figura 66 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	159

Figura 67 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	159
Figura 68 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	159
Figura 69 - Resolução da atividade 03 tarefa 01	161
Figura 70 - Resolução da atividade 03 tarefa 01	161
Figura 71 - Resolução da atividade 03 tarefa 01	161
Figura 72 - Resolução da atividade 03 tarefa 01	162
Figura 73 - Resolução da atividade 03 tarefa 01	162
Figura 74 - Resolução da atividade 03 tarefa 02	163
Figura 75 - Resolução da atividade 03 tarefa 02	164
Figura 76 - Resolução da atividade 03 tarefa 02	164
Figura 77 - Resolução da atividade 03 tarefa 02	165
Figura 78 - Resolução da atividade 03 tarefa 02	166
Figura 79 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	168
Figura 80 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	168
Figura 81 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	169
Figura 82 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	169
Figura 83 - Resolução da atividade 03	170
Figura 84 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	170
Figura 85 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	171
Figura 86 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	171
Figura 87 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	172
Figura 88 - Resolução da atividade 03 tarefa 03	172
Figura 89 - Resolução da atividade 03 tarefa 04	174
Figura 90 - Resolução da atividade 03 tarefa 04	174
Figura 91 - Resolução da atividade 03 tarefa 04	174
Figura 92 - Resolução da atividade 03 tarefa 04	175
Figura 93 - Resolução da atividade 03 tarefa 04	175
Figura 94 - Atividade 03 tarefa 05.....	177
Figura 95 - Atividade 03 tarefa 05.....	177
Figura 96 - Atividade 03 tarefa 05.....	177
Figura 97 - Atividade 03 tarefa 05.....	177
Figura 98 - Resolução da atividade 03 tarefa 06	179
Figura 99 - Resolução da atividade 03 tarefa 06	179
Figura 100 - Resolução da atividade 03 tarefa 06	179

Figura 101 - Resolução da atividade 03 tarefa 06	180
Figura 102 - Resolução da atividade 03 tarefa 06	180
Figura 103 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	183
Figura 104 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	184
Figura 105 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	184
Figura 106 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	184
Figura 107 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	185
Figura 108 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	185
Figura 109 - Resolução da atividade 03 tarefa 07	185
Figura 110 - Resolução da atividade 03 tarefa 08	187
Figura 111 - Resolução da atividade 03 tarefa 08	188
Figura 112 - Resolução da atividade 03 tarefa 08	188
Figura 113 - Resolução da atividade 03 tarefa 08	188
Figura 114 - Atividade 03 tarefa 09.....	190
Figura 115 - Atividade 03 tarefa 09.....	190
Figura 116 - Atividade 01 tarefa 02.....	193
Figura 117 - Atividade 01 tarefa 02.....	193
Figura 118 - Atividade 01 tarefa 02.....	193
Figura 119 - Atividade 01 tarefa 03.....	195
Figura 120 - Atividade 01 tarefa 03.....	195
Figura 121 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	197
Figura 122 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	198
Figura 123 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	198
Figura 124 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	198
Figura 125 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	198
Figura 126 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	200
Figura 127 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	200
Figura 128 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	201
Figura 129 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	201
Figura 130 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	201
Figura 131 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	203
Figura 132 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	203
Figura 133 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	203
Figura 134 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	203

Figura 135 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	204
Figura 136 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	204
Figura 137 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	204
Figura 138- Resolução da atividade 02 tarefa 03	204
Figura 139 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	205
Figura 140 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	205
Figura 141 - Resolução da atividade 02 tarefa 04	206
Figura 142 - Resolução da atividade 02 tarefa 04	206
Figura 143- Resolução da atividade 02 tarefa 04	206
Figura 144 - Resolução da atividade 02 tarefa 04	207
Figura 145 - Resolução atividade 02 tarefa 04	207
Figura 146 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	209
Figura 147 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	209
Figura 148 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	209
Figura 149 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	210
Figura 150 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	210
Figura 151 - Resolução da atividade 01 tarefa 02	213
Figura 152 - Resolução da atividade 01 tarefa 02	213
Figura 153- Resolução da atividade 01 tarefa 04	214
Figura 154 - Resolução da atividade 01 tarefa 04	215
Figura 155 - Resolução da atividade 01 tarefa 04	215
Figura 156 - Resolução da atividade 01 tarefa 04	215
Figura 157 - Resolução da atividade 01 tarefa 04	215
Figura 158 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	217
Figura 159 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	217
Figura 160 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	217
Figura 161 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	217
Figura 162- Resolução da atividade 01 tarefa 05	217
Figura 163 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	219
Figura 164 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	219
Figura 165 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	219
Figura 166 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	220
Figura 167 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	220
Figura 168 - Resolução da atividade 02 tarefa 02	221

Figura 169 - Resolução da atividade 02 tarefa 03	222
Figura 170 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	224
Figura 171 - Resolução da atividade 02 tarefa 05	224
Figura 172 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	226
Figura 173 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	227
Figura 174 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	227
Figura 175 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	227
Figura 176 - Resolução da atividade 02 tarefa 08	228
Figura 177 - Resolução da atividade 02 tarefa 08	229
Figura 178 - Resolução da atividade 02 tarefa 08	229
Figura 179- Resolução da atividade 02 tarefa 09	230
Figura 180 - Resolução da atividade 02 tarefa 10	231
Figura 181 - Resolução da atividade 02 tarefa 10	231
Figura 182 - Resolução da atividade 02 tarefa 11	232
Figura 183 - Resolução da atividade 02 tarefa 12	234
Figura 184 - Resolução da atividade 02 tarefa 12	234
Figura 185 - Resolução da atividade 02 tarefa 12	235
Figura 186 - Resolução da atividade 02 tarefa 12	235
Figura 187 - Resolução da atividade 02 tarefa 12	235
Figura 188 - Resolução da atividade 02 tarefa 13	237
Figura 189 - Resolução da atividade 02 tarefa 13	237
Figura 190 - Resolução da atividade 02 tarefa 13	237
Figura 191 - Resolução da atividade 02 tarefa 13	238
Figura 192 - Resolução da atividade 02 tarefa 13	238
Figura 193 - Resolução da atividade 01 tarefa 03	242
Figura 194 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	245
Figura 195 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	245
Figura 196 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	245
Figura 197 - Resolução da atividade 01 tarefa 05	245
Figura 198 - Resolução da atividade 01 tarefa 06	247
Figura 199 - Resolução da atividade 01 tarefa 06	247
Figura 200 - Resolução da atividade 01 tarefa 07	248
Figura 201 - Resolução da atividade 01 tarefa 07	249
Figura 202 - Resolução da atividade 01 tarefa 07	249

Figura 203 - Resolução da atividade 01 tarefa 07	249
Figura 204 - Resolução da atividade 01 tarefa 08	251
Figura 205 - Resolução da atividade 01 tarefa 08	251
Figura 206 - Resolução da atividade 01 tarefa 08	251
Figura 207 - Resolução da atividade 01 tarefa 08	252
Figura 208 - Resolução da atividade 01 tarefa 08	252
Figura 209 - Resolução da atividade 01 tarefa 09	254
Figura 210 - Resolução da atividade 01 tarefa 09	254
Figura 211 - Resolução da atividade 01 tarefa 09	255
Figura 212 - Resolução da atividade 01 tarefa 09	255
Figura 213 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	257
Figura 214 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	257
Figura 215 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	257
Figura 216 - Resolução da atividade 02 tarefa 01	258
Figura 217 - Resolução da atividade 02 tarefa 04	261
Figura 218 - Resolução da atividade 02 tarefa 06	262
Figura 219 - Resolução da atividade 02 tarefa 06	263
Figura 220 - Resolução da atividade 02 tarefa 06	263
Figura 221 - Resolução da atividade 02 tarefa 06	263
Figura 222 - Resolução da atividade 02 tarefa 06	263
Figura 223 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	265
Figura 224 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	265
Figura 225 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	265
Figura 226 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	265
Figura 227 - Resolução da atividade 02 tarefa 07	265
Figura 228 - Resolução da atividade 02 tarefa 08	266
Figura 229 - Resolução da atividade 02 tarefa 08	267
Figura 230 - Símbolos numéricos egípcios	288
Figura 231 - Símbolos numéricos egípcios	288
Figura 232 - Fração em notação hieroglífica.....	289
Figura 233 - Sistema numérico mesopotâmico até o numeral 59.....	293
Figura 234 - Numeração ática	296
Figura 235 - Representação de 50, 500, 5000 e 50000 em grego.....	296
Figura 236 - Numeração alfabética	297

Figura 237 - Sistema de numeração chinês	299
Figura 238 - Representação do número 79.564	299
Figura 239 - Sistema posicional chinês	300
Figura 240 - Símbolos chineses após reformulação	300
Figura 241 - Representação do número 522 e o 87942 pelos chineses	301
Figura 242 - Nove primeiros símbolos do sistema numérico hindu.....	303
Figura 243 - Diagrama representando o conjunto dos números reais	306
Figura 244 – Círculo.....	311
Figura 245 - Círculo dividido em duas partes	311
Figura 246 - Círculo dividido em quatro partes	311
Figura 247 - Círculo dividido em oito partes	312

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Ensino e aprendizagem de fração ou frações	30
Quadro 2 - Pesquisas envolvendo ensino de fração e fração como objeto de estudo.....	34
Quadro 3 - Formação continuada para o ensino de fração (BDTD).....	36
Quadro 4 - Formação continuada para o ensino de fração (CAPES)	36
Quadro 5 - Sequência didática 01	49
Quadro 6 - Sequência didática 02.....	50
Quadro 7 - Sequência didática 03.....	51
Quadro 8 - Sequência didática 04.....	52
Quadro 9 - Sistematização da SDI.....	53
Quadro 10 - Sistematização dos diferentes significados de fração	71
Quadro 11 - Exemplo de tratamento.....	74
Quadro 12 - Exemplo de conversões.....	75
Quadro 13 - Tipos e funções de representações	80
Quadro 14 - Alguns registros de representação na perspectiva dos números racionais	82
Quadro 15 - Encontros da Formação Continuada	87
Quadro 16 - Sistematização das atividades da experimentação	92
Quadro 17 - Categorias de análise relativas à atividade 01 - sistema de numeração	93
Quadro 18 - Categorias de análise concernentes à atividade 01 tarefa 02 - sistema de numeração	95
Quadro 19 - Categorias de análise referentes à atividade 02 tarefa 01 - desatando nós.....	99
Quadro 20 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - desatando nós	100
Quadro 21 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 01 - cunhando frações.....	103
Quadro 22 - Categorias de análise pertencentes à atividade 03 tarefa 02 - cunhando frações	105
Quadro 23 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 01 - frações gregas	108
Quadro 24 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 02 - frações gregas	110
Quadro 25 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 03 - frações gregas	112
Quadro 26 - Categorias de análise da atividade 05 tarefa 01 - frações em barras.....	115
Quadro 27 - Categorias de análise da tarefa 02 - frações em barras	117
Quadro 28 - Categorias de análise da atividade 05 tarefa 03 - frações em barras.....	119
Quadro 29 - Análise da atividade 06 tarefa 01 - irmãos hindus	122
Quadro 30 - Categorias de análise referentes à atividade 06 tarefa 02 - irmãos hindus.....	125

Quadro 31 - Categorias de análise da atividade 06 tarefa 03 - irmãos hindus	128
Quadro 32 - Categorias de análise da atividade 07 tarefas 01 a 05 - frações nos dias atuais.	131
Quadro 33 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 01 - comparação de fração.....	151
Quadro 34 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - comparação a partir do tangram	152
Quadro 35 - Análise da atividade 02 tarefa 02 - comparação a partir do tangram.....	155
Quadro 36 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - comparação a partir do tangram	158
Quadro 37 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 01 - ordenando fração.....	160
Quadro 38 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 02 - ordenando fração.....	162
Quadro 39 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 03 - ordenando fração.....	166
Quadro 40 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 04 - ordenando fração.....	173
Quadro 41 - Categorias de análise da tarefa 05 - ordenando fração.....	176
Quadro 42 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 06 - ordenando fração.....	178
Quadro 43 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 07 - ordenando fração.....	182
Quadro 44 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 08 - ordenando fração.....	187
Quadro 45 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 09 - ordenando fração.....	189
Quadro 46 - Categorias de análise da tarefa 02 - características das quantidades.....	192
Quadro 47 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 03 - características das quantidades	194
Quadro 48 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - características das quantidades	196
Quadro 49 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - características das quantidades	199
Quadro 50 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - características das quantidades	202
Quadro 51 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - características das quantidades	205
Quadro 52 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - características das quantidades	208
Quadro 53 - Categorias de análise da atividade 01 - registro de representação semiótica.....	212
Quadro 54 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 04 - registro de representação semiótica	214

Quadro 55 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 05 - registro de representação semiótica	216
Quadro 56 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - registro de representação semiótica	218
Quadro 57 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - registro de representação semiótica	220
Quadro 58 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - registro de representação semiótica	221
Quadro 59 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - registro de representação semiótica	223
Quadro 60 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - registro de representação semiótica	223
Quadro 61 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 06 - registro de representação semiótica	225
Quadro 62 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 07 - registro de representação semiótica	226
Quadro 63 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 08 - registro de representação semiótica	228
Quadro 64 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 09 - registro de representação semiótica	230
Quadro 65 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 10 - registro de representação semiótica	231
Quadro 66 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 11 - registro de representação semiótica	232
Quadro 67 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 12 - registro de representação semiótica	233
Quadro 68 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 13 - registro de representação semiótica	236
Quadro 69 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 02 - significado de fração	241
Quadro 70 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 03 - significado de fração	242
Quadro 71 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 04 “significado de fração”	243
Quadro 72 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 05 - significado de fração	244
Quadro 73 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 06 “significado de fração”	246
Quadro 74 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 07 - significado de fração	248

Quadro 75 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 08 - significado de fração	250
Quadro 76 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 09 “significado de fração”	253
Quadro 77 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 significado de fração.....	256
Quadro 78 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - significado de fração	258
Quadro 79 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - significado de fração	259
Quadro 80 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - significado de fração	260
Quadro 81 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - significado de fração	261
Quadro 82 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 06 - significado de fração	262
Quadro 83 – Categorias de análise da atividade 02 tarefa 07 - significado de fração.....	264
Quadro 84 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 08 - significado de fração	266
Quadro 85 - Fração não-unitária e sua notação egípcia.....	290
Quadro 86 – Frações equivalentes.....	312
Quadro 87 – Simplificação de frações.....	313

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	22
2 REMINISCÊNCIAS FRACIONÁRIAS.....	26
2.1 O processo de ensino e aprendizagem de fração	29
3 SUSTENTAÇÃO TEÓRICA DA PESQUISA.....	46
3.1 Sequência didática	46
3.2 Sequência didática interativa (SDI)	53
3.3 Sequência Fedathi (SF).....	55
3.4 Natureza das quantidades	62
3.5 Significados de fração.....	63
3.5.1 Significado parte/todo	64
3.5.2 Significado número	65
3.5.3 Significado medida.....	66
3.5.4 Significado quociente.....	67
3.5.5 Significado operador multiplicativo.....	69
3.6 Registros de representação semiótica	72
4 O DESLINDAR METODOLÓGICO	84
4.1 Caracterização da pesquisa.....	84
4.2. Situando a pesquisa	85
4.3 O curso de formação continuada.....	90
4.4 Caracterização dos participantes da pesquisa	91
5 DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	92
5.1 Terceiro encontro da formação	93
5.2 Quarto encontro da formação	150
5.3 Quinto encontro da formação	239
5.4 Estudando sobre sequência didática	269
6 DESDOBRAMENTOS.....	270
REFERÊNCIAS.....	274
APÊNDICES	284

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve como objetivo a elaboração, o desenvolvimento e a análise das respostas dadas por 30 professores ao solucionarem atividades de fração em um curso de formação continuada com docentes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental que atuam na Rede Municipal de Ensino de Araguaína, Tocantins. Nesse curso, que contou com 98 professores participantes, desenvolveu-se uma sequência didática com vistas a contribuir para a compreensão do conceito de fração. Elaboramos as atividades considerando história da fração, equivalência, comparação, significados, bem como as características das quantidades e os registros de representação semiótica. Apresentamos de antemão os elementos constituintes deste estudo (o objeto de investigação, a estrutura da dissertação e a descrição da vivência profissional).

A matemática tem sido importante ao desenvolvimento da humanidade, haja vista sua utilização em muitas invenções, seja por sua aplicabilidade na elaboração de modelos matemáticos para representar determinados fenômenos e/ou situações, seja na geração e produção de dados e/ou informações que possibilitam resolver problemas enfrentados nas diversas áreas do conhecimento. Ela também é utilizada nos sistemas computacionais a fim de desenvolver programas. Em função de seu amplo espectro de utilidade e aplicabilidade, a ciência matemática é fundamental ao processo educacional, sobretudo porque contribui fortemente com o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Antes mesmo do processo de escolarização, as crianças são confrontadas com situações que necessitam de matemática para compreendê-las e, muitas vezes, para solucioná-las. Algumas dessas situações requerem inclusive a compreensão de partição, o que é fundamental para o processo de compreensão dos conceitos de divisão e fração, por exemplo. Cotidianamente, os números fracionários estão presentes, por exemplo, no sistema monetário e nas receitas de cozinha, revestindo-se de fundamental importância também no meio social.

Frequentemente, ouvimos professores falando que muitos estudantes apresentam uma série de dificuldades na compreensão do conceito de fração, problemática também presente em pesquisas como as de Santos (1993), Silva (1997), Bezerra (2001), Nunes (2001), Merlini (2005), Bertoni (2009) dentre outras. Os estudos desses autores têm indicado que as dificuldades em relação à compreensão do conceito de fração ocorrem tanto do ponto de vista do ensino como da aprendizagem. Isso denota que professores que ensinam Matemática também apresentam lacunas na compreensão conceitual desse objeto matemático, o que certamente compromete o processo de ensino.

Na tentativa de superar a problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem, pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento apresentam o uso de Sequência Didática (SD) como uma metodologia importante ao processo educacional, inclusive de matemática, dentre os quais podemos citar Zabala (1998), Borges Neto *et al* (2013) e Oliveira (2013). Para esses autores, a SD se caracteriza por uma série de atividades organizadas e articuladas entre si de modo a levar os estudantes a compreender o conteúdo estudado. Esse método desafia os professores a elaborar atividades e estimula os estudantes a expor suas ideias e confrontá-las com as dos colegas. Assim, tanto professores como estudantes tornam-se agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Na perspectiva do ensino de matemática, Duval (2009) destaca que a utilização adequada de diferentes registros de representação semiótica propicia condições para que os estudantes compreendam os objetos matemáticos. Trata-se do uso de registros canônicos, os quais obedecem a regras de significado e funcionamento; portanto, são utilizados no processo de ensino e de aprendizagem.

Já nos primeiros anos de escolarização as crianças são desafiadas a resolver situações que envolvem fração. Contudo, nem sempre a formação de professores tem dado a devida atenção ao modo como esse conteúdo deve ser trabalhado, o que faz com que muitos docentes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental compreendam parcialmente o conceito de fração. Assim, colocamos diante de nós o desafio de ministrar um curso de formação continuada para professores que atuam em turmas de 4º e 5º ano na Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO.

Para tanto, elaboramos uma pergunta norteadora para orientar a formação, a qual se constitui no objeto desta investigação, qual seja: Que efeitos sobre a compreensão de fração gera o desenvolvimento de uma sequência didática considerando história, equivalência, comparação e significados de fração, bem como as características das quantidades e a utilização de diferentes registros de representação semiótica, com professores que atuam no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO?

Diante da problemática apontada pelas pesquisas que tematizam o processo de ensino e aprendizagem de fração e na tentativa de responder à pergunta de investigação, elaboramos uma sequência didática (SD) e desenvolvemos um curso de formação continuada com 98 professores que ensinam Matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental na Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO, e, a partir das respostas de 30 desses professores, temos o objetivo de analisar os efeitos do desenvolvimento de uma sequência considerando história, equivalência, comparação e significados de fração, bem como as características das quantidades

e a utilização de diferentes registros de representação semiótica sobre o conhecimento de fração dos professores participantes do curso.

Como objetivos específicos, pretende-se verificar se os participantes do curso de formação continuada sobre fração que atuam no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO, conseguem:

- a) resolver problemas envolvendo os diferentes significados de fração;
- b) solucionar problemas sobre fração, envolvendo quantidades contínuas, discretas, intensivas e extensivas;
- c) utilizar os diferentes registros de representação semiótica no processo de solução de problemas sobre fração;
- d) elaborar uma sequência didática considerando a história, a equivalência, a comparação e os significados de fração, bem como as características das quantidades e a utilização de diferentes registros de representação semiótica, com vistas à ampliação da compreensão de fração por parte de professores que ensinam Matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental.

Registra-se que esta pesquisa integra um projeto mais amplo que tem como objetivo geral o Ensino e Aprendizagem de Fração. Na tentativa de alcançar o objetivo maior do projeto, além deste estudo, está em desenvolvimento uma série de outras pesquisas. A primeira foi concluída em dezembro de 2018 e teve como objetivo geral analisar o modo como professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de Araguaína, TO, resolvem situações que envolvem o conceito de fração, considerando o uso de registros de representação semiótica, os diferentes significados de fração, bem como as características das quantidades. Essa pesquisa foi elaborada pelo então mestrando Marcos José Pereira Barros. Outra pesquisa se preocupa em deslindar os papéis dos envolvidos no processo de elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas e está sob responsabilidade do mestrando Adílio Jorge Sabino. Ainda outra tem como objetivo geral verificar o legado do curso de formação continuada sobre fração e está sob a responsabilidade do mestrando Ademir Brandão Costa. Há também uma pesquisa cujo objetivo é analisar os aspectos requeridos de estudantes de Ensino Fundamental quanto às questões que envolvem fração por ocasião da realização da avaliação do Sistema de Avaliação do Tocantins (SISAPTO), a qual está sendo desenvolvida pelo mestrando Severino Roberto. Por fim, outra pesquisa apresentará uma sequência didática sobre fração elaborada por professores de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO, e será desenvolvida pela mestrandia Ritianne Oliveira.

Dada a envergadura do projeto, o curso de formação continuada, assim como a elaboração das atividades que compõem a sequência didática, foi executado pelo Professor Dr. Idemar Vizolli e a equipe de mestrandos (Marcos José Pereira Barros, Adílio Jorge Sabino, Ademir Brandão Costa, Severino Roberto e Leticia Silva Cardoso, autora desta pesquisa).

Ao apresentar este estudo, rememoramos aspectos de vivências e experiências que nos aproximaram da temática em estudo e tratamos da problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem de fração, a partir da revisão da literatura. Na continuidade, abordaremos a sustentação teórica para o uso de Sequência Didática. A quarta seção indicamos o enquadramento teórico-metodológico da pesquisa. Em seguida apresentamos as análises das produções dos professores participantes da pesquisa, obtidos no desenvolvimento da Sequência Didática. Ao concluir o estudo, tecemos as considerações. A Sequência Didática produzida encontra-se no apêndice desta pesquisa.

Envidamos esforços em rememorar aspectos de vivências e experiências que nos conduziram ao estudo de fração. Assim, na próxima seção, nossa atenção se volta para questões atinentes a aspectos pessoais, profissionais e da pesquisa que nos conduziram ao presente estudo.

2 REMINISCÊNCIAS FRACIONÁRIAS

Nas reminiscências apresentarei recortes do andarilhar acadêmico e profissional. Sou Licenciada em Matemática, cujo caminhar foi laborioso, em que me empenhei para lograr êxito a fim de superar as lacunas de aprendizagens de conceitos matemáticos estudados nas Educação Básica. Essas lacunas foram aos poucos preenchidas com investigações, estudos e pesquisas. Uma das fendas que restaram com a conclusão do ensino superior refere-se aos números racionais, em especial as frações. Lembro-me, por exemplo, que realizava soma e subtração de frações com denominadores distintos, fazendo uso de algoritmos, sem me dar conta da equivalência.

De acordo com Biffi (2001, p. 22), “uma das razões do fracasso frequente no ensino de frações deve-se à forma como são trabalhados esses conteúdos, dando apenas ênfase às técnicas, seguindo regras e procedimentos que não passam pela compreensão e elaboração do aluno”. Assim, é necessária a contextualização e a conceitualização dos objetos de ensino, para que o estudante encontre sentido no que está fazendo. Hoje vejo que se deve considerar conceitos/ideias/concepções e as diferentes representações envolvidas no objeto matemático a ensinar (DUVAL, 2009; MERLINI, 2005).

Ao frequentar o 3º e 4º anos do Ensino Fundamental, lembro-me da professora explicitando o que era numerador e denominador, utilizando como instrumento o desenho de uma pizza dividida em partes iguais, mencionando que o denominador era o total de partes em que a pizza foi dividida e o numerador as partes tomadas do todo. É bastante comum estudantes conceberem o numerador e o denominador como números distintos dispostos um sobre o outro (dois números naturais sobrepostos), ou seja, não perceber que eles formam um só número: o fracionário. Essa situação não é atípica, pelo fato de que a compreensão do conceito de fração não é um processo natural e espontâneo e que sua apreensão implica relacionar diversas representações e significados, rompendo com as ideias construídas sobre os números naturais.

O início do estudo de fração aconteceu por meio do significado parte/todo, o que não é incomum até hoje, visto que algumas pesquisas apontam que professores ainda ensinam fração utilizando apenas esse significado. Nesse sentido, Campos *et al* (1995 *apud* NUNES; BRYANT, 1996, p. 191) revela:

Um método de ensino simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas sem entender o significado desse novo tipo de número.

Nessa perspectiva, Panavello (1994) diz que as crianças têm contato com as frações na terceira série do primeiro grau com figuras simples como quadrados, retângulos e círculos divididos em partes iguais. As frações podem também aparecer definidas de uma maneira geral ou através de identificação de frações específicas. O primeiro contato da criança com as frações geralmente ocorre com o ensino de números fracionários, tendo em vista o significado parte/todo e a natureza das quantidades discretas. Logo, algumas crianças, quando chegam ao 6º ano, encontram obstáculos ao solucionar problemas referentes aos números fracionários quando estes abrangem as quantidades contínuas. De fato, Silva (2005, p. 15), alerta:

Embora o enfoque, com figuras convenientemente divididas permita representar alguma parte pintada da figura por um número fracionário, com sucesso, essa representação poderá conduzir ao fracasso, quando o objeto representado fugir desse padrão.

Muitos estudantes possuem dificuldades em resolver situações que envolvem quantidades contínuas em razão de terem aprendido fração em contextos com quantidades discretas. Assim, é importante o ensino de números fracionários, inicialmente no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, utilizando as naturezas das quantidades discretas e contínuas (NUNES *et al.*, 2005).

Em meu trajeto profissional, tive a oportunidade de lecionar no Ensino Fundamental II, mais especificamente no 7º ano, em uma escola da Rede Estadual de Ensino do Tocantins, no município de Porto Nacional. Com o auxílio do livro didático, que prioriza o ensino de algoritmos ao invés de conceitos, ensinei números fracionários. Entendia que, se existia o livro didático voltado para aquela série específica e elaborado por diferentes autores, então eu poderia contar com seu apoio. Portanto, eu empregava esse material didático frequentemente. Além disso, inspirava-me muito em professores que me ensinaram esse objeto matemático. Contudo, em relação aos diferentes significados de fração, percebia que o livro didático utilizava os significados de número e parte/todo e poucas vezes os significados medida, quociente e operador multiplicativo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino de operação com frações é ensinado no 6º e 7º anos: “Quanto ao cálculo de adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes” (BRASIL, 1998, p. 104).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam o uso de frações equivalentes para operar com esse conteúdo, enquanto os livros didáticos focam no ensino de algoritmos. De acordo com Biffi (2001, p. 1), “[...] professores, ao trabalharem com a matemática, fazem uso de técnicas operatórias que não são construídas pelos alunos, mas repassam-nas mecanicamente do mesmo

modo como as aprenderam”. Neste contexto, cabe a pergunta: que percursos formativos professores de matemática precisam para ensinar os estudantes a entender os conceitos matemáticos, dentre eles o de fração?

Biffi (2001), Merlini (2005) e Silva (2005) indicam que estudantes da Educação Básica apresentam dificuldades na resolução de situações que envolvem fração. Ademais, a fragilidade no conhecimento torna alguns professores inseguros ao trabalhar fração e números racionais, por exemplo (CYRINO; OLIVEIRA, 2014).

Na perspectiva de superação das lacunas no processo de ensino e aprendizagem, busquei o curso de Mestrado Acadêmico em Educação, o qual oportunizou o desenvolvimento de estudos e pesquisas com aportes teóricos que possibilitam reflexões à busca de solução de uma série de situações didáticas, inclusive de fração.

No decorrer do Mestrado Acadêmico em Educação, entendi a importância de ensinar fração considerando os diferentes significados e representações (MERLINI, 2005; DUVAL, 2009). Isso denota que é importante que sejam realizados cursos de formação continuada para o empoderamento de professores. “Há necessidade de discutir as formas como os conteúdos matemáticos e, em especial, os números racionais são introduzidos – quando o são –, nos cursos de formação, tanto inicial quando continuada” (SILVA, 2007, p. 281).

Registra-se que o processo de construção da Sequência Didática e seu desenvolvimento foram vitais ao meu crescimento profissional, especialmente porque entendi que o ensino deve considerar o estudante como agente ativo no processo.

Toledo (2010, p. 164) afirma que um obstáculo à aprendizagem de frações se constitui no ensino “de algoritmos das operações com frações, todos ensinados com base em regras, sem grandes referências ao conceito que é realmente fundamental para a justificação desses algoritmos”. Duval (2009) defende que os registros de representação semiótica são necessários para a aquisição de conceitos matemáticos. Para ele, os distintos objetos matemáticos possuem diversos registros de representação e a apreensão está ligada à necessidade das conversões de registros. Outrossim, Merlini (2005) defende que o ensino de fração em seus diversos contextos deve se dar considerando os significados parte/todo, número, quociente, medida e operador multiplicativo.

Com o aporte teórico, a estruturação e desenvolvimento de uma sondagem com os sujeitos da pesquisa, desenvolvemos um curso de formação continuada para o ensino de fração, com o subsídio de uma sequência didática com atividades desmembradas em tarefas em que se procurou mostrar formas de resolver problemas envolvendo quantidades (discretas, contínuas,

extensivas e intensivas), registros de representação semiótica e significados (parte/todo, número, medidas, quociente e operador multiplicativo).

O curso de formação continuada tem o objetivo de que os participantes entendam a importância do uso dos registros de representação semiótica ao ensinar matemática, sobretudo os números fracionários. Conforme Duval (1995), o processo de conceitualização em matemática acontece quando o sujeito é capaz de mobilizar dois ou mais registros de representação semiótica em um mesmo objeto matemático. O autor enfatiza que não existe nenhuma representação que seja suficiente para a apreensão de um conceito, mas saber utilizar os diferentes registros mudando de um para o outro é que assume importância no processo de compreensão conceitual.

Como profissionais da educação, é importante nos atentarmos à formação inicial e continuada. Damico (2007, p. 171) assevera:

[...] se a concepção de ensino de Matemática estiver embasada na teoria construtivista de construção de conhecimentos matemáticos, o conhecimento de regras ou algoritmos, por parte de quem ensina, seria um item necessário, mas não seria suficiente. Nesse caso, a organização do ensino é mais complexa, uma vez que não se trata de transmissão de conhecimentos em fase final de elaboração, o que demanda de quem ensina um amplo conhecimento conceitual do objeto de estudo que, obviamente, está além do conhecimento processual imposto pelas regras.

Diante disso, fica evidente a importância do empoderamento de outros professores que ensinam Matemática, sobretudo os que ensinam fração. Para isso, decidimos promover uma formação continuada com o objetivo de contribuir com o conhecimento de fração por parte de professores que ensinam matemática nas séries iniciais, utilizando uma sequência didática com diferentes atividades desmembradas em tarefas. Acreditamos que uma sequência didática que faça uso de diferentes registros de representação semiótica, (DUVAL, 2009), diferentes significados de fração (MERLINI, 2005) e que considere as características das quantidades (NUNES *et al*, 2005) será essencial para a ampliação dos conhecimentos de fração por parte dos professores. Acreditamos que, instrumentalizando¹ os professores, os estudantes também terão seus conhecimentos ampliados.

2.1 O processo de ensino e aprendizagem de fração

Diferentes estudos envolvendo formação continuada para o ensino de fração têm apontado para a fragilidade em relação a compreensão e ao tratamento dado ao ensino de frações

¹ No sentido de proporcionar conhecimento necessário ao ensino de fração (Diferentes significados e Quantidades, e o uso adequado dos distintos Registros de Representação Semiótica relacionado a fração).

(SILVA, 2005; CANOVA, 2006; MARTINS, 2016). Nesse sentido, tem-se evidenciado a necessidade de os cursos de formação inicial e continuada darem ênfase ao conceito de números racionais, complementado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária. Segundo Biffi (2001), é importante o conhecimento dos significados parte/todo, quociente, medida, além das características das quantidades contínuas, discretas, intensivas e extensivas para a compreensão do conceito de fração nos diversos contextos em que se apresenta. Acrescenta-se a isso, uma constante reflexão sobre a prática, sobretudo em ambiente que propicie um trabalho colaborativo para que se rompam crenças e concepções dos professores sobre ensino e aprendizagem da Matemática (SILVA, 2007) e, em específico, a fração.

A falta de conhecimento didático e/ou conceitos matemáticos bem construídos pode criar obstáculos didáticos na prática docente, o que afetará o processo de escolarização e o desenvolvimento cognitivo dos estudantes (MARTINS, 2016).

Para o desenvolvimento da presente pesquisa, foram realizadas buscas no banco de dados, da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), do Instituto Brasileiro de Informação em Ciências e Tecnologia (IBICT) e do Banco de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Buscamos nesses bancos de dados pesquisas em âmbito de mestrado e doutorado. Para afinar a busca, na primeira etapa, as pesquisas foram filtradas por meio da seguinte frase: “ensino e aprendizagem de fração” ou “ensino e aprendizagem de frações”. Na segunda, “formação continuada para o ensino de frações”.

Na BDTD/IBICT, ao inserir “ensino e aprendizagem de frações”, apareceram quarenta e nove estudos e banco da CAPES, apareceram dez pesquisas; em relação a formação continuada para o ensino de frações, na BDTD apontou sete estudos e o Banco de Teses e Dissertações da Capes apresentou dez resultados. Os quadros 1 e 2 a seguir apresentam uma síntese dos estudos.

Quadro 1: Ensino e aprendizagem de fração ou frações

Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações		
Ensino	Aprendizagem	Fração como objeto matemático de pesquisa

<p><i>Sequência Fedathi e análise de erros aplicadas ao ensino de frações</i> (MELO, 2017).</p>	<p><i>Aprendizagem de frações equivalentes:</i> efeito do ensino de discriminações condicionais minimizando o erro e da possibilidade de consulta a dicas (VERNEQUE, 2011).</p>	<p><i>Jogos como recurso didático no ensino- aprendizagem de frações</i> (DRUZIAN, 2007)</p>
<p><i>A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração</i> (CATALANI, 2002)</p>	<p><i>Aprendizagem de frações:</i> uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau (OLIVEIRA, 1996)</p>	<p><i>Ensino-aprendizagem de frações:</i> um olhar para as pesquisas e para a sala de aula (SILVA, 2017)</p>
<p><i>Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas</i> (POLESE, 2011)</p>	<p><i>Uma experiência didática para aprendizagem de frações:</i> matemática para residentes de uma casa de passagens (CHEQUETTO, 2016)</p>	<p><i>Ensino e aprendizagem de frações mediadas pela tecnologia:</i> uma análise à luz da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (BOLOGNANI, 2015)</p>
<p><i>Frações: estratégias lúdicas no ensino da matemática</i> (VALIO, 2014)</p>	<p><i>A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental:</i> análise de uma proposta de ensino (PATRONO, 2011)</p>	<p><i>Aplicação e análise de uma sequência didática sobre frações no Ensino Fundamental II</i> (NASCIMENTO, 2018)</p>
<p><i>Tecnomatemática:</i> site como ferramenta tecnológica para o ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental (CRUZ, 2017)</p>	<p><i>Frações e suas operações:</i> resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem (MENOTTI, 2014)</p>	<p><i>Investigando as concepções de frações de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio</i> (SILVA, 2006)</p>
<p><i>Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos:</i> obstáculos didáticos</p>	<p><i>Aprendizagem de frações com software e aplicativos matemáticos online</i> (PAIVA, 2016).</p>	<p><i>O desafio do desenvolvimento profissional docente:</i> análise da formação continuada de um grupo de</p>

<p>e epistemológicos (FERREIRA, 2014).</p>		<p>professoras das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de frações (SILVA, 2007)</p>
<p><i>Abordando frações em perspectiva histórica: uma possibilidade de ensino para educação básica</i> (CRUZ, 2016)</p>	<p><i>O erro na aprendizagem de frações no Ensino Fundamental: concepções docentes</i> (BOCALON, 2008)</p>	<p><i>Potencialidades e limitações de um trabalho colaborativo sobre frações na formação inicial de professores que ensinam matemática</i> (MENEGAZZI, 2014)</p>
<p><i>A formação de professores nos anos iniciais do Ensino Fundamental no movimento de organização do ensino de frações: uma contribuição da atividade orientadora de ensino</i> (PERLIN, 2014)</p>	<p><i>Números racionais na forma fracionária: atividades para superar dificuldades de aprendizagem</i> (LIMA, 2013)</p>	<p><i>Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para formação inicial</i> (BARROS, 2007)</p>
<p><i>O ensino de frações por uma abordagem inspirada nos pressupostos educacionais da Teoria de Inteligências Múltiplas</i> (SEGETI, 2015)</p>	<p><i>O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do Ensino Fundamental</i> (GOIS, 2014)</p>	<p><i>Pró-letramento em Matemática: problematizando a construção do conceito de frações: uma contribuição para a formação de professores</i> (SCHASTAI, 2012)</p>
<p><i>Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software geogebra e dobraduras</i> (CORREIA, 2015)</p>	<p><i>A compreensão das relações numéricas na aprendizagem de frações: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da</i></p>	<p><i>Quantidades intensivas: análise de uma intervenção com alunos do 5º do Ensino Fundamental</i> (CASTRO, 2014)</p>

	educação básica (VASCONCELOS, 2015)	
<i>Ensino de frações e equivalência de estímulos: um estudo com uso de software educativo (TULON, 2008)</i>	<i>Aprendizagem do conceito científico de fração por alunos com deficiência intelectual: os resultados de uma intervenção (RODRIGUES, 2017)</i>	<i>Mapeamento das produções produzidas em São Paulo acerca dos números fracionários, entre os anos de 2000 a 2016 (DIAS, 2018).</i>
<i>Ensino informatizado de frações a crianças surdas e ouvintes por meio do paradigma de equivalência de estímulos (ANGELOTTI, 2016)</i>		<i>Uso de elementos da cultura infanto-juvenil na introdução do conceito de fração (ASSUMPÇÃO, 2013)</i>
<i>Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série (SILVA, 2005).</i>		<i>Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula (BEZERRA, 2001)</i>
<i>O ensino de fração: uma intervenção com alunos de 2º série de Ensino Fundamental (MALASPINA, 2007)</i>		<i>Uso social e escolar dos números racionais: representação fracionária e decimal (VALERA, 2003)</i>
<i>O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representação semiótica (MARTINS, 2012)</i>		<i>Como os estudantes lidam com diferentes representações? Um estudo com o bingo dos números racionais (SILVA, 2016)</i>
<i>A sequência fedathi na formação matemática do</i>		<i>Investigando como os professores dos anos iniciais</i>

<i>pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria básica e frações equivalentes com o uso do software geogebra (SANTOS, 2015).</i>		<i>julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais (SANTOS FILHO, 2015).</i>
<i>Uma proposta no ensino de fração para adolescentes com e sem deficiência visual (COSTA, 2013)</i>		<i>Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental (VASCONCELOS, 2007)</i>
<i>O ensino de matemática na escola pública: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração (SILVA, 2011)</i>		<i>Concepções epistemológicas e experiências de professores de matemática sobre números fracionários: as implicações em suas práticas na 5ª série do Ensino Fundamental (MACHADO, 2007)</i>
		<i>Crenças e dificuldades de futuros professores de matemática no domínio de números racionais (GONÇALVES, 2013)</i>

Fonte: Elaboração da autora.

Quadro 2 - Pesquisas envolvendo ensino de fração e fração como objeto de estudo²

Banco de Dissertações e Teses	
Ensino	Fração como objeto matemático de pesquisa
<i>Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática</i>	<i>O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: sequência didática e o</i>

² Não foram encontradas, nesse banco de dados, dissertações ou teses relacionadas à aprendizagem de fração.

para residentes de uma casa de passagem (CHEQUETTO, 2016)	uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II (LIMA, 2014)
<i>Concepções e práticas de professores do Ensino Fundamental sobre o ensino de frações: um estudo em escolas de Cuiabá</i> (SILVA, 2013)	<i>Ensino e aprendizagem de frações mediadas pela tecnologia: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud</i> (BOLOGNANI, 2015)
<i>O ensino de frações por atividades</i> (ALVES, 2018)	<i>Khan Academy: possibilidades do uso do jogo como ferramenta de apoio pedagógico no ensino e aprendizagem de frações no ensino fundamental</i> (ARAUJO, 2017)
	<i>Uma formação continuada sobre frações</i> (CERVANTES, 2011)
	<i>Concepções e práticas de professores sobre o ensino e a aprendizagem e uma intervenção intencionalmente planejada no ensino de frações, por meio da resolução de problemas em um 5º ano do Ensino Fundamental</i> (BESSA, 2007)
	<i>Formação de professores dos anos iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração</i> (PINHEIRO, 2014)
	<i>A solução de situações que envolvem o conceito de fração por professores que ensinam matemática nos anos iniciais</i> (PEREIRA, 2017)

Fonte: Elaboração da autora.

O Quadro 3 expõe as pesquisas concernentes à realização de formações continuadas para o ensino de fração, encontradas na busca feita na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Já o Quadro 4 apresenta os resultados encontrados na busca feita no Banco de Dissertações e Teses da CAPES.

Quadro 3 - Formação continuada para o ensino de fração (BDTD)

Título da pesquisa	Ano	Âmbito
<i>Estudo e ensino de frações: aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada</i>	2015	Mestrado
<i>O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações</i>	2007	Doutorado
<i>O conceito de frações através do estudo dos registros de representação</i>	2001	Mestrado
<i>Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações</i>	2013	Mestrado
<i>Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para quinta série</i>	2005	Doutorado
<i>Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração</i>	2006	Mestrado
<i>Relação entre formação docente e desempenho de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas matemáticos</i>	2016	Mestrado

Fonte: Elaboração da autora.

Quadro 4 - Formação continuada para o ensino de fração (CAPES)

Título da pesquisa	Ano	Âmbito
<i>Pró-letramento em Matemática: problematizando a construção do conceito de frações: uma contribuição para formação de professores</i>	2012	Mestrado
<i>Uma formação continuada sobre as frações</i>	2010	Mestrado
<i>Introdução do conceito de números fracionários</i>	1997	Mestrado
<i>Ensinar-aprender frações em um curso de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental: conhecimentos e dificuldades evidenciadas</i>	2010	Mestrado

<i>Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental</i>	2007	Doutorado
<i>Formação de professores dos anos iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração</i>	2014	Mestrado

Fonte: Elaboração da autora.

As sínteses a seguir se referem a pesquisas envolvendo formação continuada para o ensino de fração (quadro 03 e quadro 04).

Ao buscar entender as dificuldades e aprendizagens de professores de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em relação ao conhecimento específico, pedagógico e curricular sobre fração, Siebert (2015) desenvolveu uma formação continuada organizada em nove encontros. O processo formativo baseou-se em Leontiev (1972) e em Palma (2010), os quais compreendem que a formação continuada possibilita o desenvolvimento profissional e pessoal dos professores. No desenrolar da pesquisa, Siebert (2015) contou com a colaboração de três professoras, uma do 4º ano e duas do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas de Cuiabá, pertencentes à Rede Estadual de Ensino do Mato Grosso. Do ponto de vista da abordagem do problema, a pesquisa caracteriza-se como qualitativa; quanto aos procedimentos técnicos, trata-se de pesquisa-ação. O interesse pela investigação surgiu no contexto do Projeto Observatório da Educação com foco em Matemática e Iniciação às Ciências (OBEDUC). O desenvolvimento de encontros formativos e o resultado de simulados realizados por meio do OBEDUC apontaram para a fragilidade de alunos e professores quanto à compreensão e ao tratamento dado ao ensino de frações. Como fonte de dados de pesquisa, Siebert (2015) utilizou: entrevista semiestruturada; observação; registro videográfico; portfólio do professor; registro das reuniões de acompanhamento na escola e diário de campo da formadora/pesquisadora. A análise do estudo contou com três categorias, a saber: a matemática e as frações na trajetória escolar, acadêmica e profissional das professoras; os processos de apropriação e significação conceitual; o movimento de reorganização das ações: os avanços e as dificuldades. Os resultados apontam que as professoras tiveram limitada oportunidade de acesso e atribuição de significado para o estudo de frações em seu itinerário escolar, acadêmico e profissional. As aprendizagens manifestadas pelas professoras concernentes ao conhecimento específico de fração apontam para a atribuição de outros significados para frações, além do parte/todo e quociente. Considerando o conhecimento pedagógico e curricular, os dados indicam que houve uma

reorganização do estudo de frações, visto que consideraram no planejamento outros referenciais curriculares além do livro didático e abrangeram no desenvolvimento desse conteúdo escolar a origem das frações como fruto da construção humana relacionado à necessidade da medida. As dificuldades relacionadas ao conhecimento pedagógico, curricular e específico demonstram que as participantes devem lidar melhor com as perguntas e respostas dos alunos, utilizar e compreender as proposições dos referenciais curriculares e representar geometricamente as frações impróprias.

Com o objetivo de discutir questões relacionadas à abordagem das representações fracionárias dos números racionais e seus diferentes significados, Silva (2007) desenvolveu uma formação continuada em 16 sessões de 4 horas cada, das quais três sessões foram destinadas à aplicação de uma avaliação diagnóstica; nove ao estudo dos significados das frações e a vivências de metodologias diversificadas; uma consistiu na elaboração de uma sequência de trabalho pelos professores, a qual foi desenvolvida com seus estudantes em sala de aula; três foram destinadas a entrevistas, sendo duas destas após a intervenção dos professores nas suas respectivas salas de aula, e a última sessão ocorreu um ano após a intervenção, com o objetivo de verificar as reflexões feitas pelos docentes depois da pesquisa.

Avaliando a competência dos professores em relação aos significados de fração (parte/todo, quociente, operador multiplicativo, medida e localização na reta numérica), a partir da análise das respostas dadas a alguns problemas, verificou-se um bom desempenho considerando o significado parte/todo. Contudo, em geral, os dados obtidos apontaram que o grupo de professores pesquisado apresenta dificuldades com a parte conceitual dos números racionais em sua representação fracionária. Além do mais, “houve mais dificuldades na compreensão e resolução de problemas que envolvem o significado operador multiplicativo com grandezas discretas do que com grandezas contínuas” (SILVA, 2007, p. 269). A análise das informações obtidas permitiu identificar alguns fatores que podem exercer influência sobre o processo de desenvolvimento profissional dos docentes. Um deles refere-se às dificuldades relativas ao conhecimento matemático do professor:

Observamos que as limitações nos procedimentos de ensino foram acarretadas pelo fato de os docentes terem um domínio não suficiente do conteúdo a ser ensinado. Este fato pode ter impedido que os professores percebessem a possibilidade de variações da metodologia utilizada, a fim de auxiliar seus alunos na construção do conhecimento (SILVA, 2007, p. 272).

O estudo aponta para necessidade de os cursos de formação inicial e continuada darem ênfase ao conceito de números racionais, complementado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária. A pesquisa conclui que é necessária uma

constante reflexão sobre a prática, sobretudo em ambientes que propiciem um trabalho colaborativo para que se rompam crenças e concepções dos professores sobre ensino e aprendizagem da Matemática e, em específico, do objeto matemático frações.

Ao estudar a aquisição do conceito de fração por meio dos registros de representação semiótica, Biffi (2001) apoia-se em Raymond Duval. Segundo Biffi (2001), é importante o conhecimento dos significados parte/todo, quociente, medida, além da compreensão das quantidades contínuas e discretas, para a aquisição do conceito de fração nos diversos contextos em que se apresenta. Além do mais “é preciso que o professor fale aos alunos com uma linguagem matemática acessível, antes de lhes impor regras, definições ou conceitos prontos” (BIFFI, 2001, p. 22).

Atuaram como sujeitos de sua pesquisa quarenta e quatro estudantes do terceiro semestre do Curso de Pedagogia. A metodologia utilizada em seu estudo contempla a pesquisa-ação. Os resultados indicam que as participantes da pesquisa passaram a reconhecer a importância do uso de vários registros de representação semiótica e da conversão entre eles para melhor apreensão do conceito de números fracionários.

Rocha (2013) investigou como um contexto de formação caracterizado como comunidade de prática colabora para aprendizagens de professores que ensinam Matemática. A formação foi constituída por reuniões semanais no Colégio Estadual de Paranaíba. Os sujeitos da pesquisa foram seis professoras dos anos finais do Ensino Fundamental, uma professora recém-formada, uma formadora e o pesquisador. O estudo, com abordagem qualitativa, procurou responder à pergunta de pesquisa: Que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de Professores de Matemática permitem aprendizagens de seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações?

Para responder essa questão, fez-se a descrição da trajetória da comunidade investigada para identificar os empreendimentos mobilizados na busca de aprender e ensinar frações. A análise dos dados foi feita a partir de episódios que revelaram processos de participação ocorridos na articulação e desenvolvimento de empreendimentos com o objetivo de evidenciar o que os membros dessa comunidade aprenderam no que tange aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática. Desse modo, foi possível identificar elementos da prática da comunidade investigada que permitiram essas aprendizagens. É o caso da reflexão e discussão a respeito da prática pedagógica, do compartilhamento de experiências bem como da produção de materiais manipulativos e do desenvolvimento de tarefas associadas ao material manipulativo construído, acrescentando-se a isso o enfrentamento de desafios e a reflexão acerca do processo de formação continuada.

Em sua investigação, Silva (2005) discorreu sobre as concepções de um grupo de professores de Matemática sobre números fracionários e a aprendizagem de alunos de quinta série, abordando ainda aspectos como a autonomia e dificuldades em possíveis mudanças de concepções em uma formação continuada. A metodologia adotada utilizou a pesquisa-ação no sentido de investigação colaborativa, uma vez que esta proporciona a interação entre pesquisador e professores participantes da pesquisa. Como sustentação teórica utilizou-se a Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard, para modelar a organização didática e matemática, as tarefas que associam as concepções de números fracionários: parte/todo, medida, quociente, razão e operador, bem como as técnicas para resolução dessas tarefas e o discurso tecnológico teórico que as justifica.

A investigação apontou que professores constroem, para a quinta série, organizações matemáticas para números fracionários muito rígidos, com tipos de tarefas que associam em especial a concepção parte/todo em contextos de superfície. Como técnica de resolução, utiliza-se a dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão.

O desfecho da pesquisa indicou mudanças na concepção dos professores em relação aos fracionários, além de indícios de mudanças em sua prática de ensino. No discurso dos professores participantes da pesquisa, foram observadas modificações a respeito da aprendizagem de seus alunos e da maneira de observá-los em ação.

Canova (2006) se propôs a identificar e analisar as crenças, concepções e competências de professores que atuavam no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental em relação ao conceito de fração. Seu estudo se baseou nas concepções teóricas de Vergnaud, Nunes e Ponte. Com o intuito de responder à pergunta de pesquisa, elaborou um instrumento investigativo composto por 29 questões subdivididas em quatro partes. A primeira parte foi sobre o perfil; a segunda se relacionava às crenças; a terceira, às concepções; e a quarta versa sobre competências. Os participantes da pesquisa foram 51 professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, distribuídos em três escolas da Rede Municipal de Osasco, São Paulo. Além do instrumento investigativo, foram realizadas entrevistas clínicas com 10% da amostra.

A sistematização da análise de dados também foi subdividida em quatro partes: perfil, crenças, concepções e competências. Na elucidação dos dados, foi utilizada a classificação teórica proposta por Nunes *et al* (2003), acrescentando-se as variáveis de quantidades contínuas e discretas, as representações (icônicas ou não), além dos invariantes do conceito (ordem e equivalência).

Os resultados da investigação evidenciaram que as crenças dos professores não são influenciadas pela sua prática docente, mas as concepções são. Quanto à competência,

constatou-se que não houve um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e os invariantes. O significado parte/todo teve o melhor desempenho, seguido do operador multiplicativo e quociente. O pior índice foi o do significado número; “inferimos que esses professores não entendem a fração como número” (CANOVA, 2006, p. 175). Além disso, os participantes da pesquisa apresentaram maiores dificuldades com as quantidades contínuas do que com as discretas. Essas evidências apontam para a necessidade de se ampliar o campo conceitual desses professores com relação ao objeto matemático fração.

Reconhecendo como função primária da escola a socialização do conhecimento científico, Martins (2016) objetivou investigar possíveis relações entre o desempenho na resolução de problemas matemáticos por alunos, por futuros professores e por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O desenvolvimento da pesquisa ocorreu dentro da perspectiva quanti-qualitativa. Martins (2016) realizou em um primeiro momento uma revisão entre os anos de 2004 a 2014 junto à Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, buscando discutir a formação inicial dos professores para atuar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase no domínio dos conceitos matemáticos. Foi evidenciado na pesquisa que os professores dos anos iniciais apresentam lacunas em sua formação matemática, o que conseqüentemente dificulta a apropriação dos conceitos matemáticos dos que estudam com esses professores.

Além da busca no BDTD, foi realizada uma pesquisa de campo em que, para a coleta de dados, foi empregado um questionário aplicado a 62 professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, foi aplicada uma prova nos moldes da Prova Brasil de Matemática a 278 alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, a 17 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a 18 concluintes dos Cursos de Formação de Docentes em Nível Médio e a 18 pedagogos.

A análise dos dados do questionário constatou que os conteúdos matemáticos que os professores consideram mais difíceis para ensinar são os números racionais, tanto na representação decimal quanto na fracionária e suas relações com a porcentagem. Ao analisar a prova que foi aplicada aos integrantes da pesquisa, comprovou-se que o maior índice de erro ocorre em questões que abordam o conhecimento sobre frações.

Conforme averiguado na investigação, presume-se que estudantes, professores e futuros professores dos anos iniciais apresentam lacunas na apropriação dos conceitos de frações e que o ensino de Matemática, sobretudo dos números racionais, no âmbito da Educação Básica e Superior, pouco tem contribuído para a superação de possíveis obstáculos epistemológicos que se apresentam no processo de aprendizagem.

A pesquisa destaca a necessidade da formação docente continuada. Segundo Martins (2016), a falta de conhecimentos didáticos e/ou matemáticos conceituais bem construídos pode criar obstáculos advindos da prática docente, o que afetará o avanço no processo de escolarização e do desenvolvimento cognitivo.

Com o objetivo de colaborar com a construção do conceito de fração, Schastai (2012) desenvolveu uma formação continuada com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir de oficinas pedagógicas do programa de formação continuada Pró-Letramento Matemática. A pesquisa foi realizada com 16 professores do 2º ano do 2º ciclo do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Ponta Grossa, com duração de 30 horas.

A metodologia utilizada inseriu-se em uma pesquisa interpretativa de natureza qualitativa com finalidade aplicada. Foram utilizados questionários pré-teste e pós-teste como instrumentos para análise de dados. Com a aplicação do questionário pré-teste, foi possível delinear o perfil dos professores, bem como detectar as dificuldades e obstáculos que os participantes encontravam no ensino de fração. Após a análise dos dados do questionário e do pré-teste, foi possível sistematizar sete oficinas pedagógicas visando o aprofundamento do conteúdo e das estratégias de ensino.

Após o término das oficinas foi aplicado um pós-teste que, juntamente com os comentários dos professores durante as oficinas, serviu como orientação para avaliar o aprendizado do objeto matemático a ser ensinado. Ao final da pesquisa, percebeu-se que as atividades realizadas nas oficinas pedagógicas contribuíram para ampliar o conhecimento dos professores tanto no aprofundamento conceitual quanto nas estratégias de ensino.

Cervantes (2010) identificou e analisou, durante o desenvolvimento de uma formação continuada, o conhecimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em relação ao processo de ensino e aprendizagem de fração. O processo formativo teve como propósito fomentar discussões/reflexões sobre a introdução do conceito de fração por meio do significado quociente.

A metodologia utilizada foi de natureza qualitativa e a pesquisa foi desenvolvida no âmbito do Observatório da Educação da UNIBAN, um projeto financiado pela CAPES. Como instrumento de coleta de dados, foram utilizados o questionário, registros de observações obtidos durante as sessões de formação, resolução de problemas propostos pelos professores e seus estudantes, além de uma entrevista semiestruturada.

A investigação baseou-se nas teorias de Schon (1983) sobre a formação de professores e em Shulman (1986), no que concerne ao conhecimento profissional docente. Quanto ao

processo de ensino e aprendizagem de frações, sustentou-se em Nunes (2003, 2009) e inspirou-se nos estudos de Streefland (1991, 1997).

O estudo concluiu que o trabalho colaborativo e reflexivo dos professores se torna fundamental para o desenvolvimento do conhecimento profissional docente. As reflexões proporcionadas durante a formação contribuíram para que os participantes da pesquisa rompessem com a tradição de iniciar o conteúdo de fração apenas com o significado parte/todo e que tivessem uma atitude positiva quanto à introdução do objeto matemático fração por meio do significado quociente. Nunes (2003) já havia indicado o início do ensino de frações por meio de situações envolvendo o significado quociente, haja vista que este amplia a ideia de divisão com números naturais.

De forma semelhante a Cervantes (2010), Silva (1997) em sua pesquisa proporcionou uma formação continuada com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental com o intuito de ampliar a proposta de introdução do conceito de fração, que ora ocorre somente com o significado parte/todo. Sua investigação tratou da introdução do conceito de fração por meio das concepções parte/todo, medida e quociente.

Silva (1997) elaborou uma sequência didática de dezoito horas, com atividades que colocassem os futuros professores em situações que lhes permitissem uma reflexão sobre essas diferentes concepções. O desfecho da pesquisa evidenciou que esses professores entenderam a importância da introdução do conceito de fração por meio desses multissignificados (parte/todo, medida, quociente).

O ensino de frações, conforme os estudos aqui apresentados, é um dos conteúdos mais difíceis de ensinar. Nesse sentido, Morais (2010) investigou os conhecimentos e dificuldades que emergem no fazer ensinar-aprender das professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O estudo baseou-se em Brousseau (2009, 2008, 1996), D'Amore (2007), Pais (2006, 2005), Almouloud (2007), Iglioni (2008), Bittencourt (1998). Quanto à metodologia, insere-se como uma pesquisa qualitativa na modalidade descritiva. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 05 professoras escolhidas dentre as 29 que participavam do curso de formação. Os instrumentos utilizados na investigação foram questionários, caderno de campo, teste e registros produzidos pelas professoras investigadas.

O estudo apontou que as investigadas têm dificuldades ao fazer comparação de frações e ao representar as frações, mas demonstraram facilidade na resolução algébrica de problemas com frações, bem como na construção de equação linear de problemas envolvendo aplicação de frações.

Pinheiro (2014), em um curso de formação continuada desenvolvido no contexto do Projeto Observatório da Educação, um projeto de pesquisa e formação desenvolvido na Universidade Anhanguera de São Paulo e financiado pela CAPES, analisou as mudanças de concepções relativas aos processos de ensino e aprendizagem de frações de professores que ensinam Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Os sujeitos da pesquisa foram três professoras e os dados da pesquisa foram obtidos em três momentos. O primeiro deles foi a aplicação de um teste diagnóstico por meio do qual foi possível planejar a segunda fase, a intervenção. No terceiro momento foram realizadas entrevistas e observações em sala de aula, com o propósito de identificar implicações do processo formativo na prática pedagógica dos sujeitos pesquisados.

O estudo objetivou analisar o processo de reconstrução dos conhecimentos das professoras investigadas sobre a utilização dos significados parte/todo e quociente na introdução do conceito de fração.

Os dados obtidos informaram a forte tendência que as professoras investigadas tinham acerca de que o significado parte/todo seria suficiente para resolver qualquer situação com fração. Com a formação continuada, essas professoras tiveram a oportunidade de discutir situações com o significado quociente e outras ideias subjacentes. Assim, as participantes da pesquisa puderam reconstruir suas práticas docentes e seus conhecimentos sobre os significados de fração.

Os resultados das pesquisas apresentadas evidenciam que ainda persistem os problemas no ensino e aprendizagem dos números fracionários. Percebemos, com essas pesquisas, que os professores da educação básica ainda ensinam o conteúdo de números fracionários focados no significado de fração parte-todo, sendo deixadas de lado as outras acepções. Outro fator gerador dessa problemática é a formação inicial desses profissionais, que contou com professores formadores que também não possuem conhecimento suficiente dos diferentes significados fracionários; dessa forma, ensinam utilizando, muitas vezes, apenas o conceito de parte-todo, perpetuando esse ciclo. Além disso, foi observado que o conhecimento matemático pode ser aprimorado quando se tem um conhecimento amplo dos números racionais, o que pode se dar com o estudo dos diferentes significados de fração durante a formação inicial e por meio de formação continuada.

Considerando essas informações, definiu-se a execução de uma formação para professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sobretudo no 4º e 5º ano, e que ensinam matemática. A formação continuada foi elaborada por meio de sequência didática com base nos princípios teóricos de Zabala (1998). Nela, abordou-se o conteúdo fração

considerando equivalência, comparação, natureza das quantidades, registros de representação semiótica e os diferentes significados (parte/todo, número, quociente, operador multiplicativo e medida).

Esta pesquisa se diferencia das demais na medida em que se considerou os significados de fração (MERLINI, 2005); os registros de representação semiótica (DUVAL, 2009), natureza das quantidades (NUNES *et al*, 2003), história das frações, equivalência e comparação de frações.

3 SUSTENTAÇÃO TEÓRICA DA PESQUISA

Nesta seção, trataremos dos elementos teóricos que sustentam esta pesquisa e que subsidiaram ideias e ações para chegarmos aos caminhos que nos conduziram à elaboração da sequência didática e ao seu desenvolvimento durante a formação continuada.

3.1 Sequência didática

Elucidaremos elementos norteadores quanto às diferentes concepções de sequência didática (SD) conforme os autores Zabala (1998), um dos mais renomados autores sobre o tema; Oliveira (2013), que escreve sobre a sequência didática interativa (SDI); e Borges Neto *et al* (2013), que postula a respeito da sequência Fedathi. Cada uma dessas sequências apresentam um modo intrínseco de desenvolvimento; possuem em comum a relação entre professor e estudante de forma integrada, relacionada, de forma que o papel do professor é de mediador e deve levar o estudante a ser autor no processo de aprendizagem. Segundo Zabala (1998), para ser um bom profissional é preciso ser competente em seu ofício, mas essa competência é adquirida com experiência e conhecimento. Entretanto, deve-se levar em conta a perícia de outros profissionais que atuam na mesma área.

Assim, para a melhoria da prática educativa é imperiosa a troca de experiências e de conhecimentos. O conhecimento envolve todas as variáveis que interferem em nossa prática, e a experiência inclui as nossas próprias ações e a dos outros professores. Acrescenta-se a isso a necessidade de um pensamento prático com capacidade reflexiva. É preciso contrastar e analisar a prática educativa com outras práticas. Mas nem sempre a comparação com outros colegas será suficiente, visto que “frente a duas ou três posições antagônicas, ou simplesmente diferentes, necessitamos de critérios que nos permitam realizar uma avaliação racional e fundamentada” (ZABALA, 1998, p. 13). É preciso ter critérios que ajudarão a fazer uma avaliação racional e fundamentada da prática.

O fato de que os processos de ensino e aprendizagem são extremamente complexos torna necessário que os professores disponham de referências e as utilizem para interpretar o que acontece em sala de aula.

A unidade mais elementar que constitui os processos de ensino e aprendizagem e que engloba o conjunto de todas as variáveis que incidem no processo educativo é a atividade ou tarefa. Assim, atividade ou tarefa é “uma exposição, um debate, uma leitura, uma pesquisa bibliográfica, tomar notas, uma ação motivadora, uma observação, uma aplicação, um

exercício, o estudo” (ZABALA, 1998, p. 17). Essas diversas variáveis apresentam estabilidade e diferenciação. Quando as atividades ou tarefas são colocadas em uma série ou sequência significativa, eles adquirem maior valor.

Sequência didática “é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Levando-se em conta tal ideia, é preciso considerar as sequências de atividades como uma unidade preferencial para análise da prática que incluirá o estudo e a avaliação sob uma perspectiva processual, que inclua as fases de planejamento, aplicação e avaliação. Para o desenvolvimento da sequência didática, é preciso refletir em que tipo de estudante se quer formar, o tipo de conteúdo a ser aprendido (conceitual, atitudinal ou procedimental) e os referenciais que darão suporte às atividades.

Os referenciais para a análise da prática possuem fonte sociológica, epistemológica, didática e psicológica, além de envolver diferentes graus de dependência e vinculação. Devido a isso, são agrupadas em dois grandes referenciais, um deles está ligado ao sentido e ao papel da educação, o que leva os educadores a perguntar: Para que ensinar? Para que educar? Sem as respostas a essas perguntas, nenhuma prática educativa se justifica. A fonte sócio-antropológica condiciona e delimita o papel que terá a fonte epistemológica. Assim os conteúdos, a função social, o saber, os conhecimentos, que decorrem da fonte epistemológica seguirão as finalidades da educação. A função fundamental que a sociedade atribui à “educação tem sido a de selecionar os melhores em relação a sua capacidade para seguir uma carreira universitária ou para obter qualquer título de prestígio reconhecido” (ZABALA, 1998, p. 27). Mas o papel da escola deve ser exclusivamente seletivo e propedêutico? O que pretendemos que os estudantes consigam? Essas perguntas fazem refletir em que tipo de estudantes se quer formar, pois é preciso pensar isso ao escolher que tipo de sequência de ensino se deve planejar, executar e avaliar.

Segundo Zabala (1998), as escolas ainda têm priorizado a capacidade cognitiva, o que corresponde à aprendizagem de conteúdos e disciplinas tradicionais. Mas o autor pondera que também é importante que as unidades escolares, bem como seus mestres, considerem as demais capacidades, tais como as capacidades “motoras, de equilíbrio e autonomia pessoal (afetivas), de relação interpessoal e de inserção e atuação social” (ZABALA, 1998, p. 28). Quando, segundo ele, se tenta potencializar certo tipo de capacidades cognitivas, ao mesmo tempo se está influenciando nas demais capacidades, mesmo que negativamente.

A maneira de organizar a aula, o tipo de incentivos, as expectativas que depositamos, os materiais que utilizamos, cada uma destas decisões veicula determinadas experiências educativas, e é possível que nem sempre estejam em consonância com o

pensamento que temos a respeito do sentido e do papel que hoje em dia tem a educação (ZABALA, 1998, p. 28).

Para Zabala (1998), os conteúdos são conceituais, procedimentais e atitudinais. Conteúdos conceituais são o que se “deve saber”; os procedimentais, o “saber fazer”; e o atitudinal, o que “se deve ser”. Porém, na maioria das avaliações a que os estudantes são submetidos, cobra-se muito os conteúdos conceituais em detrimento dos conteúdos atitudinais e procedimentais. Não é possível ensinar sem partir de uma ideia de como as aprendizagens se produzem.

As aprendizagens dependem das características singulares de cada um dos aprendizes; corresponde, em grande parte, às experiências que cada um viveu desde o nascimento; a forma como se aprende e o ritmo da aprendizagem variam segundo as capacidades, motivações e interesses de cada um dos meninos e meninas. (ZABALA, 1998, p. 34)

Os modelos de ensino devem ser capazes de atender à diversidade dos estudantes. Assim, a forma como se aprende, o tempo e o ritmo variam, e os professores precisam de desvelo ao lidar com o processo educativo.

A estrutura cognitiva possui uma rede de esquemas de conhecimentos e, por sua vez, esses esquemas são as representações que uma pessoa possui, num dado momento de sua existência, sobre algum objeto de conhecimento. Ao longo da vida, esses esquemas são revisados, modificados, tornando-se mais complexos e adaptados à realidade, mais ricos em relações.

Para que este processo se desencadeie, não basta que os alunos se encontrem frente a conteúdos para aprender; é necessário que diante destes possam atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência etc. Quando acontece tudo isto – ou na medida em que acontece – podemos dizer que está se produzindo uma aprendizagem significativa dos conteúdos apresentados (ZABALA, 1998, p. 37).

É importante durante o processo de ensino que os professores façam uma relação entre o conteúdo e os conhecimentos prévios dos estudantes. Todo conteúdo, por mais específico que seja, está associado a conteúdos de outras naturezas. Conteúdo factual/conceitual é um conjunto de fatos, acontecimentos, situações, dados, códigos, axiomas, datas, símbolos, ou seja, são os conteúdos que são cobrados em provas e concursos. O estudante aprende o conteúdo factual quando é capaz de reproduzi-lo. Segundo Zabala (1998, p. 42), “este caráter reprodutivo comporta exercícios de repetição verbal. Repetir nomes, as datas e as obras tantas vezes quanto for necessário até chegar a uma automatização da informação”.

O conteúdo procedimental envolve as regras, técnicas, destrezas, habilidades, que possuem ordenação. Por exemplo: ler, desenhar, calcular, classificar, traduzir, recortar, saltar,

inferir, espetar e muitos outros. Já o conteúdo atitudinal engloba uma série de conteúdos que envolvem valores, atitudes e normas. Conforme Zabala (1998), a sequência didática é completa quando o ensino envolve estes três tipos de conteúdo de forma interligada.

Zabala (1998) apresenta quatro exemplos de sequências didáticas para ensinar os conteúdos conceituais. Na primeira e na segunda fase da sequência didática, o estudante não foi instigado a pensar e nem foi levado a ser protagonista da sua aprendizagem, apenas reproduziu o que lhe foi ensinado; já na terceira e na quarta – as quais são recomendadas pelo autor –, apesar de não serem completas pelo fato de não incluírem os três conteúdos concomitantemente, o professor mediou o processo de ensino e aprendizagem e instigou seus estudantes a ser autor do conhecimento que se busca aprender.

O professor escolherá uma ou outra dependendo da concepção de conteúdo que o quer ensinar e o tipo de estudante que quer formar. Além do mais, são apresentados instrumentos que permitem introduzir atividades em diferentes formas de intervenção de forma a possibilitar uma melhora na sala de aula. O professor deve se questionar se uma sequência didática é apropriada ou não, levando em conta as fases da sequência didática, as atividades que a compõem e as relações que se estabelecem. A seguir serão ilustrados os quatro tipos de sequência didática apresentados por Zabala (1998).

Quadro 5 - Sequência didática 01

Sequência 1

1. *Comunicação da lição*
2. *Estudo individual sobre o livro-texto*
3. *Repetição do conteúdo aprendido*
4. *Prova ou exames*
5. *Avaliação*

Fonte: Adaptado de Zabala (1998, p. 56).

Essa sequência didática não permite saber os conhecimentos prévios que os estudantes possuem. Tampouco é possível saber se os conteúdos são significativos ou funcionais. Nesse tipo de sequência, o professor nunca controla a atividade mental do aluno, tal como está, não desperta o interesse do estudante. O professor também dispõe de poucos meios para se relacionar efetivamente com eles. As atividades que o estudante realiza de forma independente são básicas.

Para Zabala (1998), esse tipo de SD não produz uma aprendizagem significativa, pois não leva em conta a diversidade dos estudantes e não inclui outras atividades que ofereçam mais informações acerca dos processos que os estudantes seguem. Assim, para o autor, esse tipo de sequência didática se encaixa para o professor que utiliza o método tradicional do ensino e que ensina apenas conteúdos conceituais (como nomes, obras, datas, acontecimentos, dados e descrições). Essa SD carece de prestígio pelo fato de considerar o ensino como seletivo, no qual o melhor estudante é aquele que consegue decorar mais e não esquecer os conceitos nas provas, concursos e avaliações, ou seja, reproduzir o que lhe foi ensinado.

Quadro 6 - Sequência didática 02

Sequência 2

- 1. Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática*
- 2. Busca de soluções*
- 3. Exposição do conceito e algoritmo*
- 4. Generalização*
- 5. Aplicação*
- 6. Exercitação*
- 7. Prova ou exame*
- 8. Avaliação*

Fonte: Adaptado de Zabala (1998, p. 56).

Nessa Sequência Didática, o professor solicita aos estudantes diferentes formas de resolver o problema, o que lhe permite perceber os conhecimentos que os estudantes têm sobre o tema em questão, desde que todos participem. Os conceitos são apresentados depois da necessidade de resolver um problema.

A generalização necessária de todo conceito se produz quando já se comprovou seu valor num caso concreto. O professor consegue avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes analisando como eles resolvem o problema colocado. O fato de partir das opiniões dos estudantes e de suas contribuições para resolver os problemas é uma forma de avaliá-los e uma forma de estabelecer uma ordenação progressiva das atividades, a fim de que cada estudante avance segundo seu ritmo.

A contribuição dessa SD é que ela segue fases indutivas, pois os estudantes elaboram conceitos. Para Zabala (1998), essa sequência satisfaz muitas das condições que fazem com que a aprendizagem possa ser mais significativa, visto que permite uma atenção às características

diferenciais dos estudantes. E para que os estudantes se mantenham motivados, o professor precisa constantemente introduzir atividades que deem sentido à aprendizagem.

Quadro 7 - Sequência didática 03

Sequência 3

- 1. Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática em relação a um tema*
- 2. Diálogo entre professor ou professora e estudantes*
- 3. Comparação entre diferentes pontos de vista*
- 4. Conclusões*
- 5. Generalização*
- 6. Exercícios de memorização*
- 7. Prova ou exames*
- 8. Avaliação*

Fonte: Adaptado de Zabala (1998, p. 57).

Essa SD permite examinar os conhecimentos prévios dos estudantes, desde que todos participem do diálogo. Nela os estudantes participam na maioria das atividades, o que permite que o professor saiba o que possuem de conhecimento em relação ao conteúdo a ser ensinado. Com essas informações, o professor consegue fazer adequação das intervenções de acordo com as necessidades que se apresentam.

Esse tipo de SD gera conflito cognitivo e ativação do pensamento. As opiniões dos estudantes são cruciais para a construção do discurso do professor, bem como para gerar conclusões. Essa SD ajuda a promover algumas habilidades de construção pessoal de conceitos, mas é preciso acrescentar algumas técnicas de estudo e memorização. Além disso, ela se limita a um tipo de habilidade, a cognitiva.

Essa SD seguiu um esquema centrado na construção sistemática dos conceitos e a participação efetiva dos estudantes se notou especialmente nos processos iniciais. Logo, isso satisfaz a aprendizagem de forma significativa.

Contudo, a carência apresentada por esse tipo de SD relaciona-se à dificuldade do professor em conseguir manter o controle individual de cada aluno. É importante os estudantes tomarem cuidado para não apenas reproduzir as explicações finais do professor e não considerar que as atividades que foram feitas previamente com a participação deles sejam apenas liturgia

necessária para dar um tom atual à intervenção educativa. Afinal, se o estudante participar de toda a conceituação e generalização do conteúdo a ser estudado, mas, no momento da avaliação feita pelo professor, ele apenas reproduzir as conclusões finais do professor, de nada adiantará o processo feito pelo professor de colocar o estudante para refletir, dialogar e participar de todo o processo de aprendizagem.

Quadro 8 - Sequência didática 04

Sequência 4

- 1. Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática em relação a um tema*
- 2. Proposição de problemas ou questões*
- 3. Explicitação de respostas intuitivas ou suposições*
- 4. Proposta das fontes de informação*
- 5. Busca da informação*
- 6. Elaboração de conclusões*
- 7. Generalização das conclusões e síntese*
- 8. Exercícios de memorização*
- 9. Prova ou exame*
- 10. Avaliação*

Fonte: Adaptado de Zabala (1998, p. 58).

Esse tipo de SD dá evidência aos conhecimentos prévios, uma vez que os estudantes devem elaborar hipóteses ou suposições, o que é crucial para a investigação dos conhecimentos que possuem em relação ao tema tratado. Por isso, é essencial que o professor incentive a participação de todos os estudantes. O conteúdo conceitual está garantido. Já os conteúdos procedimentais aparecem como uma necessidade em se resolver problemas ou questões colocadas e são usadas de uma forma natural em função da necessidade de uso. Segundo Zabala (1998), a motivação é a alma da SD; se os estudantes não estiverem interessados a SD se rompe em uma das fases.

A atividade inicial é a peça-chave da unidade; nessa fase, o professor deve incitar os primeiros interesses e instigar o estudante a fazer perguntas e conseqüentemente a buscar respostas. Mas todas as fases posteriores giram em torno do protagonismo do estudante. É importante salientar que um dos papéis importantes do professor, segundo Zabala (1998), é de

favorecedor e dinamizador de todo o processo de ensino, além de estabelecedor de desafios individuais e coletivos.

Ao planejar o desenvolvimento de uma SD, é preciso refletir em que tipo de estudante se quer formar e na diversidade desses estudantes, posto que nem todos detêm o mesmo conhecimento (ZABALA, 1998). Acrescenta-se a isso a necessidade de realizar uma sondagem antes do desenvolvimento da SD, com a finalidade de entender os saberes iniciais e então elaborá-la, considerando esses conhecimentos iniciais.

Para que a aprendizagem seja significativa, a SD deve contemplar os conteúdos conceituais (factuais), procedimentais e atitudinais (ZABALA, 1998).

3.2 Sequência didática interativa (SDI)

A proposta didático-metodológica de SD iniciou na França nos anos 1980 e objetivava melhorar o processo de ensino da língua materna, o que outrora acontecia de forma fragmentada, vez que se trabalhava de forma separada, sem conexões, a ortografia, a sintaxe e cada categoria da gramática. A proposta da SD tornou-se inovadora porque implementou o ensino de forma integrada.

No Brasil, a partir da década de 1990, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o uso de SD passou a integrar o fazer do professor. No início, essa proposta metodológica era utilizada no ensino da língua materna com o subsídio da teoria dos gêneros do discurso, que tem como principal referência o sociointeracionismo de Vygotsky. Na atualidade, a SD vem sendo utilizada nas diferentes áreas do conhecimento e adota os passos descritos no quadro que se segue.

Quadro 9 - Sistematização da SDI

- Escolha do tema a ser trabalhado;
- Questionamentos para problematização do assunto a ser trabalhado;
- Planejamentos dos conteúdos;
- Objetivos a serem atingidos no processo de ensino e aprendizagem;
- Delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a formação de grupos, material didático, cronograma, integração entre cada atividade e etapas, e avaliação dos resultados.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2013, p. 54).

Segundo Oliveira (2013), o objetivo da sequência didática é a sistematização do processo de ensino e aprendizagem, sendo de primordial importância a efetiva participação dos estudantes desde o planejamento inicial. Assim, a Sequência Didática Interativa (SDI) é uma proposta didático-metodológica para ser utilizada no contexto da sala de aula no intuito de facilitar o processo de ensino e aprendizagem e tem como carro-chefe a técnica do Círculo Hermenêutico-Dialético (CHD). Essa nova ferramenta didática é assim definida:

A Sequência Didática Interativa é uma proposta didático-metodológica que desenvolve uma série de atividades, tendo como ponto de partida a aplicação do Círculo Hermenêutico-Dialético para identificação de conceitos/definições, que subsidiam os componentes curriculares (temas), e que são associados de forma interativa com teoria(s) de aprendizagem e/ou propostas pedagógicas e metodologias, visando à construção de novos conhecimentos e saberes (OLIVEIRA, 2013, p. 58-59).

Nesse processo é realizada uma sucessão de atividades para sistematização de conceitos individuais. Logo em seguida, esses conceitos individuais são afunilados em um só *conceito/definição* por meio de atividades com pequenos grupos. Esses *conceitos* são associados de forma interativa com teoria(s) de aprendizagem, com o objetivo de construir novos conhecimentos e saberes.

Em consonância com Oliveira (2013), a SDI possui dois momentos: o primeiro, denominado de **sequência de atividades**; e o segundo, designado **bloco de atividades**.

Ao desenvolver o primeiro momento, deve-se definir qual o tema a ser trabalhado, como por exemplo, *fração*. Após definido o tema, entrega-se a cada estudante da classe e/ou participante de uma oficina pedagógica uma pequena *ficha*; em seguida, o professor solicita que cada estudante/participante escreva na ficha o que entende por *fração*. Após as definições realizadas pelos estudantes de forma individual com respeito ao tema de estudo, o professor deve organizar a classe em pequenos grupos entre quatro e cinco pessoas e solicitar que façam uma síntese dos conceitos que foram construídos, resumindo em uma só frase (*definição*). É importante que cada pequeno grupo tente contemplar, nessa síntese, o que cada participante disse sobre o objeto de estudo. Após essa etapa, é solicitado que cada equipe escolha um representante, e assim é formado um novo grupo somente com o líder de cada equipe. O professor solicita que os *líderes* façam uma síntese da frase construída de todos os pequenos grupos. Dessa forma, é construída uma síntese geral (*definição*) de todos os participantes desse trabalho. Com esses passos, finda-se a sequência de atividades, a qual resulta na construção de uma *definição* sobre o tema em estudo.

O segundo momento está relacionado com o embasamento teórico do tema em estudo. O professor deverá trabalhar o conteúdo teórico por meio de uma exposição oral, *slides*, documentários, imagens, entre outros, sempre em constante diálogo com os participantes. Nessa etapa, o professor deverá escolher uma *teoria de aprendizagem*. Após o embasamento teórico do tema em estudo, o professor escolhe uma atividade para o fechamento do tema.

A sugestão é que se construa um novo conhecimento ou se produza um novo saber. Concretamente, ao final dessa *sequência de atividades*, solicita-se que os estudantes façam pesquisas sobre o conteúdo trabalhado em sala de aula e construam um *pequeno texto* sobre o tema estudado e/ou façam um relatório sobre a sequência de atividades *associando com a teoria* trabalhada.

É muito importante que o resultado final da aplicação dessa ferramenta didática seja socializado por meio da apresentação dos resultados em pequenos eventos nas universidades/escolas, seminários, congressos e até divulgado em redes sociais. A SDI, além de facilitar a integração entre professor e estudante, tem como desfecho a sistematização de conhecimentos preexistentes e a construção de um *novo* saber.

Nota-se que na proposição de uma SDI o estudante é colocado como protagonista da sua aprendizagem. Nesse sentido, ele tende a ser a parte mais importante do processo de aprendizagem. É o estudante que fará descobertas, análises e chegará a uma conceituação a respeito do que foi estudado.

A SDI realiza uma sondagem inicial na perspectiva de verificar as concepções dos diferentes grupos sobre a temática que se pretende estudar; é uma ferramenta didática que sistematiza *saberes* e produz novos *conhecimentos* com o subsídio de algumas fundamentações teóricas que devem ser alicerçadas em teorias educacionais.

3.3 Sequência Fedathi (SF)

A Sequência Fedathi se constitui numa proposta metodológica desenvolvida por professores, alunos de pós-graduação e pesquisadores da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Criada com o intuito de melhorar a compreensão em relação às problemáticas que envolvem a matemática e superá-los, a SF foi elaborada pelo professor Hermínio Borges Neto e formalizada em 1996 como uma sequência para o estudo e pesquisa no ensino de Matemática.

A sequência Fedathi propõe que, ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar

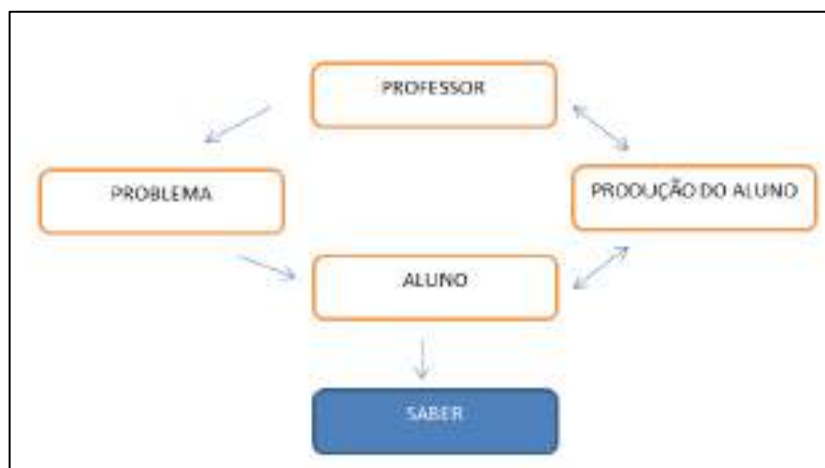
a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimento para constituir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo (SOUZA, 2013, p. 18).

A SF possibilita que os estudantes adquiram maior autonomia frente aos novos conhecimentos. De maneira avessa ao ensino tradicional, a SF é composta de quatro etapas interdependentes: tomada de posição, maturação, solução e prova.

A utilização desses passos conduzirá os estudantes à elaboração significativa de conceitos por meio da solução de problemas. Esses passos também induzem o professor a mediar o processo de busca de soluções, no intuito de levar os estudantes a construir o conhecimento em jogo. “Nesse processo, o docente deve levar em conta as experiências vivenciadas pelos alunos e seus conhecimentos anteriores acerca das atividades desenvolvidas” (SOUZA, 2013, p. 18). Ressalta-se que as mediações ou auxílios feitos pelo professor devem ser de forma a não interferir efetivamente na produção dos estudantes, mas é importante não deixar de direcioná-los efetivamente. Nesse processo, é importante ter equilíbrio, o que torna o trabalho delicado e exige dedicação do professor.

A figura a seguir apresenta uma síntese da relação professor-saber-aluno na formulação de um conhecimento por meio da SF.

Figura 1 - Relação professor-saber-aluno na SF



Fonte: Borges Neto *et al* (2013, p. 10).

Conforme figura, o ensino é iniciado pelo professor, que deverá selecionar um problema relacionado ao conhecimento que pretende ensinar, podendo também ser começado por uma situação proposta pelo estudante. O problema proposto pelo professor deve ser apresentado por intermédio de uma linguagem adequada. A seguir, diante do problema apresentado, os

estudantes devem explorá-lo na busca de uma solução. Encontrada a solução, o professor deve analisar sua pertinência junto ao grupo.

Na primeira, **tomada de posição**, “o professor exhibe o problema para o aluno, partindo de uma situação generalizável, ou seja, de uma circunstância possível de ser abstraída de seu contexto particular, para um modelo matemático genérico” (SOUZA, 2013, p. 21). É importante que a situação-problema tenha relação com o conhecimento a ser ensinado e que seja aprendida pelo estudante. A abordagem do problema poderá ser feita de várias formas:

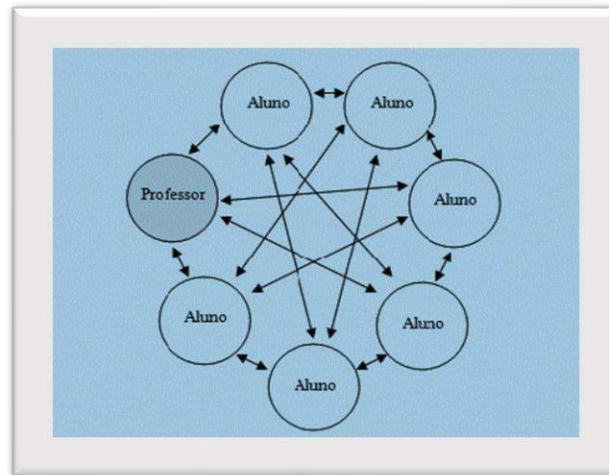
Seja mediada por uma situação-problema escrita ou verbal, de um jogo, de uma pergunta, da manipulação de material concreto; de experimentação em algum *software*, podendo o aluno trabalhar de forma individual e/ou em grupo (SOUZA, 2013, p. 21).

Ante as múltiplas formas de abordar a situação-problema, o professor deve realizar um **diagnóstico** acerca dos pré-requisitos iniciais à compreensão do saber a ser ensinado, bem como realizar uma sondagem para verificar se os estudantes possuem esses pré-requisitos. A realização do diagnóstico é determinante para a organização e o processamento das realizações didáticas do professor, posto que, analisando os conhecimentos iniciais dos estudantes, o professor terá consciência do nível deles, o que influenciará o planejamento de acordo com a realidade em questão. Ainda na tomada de posição,

O professor deverá estabelecer regras para nortear o trabalho dos alunos. Essas regras devem ir desde as realizações esperadas ante o problema proposto, com as interações desejadas entre alunos e professor, propiciando o desenvolvimento do trabalho interativo, integrando-se ao grupo, a fim de estabelecer uma **interação multilateral** [...] ou seja, aquela em que o professor, apesar de ser o detentor do conhecimento a ser apreendido pelos alunos, insere-se no grupo com a função de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca deste conhecimento, bem como suscitar estes questionamentos entre os alunos (SOUZA, 2013, p. 22).

Nessa perspectiva, é preciso estabelecer um contrato didático em que o professor e o estudante devem desempenhar suas funções com base no estabelecimento das regras. Todo o desenrolar do processo se faz de forma integrada, entre estudante-estudante e professor-estudante de forma que o professor possui a função de mediador dessa interação multilateral. A figura a seguir demonstra de forma detalhada o processo integrativo multilateral envolvendo os atores do processo educativo.

Figura 2 - Interação multilateral entre professor e aluno



Fonte: Souza (2013, p. 23).

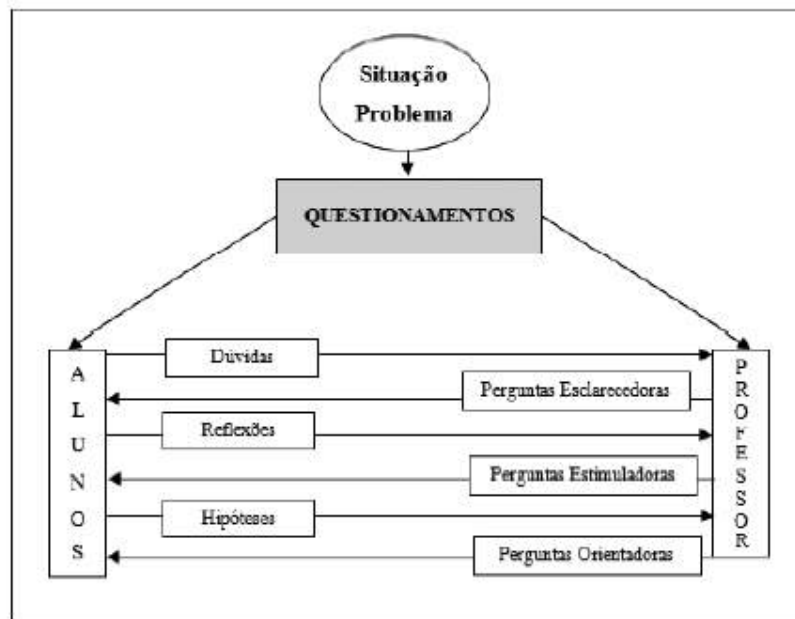
Fica evidente que, no processo integrativo multilateral, todos os envolvidos possuem a mesma importância e status durante as discussões; nesse sentido, o professor deixa de ser o centro do conhecimento para se tornar o condutor do dinamismo, de modo que é importante adotar uma linguagem acessível, sem deixar de lado as especificidades da comunicação matemática. Além do mais, é papel do professor preparar o ambiente, motivar e orientar, atuando como mediador em todo o processo educativo integrativo.

A **maturação** envolve a compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nesse estágio, o estudante deve compreender o problema e buscar caminhos que levem à solução. Nessa etapa, destaca-se a relevância dos **questionamentos**, os quais promovem o desenvolvimento intelectual dos estudantes e promovem um “*feedback*” ao professor, o que é necessário para que este acompanhe o desenvolvimento dos conteúdos ensinados.

Os questionamentos podem surgir dos alunos ou ser propostos pelo professor, de formas variadas. Em sua maioria, surgem por parte dos alunos no momento em que se debruçam sobre os dados do problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução do problema. Os questionamentos também podem partir do professor através de perguntas estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras (SOUZA, 2013, p. 23).

De maneira construtiva, os estudantes e professores fazem uso de questionamentos. Por parte do professor, são questionamentos de maneira estimuladora, esclarecedora, mas em consonância com a busca de soluções para a situação-problema ora apresentada. A figura a seguir sintetiza alguns questionamentos que podem surgir durante a maturação do problema.

Figura 3 - Tipos de questionamentos relacionados à situação-problema



Fonte: Souza (2013, p. 24).

Conforme apresentado, alguns questionamentos dos estudantes são **dúvidas** que surgem no início da resolução do problema acerca de qual conceito, definição ou caminho utilizar na resolução da situação-problema. Nesse sentido, segundo Borges Neto *et al* (2013), o professor deve apresentar uma postura de *mão no bolso*, ou seja, fazer o estudante refletir, pensar, ponderar sobre os caminhos que levem à solução, fazendo uso de perguntas esclarecedoras, mas sem proporcionar a resposta de forma direta.

Após a solução do problema, algumas **reflexões** ocorrem, como por exemplo, se a solução obtida está correta, ou se existem outras maneiras de resolver o mesmo problema. Nesse momento, o professor deve fazer questionamentos estimuladores, com o intuito de continuar motivando seus estudantes. Algumas **hipóteses** manifestam-se “quando os alunos buscam os caminhos para constatar ou testar se suas respostas realmente estão corretas” (SOUZA, 2013, p. 26).

Além dos estudantes, os professores também fazem questionamentos, conforme se exemplificou na figura 05 (perguntas esclarecedoras, perguntas estimuladoras e perguntas orientadoras).

Conforme Souza (2013), as perguntas esclarecedoras têm o objetivo de levar o estudante a entender o assunto apresentado. São perguntas do tipo: *O que o problema está pedindo? Qual a pergunta principal?* As perguntas estimuladoras têm como propósito levar o educando a fazer descobertas. São perguntas do tipo: *Será que todo quadrado é um losango? Quais as*

propriedades do quadrado? E do losango? Já as perguntas orientadoras fazem os estudantes “tentar estabelecer compreensões e relações entre o problema e o caminho a seguir para chegar à solução” (SOUZA, 2013, p. 27). Essas perguntas são do tipo: *Será que o problema pode ser resolvido por meio da Aritmética? Será que fazer uma tabela com os dados do problema pode levar à solução?*

Em síntese, os questionamentos são essenciais na orientação do raciocínio, posto que subsidiam a organização do pensamento, o levantamento de hipóteses, as análises e as reflexões acerca da solução.

A fase da maturação é essencial para o desenvolvimento do raciocínio e da aprendizagem final por parte dos estudantes. Quando não se prioriza sua participação nessa fase, a aprendizagem se torna superficial e volátil.

A fase da **solução** envolve a representação e organização dos esquemas referentes à solução do problema.

Os alunos deverão organizar e apresentar modelos que possam conduzi-los a encontrar o que está sendo solicitado pelo problema; esses modelos podem ser escritos em linguagem escrita/ matemática, ou simplesmente por intermédio de desenhos, gráficos, esquemas e até mesmo de verbalizações (SOUZA, 2013, p. 29).

Além da estruturação dos modelos, é imprescindível a troca de experiências, discussões, ideias e opiniões concernentes aos modelos apresentados. Nessa etapa, o professor tem papel fundamental como mediador; ele deve organizar e coordenar as discussões e análises das soluções, na perspectiva de conduzir à elaboração e apresentação da solução final. “Na feitura da solução, é imprescindível que o professor analise junto aos alunos as diferentes formas de representação por eles apresentadas, para, com o apoio nelas, buscar a constituição do novo conceito matemático aplicado” (SOUZA, 2013, p. 29). Nessa fase, o professor além de mediador, é também detentor do conhecimento e deve se postar frente às discussões, organização e análise das soluções por meio de uma **relação bilateral**.

A competência didático-matemática é, neste contexto, definida como o conjunto dos conhecimentos matemáticos e didáticos incorporados pelo professor e sua habilidade em acioná-los de forma conjunta durante as etapas do ensino, de modo a atingir os objetivos previamente definidos, em relação aos saberes matemáticos a serem construídos pelos alunos (SOUZA, 2013, p. 32).

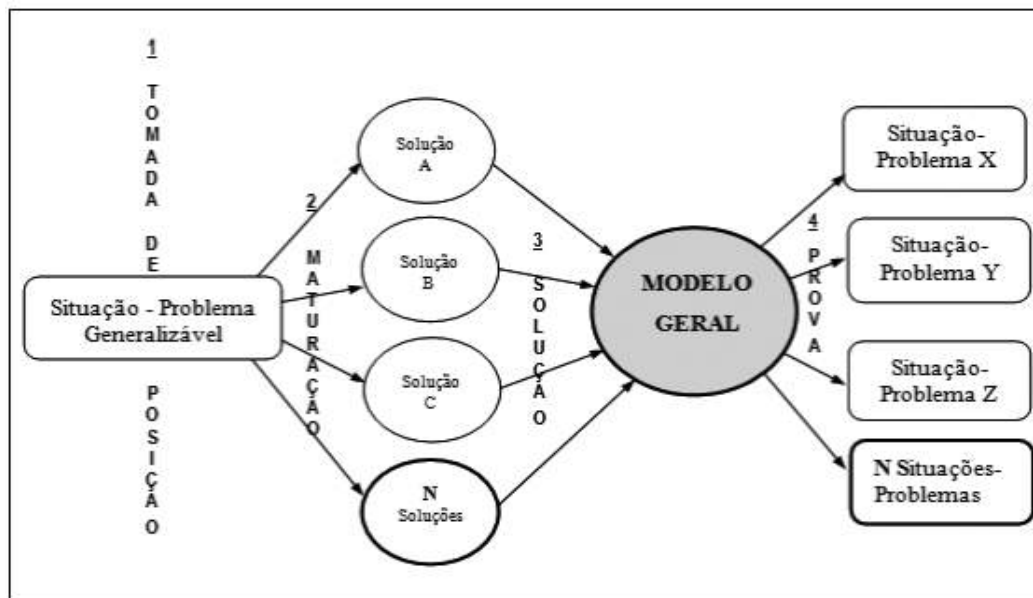
Em todo o processo, o professor deve ter uma base sólida dos conceitos matemáticos. De forma paralela, é preciso conhecer e utilizar os elementos pertinentes à Didática Geral e Didática da Matemática, dado que esses saberes são essenciais na motivação, compreensão e participação dos estudantes na estruturação das soluções.

Na fase da **prova**, acontece a formalização do modelo matemático. Nessa perspectiva, o professor precisa fazer uma relação entre os modelos matemáticos apresentados e o modelo matemático científico a ser apreendido. “É nessa etapa final que o novo saber deverá ser compreendido e assimilado pelo aluno, levando-o a perceber que, com base neste, será possível deduzir outros modelos simples e específicos” (SOUZA, 2013, p. 33).

Podemos dizer que o modelo geral refere-se ao conceito final, representação genérica ou fórmula a ser apreendido pelo aluno, a qual será um objeto de conhecimento tanto para a resolução do problema em questão, como para sua aplicação na resolução de outras situações-problema (SOUZA, 2013, p. 34).

Conforme Souza (2013), a finalização da sequência Fedathi ocorre com a apresentação de um modelo geral referente ao saber a ser apreendido. A figura seguinte retrata as quatro fases referentes ao desenvolvimento da sequência Fedathi.

Figura 4 - Desenvolvimento da sequência Fedathi



Fonte: (Souza, 2013, p. 34).

Em suma, conforme modelo apresentado, a sequência Fedathi é estruturada em quatro etapas: na primeira, o professor apresenta a situação-problema de forma contextualizada e clara; na segunda, denominada de maturação, o estudante percorre caminhos em busca da solução do problema; na terceira, o estudante apresenta a solução do problema; na quarta, o professor apresenta a solução do problema de maneira científica, ou seja, de maneira formal e apresenta o novo conhecimento, suas propriedades e formas de verificação.

3.4 Natureza das quantidades

É importante ensinar fração considerando os seus díspares significados, bem como os diferentes tipos de quantidades: contínuas, descontínuas, extensivas e intensivas. A maioria dos professores da educação básica geralmente focam no ensino de fração considerando a correlação parte-todo e as quantidades discretas (descontínuas), objeto que os estudantes costumam apreender com facilidade.

Cotidianamente utilizamos os números relacionados a uma quantidade. Quando expressamos “três metros” ou “três quilos”, segundo Nunes *et al* (2005, p. 120), estamos nos referindo a quantidades extensivas. Uma forma simples de pensarmos em quantidades extensivas é pensar no número três, nos exemplos, como um indicador de quantas unidades temos (NUNES *et al*, 2005, p. 121).

Para classificarmos as quantidades, precisamos diferenciar as quantidades contínuas das descontínuas (discretas). Segundo Nunes *et al* (2005), um exemplo de quantidade contínua é quando comparamos a unidade convencional “metro” com uma mesa, que possui, por exemplo, um comprimento de dois metros. Ao fazer a medição, percebe-se que a mesa equivale a duas vezes o comprimento da unidade convencional, metro. Esse tipo de quantidade é conhecido como quantidade contínua, visto que os metros não estão separados no comprimento da mesa. Mas, ao aferir o comprimento da mesa por inteiro, possui dois metros, ou seja, as diferentes unidades que compõem a quantidade não são percebidas separadamente. “Dois metros” expressa a comparação da unidade de comprimento, o metro, com o outro comprimento, o comprimento da mesa.

Constata-se que um botão é também um objeto, ou seja, as unidades são objetos distintos e consegue-se visualizar esses objetos. Quantidades como essas são chamadas de discretas. As duas quantidades, contínuas e descontínuas, estão estruturadas na relação parte-todo. Segundo Nunes *et al* (2005), a dificuldade em se comparar quantidades contínuas em relação às descontínuas reside em dois aspectos: “(1) as unidades não são naturais, e, portanto não são percebidas; e (2) as unidades são convencionais, portanto precisa haver um acordo sobre qual será o tamanho da unidade utilizada” (NUNES *et al*, 2005, p. 121).

Além de diferenciar e entender as quantidades contínuas e discretas, precisamos definir, apontar e compreender quantidades extensivas e intensivas. De acordo com Nunes *et al* (2005), quando se comparam duas quantidades de mesma natureza utilizando a lógica da relação parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva. Por exemplo, a comparação

de três tijolos com uma pilha de tijolos. Na quantidade extensiva, usa-se o raciocínio aditivo, visto que se utiliza a relação parte-todo.

Quando se comparam duas quantidades distintas, dizemos que a medida se refere a uma quantidade intensiva. A título de exemplo, podemos citar uma limonada. Quando uma limonada está “fraca”, é porque possui mais água do que limão; quando está “forte”, a concentração de limão é maior que a de água. Logo, estamos comparando água (uma quantidade) com limão (outra quantidade), o que são duas unidades/quantidades distintas, portanto uma quantidade intensiva. Aqui, a lógica não é a relação parte-todo, mas o elo entre quantidades diferentes, portanto utiliza-se o raciocínio multiplicativo (NUNES *et al*, 2005).

Considere uma comparação entre as quantidades intensivas e extensivas, relacionadas em uma mesma situação. Pense em duas jarras de suco de laranja, uma com 800 ml de suco e outra com 200 ml. Colocando o suco da primeira e da segunda jarra em uma maior, teremos uma jarra de suco com 1000 ml. Essa situação retrata uma quantidade extensiva, dado que envolve uma junção (adição) do suco de duas jarras menores em uma única maior com 1000 ml, ou seja, está explícita a relação parte-todo e envolve uma comparação de suco de laranja com suco de laranja; logo, quantidade extensiva (NUNES *et al*, 2005). Agora, considere essa mesma situação, mas a primeira jarra com suco concentrado de 80% e a segunda com suco concentrado de 20%. Nessa situação, não podemos somar 80% com 20% sem levarmos em consideração a quantidade de água, posto que o suco concentrado de 80% na primeira jarra contém 200 ml de água, e o suco concentrado de 20% possui 800 ml de água. Aqui estamos trabalhando com duas quantidades distintas: água e concentrado de suco. E ao unificarmos essas duas jarras em uma única iremos obter não 1000 ml de suco, mas 1000 ml de partes de água e 1000 ml de partes de suco concentrado. O que retrata uma quantidade intensiva, posto que a situação parte-todo não se encaixa aqui e as relações acontecem entre duas quantidades distintas (água e concentrado de suco), denotando uma razão (NUNES *et al*, 2005). Em síntese, as quantidades intensivas são medidas pela relação entre duas unidades diferentes, por exemplo, reais por quilo, quantidade de suco concentrado em relação à quantidade de água e são caracterizadas por uma fração ou razão (NUNES *et al*, 2005).

3.5 Significados de fração

Diferentes estudos têm evidenciado dificuldades relacionadas à compreensão de fração, tanto do ponto de vista do ensino quanto da aprendizagem (BEZERRA, 2001); (SANTOS 2005); (MERLINI, 2005); (TEIXEIRA, 2008); (DIAS, 2012). Segundo Merlini (2005), os

procedimentos de ensino de fração têm sido, na maioria das vezes, de forma algoritmizada e com forte tendência ao significado parte-todo. Segundo Nunes *et al* (2003 *apud* MERLINI, 2005), a classificação teórica de fração contempla cinco significados, a saber: parte/todo, número, medidas, quociente e operador multiplicativo.

A concepção do conceito de fração ocorre quando os estudantes conseguem perceber/resolver diferentes situações-problema envolvendo os cinco diferentes significados. Para isso, os professores precisam permitir situações diversas relacionadas aos múltiplos conceitos fracionários.

Considerando a relevância do ensino de fração pautado nos cinco significados fracionários, este tópico se destinará ao seu delineamento.

3.5.1 Significado parte/todo

Segundo Merlini (2005), o significado parte-todo pode ser representado pelo todo dividido em n partes iguais, sendo que cada parte pode ser exibida na forma $\frac{1}{n}$. Em geral, as situações-problema, quando envolvem o significado parte/todo, são resolvidas com o procedimento de dupla contagem, em que o todo é o total de partes iguais em que foi particionado (denominador) e o número de partes tomada deste todo (o numerador).

Segundo Silva (2005), o significado parte/todo, emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, volume, área...) em partes equivalentes/iguais ou uma grandeza discreta, como por exemplo, uma coleção de objetos (botões, bonés), em partes iguais, em quantidades de objetos. A seguir, serão apresentados dois exemplos, um relacionado à quantidade contínua e outro à quantidade discreta concernente ao significado de fração parte/todo.

Exemplo 1 (quantidade contínua)

Pedro comprou uma barra de chocolate, partiu em três partes iguais e deu duas partes para João. Qual fração representa a parte de chocolate que João recebeu?

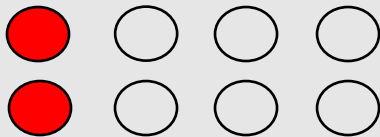
Considerando essa situação, o estudante deve perceber que o todo foi dividido em três partes iguais (denominador) e que a parte conferida a João se refere ao número de partes tomadas do todo (numerador). Assim, a fração que representa a parte de chocolate que João

recebeu é $\frac{2}{3}$. Portanto, trata-se de uma comparação parte/todo denominada de significado (MERLINI, 2005).

O exemplo dois é atinente à quantidade discreta. Nesse tipo de situação, divide-se uma coleção de objetos em partes iguais, em quantidades de objetos. Assim:

Exemplo 2 (quantidade discreta)

Considerando o total de bolinhas, indique a fração concernente às bolinhas pintadas.



A técnica empregada nesse tipo de situação é a dupla contagem, consistindo em contar o total de bolinhas, que nesse caso ocupará o lugar do denominador (8), e contar as que são vermelhas, que ocuparão o lugar do numerador (2) $\rightarrow \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}$. Cada bolinha compreende uma parte do conjunto e duas delas são vermelhas.

Em situações envolvendo quantidades discretas, segundo Merlini (2005),

O aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências, como: identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo conserva-se, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da unidade) (MERLINI, 2005, p. 29).

Em outros termos, o estudante deve fazer a identificação da unidade; nesse caso, o total de bolinhas e que esse todo não se altera mesmo sendo dividido em partes.

3.5.2 Significado número

O significado número se relaciona à fração que é transformada em número quando convertida em sua forma decimal ou ao apresentar um número na reta numérica em forma fracionária ou decimal. A compreensão desse significado envolve a representação numérica da fração (LAPA, 2013).

Assim como os números inteiros, as frações são números que não precisam referir-se a quantidades específicas:

Ao admitir a fração com o significado número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa ideia. Nessa perspectiva, não tem sentido abordar esse significado em quantidades contínuas e discretas (MERLINI, 2005, p. 27).

Em outros termos, a fração com o significado número, para ser entendida, não precisa de um contexto ou situação específica. Na situação adiante será apresentado um exemplo típico envolvendo significado número.

Exemplo (significado número)

Representem na reta numérica as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$

O estudante, frente a essa situação, deve de início, reconhecer as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ como um número (significado), e não uma superposição de dois números naturais. Acrescenta-se a isso a percepção de que todo número tem um correspondente na reta numérica e que, para localizá-lo, é preciso utilizar o princípio de ordenação (invariante). Nessa perspectiva, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ são números compreendidos entre 0 e 1; soma-se a isso a necessidade de o estudante entender que à direita, à esquerda e entre esses dois números existem infinitos números (MERLINI, 2005). Para a representação destes, existem as formas ordinária e decimal. Assim: $\frac{3}{4} = 0,75$ e $\frac{4}{5} = 0,8$.

3.5.3 Significado medida

Para Caraça (2005), medir é comparar duas medidas de mesma espécie e para isso é preciso ter um termo de comparação único. Assim, destaca-se em relação à medida que “existem três fases e três aspectos distintos – escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão dessa comparação por um número” (CARAÇA, 2005, p. 30).

No tocante à concepção de medida envolvendo comprimento, Silva (2005) salienta que, geralmente, pode solicitar a manipulação de três tipos de objetos *ostensivos*:

A figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário $\frac{1}{b}$ que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em b partes para permitir a medição e o número fracionário $\frac{a}{b}$ que representará o resultado da medição realizada (SILVA, 2005, p. 118).

Em outros termos, é preciso fazer a escolha da unidade e particioná-la em subunidades ($\frac{1}{b}$) para permitir a medição; por fim, a expressão dessa medição será realizada em forma fracionária ($\frac{a}{b}$), que representará o resultado da medição realizada. A seguir, será apresentando um exemplo envolvendo o significado medida.

Exemplo (significado medida - quantidade extensiva)

Encontre a fração que representa a medida de água em uma limonada feita com duas medidas de concentrado de limão e três medidas de água.

Nessa situação, a razão é de 2 para 3. Escolhendo a unidade (ml), e considerando nesse contexto cinco partições, dado que são 2 partes de concentrado de limão e 3 partes de água, assim, a quantidade de água na limonada é de 600 ml, o que corresponde a $\frac{3}{5}$. A quantidade de concentrado de limão na limonada é de 400 ml, condizente à fração $\frac{2}{5}$. Assim, o todo é constituído de cinco partes, com a medida de água sendo de $\frac{3}{5}$ e a de limão $\frac{2}{5}$. Nesse sentido, podem ser feitas inúmeras limonadas que se manterá o mesmo sabor, dado que a ideia de fração foi considerada;

Medir envolve a relação entre duas variáveis, isso é evidente em situações que tratam da probabilidade de um evento. Calcula-se o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (MOUTINHO, 2005). O exemplo seguinte é concernente ao significado medidas envolvendo quantidades intensivas.

Exemplo (significado medida - quantidade intensiva)

Ao lançar um dado, qual a probabilidade de se obter o número 5?

Nesse tipo de questão, considera-se o número de casos possíveis, que é a quantidade de faces distintas que podem ser retiradas no lançamento de um dado, a saber, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O número de caso favoráveis é o objeto solicitado. Nesse contexto, o número 5. Portanto, a possibilidade de sair a face com o número 5 é de: $\frac{1}{6}$.

Algumas quantidades intensivas não podem ser apresentadas em forma de fração, mas sim como razão. Isso porque as quantidades intensivas só são consideradas fração quando ocorre a unificação das duas unidades distintas em um mesmo todo. Quando isso ocorre, o único significado atrelado a essa situação é o de medida (LAPA, 2013).

3.5.4 Significado quociente

As situações-problema no significado quociente são resolvidas por meio de divisões ou partilhas. Lapa (2013, p. 44) explica a diferença entre o significado quociente e o parte-todo: “É importante ressaltar que esse significado ultrapassa as ideias presentes no significado parte-todo, uma vez que, no significado quociente são apresentadas duas variáveis distintas e na parte-todo a relação acontece entre a mesma variável”.

Para Silva (2005, p. 121):

As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quociente para números fracionários estão, geralmente, associadas à distribuição de grandezas. O ostensivo $\frac{a}{b}$ que representa o resultado de uma distribuição significa que a foi distribuído em b partes, ou seja, a foi dividido em um número b de partes iguais.

No significado quociente, quando abrange quantidades discretas, conforme Merlini (2005), exige-se que o numerador seja divisível pelo denominador. Em contextos discretos e contínuos, Silva (2005, p. 121) afirma:

Em contextos discretos, a técnica é a divisão de naturais, não cabe a representação fracionária como resposta, mas a associação da concepção de operador. No caso de contextos contínuos, a técnica pede um plano de ação que pode tornar a divisão mais complexa, dependendo da distribuição solicitada.

A técnica na operação de divisão consiste em distribuir ou dividir a em b partes iguais, além de associar ao fracionário $\frac{a}{b}$ a operação $a : b$ (SILVA, 2005). A situação seguinte é um exemplo do significado quociente envolvendo quantidades discretas.

Exemplo (significado quociente - quantidade discreta)

Pedro possui 40 carrinhos de brinquedo e quer partilhar com oito dos seus primos esses carrinhos de forma que cada um obtenha a mesma quantidade. Que fração representa a quantidade de carrinhos com que cada um ficou?

Essa situação expõe duas variáveis distintas: carrinhos de brinquedo e crianças; portanto, a divisão é uma ferramenta importante para resolução. Assim: $40:8$ ou $\frac{40}{8} = 5$, ou seja, cinco carrinhos de brinquedo para cada criança, o que corresponde a $\frac{1}{8}$.

A situação seguinte aborda uma situação parecida, mas envolve o significado parte-todo, o que denota uma relação entre uma mesma variável. Soma-se a isso a possibilidade de comparar o significado parte-todo (uma variável) e o significado quociente (duas variáveis).

Exemplo (significado parte-todo – quantidade discreta)

Pedro tem 8 bolinhas de gude e perdeu 3 dessas bolinhas. Que fração representa as bolinhas perdidas em relação ao total de bolinhas?

Situação como essa pode ser resolvida pelo significado parte-todo, uma vez que abrange apenas uma variável: a quantidade de bolinhas; assim, pode ser resolvida por meio do processo

de dupla contagem. O total de bolinhas (que são 8) é o todo (denominador) e a quantidade de bolinhas perdidas (que são 3), o numerador. Assim, o objeto solicitado é: $\frac{3}{8}$ ou 3: 8.

O significado quociente, ao compreender quantidades contínuas, envolve duas variáveis. O exemplo a seguir é alusivo a essa situação.

Exemplo (significado quociente - quantidade extensiva)

Ao dividir 3 chocolates para 5 pessoas, qual fração representa o que cada pessoa recebeu de chocolate?

Em situações assim, o quociente (significado) representa a quantidade de chocolate que cada pessoa irá receber. Assim, 3:5 é igual a $\frac{3}{5}$; logo, cada pessoa receberá $\frac{3}{5}$ de chocolate. Em ambos os casos, contínuo ou discreto, a complexidade relacionada ao aspecto do significado quociente é

[...] partitiva – quando são dados a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade e pede-se o valor de cada parte –, ou por cotas – quando são dados a quantidade de inteiros e o valor de cada parte e pede-se a quantidade de partes possíveis (SILVA, 2005, p. 121).

Em síntese, no significado quociente a fração indica uma divisão. Diferentemente do significado parte-todo, que possui apenas uma variável, no quociente existem duas, sendo uma correspondente ao numerador e a outra ao denominador.

3.5.5 Significado operador multiplicativo

De acordo com Merlini (2005), o significado operador multiplicativo tem a função de transformador, ele imprime uma ação sobre um número ou quantidade transformando seu valor durante esse processo. Conforme a situação, as quantidades contínuas e discretas, considerando o operador multiplicativo, possuem diferentes funções:

Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo; e que em quantidades discretas, sua aplicação atua como um multiplicador divisor (MERLINI, 2005, p. 32).

Em outros termos, em um contexto contínuo, o operador multiplicativo atua ampliando ou reduzindo uma quantidade no processo; já em uma circunstância envolvendo a quantidade discreta, ele atua como um multiplicador ou divisor de uma determinada situação.

Para Silva (2005), o operador multiplicativo atua da seguinte maneira:

Nas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de operador, o fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como “algo que atua sobre uma quantidade” e a modifica produzindo uma

nova quantidade. Essa ação pode ser entendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final (SILVA, 2005, p. 134).

Nessa perspectiva, ele também atua como um escalar aplicado a uma quantidade, assim como um número inteiro, “no caso do número inteiro, por exemplo, poderíamos dizer 3 balas, no caso da fração, poderíamos ter $\frac{3}{4}$ de um conjunto de 4 balas” (MERLINI, 2005, p. 32).

Os dois exemplos adiante tratam do significado operador multiplicativo envolvendo quantidades contínuas e discretas, respectivamente.

Exemplo (significado operador multiplicativo - quantidade contínua)

Construa um quadrado cujo lado tenha $\frac{2}{3}$ da medida do lado de um quadrado de lado igual a 9 cm.

Nesse exemplo, o operador multiplicativo está imprimindo uma ação sobre uma grandeza contínua. Considerando o quadrado com as medidas dos lados igual a 9 cm, o sujeito deve perceber que o quadrado de lado medindo 9 deve ser transformando pelo operador $\frac{2}{3}$, sendo efetivado um novo quadrado de lado igual a 6 ($\frac{2}{3} \times 9 = 6$). A solução 6 pode ser obtida de três formas:

a) multiplicando o numerador dois (2) pelo lado do quadrado inicial (9) e depois dividindo o resultado por três (3). $(\frac{2}{3} \times 9) = \frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$;

b) dividindo o lado do quadrado dado (9) pelo denominador (3) e o resultado multiplicar pelo numerador (2)

$$(2 \times \frac{9}{3} = 3 \times 2 = 6);$$

c) dividindo o número dois (2) pelo denominador (3) e multiplicando o resultado obtido pelo lado do quadrado dado (9), assim:

$$(\frac{2}{3} = 0,667 \times 9 = 6).$$

O exemplo seguinte diz respeito à grandeza discreta.

Exemplo (significado operador multiplicativo - quantidade discreta)

Luiza comprou um pacote com 30 xuxinhas para cabelo. Como é generosa, ao chegar em casa, decidiu partilhar $\frac{1}{3}$ delas com sua irmã Lara. Com quantas xuxinhas Luiza ficou?

De forma análoga à grandeza contínua, os procedimentos de resolução possíveis são três:

a) multiplicando o numerador um (1) pela quantidade de bombons e o resultado dividindo pelo denominador três (3)

$$\left(\frac{1}{3} \times 30 = \frac{1 \times 30}{3} = \frac{30}{3} = 10\right);$$

b) dividindo a quantidade de bombons pelo denominador (3) e o resultado multiplicando pelo numerador (1)

$$\left(1 \times \frac{30}{3} = 10 \times 1 = 10\right);$$

c) dividindo o numerador um (1) pelo denominador (3) e o resultado multiplicando pela quantidade de bombons

$$\left(\frac{1}{3} = 0,3333 \dots \times 30 = 10\right).$$

Com base no entendimento dos cinco significados de fração – parte/todo, número medidas, quociente e operador multiplicativo, o Quadro 10 apresentará de forma sucinta a definição de cada significado, seguido de um exemplo.

Quadro 10 - Sistematização dos diferentes significados de fração

Significado	Definição	Exemplo
Parte-todo	Todo dividido em n partes iguais, sendo que cada parte pode ser exibida na forma $\frac{1}{n}$.	Pedro comprou uma barra de chocolate, partiu em três partes iguais e deu duas partes para João. Qual fração representa a parte de chocolate que João recebeu?
Número	A fração é um número; assim, para ser entendida, não precisa de um contexto ou situação específica.	Represente na reta numérica as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$.
Medida	Extensiva - é preciso fazer escolha da unidade e particioná-la em subunidades $\left(\frac{1}{b}\right)$ para permitir a medição; por fim, a expressão dessa medição será realizada em forma fracionária $\left(\frac{a}{b}\right)$, que representará o resultado da medição realizada.	Extensiva - A fração que representa a medida de água em uma limonada feita com duas medidas de concentrado de limão e três medidas de água.

	Intensiva - a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Intensiva - Ao lançar um dado, qual a probabilidade de se obter o número 5?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nesse significado são apresentadas duas variáveis distintas (numerador e denominador).	Pedro possui 40 carrinhos de brinquedo e quer partilhar com oito dos seus primos esses carrinhos de forma que cada um obtenha a mesma quantidade. Que fração representa a quantidade de carrinhos com que cada um ficou?
Operador multiplicativo	Função de transformador, imprime uma ação sobre um número ou quantidade transformando seu valor.	Luiza comprou um pacote com 30 bombons. Como é generosa, ao chegar em casa, decidiu partilhar $\frac{1}{3}$ dos bombons com sua irmã Lara. Com quantos bombons Luiza ficou?

Fonte: Elaboração da autora.

A compreensão do conceito de fração envolve o conhecimento/saber dos diferentes significados de fração. Portanto, é salutar que docentes/discentes detenham esse conhecimento, sobretudo os docentes, que ao abordar o conceito de fração devem fazer uso de situações-problema envolvendo os cinco significados.

3.6 Registros de representação semiótica

O campo da Educação Matemática tem se empenhado em facilitar o ensino e aprendizagem matemática. Para isso, o uso dos diferentes registros de representação semiótica tem sido salutar, uma vez que não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação (DUVAL, 2009). No âmbito da matemática, faz-se necessário o uso de diferentes representações, o que é assim definido:

As especificidades das representações semióticas consistem em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza (DUVAL, 2009, p. 32).

Os fenômenos cognitivos, os quais envolvem percepção mental, memória e raciocínio, são inerentes à atividade matemática e levam à mobilização de vários registros de representação semiótica. Isso conseqüentemente implica a transformação dessas representações. Assim, para que a matemática se torne compreensível, é preciso que os educadores e educandos tenham conhecimento e façam uso desses registros.

Raymond Duval possui formação em Filosofia e Psicologia. Durante sua vida, debruçou-se em estudos relativos à Psicologia Cognitiva, os quais foram desenvolvidas no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França. Buscou na Psicologia Cognitiva contribuições para a aprendizagem em matemática, o que culminou na criação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Esse autor diz que o acesso ao objeto matemático se dá pela coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica, o que torna salutar o uso das conversões no processo de ensino e aprendizagem matemática, sobretudo em nosso campo de pesquisa, as frações.

Segundo Duval (2009), a matemática se diferencia das outras ciências devido ao fato de envolver conhecimento abstrato e, para que se tenha acesso a esse objeto, é preciso utilizar representações; assim, é necessário distinguir um objeto de sua representação:

É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números as funções, as retas, e etc., com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traços de figuras... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes (DUVAL, 2009, p. 15).

Um objeto matemático pode ser representado de maneiras diferentes, mas, se não identificado em suas diferentes formas, pode gerar uma confusão entre objeto e representação, resultando na perda da compreensão entre ambos. Duval (2009) conjectura que a aprendizagem em matemática se dá quando se consegue utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica referentes a um mesmo objeto. Assim, é preciso que os atores educativos não só identifiquem os diferentes registros, mas que também saibam coordená-los, transitando entre uma e outra representação de um mesmo objeto matemático para que ocorra a apreensão conceitual.

Para que ocorra essa coordenação de registros e a compreensão do objeto matemático, é salutar distinguir **tratamento** de **conversão**. Conforme Duval (2009, p. 39), “um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação”. De forma sucinta, tratamento envolve as transformações internas a um sistema

e mobiliza apenas um registro de representação semiótica. O Quadro 11 exemplificará o exposto.

Quadro 11 - Exemplo de tratamento

<p>Fração</p> $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$ <p>Tratamento da fração</p> $\frac{1*2}{2*2} = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$

Fonte: Elaboração da autora.

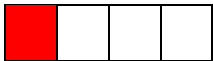
Ao somar as frações $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$, utilizou-se tratamento, dado que uma das formas de resolver esse tipo de situação é encontrando o mesmo denominador comum às frações, o que pode ser feito por meio das frações equivalentes. Assim, multiplicando numerador e denominador da fração ($\frac{1}{2}$) por um mesmo numeral, nesse caso específico o dois (02), encontra-se como fração equivalente $\frac{2}{4}$; em resumo ($\frac{1*2}{2*2} = \frac{2}{4}$). As duas frações, estando com o mesmo denominador, somam-se os numeradores e conservam-se os denominadores, em particular ($\frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$).

As transformações realizadas no sistema de escrita simbólico algébrico durante a partida não foram perpassadas a outro registro, nem durante o processo de resolução, nem no registro final. Isso se caracteriza como tratamento, dado que foi utilizado apenas um registro: o fracionário.

A **conversão** envolve o uso de pelo menos dois registros de representação semiótica. “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58). De forma sucinta, é uma transformação que ocorre externamente em relação ao registro de partida, havendo mudança de sistema semiótico.

O Quadro 12 apresenta um exemplo de conversão entre três diferentes registros de representação semiótica envolvendo o conceito de fração.

Quadro 12 - Exemplo de conversões

Registro Fracionário	Registro Decimal	Registro Geométrico
$\frac{1}{4}$	0,25	

Fonte: Elaboração da autora.

Na primeira situação, tem-se o registro fracionário, o que por sua vez foi convertido em decimal e finalizou com outro, o geométrico.

Para saber efetuar as transformações envolvidas na conversão, o sujeito precisa ter domínio cognitivo das representações mentais, que são

Um conjunto de imagens e de conceituações que um indivíduo pode ter sobre o objeto, sobre uma situação e sobre aquilo que lhe é associado. As representações semióticas, ou seja, as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais (enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica, ...) parecem apenas ser o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para tornar visíveis ou acessíveis a outros (DUVAL, 2009, p. 15).

As representações mentais envolvem noção de conceitos e suposições que o indivíduo possui de forma intrínseca; essas representações são exteriorizadas quando se faz uso dos registros de representação semiótica. Além dessas, as imagens mentais “são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo o significante perceptível” (DUVAL, 2009, p. 45).

Os meios utilizados na exteriorização de um objeto em sua representação mental são linguagem natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica e outros. Alguns trabalhos psicológicos e didáticos evidenciam que a *semiósis* é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* representa os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, tornando a *semiósis* independente da *noésis*. Porém, essa é uma hipótese que vai de encontro a alguns fenômenos importantes. “Para começar, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática” (DUVAL, 2009, p. 15). Os registros estão relacionados com o objeto matemático, e a aprendizagem destes torna mais acessível a compreensão. Dada a importância das representações semióticas para o estudo de matemática, a utilização das representações semióticas é intrínseca e aparece primordialmente na atividade matemática. Mas não se pode considerar a representação semiótica e as representações mentais como dois domínios diferentes:

As representações mentais e as representações semióticas não podem ser opostas como dois domínios totalmente diferentes. O domínio das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira

que as imagens mentais são uma interiorização das percepções (DUVAL, 2009, p. 17).

É a *semiósis* (apreensão ou produção de representação semiótica) que determina as condições de possibilidades e de exercício da *noésis* (apreensão conceitual de um objeto). Não existe *noésis* sem *semiósis*, dado que, no processo de conversão, o sujeito precisa ter coordenação dos registros e, para isso, o indivíduo precisa ter domínio conceitual dos objetos matemáticos para saber produzir um registro de representação semiótica. Segundo Duval (2009, p. 19), a coordenação dos processos de conversão não é familiar:

[...] a passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. Estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes: a escritura algébrica de uma relação e sua representação gráfica, a escritura numérica de um relatório e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano, o enunciado de uma fórmula em francês e a escritura dessa fórmula sob forma literal etc. E, de maneira mais significativa, uma tal separação persiste mesmo após, no processo de ensino, tendo sido bastante utilizados esses diferentes sistemas semióticos de representação.

O processo de transformação quando é exterior ao sistema (conversão), não é familiar à maioria dos estudantes no Brasil e na França. Esse fato é denominado de não congruência. Conforme evidenciado por Duval (2009, p. 78):

As dificuldades ligadas a não congruência da conversão podem ainda ser agravadas pelo desconhecimento de um dos dois registros de representação. Isso é particularmente o caso para os diferentes registros bidimensionais como os gráficos cartesianos, as figuras geométricas ou mesmo as tabelas, quer dizer, para todos os registros para os quais se admite muito facilmente que é suficiente “ver” o que as curvas, os desenhos ou a repartição dos números em quatro casos “mostram”.

Nesses termos, os professores devem instruir diferentes conteúdos apresentando múltiplas formas de representações semióticas, sobretudo os que envolvem registros bidimensionais, visto que são desconhecidos pela maioria dos estudantes, sendo eles os gráficos cartesianos, figuras geométricas, tabelas e outros; para que, assim, os estudantes consigam perceber que um mesmo objeto pode ser evocado de diferentes formas. Isso é importante pois, conforme mencionado, as transformações, quando em conversão, são obstáculo à maioria dos estudantes e, além disso, a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro.

Numerosas observações em aula, assim como análises dos resultados de investigações e de avaliações, e experiências de aprendizagens mostram que *a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos* (DUVAL, 2009, p. 63).

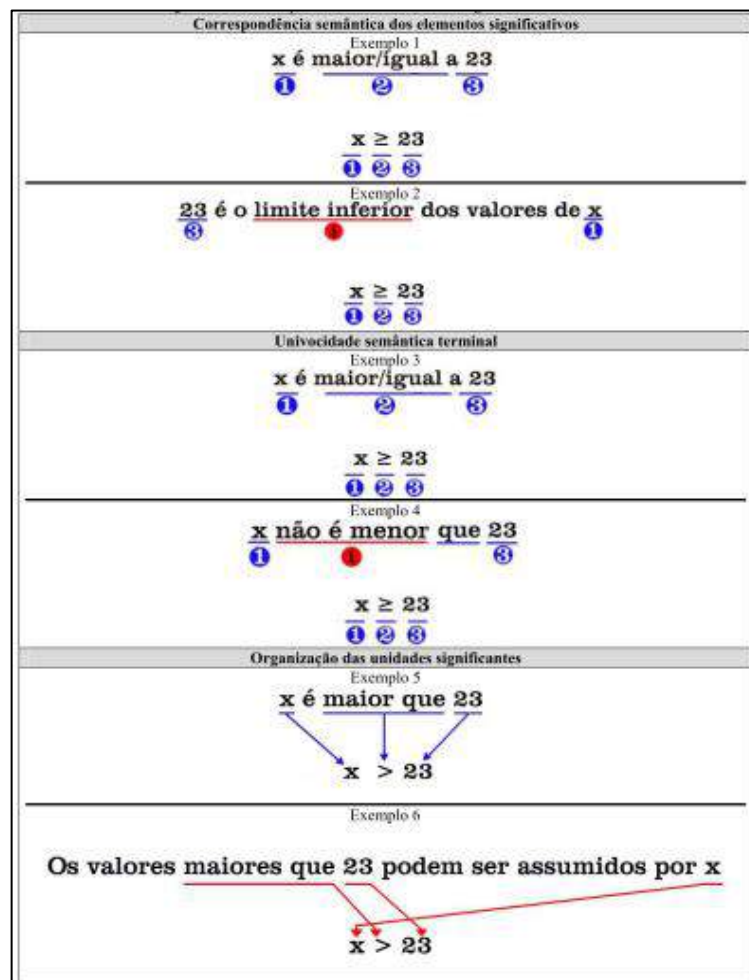
A maioria dos sujeitos executam de forma espontânea os tratamentos, que se efetuam dentro de um mesmo registro. O que facilita esse processo é o que Duval (2009) denomina de congruência:

A passagem de uma representação a outra se faz espontaneamente quando elas são congruentes, quer dizer, quando as três condições seguintes são preenchidas: correspondência semântica entre as unidades significativas que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significativa da representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada (DUVAL, 2009, p. 18).

Assim, segundo Duval (2009), quando a conversão se efetua no sentido escritura algébrica de uma equação \rightarrow gráfico, nenhuma dificuldade específica parece surgir. Mas, tudo muda quando é preciso tomar a conversão inversa, mesmo depois de um ensino sobre as funções lineares.

A figura 5 demonstra os três critérios relacionados à congruência semântica.

Figura 5 - Exemplo dos três critérios de congruência semântica



Fonte: Travassos (2018, p. 69).

No primeiro exemplo, a correspondência semântica é satisfeita, dado que as unidades significantes postas no enunciado em língua natural possuem correspondência com a resposta algébrica.

Já no segundo exemplo, percebe-se que as unidades “x” e “23” possuem correspondência com o registro linguagem natural, porém, a correspondência semântica não é satisfeita, visto que o termo “limite inferior” apresentado não tem correspondência com a unidade significativa \geq , presente na conversão algébrica, fato que acarretará em dificuldades ao indivíduo durante a conversão.

No terceiro exemplo, relativo à univocidade semântica terminal, a correspondência semântica é satisfeita, já que, para cada unidade significativa presente no registro de partida, há somente uma unidade significativa correspondente no registro de chegada.

No quarto exemplo, não há congruência semântica, visto que o termo “não é menor” pode ter várias interpretações, acarretando múltiplos registros de chegada, podendo ser eles “maior”, “menor” ou “igual”. Nesse caso, o processo de congruência está ausente, visto que um dos requisitos para a congruência é a univocidade semântica, ou seja, é preciso que haja um mesmo registro de partida e de chegada.

No quinto exemplo, no tocante à organização das unidades significantes, nota-se que a organização foi satisfeita, visto que a ordem em que as unidades significantes aparecem no registro de partida coincide com a ordem das unidades significantes no registro de chegada. Por outro lado, no sexto exemplo, inverte-se a ordem, ou seja, não há correspondência entre as unidades de partida e de chegada.

Os registros de representação semiótica possuem algumas funções essenciais. A primeira delas é objetivação ou tomada de consciência. A segunda, mais sutil, “consiste em ver nas representações semióticas um suporte para as representações mentais e em estimar que se passa espontaneamente da forma do representante ao conteúdo representado” (DUVAL, 2009, p. 34).

O fenômeno importante para compreender o papel da *semiósis* no modo como funciona o pensamento e na maneira como se desenvolvem os conhecimentos não é o emprego deste ou daquele tipo de signos, mas a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados (DUVAL, 2009, p. 35).

Os sistemas semióticos devem cumprir três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

Primeiramente, constituir um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma *representação de alguma coisa* em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de

conhecimento em comparação com as representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 2009, p. 37).

Nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades. Os que permitem são linguagem natural, linguagem simbólica, gráficos, figuras geométricas e outras.

Ainda com respeito aos registros de representação semiótica, eles constituem o grau de liberdade que um sujeito possui ao explicar a si mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, ao explorar informações ou quando se quer comunicá-las a um interlocutor.

A análise dos desenvolvimentos dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos, à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos confrontam *três fenômenos que aparecem estreitamente ligados* (DUVAL, 2009, p. 37).

Com relação a esses três fenômenos, o primeiro é a diversificação dos registros de representação semiótica, que é quando ocorre a oposição entre dois registros, por exemplo linguagem natural e linguagem simbólica.

O segundo é o da diferenciação entre representante e representado. “Essa diferenciação é geralmente associada à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento” (DUVAL, 2009, p. 39).

O terceiro fenômeno é o da coordenação entre os diferentes registros. Segundo Duval (2009, p. 38):

O conhecimento de regras de correspondência entre dois sistemas semióticos diferentes não é suficiente para que eles possam ser mobilizados e utilizados juntos. Um obstáculo maior para uma colocação espontânea dessa coordenação é a importância dos fenômenos de não congruência entre as representações produzidas em sistemas diferentes.

“Um estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais deve considerar esses três fenômenos relativos à *semiosis* e à operação de conversão que lhe é verdadeiramente intrínseca” (DUVAL, 2009, p. 38).

As representações externas são, por natureza, representações semióticas. Tais representações são então estreitamente ligadas a um estado de desenvolvimento e de domínio de um sistema semiótico. Elas são acessíveis a todos os sujeitos que aprenderam o sistema semiótico utilizado. As representações internas são as representações, pertencendo a um sujeito e que não são comunicadas a um outro pela produção de uma representação externa (DUVAL, 2009, p. 42).

As representações externas preenchem então uma função de comunicação. Mas elas preenchem igualmente duas outras funções cognitivas: a função de objetivação, como todas as representações conscientes, e a função de tratamento.

Uma representação interna pode ser consciente ou não consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não, exteriorizada. O cruzamento dessas duas oposições permite distinguir três grandes tipos de representações, conforme se observa no quadro:

Quadro 13 - Tipos e funções de representações

	Interna	Externa
Consciente	Mental - Função de objetivação	Semiótica - Função de objetivação - Função de expressão - Função de tratamento intencional
Não consciente	Computacional - Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: Duval (2009, p. 43).

A representação consciente-interna se refere às representações mentais e tem a função de objetivação. “As representações mentais são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível. Elas geralmente são identificadas as ‘imagens mentais’ como entidades psicológicas tendo uma relação com a percepção” (DUVAL, 2009, p. 45).

A representação consciente-externa se refere às representações semióticas, as quais têm função de externar as representações mentais. Conforme Duval, existe uma variedade de representações semióticas possíveis:

Figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões linguísticas, etc. Elas são divididas geralmente em duas grandes classes segundo elas conservem ou não certas propriedades pertencentes ao objeto que elas representam: as representações analógicas (as imagens em que, por exemplo, os elementos conservam as relações de vizinhança existentes entre os elementos do modelo) e as representações não analógicas, como as línguas, que não conservam nenhuma relação do modelo, mas que podem representar operações ou transformações do modelo (DUVAL, 2009, p. 44).

Existem nas representações semióticas as representações analógicas, concernentes às imagens, e as representações não analógicas, referente às línguas; por exemplo, a língua natural é “a organização semiótica por excelência”.

Além das representações conscientes (internas e externas), existem as representações denominadas não conscientes, que ocorrem somente no âmbito interno; nesses termos, as representações **computacionais** são designadas não conscientes e têm a função de tratamento automática ou quase instantâneo. Nas representações computacionais, os sujeitos aprendem sem entender o que estão fazendo, isto é, utilizam das transformações de forma automática e mecânica, o que não os leva à reflexão sobre o significado operatório do objeto matemático em questão. Para Duval (2009, p. 47):

As representações computacionais são todas aquelas cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem visão de objeto, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em outra. Essas representações traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável e combinável no interior desse sistema.

As representações computacionais são internas a um sistema e independem da visão que se tem de um objeto. Têm como atribuição a interpretação de informações externas a um sistema, deixando-a acessível a este. Além disso, conforme evocado por Duval (2009), as representações computacionais têm a função de tratamento instantâneo ou quase instantâneo:

Intuitivamente os tratamentos quase-instantâneos correspondem a familiaridade ou à experiência resultante de uma longa prática ou de uma competência adquirida em um domínio. O caráter imediato ou evidente de uma apreensão, perceptiva ou conceitual, implica a colocação de um conjunto de tratamentos quase-instantâneos (DUVAL, 2009, p. 51).

Já os tratamentos-intencionais “são aqueles que tomam ao menos o tempo de um controle consciente para ser efetuado e que se apoiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto” (DUVAL, 2009, p. 52).

O que diferencia os desempenhos cognitivos dos sujeitos são a diversidade e a arquitetura dos tratamentos quase instantâneos dos quais eles dispõem.

Quanto mais um sujeito possui possibilidades de tratamentos quase instantâneos num domínio, mais o número de elementos imediatamente integrados e fusionados em uma unidade informacional (“chunk”) é grande e mais o nível epistêmico de objetos que ele pode ver é elevado. Não haveria construção hierárquica de conhecimento possível sem o aumento dos tratamentos quase-instantâneos. A função desses tratamentos é, em efeito, fornecer a “percepção imediata” da consciência, unidades informacionais cada vez mais ricas para que essa possa ver os objetos mais complexos ou mais gerais (DUVAL, 2009, p. 52).

Nessa perspectiva, a aquisição de novos tratamentos quase instantâneos aparece então como condição de todo o progresso qualitativo na aprendizagem.

Em síntese, revela-se importante o uso das representações semióticas no desenvolvimento das matemáticas, sobretudo no ensino de fração. Infere-se que ainda existe uma grande lacuna quanto ao uso das conversões, mas esse fator pode ser coordenado com o uso contínuo dos diferentes registros em todos os conteúdos matemáticos a serem ensinados, para que os estudantes consigam verificar que diferentes representações se referem a um mesmo objeto matemático. Assim, “é importante que a formação de representações semióticas respeite as regras próprias do sistema empregado, não somente por razões de comunicabilidade, mas para tornar possível a utilização dos meios de tratamentos que oferece o sistema semiótico empregado” (DUVAL, 2009, p. 55).

A mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática, visto que facilita consideravelmente a aprendizagem e os procedimentos de interpretação.


A diversificação dos registros de representação semiótica é a constante do desenvolvimento dos conhecimentos tanto sobre o ponto de vista individual quanto científico ou cultural. Sua importância para o funcionamento do pensamento geralmente é explicada pelas diferenças de custo ou de limitação para a função de tratamento, e por aquelas possibilidades de apresentar para a função de comunicação, que existem entre os registros (DUVAL, 2009, p. 80).

Portanto, evidencia-se a importância de “uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda a tarefa de tratamento”; isso é necessário “[...] ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual” (DUVAL, 2009, p. 99).

Destarte, na tentativa de amenizar a problemática concernente ao ensino e aprendizagem de fração, busca-se respaldo nos construtos teóricos de Duval (2009), a fim de esclarecer fatos importantes das transformações entre os registros para a organização da aprendizagem conceitual matemática.

Considerando a necessidade de se trabalhar com a diversidade de registros e com as conversões, o Quadro 14 demonstra algumas diferentes representações referentes aos números racionais, na perspectiva dos registros de representação semiótica de Duval (2009).

Quadro 14 - Alguns registros de representação na perspectiva dos números racionais

Registro Figural Contínuo			
Registro Figural Discreto	★ ★ ★ ★ ★		
Registro simbólico numérico	$\frac{1}{5}$	0,2	20%

Registro simbólico Algébrico	$\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$		
Registro na Língua Natural	Um número racional escrito na forma na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração.	Um quinto	Vinte por cento

Fonte: Adaptado de Brita (2015).

Como suporte ao trabalho com números racionais, especificamente os fracionários, a sequência didática construída subsidiará o trabalho com os diferentes registros de representação semiótica e outros aportes, como já elucidado: significados de fração e natureza das quantidades (contínuas e discretas).

4 O DESLINDAR METODOLÓGICO

Com o intuito de responder à questão de pesquisa e encontrar alternativas que possibilitem a superação da problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem de fração abordaremos a caracterização da pesquisa e seus elementos.

4.1 Caracterização da pesquisa

Optamos por uma abordagem de cunho qualitativo, uma vez que essa abordagem agrupa diversas estratégias de investigação com determinadas características e tem como preocupação principal o aprofundamento no assunto a ser pesquisado, com ênfase em aspectos da realidade que não necessariamente sejam quantificados. Os dados coletados em geral são ricos em informações descritivas relacionadas a pessoas, locais e conversas, e possuem tratamento estatístico complexo (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

A pesquisa qualitativa procura informações diretamente no campo, busca ser naturalista e não tem o intuito de interferir na produção dos dados durante a realização da pesquisa. Uma das características dessa investigação é a grande quantidade de dados que se obtêm, os quais podem ser coletados por meio de notas, apontamentos, gravação, vídeos, questionários e entrevistas (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Tendo em vista que, nesta pesquisa, a produção de dados na pesquisa de campo ocorreu a partir de um curso de formação continuada para professores que atuam no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, entendemos que se trata de uma pesquisa de natureza aplicada, a qual gera conhecimentos para aplicação prática. Esse tipo de pesquisa visa à proposição de solução para problemas específicos (PRODANOV; FREITAS, 2013); no caso em questão, objetiva-se contribuir com a compreensão do conceito de fração para o benefício do processo de ensino e aprendizagem desse conceito. Ademais, a proposta considera especificamente os conhecimentos matemáticos de professores da rede pública municipal de Araguaína, TO.

Ao analisar os estudos de Prodanov e Freitas (2013), entendemos que, em relação aos objetivos estabelecidos para a realização desta pesquisa, ela se caracteriza como exploratória. A pesquisa parte de um planejamento elaborado a partir da análise de um instrumento de sondagem criado especificamente para essa finalidade. Tal instrumento se configura em atividades que compõem uma sequência didática (ZABALA, 1998) e foi respondido pelos professores que consentiram em participar da pesquisa.

Assim, os participantes da pesquisa foram desafiados a resolver um conjunto de atividades envolvendo o conceito de fração, por ocasião da realização de um curso de formação continuada. Portanto, pode-se dizer, em relação aos procedimentos técnicos, que se trata de uma pesquisa-ação, a qual foi realizada com o intuito de contribuir com a superação de um problema vivenciado pelo conjunto de professores que atuam no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental na rede municipal de ensino de Araguaína, TO.

Ademais, os pesquisadores participaram de todas as etapas da pesquisa (PRODANOV; FREITAS, 2013). Sendo assim, trata-se de um trabalho colaborativo idealizado e desenvolvido por cinco pessoas (o orientador da pesquisa e quatro mestrandos), representando uma ação ativa no enfrentamento dos fatos observados. Nos termos de Thiollent (2008), é absolutamente necessária a participação de todos os envolvidos na pesquisa.

[...] pesquisa social com base empírica que é concebida em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 2008, p. 14).

Nesse sentido, o objeto de investigação não é constituído pelas pessoas, mas sim pela situação social engendrada na conjuntura. Os pesquisadores atuam, portanto, com a perspectiva de resolver a situação observada. Durante todo o processo, é necessário o acompanhamento das ações e decisões, assim como de toda a atividade intencional dos atores envolvidos (pesquisadores e professores pesquisados). Em especial, a pesquisa-ação envolve contribuir com o conhecimento dos pesquisadores, bem como dos demais integrantes da pesquisa.

4.2. Situando a pesquisa

A Engenharia Didática (ED) caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas possíveis de serem desenvolvidas em sala de aula, seguindo fases (análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori*) com atividades encadeadas e articuladas entre si. Considerando elementos da Engenharia Didática e suas respectivas fases elaboramos e propusemos um curso de formação continuada com professores de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental.

A sondagem foi elaborada a partir de dois instrumentos elaborados pelos pesquisadores e respondidos pelos professores por ocasião do seu desenvolvimento, o qual aconteceu no primeiro encontro, e das reflexões efetuadas por ocasião da devolutiva pelos pesquisadores, por ocasião do segundo encontro. Nessa fase, realizamos estudos nos Parâmetros Curriculares

Nacionais (PCN), de modo a entender melhor as orientações didático-metodológicas para o ensino de Matemática, mais precisamente em relação ao conteúdo de fração. Destarte, a sondagem resultou na dissertação do mestrando Marcos José Pereira Barros. Foi a partir das análises das produções dos professores cursistas que elaboramos a Sequência Didática.

Na segunda fase, realizamos estudos em pesquisas que tematizam o processo de ensino e aprendizagem de fração, o que nos permitiu estabelecer o escopo desta pesquisa qual seja, história, equivalência, comparação e os significados de fração, bem como a utilização de diferentes registros de representação semiótica e as características das quantidades no ensino de fração.

A fim de escrevermos o referencial teórico que fundamenta a pesquisa, na segunda fase também realizamos estudos sobre sequência didática e registros de representação semiótica. Assim como a primeira fase, a segunda foi marcada pelo trabalho colaborativo da equipe de pesquisadores (professor orientador e mestrandos – Marcos Pereira Barros, Adílio Sabino, Ademir Brandão e a autora desta pesquisa). Essa fase foi fundamental para que pudéssemos elaborar a sequência didática, o que se fez com base na literatura que inspirou a fundamentação teórica e também nas análises efetuadas na primeira fase e nos comportamentos expressos pelos professores por ocasião da sondagem e da devolutiva.

A experimentação se constituiu em um momento essencial à realização da pesquisa, visto que foi nessa ocasião que os professores resolveram as atividades propostas na sequência didática e, assim, realizamos a fase empírica de maior densidade do estudo. Mais uma vez, essa fase exigiu esforços e colaboração de toda a equipe de pesquisadores.

Ao deslindar o estudo empírico, preocupamo-nos em descrever o processo de desenvolvimento das atividades que constituem a sequência didática, junto aos professores. Apresentamos o modo como foram constituídas e organizadas as equipes para o desenvolvimento das atividades; o modo de organização e estruturação da SD, os objetivos e os conteúdos trabalhados; o material utilizado, bem como a metodologia adotada para o desenvolvimento das atividades com os cursistas.

Validação ou avaliação (último encontro no qual os cursistas apresentaram os planos de ensino contendo a proposição de uma sequência didática com vistas ao processo de ensino e aprendizagem de fração com crianças de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental; ainda neste encontro os mestrandos apresentaram suas pesquisas aos professores participantes).

O curso de formação continuada foi desenvolvido em três etapas, totalizando seis encontros com duração de 16 horas cada um: sondagem, a qual é composta por cinco atividades

(primeiro e segundo encontros); experimentação, na qual os professores desenvolveram as 22 atividades da SD (terceiro, quarto e quinto encontros);

Quadro 15 - Encontros da Formação Continuada

Encontro	Conteúdo	Nº de atividades	Data
Primeiro	Atividades de sondagem	05	09/02/2018
Segundo	Devolutiva da sondagem	05	26 e 27/04/2018
Terceiro	História das frações	07	16 e 17/05/2018
	Equivalência de frações	03	
Quarto	Comparação de fração	03	13 e 14/09/2018
	Natureza das quantidades	02	
	Registro de representação semiótica	02	
Quinto	Significados de frações	03	21/03/2019 e
	Sequência didática	02	22/03/2019
Sexto	Elaboração de atividades pelos cursistas		02/05/2019 e
	Avaliação da formação		03/05/2019
	Apresentação das dissertações aos cursistas		

Fonte: Elaborado pela equipe de pesquisadores.

No primeiro encontro foi realizada uma sondagem, com uma série de problemas envolvendo os diferentes significados de fração. Esta teve como objetivo verificar que conhecimentos matemáticos são mobilizados por professores de 4º e 5º ano para resolver situações que envolvem o conteúdo mencionado. A realização desse encontro ocorreu no dia 09 de fevereiro de 2018 e resultou na Dissertação de Marcos José Pereira Barros, defendida no PPGE da UFT.

Dada a grande quantidade de professores (98) que participam do curso de formação continuada, eles foram distribuídos pela própria SEMED em três salas de aulas. O curso de formação que se realizou posteriormente aconteceu em diferentes locais (os quatro primeiros encontros ocorreram em espaços das escolas públicas da própria rede; já os dois últimos ocorreram em espaços da rede particular de ensino). Cada sala de aula contou com, pelo menos, um dos cinco professores formadores (mediadores), mestrandos e integrantes do grupo de pesquisadores, supervisionados pelo professor orientador das pesquisas.

Para desenvolver as atividades, optou-se pelo trabalho em equipes, seguido pela socialização do trabalho com a classe toda. Para compor as equipes, os professores em cada uma das salas foram indicados por números de 1 a 5. Assim, os professores indicados com o número 1 compunham uma equipe, os que foram identificados com o número 2, formaram outra equipe e assim sucessivamente, formando-se 5 equipes em cada sala.

No período de 26 e 27 de abril de 2018, no segundo encontro, o grupo de pesquisadores fez a devolutiva das atividades realizadas pelos cursistas no primeiro encontro. Assim, os professores tiveram a oportunidade de retomar as atividades e resolvê-las em equipe. Para tanto, solicitou-se que os professores se organizassem em grupos de até seis componentes. Em seguida, as atividades foram disponibilizadas uma a uma. Esse encontro foi organizado tendo como base as dificuldades que os participantes manifestaram por ocasião da realização das atividades do primeiro encontro, conforme se pode verificar também nas análises apresentadas na pesquisa de Barros (2018).

A fase de experimentação, conforme preconiza a Engenharia Didática, se constituiu de três encontros (terceiro, quarto e quinto). Assim, no terceiro encontro, que aconteceu nos dias 16 e 17 de maio de 2018, os professores distribuídos pela Secretaria Municipal de Educação em três salas de aula foram organizados em equipes e responderam 07 (sete) atividades relativas à história da fração e 03 (três) atividades sobre equivalência de fração. A composição das equipes ocorreu a partir da indicação de números de 1 a 5 para cada professor; assim foram constituídas cinco equipes em cada sala (equipe 1, composta pelos que receberam o número 1; equipe 02, formada pelos professores que receberam esse número, e assim por diante). Com as equipes formadas, foram distribuídas as atividades para que cada equipe pudesse resolver. Após concluir as atividades, os professores socializavam suas respostas com a classe toda.

O quarto encontro ocorreu no período de 13 e 14 de setembro de 2018, ocasião em que os professores, da mesma maneira que nos encontros anteriores, foram organizados em equipes e receberam atividades para que pudessem resolvê-las e socializar suas respostas. Nesse encontro, trabalharam-se atividades sobre comparação de fração, características das quantidades e diferentes registros de representação semiótica.

No quinto encontro, os professores desenvolveram atividades sobre os significados de fração e discutiu-se um texto sobre sequência didática. Esse encontro foi realizado nos dias 21 e 22 de março de 2019. As equipes foram compostas do mesmo modo que nos encontros anteriores, e também houve, após a resolução das atividades em equipe, a socialização das respostas.

Nesse encontro, cada professor mediador orientou o desenvolvimento de tarefas a serem desenvolvidas no período entre o quinto e o sexto encontros. A primeira tarefa constituiu-se na elaboração de uma carta a um suposto amigo, falando sobre suas percepções em relação ao curso de formação continuada que estavam frequentando. A segunda tarefa consistiu na elaboração de um Plano de Ensino, contendo a proposição de uma sequência didática com vistas ao processo de ensino e aprendizagem de fração com crianças de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Para essas tarefas, os professores foram organizados em equipes, dando-se preferência a que professores de uma mesma unidade escolar formassem uma única equipe e, ainda, que professores de escolas menores pudessem se organizar em equipes entre eles, de modo a não ultrapassar cinco componentes. Tanto as cartas como os planos de ensino resultantes dessa tarefa foram enviados para o e-mail: formacaofracao@gmail.com.

O sexto encontro ocorreu nos dias 02 e 03 de maio de 2019. Nessa ocasião, os professores cursistas apresentaram, na forma de seminário, a produção do Plano de Ensino de cada equipe. No dia 03, os formadores (Marcos Barros, Letícia Cardoso, Adílio Sabino e Ademir Brandão) socializaram suas pesquisas com os cursistas, alguns servidores da Secretaria Municipal de Educação e visitantes.

A fase da análise *a posteriori* e validação, constituirá o estudo do Mestrando Ademir Brandão Costa, com o tema: “O legado no andarilhar de um curso de formação continuada sofre frações”. Por meio desse estudo, será possível avaliar de forma mais acurada os acertos e erros cometidos nas fases anteriores, especialmente na fase de experimentação. Além disso, a partir dessa fase poderemos verificar se os objetivos da pesquisa foram alcançados.

A sequência didática foi organizada de modo a apresentar seus objetivos seguido da metodologia em que se delineiam os comandos para o desenvolvimento das atividades, o material necessário e a tarefa. As análises das respostas dos cursistas foi sistematizada de forma a indicar as possíveis dificuldades que os participantes podem apresentar ao resolver as situações e aventar alternativas de solução. Apresentamos também, um quadro com duas colunas, uma para as categorias de análise e outra para as equipes participantes. As categorias de análise são criadas de acordo com os objetivos da tarefa (o que significa que cada quadro pode conter categorias diferentes, bem como quantidades diferentes). A coluna para equipe de participantes indica quantas equipes estão inseridas em cada categoria. Para cada tarefa, encontra-se um resumo de como as equipes procederam em relação à resolução, seguido da análise específica da resolução de cada uma.

4.3 O curso de formação continuada

O desenvolvimento desta pesquisa aconteceu na cidade de Araguaína - TO, a qual conta com um grande número de professores que atuam na Rede Municipal de Ensino, sendo que 85,9% dos professores que atuam nos anos iniciais possuem curso superior (INEP, 2016). Alguns dos motivos para se desenvolver a pesquisa nesse município residem no fato de os professores participantes da pesquisa frequentemente participarem de formações continuadas, como o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). Araguaína é o segundo município mais populoso do Estado do Tocantins e conta com um campus da UFT que há anos tem formado professores em diversas licenciaturas. Ademais, o Secretário de Educação e presidente na União Nacional de Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME) é Mestre em Educação pelo PPGE/UFT. Além disso, uma das coordenadoras do ensino de Matemática da rede municipal integrou a equipe de formação do PNAIC e um dos integrantes da equipe de desenvolvimento e execução do projeto reside em Araguaína.

A formação continuada para professores que atuam no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental contou com uma carga horária de 96 horas, sendo fator de pesquisa de seis mestrados do Curso de Mestrado Acadêmico em Educação, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Tocantins (UFT). A pesquisa resultará em seis dissertações interconectadas e que serão defendidas perante banca pública constituída para tal finalidade. Os mestrados atuam conjuntamente no processo de elaboração e desenvolvimento dos estudos, cabendo a cada um as especificidades do seu objeto de estudo.

Este estudo compreende o desenvolvimento de uma formação continuada, tem como perspectiva social o fortalecimento do ensino e aprendizagem de fração por parte de quem ensina – professores da Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO –, participantes desta pesquisa, bem como por parte dos estudantes dos anos iniciais.

O curso de formação continuada foi ministrado pelos mestrados Marcos Pereira Barros, Letícia Silva Cardoso, Adílio Jorge Sabino, Ademir Brandão e pelo Prof. Dr. Idemar Vizolli, e contou com a parceria dos Programas de Pós-Graduação em Educação Acadêmico e Profissional da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e a Secretaria Municipal de Educação de Araguaína (SEMED).

Durante o desenvolvimento do curso de formação continuada, os mestrados, ao mesmo tempo em que ministravam a formação, faziam as devidas anotações e observações no intuito de compor as análises para suas respectivas pesquisas.

A formação apoiou-se nas ideias de Zabala (1998), em relação a Sequência Didática; Duval (2009) para tratar dos registros de representação semiótica; Nunes *et al* (2005) no que concerne à natureza das quantidades (discretas, contínuas, intensivas e extensivas); e Merlini (2005) e Nunes *et al* (2003) ao abordar os diferentes significados.

4.4 Caracterização dos participantes da pesquisa

Os participantes da pesquisa são professores que ensinam Matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. A escolha desses colaboradores aconteceu mediante critérios determinados pelos pesquisadores, a saber: primeiramente a consolidação de um convênio do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Tocantins com a Secretaria de Educação de Araguaína, TO, que integrados proporcionaram a elaboração e o desenvolvimento da formação continuada, cuja temática central foi o ensino e a aprendizagem de fração.

Com o convênio foram contemplados todos os professores do município de Araguaína, TO, que lecionam Matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Assim, participaram da pesquisa 98 professores (noventa e oito) professores. Destes, 76 (setenta e seis) possuem formação em Pedagogia; 11 (onze) apresentam Normal Superior; 02 (dois) têm formação em Letras; 02 (dois) são formados em História; 01 (um) é formado em Biologia; 01 (um) em Geografia; e 01 (um) possui Magistério. Quatro (04) não desejaram participar da pesquisa.

A investigação com esses professores foi efetivada após ciência, autorização e assinatura do Termo de Consentimento Livre Esclarecido por todos os integrantes. Alguns colaboradores optaram por não ser identificados pelo seu nome, assim foram atribuímos pseudônimos de matemáticos relevantes.

Este estudo faz parte de um projeto amplo denominado “Ensino e Aprendizagem de Fração”, registrado no Comitê de Ética e Pesquisa da UFT, sob o número de protocolo 80769217. 0. 0000. 5519. Seu período de duração transcende 05 (cinco) anos e abrange uma série de pesquisas que podem ser desenvolvidas tanto com estudantes, quanto com professores de diferentes níveis de ensino. Ressalta-se que já foram realizadas duas pesquisas em nível de mestrado que estão inclusas nesse projeto amplo, as quais uma delas propõe o uso de sequências didáticas com vistas à compreensão do conceito de fração (CARVALHO, 2017) e a outra propõe uma sequência didática para o ensino de adição de fração (PEREIRA, 2017). As duas pesquisas resultaram em dissertações que foram defendidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

5 DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A fase de experimentação da sequência didática compôs-se de 22 atividades e 95 tarefas, desenvolvidas em três encontros de dois dias cada um, tendo seu início no terceiro encontro da formação (16 e 17 de maio de 2018), no qual foram desenvolvidas atividades relativas à história e equivalência de fração; no quarto encontro (13 e 14 de setembro de 2018), sobre comparação de fração, características das quantidades e registro de representação semiótica; e no quinto encontro (21 e 22 de março de 2019), destinado aos significados de fração e sequência didática.

Quadro 16 - Sistematização das atividades da experimentação

Data	Encontro	Conteúdo	Quantidade de Atividades	Quantidade de Tarefas
16 e 17/05/2018	Terceiro	História das frações	07	24
16 e 17/05/2018	Terceiro	Equivalência	03	12
13 e 14/09/2018	Quarto	Comparação	03	14
13 e 14/09/2018	Quarto	Natureza das quantidades	02	08
13 e 14/09/2018	Quarto	Registro de Representação Semiótica	02	18
21 e 22/03/2019	Quinto	Significados de fração	03	18
21 e 22/03/2019	Quinto	Sequência Didática	02	01

Fonte: elaboração da autora

A sequência didática foi organizada de modo a apresentar o objetivo geral do objeto de estudo; os encaminhamentos metodológicos; o texto referente ao conteúdo a ser desenvolvido; as atividades a serem realizadas; os objetivos específicos das atividades; os materiais necessários; e as respectivas tarefas referentes às atividades. A sequência didática encontra-se no apêndice deste trabalho. Nesta seção, evidenciaremos as análises das respostas dos cursistas, o fechamento do conteúdo abordado em cada encontro e a apresentação dos desempenhos e dificuldades dos cursistas com a formação.

5.1 Terceiro encontro da formação

Conteúdo: História das Frações

Objetivos

- Conhecer um pouco da história das frações em diferentes civilizações;
- Compreender de que modo diferentes civilizações operavam e simbolizavam as frações;
- Desenvolver atividades fazendo uso da simbologia de distintas civilizações

Atividade 01 – Sistema de numeração

Objetivo

- Criar um sistema de numeração

Análise da tarefa 01

A primeira tarefa demanda que os integrantes expressem o que entendem por fração, se reconhecem os elementos que a constituem e, ainda, que indiquem ideias que ela comporta. Certamente algumas equipes definirão e simbolizarão fração como aparece nos livros didáticos; possivelmente indicarão seus elementos constituintes (numerador e denominador) e mesmo as representarão numericamente, mas dificilmente mencionarão as ideias que a compõem. Algumas equipes talvez respondam que se trata de uma divisão entre dois números.

A partir das respostas dos cursistas, os resultados foram organizados em quatro categorias de análise e dispostos a seguir.

Quadro 17 - Categorias de análise relativas à atividade 01 - sistema de numeração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu o que é fração (RF).	E1
Indicou os elementos constituintes da fração (EF).	E1
Apresentou as ideias matemáticas relacionadas à fração (IF).	E1
Não responderam (NR).	E2/E3/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

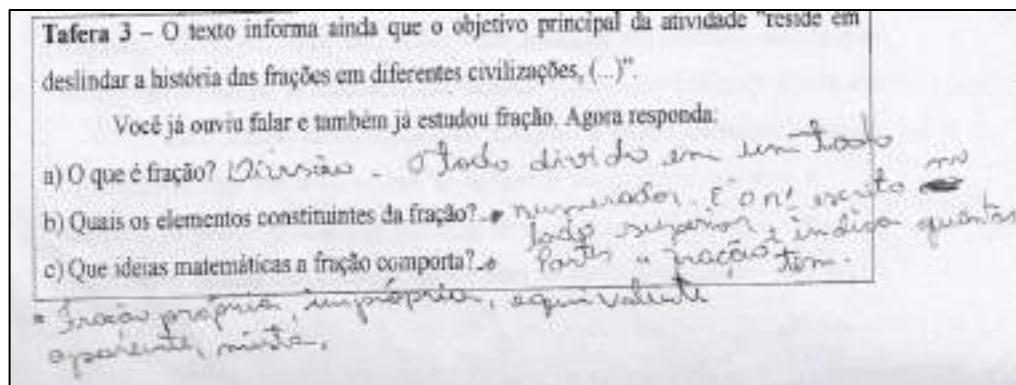
A primeira questão quer saber o que os participantes entendem por fração, e somente a equipe 1 (um) deu a resposta: “*um todo dividido em um todo*”. A equipe intencionou responder utilizando o conceito de significado parte/todo. Segundo Biffi (2001, p. 37), “ a relação parte-

todo é efetuada toda vez que se divide o todo em b partes congruentes e toma-se a destas partes. Sendo sua representação feita pelo registro $\frac{a}{b}$, considerando $b \neq 0$ ".

Quanto aos elementos constituintes de uma fração, o qual foi solicitado na questão "b", a equipe 1 (um) respondeu que "numerador é o número escrito no lado superior e indica quantas partes a fração tem", o que denota falta de clareza dos significado dos termos de uma fração.

A figura 6 retrata as respostas da equipe 1 (um):

Figura 6 - Resolução da atividade 01 tarefa 01



Fonte: Equipe 1 (2018).

Em relação às ideias que a fração comporta, a equipe 1 (um) respondeu: "fração própria, imprópria, equivalente, aparente, mista". Observa-se que os participantes mencionaram os tipos de fração, mas não responderam o que foi solicitado, isto é, não foram indicadas as ideias concernentes às frações. Segundo Merlini (2005), existem cinco significados (ideias) concernentes às frações: parte/todo, número, quociente, medida e operador multiplicativo. Essas ideias não foram delineadas pela equipe.

Análise da tarefa 02

A tarefa 02 requer esforço e participação de todos os integrantes da equipe, posto que terão que criar um sistema numérico diferente do nosso. Para tanto, terão que pensar de forma lógica e criar uma simbologia. Quanto a isso, os formadores deverão ficar atentos para que possam ajudar os participantes a formar um sistema numérico coerente. Essa tarefa certamente desafiará os participantes, especialmente porque exige ato criativo.

De posse dos dados referentes a essa tarefa, estruturamos as categorias. Foram formuladas três, as quais definem quem elaborou um sistema numérico, fez uso dos significados

de fração (MERLINI, 2005), ou quem não elaborou um sistema numérico. O quadro 18 refere-se à análise da atividade 01 tarefa 02 sistema de numeração.

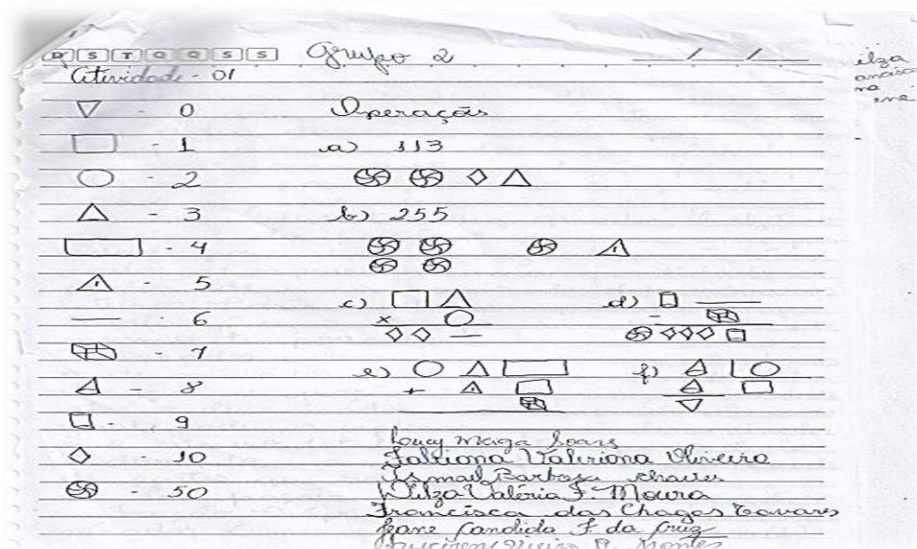
Quadro 18 - Categorias de análise concernentes à atividade 01 tarefa 02 - sistema de numeração

Categorias de análise	Equipes participantes
Elaborou um sistema de numeração lógico. (SN)	E2/ E3 /E4
Fez uso de um dos significados de fração ao operar com o sistema numérico concebido. (SF)	E3
Não elaborou sistema de numeração. (NSN)	E1/ E5

Fonte: Elaboração da autora.

Apenas as equipes 2, 3 e 4 realizaram essa tarefa, o que corresponde a 60% dos participantes. A equipe 2 (dois) não fez uso dos significados de fração. Ela caracterizou os numerais com figuras geométricas e as utilizou em operações matemáticas básicas como (adição, subtração, multiplicação e divisão). A equipe fez uso de pelo menos dois registros de representação e criou um sistema numérico lógico. A figura 7 elucida o que acabamos de dizer.

Figura 7 - Atividade 01 tarefa 02









Fonte: Equipe 2 (2018).



A equipe 3 (três) fez uso dos registros de representação numérico e figural; elaborou um sistema numérico lógico e fez uso do significado parte/todo ao utilizar/operar com o sistema numérico concebido. A figura 8 auxilia a compreender melhor o modo como a equipe respondeu à atividade.

Figura 8 - Atividade 01 tarefa 02



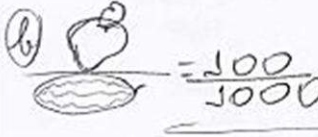

Grupo 3

Atividade 1


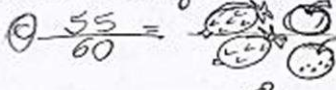
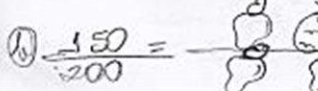
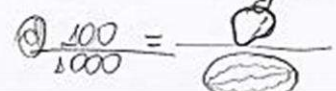
 = 1
 = 5
 = 10
 = 50
 = 100
 = 100

$553 =$ 
 $144 =$ 

Represente as frações em algoritmos indo arábicos.

a) $\frac{10}{15} =$  c) $\frac{5}{50} =$ 
 b) $\frac{100}{1000} =$  d) $\frac{1}{2} =$ 

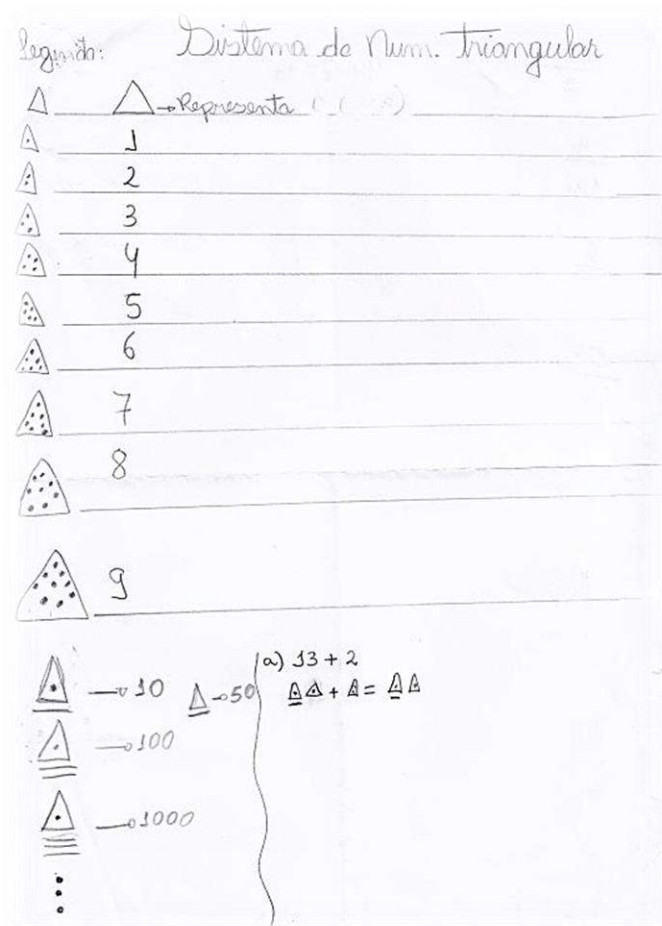
Represente as frações abaixo utilizando os símbolos

a) $\frac{4}{10} =$  c) $\frac{55}{60} =$ 
 b) $\frac{150}{200} =$  d) $\frac{100}{1000} =$ 

Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 04 (quatro), da mesma forma que a equipe 2 (dois), fez uso dos registros de representação semiótica numérico e figural, mas não utilizou nenhum dos significados fracionário ao operar com o sistema numérico elaborado. Essa equipe operou apenas com a adição. A figura 9 evidencia o sistema numérico criado pela equipe 4 (quatro).

Figura 9 - Atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 4 (2018).

Análise da tarefa 03

A socialização prevista na tarefa 03, na qual cada equipe apresentará o sistema de numeração criado, deve contar com a participação dos componentes e com a contribuição de toda a classe. Certamente haverá discussões a fim de entender a lógica estabelecida, assim como uso da simbologia adotada.

As três equipes que conceberam os sistemas numéricos explicitaram a lógica envolvida no sistema. Após o esclarecimento do raciocínio, foram realizadas operações matemáticas. As operações realizadas foram de soma, subtração, multiplicação e divisão. Com as simbologias criadas, representaram algumas frações, bem como operaram com a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de frações.

Na socialização, houve a participação de todas as equipes, embora duas delas não tenham implementado um sistema, porém participaram na resolução das operações propostas pelas outras.

Durante o desenvolvimento da atividade, houve muitas dúvidas, mas essas foram sanadas com explicações da formadora. Essa tarefa surpreendeu os professores formadores, em vista de acharmos que muitos fossem hesitar na criação do sistema numérico ou que teriam dificuldades em criar um sistema lógico.

Atividade 02 – Desatando nós de frações egípcias

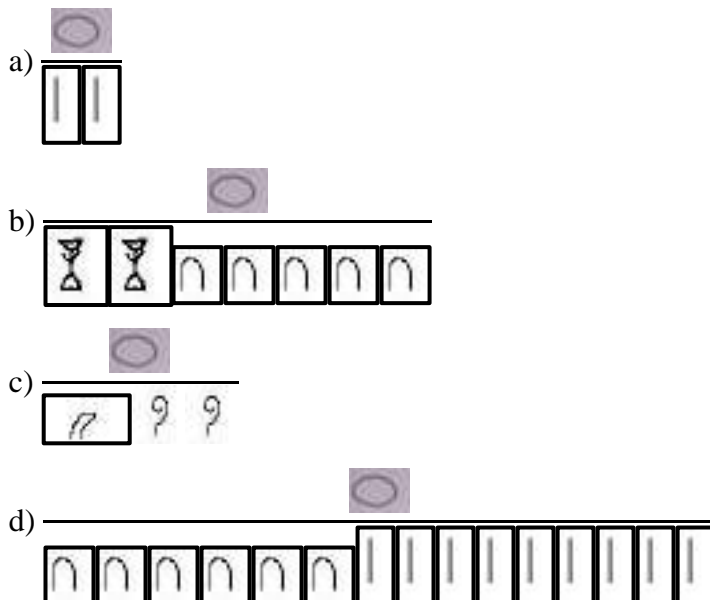
Objetivo

- Conhecer o modo como os egípcios se relacionavam com as frações.

Análise da tarefa 01

As tarefas dessa atividade requerem leitura atenta do texto e compreensão da lógica de estruturação do sistema de numeração e da representação das frações pelos egípcios.

Alguns professores poderão encontrar dificuldades na tarefa 01, pois podem se confundir e representar uma fração com uma simbologia distinta da que foi solicitada. O mesmo fato pode acontecer na tarefa dois. Respostas esperadas:



Considerando as resoluções dos participantes da pesquisa e a estrutura da tarefa, foram elaboradas três categorias de análise, as quais identificam as equipes que responderam a tarefa, que responderam corretamente e que não responderam. O Quadro 19 refere-se a análise da atividade 02 tarefa 01 “desatando nós”.

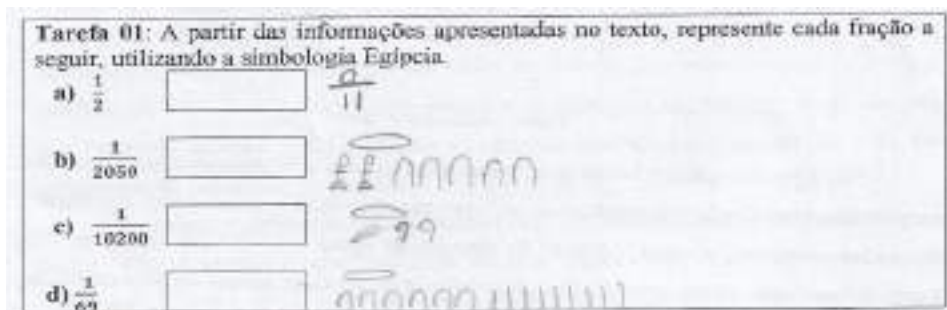
Quadro 19 - Categorias de análise referentes à atividade 02 tarefa 01 - desatando nós

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa (RT)	E1/E2
Respondeu corretamente as frações conforme simbologia egípcia. (RTC)	E1/E2
Não respondeu. (NR)	E3/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

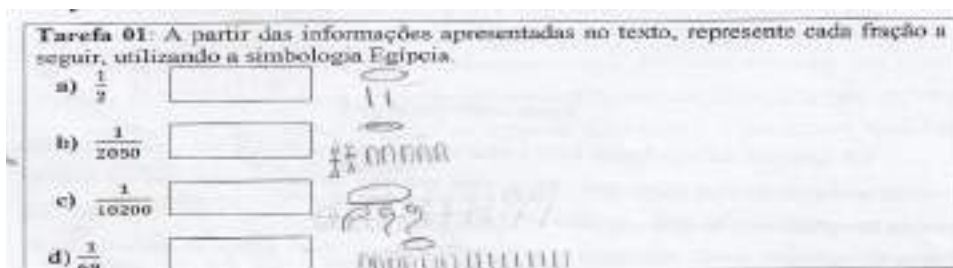
Somente duas equipes (E1 e E2) responderam essa tarefa. As duas representaram corretamente as frações com a simbologia egípcia, bem como conseguiram de forma correta e sem dificuldades representar as frações com os signos egípcios. As figuras 10 e 11 são recortes das respostas das equipes participantes.

Figura 10 - Atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 1 (2018).

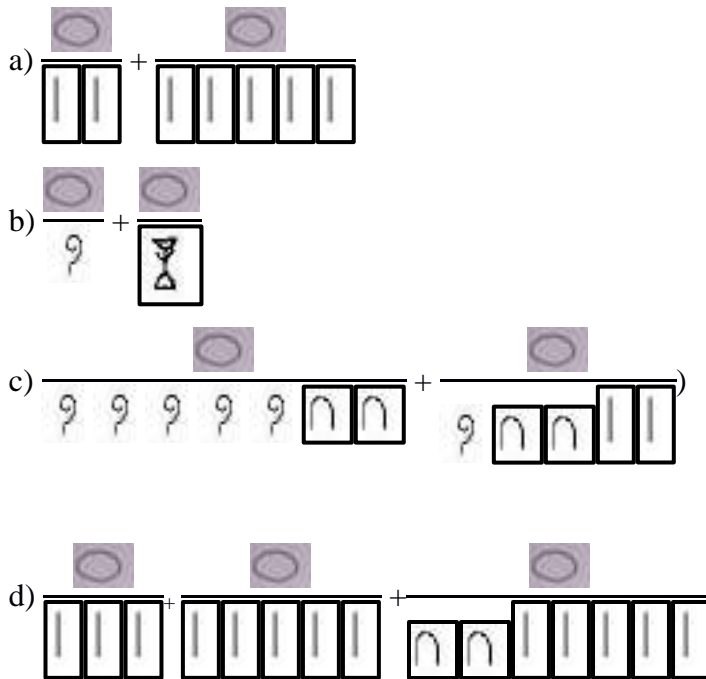
Figura 11 - Atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 2 (2018).

Análise da tarefa 02

Acredita-se que os integrantes não apresentem dificuldades nessa tarefa, no entanto, demanda-se atenção para que não confundam uma simbologia com a outra. Além do mais, deve-se cuidar para não trocar e representar a simbologia do numerador no denominador, ou o contrário. Respostas esperadas:



De posse das resoluções das equipes, foram estruturadas três categorias, a saber, as equipes que responderam a tarefa, que responderam corretamente e que não responderam. O Quadro 20 faz referência à análise da atividade 02 tarefa 02 “desatando nós”.

Quadro 20 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - desatando nós

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2
Respondeu corretamente as frações conforme simbologia egípcia. (RTC)	E1
Não respondeu a tarefa. (NR)	E3/E4/E5

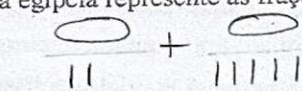
Fonte: Elaboração da autora.

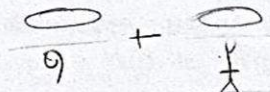
A questão exigiu conhecimento relativo às simbologias utilizadas pelos egípcios nas representações dos numerais e das frações. Para realização correta das representações, os participantes deviam ler atentamente o texto e compreender o modo como sistematizavam as representações dos numerais e fracionários.

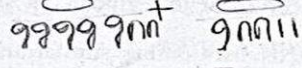
Apenas as equipes E1 e E2 responderam essa tarefa, porém a equipe 2 respondeu de forma incorreta. Acredita-se que tenha sido por falta de atenção durante a leitura do texto norteador. Pode-se ver as figuras 12 e 13, referentes às respostas das equipes 1 e 2 respectivamente.

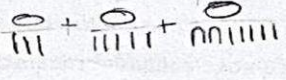
Figura 12 - Atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - Fazendo uso da simbologia egípcia represente as frações a seguir:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ 

b) $\frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ 

c) $\frac{1}{520} + \frac{1}{122}$ 

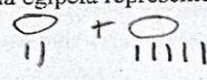
d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$ 


Fonte: Equipe 1 (2018).

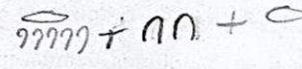
Conforme a figura 12, a equipe 1 representou corretamente todos os itens.

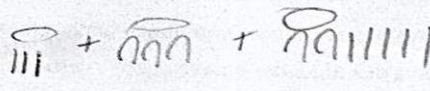
Figura 13 - Atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - Fazendo uso da simbologia egípcia represente as frações a seguir:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ 

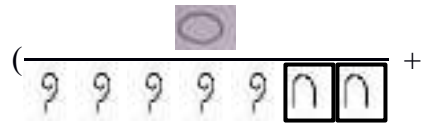
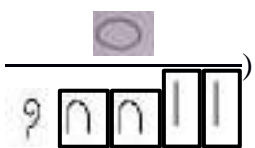
b) $\frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ 

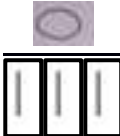
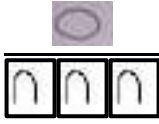

c) $\frac{1}{520} + \frac{1}{122}$ 

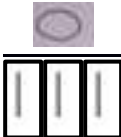

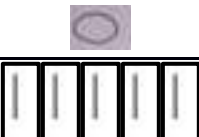
d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$ 

Fonte: Equipe 2 (2018).

Conforme a figura 13, a equipe 2 respondeu a tarefa 02 de forma incorreta nas questões

“c” e “d”. A representação correta na questão “c” seria:  + 

A questão “d” foi respondida pela equipe 2 como  +  (errado, essa simbologia representa $\frac{1}{30}$ e não $\frac{1}{5}$) + .

A representação correta para $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$ com a simbologia egípcia seria:  +  + .

As outras três equipes não responderam no caderno de resposta, o que impossibilitou a análise.

Atividade 03 – Decifrando cunhas





Objetivo

- Conhecer o modo como os babilônicos se relacionavam com as frações.


Análise da tarefa 01


A tarefa 01 requer a leitura atenta do texto e a representação de alguns numerais com as insígnias babilônicas. É de se esperar que os participantes façam a correlação de forma correta, contudo os mediadores deverão ficar atentos para sanar possíveis dificuldades.

Acredita-se que os integrantes não apresentarão dificuldades em realizá-la, no entanto, demanda-se atenção para que não confundam uma simbologia com a outra. Além do mais, deve-se cuidar para não trocar e representar a simbologia do numerador no denominador, ou o contrário. Os integrantes devem perceber que os babilônios operavam na base 60; assim, para representar corretamente os numerais, eles deviam verificar quantas vezes o 60 “cabe” em um numeral. Por exemplo, o numeral 136: o sessenta cabe duas vezes no cento e trinta e seis e

sobram dezesseis. Assim, a representação deve ser com duas cunhas () + o símbolo para 10  mais 6 (seis) cunhas  representando seis unidades, isto é: .

Respostas esperadas:

a) $2(60)^2 + 2(60)^1 + 2(60)^0 = 2 \cdot 3600 + 120 + 2 = 7200 + 120 + 2 = 7322 =$ 

b) O sessenta cabe duas vezes no cento e trinta e seis e sobram dezesseis 

c) O sessenta cabe três vezes no 224 e restam quarenta e quatro. Representação:




Considerando os dados das equipes, as categorias foram delineadas com o objetivo de explicar as equipes participantes e não participantes da tarefa, bem como as participantes que a responderam corretamente. O Quadro 21 é referente à análise da atividade 03 tarefa 01 “cunhando frações”.

Quadro 21 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 01 - cunhando frações

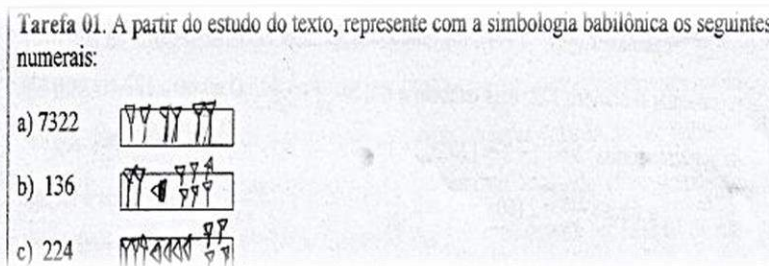
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2
Não responderam. (NR)	E3/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Mesmo com a formadora explicando o modo pelo qual os babilônios operavam com os numerais e as frações, as equipes tiveram dificuldades em respondê-la. Assim, a formadora socializou a atividade juntamente com a turma. Os babilônios operavam com os números e as frações. Todas as operações eram realizadas na base 60, o que dificultou para as equipes responderem essas atividades e entenderem como eles representavam e operavam com os numerais e frações. Para os integrantes entenderem o modo pelo qual essa civilização operava, tinham que passar cada numeração para a base 60, de modo que a professora foi perguntando quantas vezes o sessenta “cabia” em cada número. Por exemplo, o número 122: quantas vezes o sessenta caberia nesse número? Eles reponderam sem dificuldades, duas vezes e sobram dois ($2(60^1) + 2 = 120 + 2 = 122$). Logo, a simbologia que eles deveriam utilizar seria dois símbolos que representavam dois na civilização babilônica ().

Após as explicitações da formadora, apenas as equipes 1 e 2 responderam essa tarefa. As figuras 14 e 15 são recortes das respostas das equipes 1 e 2 respectivamente.

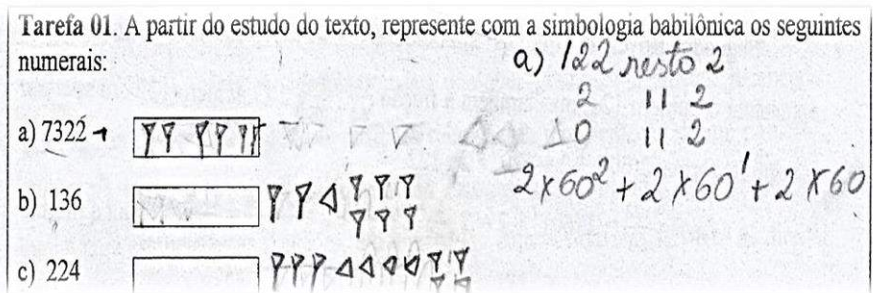
Figura 14 - Atividade 03 tarefa 01



Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1 representou todas as questões de forma correta, evidenciando compreensão e dedicação quanto aos comandos das atividades e leitura atenta do texto norteador.

Figura 15 - Atividade 03 tarefa 01



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 2 (dois) também retratou as insígnias babilônicas de forma correta.


Essa tarefa teve a participação das equipes E1 e E2. As demais equipes participaram da socialização com perguntas e questionamentos com o propósito de entender a tarefa. Os cadernos de respostas são recolhidos antes da socialização, assim apenas as equipes 1 e 2 conseguiram responder a tarefa antes da socialização.

Análise da tarefa 02


É de se esperar que os participantes façam a correlação de forma correta, contudo os mediadores deverão ficar atentos para sanar possíveis dificuldades.

Acredita-se que os integrantes não apresentarão dificuldades em realizá-la; no entanto, demanda-se atenção para que não confundam uma simbologia com a outra. Além do mais, deve-se cuidar para não trocar e representar a simbologia do numerador no denominador, ou o contrário. Respostas esperadas:

Conforme texto norteador, simbolizam-se as frações da mesma forma que os numerais:

a) $2 \cdot 60^{-2} + 2 \cdot 60^{-1} + 2 \cdot 60^0 =$ 

b) Essa questão foi cancelada.

c) $2 \cdot 60^{-1} + 16 \cdot 60^0 =$ 

d) $3 \cdot 60^{-1} + 45 \cdot 60^0 =$ 


Ao estruturar a análise desta tarefa em consonância com os dados das equipes, foram delineadas três categorias. O Quadro 22 é referente à análise da atividade 03 tarefa 02 cunhando frações.

Quadro 22 - Categorias de análise pertencentes à atividade 03 tarefa 02 - cunhando frações

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa (RT)	E1/E2
Respondeu corretamente (RTC)	-
Não respondeu (NR)	E3/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Das cinco equipes, apenas as equipes 1 e 2 realizaram a tarefa antes da socialização, correspondendo a um total de 40% dos participantes, conforme revela a figura 16.

Figura 16 - Atividade 03 tarefa 02

Tarefa 02. Tomando como referência a simbologia babilônica, represente frações a seguir:

a) $\frac{7322}{60}$

b) $\frac{1230}{60}$

c) $\frac{136}{60}$

d) $\frac{225}{60}$

Tarefa 03. Agora é com você. Elabore uma fração e represente-a com símbolos Babilônicos.

Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1 respondeu as questões “a” e “c” corretamente, porém a questão “d” foi representada incorretamente. Quanto ao desempenho da equipe 2, vide figura 17.

Figura 17 - Atividade 03 tarefa 02

Tarefa 02. Tomando como referência a simbologia babilônica, represente frações a seguir:

a) $\frac{7322}{60}$

b) $\frac{1230}{60}$

c) $\frac{136}{60}$

d) $\frac{225}{60}$

Tarefa 03. Agora é com você. Elabore uma fração e represente-a com símbolos Babilônicos.

Handwritten notes:
 a) $\frac{7322}{60}$ $\frac{132}{2}$
 b) $\frac{1230}{60}$ $\frac{122}{2}$
 c) $\frac{136}{60}$ $\frac{122}{2}$
 d) $\frac{225}{60}$ $\frac{122}{2}$
 2x 60 + 2x 60 = $\nabla\nabla \nabla\nabla$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Observa-se que a equipe 2 não respondeu as questões “a”, “c” e “d”. A questão “b” foi respondida pela equipe, mas foi cancelada pelos formadores. Portanto, a equipe dois não conseguiu realizar a tarefa dois, apesar do empenho.

Assim, apenas 20% dos participantes conseguiram realizar a tarefa 02 da atividade 03, embora tenham conseguido responder corretamente apenas as questões “a” e “b” dessa tarefa.

Esse resultado indica a dificuldade dos participantes com relação à divisão e ao significado de fração quociente.

Análise da tarefa 03

É preciso criar algumas frações e as representar com os insígnios babilônicos. Ao final dessa atividade, as equipes devem socializar quais frações criaram e como a simbolizaram. É necessário atenção ao simbolizar as frações compostas, a fim de não as retratar de forma incorreta.

Durante a formação, as equipes socializaram as frações elaboradas e representadas com os símbolos babilônicos, mas não registraram no caderno de formação (utilizado nas análises da dissertação), destarte, não foram efetuadas suas análises.

Atividade 04 - Operando com os gregos

Objetivo

- Conhecer o modo como os gregos se relacionavam com frações.

Análise tarefa 01

Na tarefa 01, espera-se que os cursistas representem os numerais com os símbolos gregos. Eles devem ler o texto proposto a fim de situar-se quanto à forma como os gregos caracterizavam os numerais, as frações e as simbologias. Acredita-se que não encontrarão dificuldades, visto que é preciso fazer relação dos numerais indo-arábicos apresentados com a simbologia grega. É necessário atenção para que não confundam as simbologias e que as representações não sejam inadequadas. Respostas esperadas:

Questão “b” : ρΚ

Questão “c”: ψμ

Questão “d”: δ̄ε

Questão “e”: υ λ ε

Para análise dessa tarefa, foram criadas oito categorias. Além do mais, foram apresentadas as equipes que se inserem em cada uma. O Quadro 23 é referente à análise da atividade 04 tarefa 01 “frações gregas”.

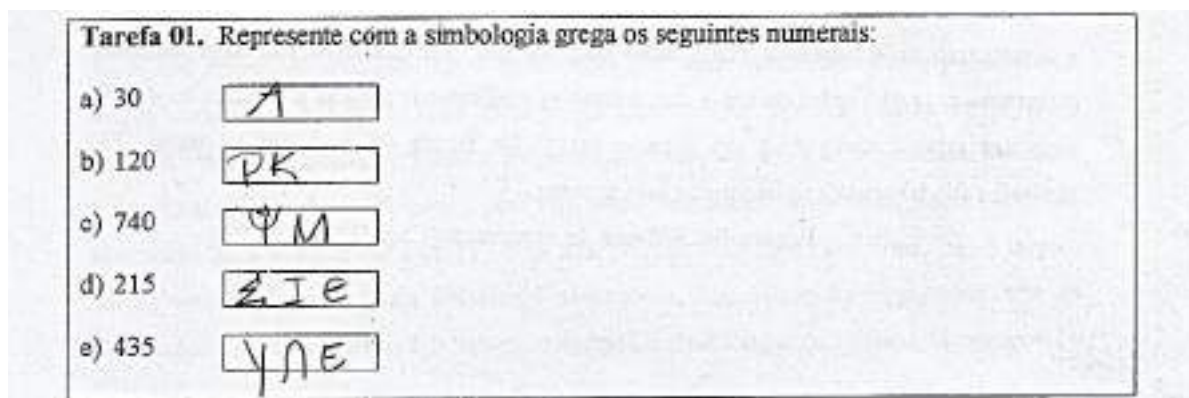
Quadro 23 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 01 - frações gregas

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2
Não respondeu. (NRT)	E4/E5
Representou corretamente a questão “a”. (RAC)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão “b”. (RCB)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão “c”. (RCC)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão “d”. (RCD)	E1/E2
Representou corretamente a questão “e”. (RCE)	E1/E2/E3

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2 e 3 responderam essa tarefa e entregaram antes da socialização. Quanto às respostas da equipe 1, vide figura 18

Figura 18- Atividade 04 tarefa 01



Fonte: Equipe 1 (2018).

Nota-se que a equipe representou corretamente todas as questões. O mesmo se deu com a equipe 2, o que pode ser verificado na figura 19.

Figura 19 - Atividade 04 tarefa 01

Tarefa 01. Represente com a simbologia grega os seguintes numerais:

a) 30	λ
b) 120	$\rho\kappa$
c) 740	$\psi\mu$
d) 215	$\xi\iota\epsilon$
e) 435	$\gamma\lambda\epsilon$

Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 3 representou apenas a questão “d” incorretamente. Acredita-se que tenha sido por falta de atenção, haja vista que o texto norteador contém uma figura com os símbolos representativos de cada numeral. A figura 20 retrata as representações delineadas pela equipe 3.

Figura 20 - Atividade 04 tarefa 01

Tarefa 01. Represente com a simbologia grega os seguintes numerais:

a) 30	λ
b) 120	$\rho\epsilon$
c) 740	$\psi\mu$
d) 215	$\sigma\alpha\epsilon$
e) 435	$\gamma\lambda\epsilon$

Fonte: Equipe 3 (2018).

Na questão “d”, a equipe deveria ter utilizado o símbolo I e não “a”.

Dentre as civilizações estudadas, as tarefas relacionadas à civilização grega foram as que tiveram a participação de mais equipes e um maior número de acertos. Acredita-se que seja pela simplicidade em representar os signos gregos, diferentemente dos babilônicos, para os quais era preciso mudar a base e depois fazer a representação.

Análise da tarefa 02

Espera-se que os participantes leiam atentamente o texto sugerido e que consigam representar corretamente as frações, conforme a civilização grega. Respostas esperadas:

a) $\frac{1}{10} = \Gamma$

b) $\frac{1}{36} = \lambda\xi$

c) $\frac{1}{150} = \rho\nu$

d) $\frac{1}{360} = \tau\xi$

e) $\frac{1}{80} = \pi$

Levando-se em conta a "tarefa" e os dados das equipes participantes, foram concebidas oito categorias. O Quadro 24 apresenta a sistematização dos dados referentes à análise da atividade 04 tarefa 02 "frações gregas".

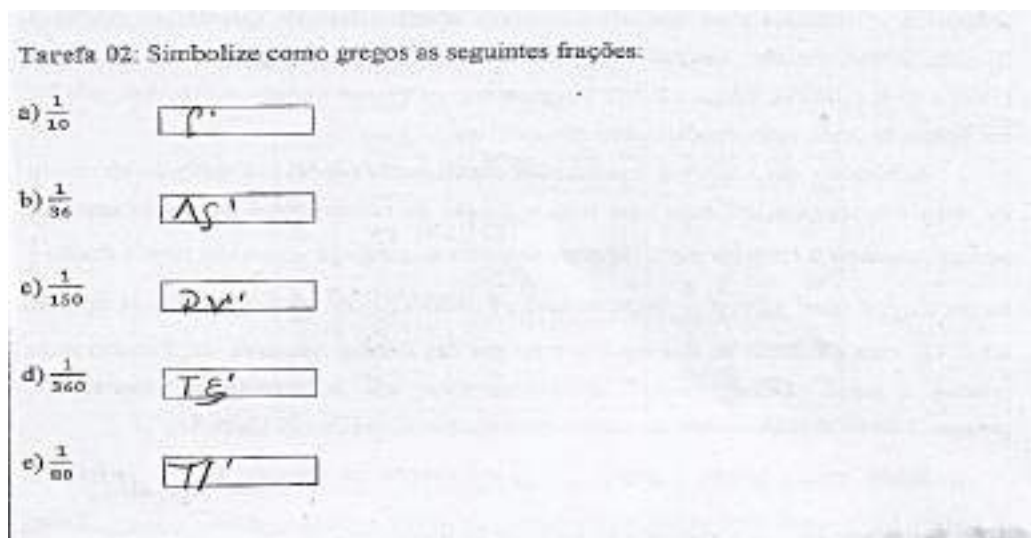
Quadro 24 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 02 - frações gregas

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E4/E5
Representou corretamente a questão "a". (RCA)	E1/ E3
Representou corretamente a questão "b". (RCB)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão "c". (RCC)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão "d". (RCD)	E1/E2/E3
Representou corretamente a questão "e". (RCE)	E1/E2/E3

Fonte: Elaboração da autora.

Essa tarefa teve a adesão de três equipes, são elas: equipe 1, 2 e 3. As equipes 1 e 3 responderam corretamente toda a tarefa, evidenciando dedicação e leitura atenta do texto norteador. A equipe 2 só não respondeu corretamente a questão "a", demonstrando falta de atenção ao texto norteador. A figura 21 é condizente com o que explicitamos.

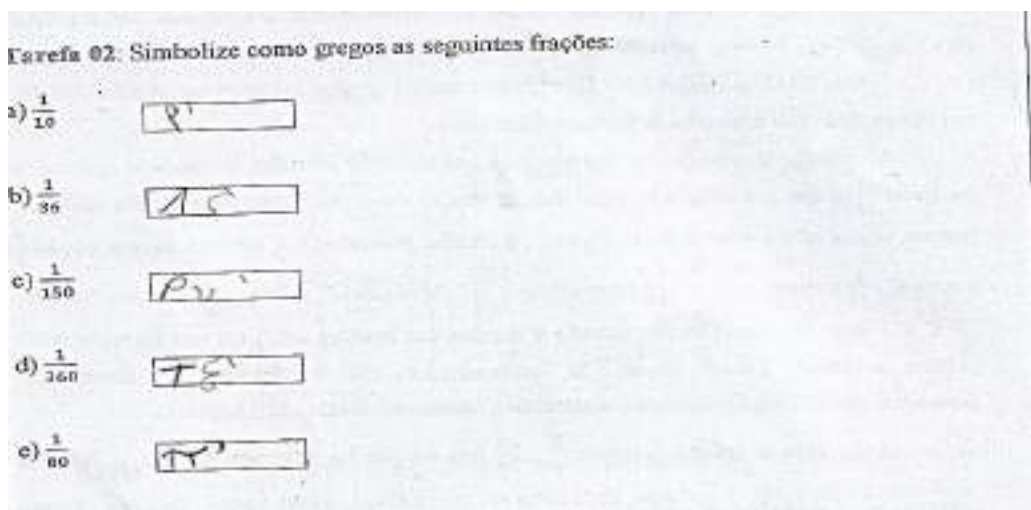
Figura 21 - Atividade 04 tarefa 02



Fonte: Equipe 1 (2018).

Todas as questões foram representadas corretamente pela equipe 1. Já a equipe 2 não respondeu corretamente a questão “a”, conforme figura 22.

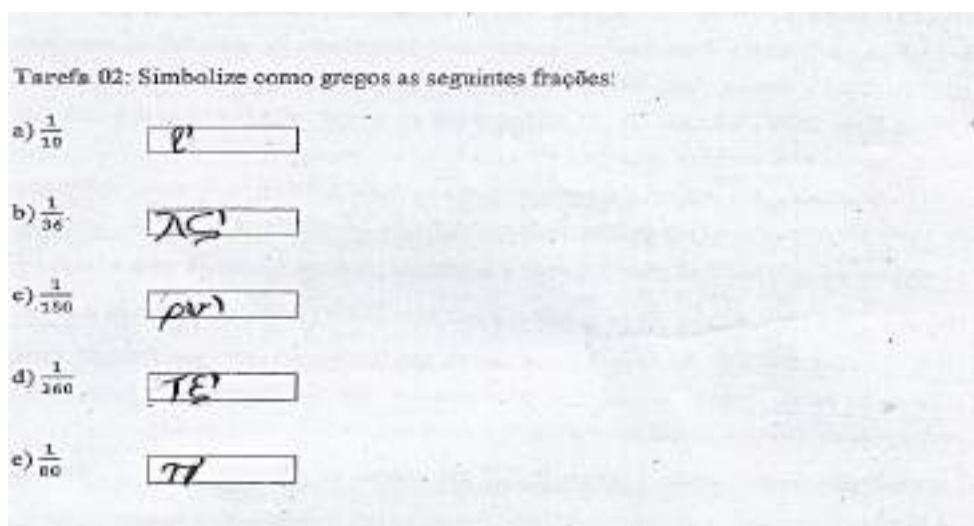
Figura 22 - Atividade 04 tarefa 02



Fonte: Equipe 2 (2018).

Da mesma forma que a equipe 1, a equipe 3 respondeu corretamente todas as questões, o que fica claro na figura 23.

Figura 23 - Atividade 04 tarefa 02



Fonte: Equipe 3 (2018).

Análise da tarefa 03

Na tarefa três, os cursistas devem criar alguns numerais e frações e exibi-las com as insígnias gregas. É preciso atenção ao representar as frações para que elas não sejam representadas de forma inadequada.

Tendo em vista as resoluções apresentadas pelas equipes, foram concebidas quatro categorias que explanam as equipes que responderam a tarefa, que criaram um numeral, uma fração e que os representaram corretamente. O Quadro 25 é referente à análise da atividade 04 tarefa 03 “frações gregas”.

Quadro 25 - Categorias de análise da atividade 04 tarefa 03 - frações gregas

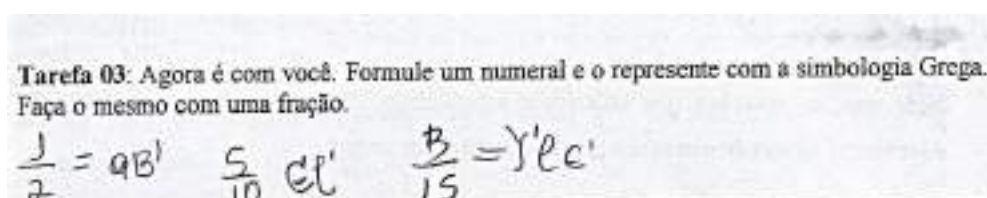
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa.(RT)	E1/E3
Criou numeral e o representou corretamente. (RNC)	-----
Criou as frações e as representou corretamente. (RFC)	-----
Não realizou a tarefa. (NR)	E2/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Na civilização grega, o risco ou apóstrofo à direita indica o numerador 1 (um) da fração unitária. A adesão a essa tarefa se deu apenas pelas equipes 1 (um) e 3 (três). A questão solicitava a criação e representação dos numerais e das frações com a simbologia grega.

Nenhuma das duas equipes que tentaram realizar a tarefa criou os numerais e os representou. Então, as duas equipes responderam parcialmente a questão, haja vista que elaboraram somente frações e as representaram. As representações das duas equipes foram realizadas incorretamente para a fração unitária, visto que, conforme texto norteador, o apóstrofo à direita já representa o numerador 1 (um) da fração, dispensando sua representação. A figura 24 corresponde à resposta da equipe 1 e a figura 25 é referente à resposta da equipe 3.

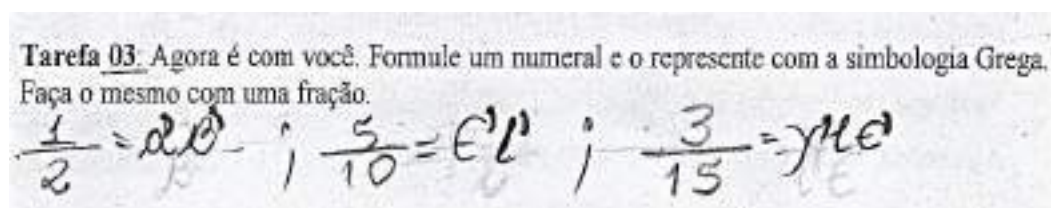
Figura 24 - Atividade 04 tarefa 03



Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1 representou a fração $\frac{1}{2}$ com AB, sem necessidade de colocar o “a”, dado que o apóstrofo já representa o numerador 1 (um).

Figura 25 - Atividade 04 tarefa 03



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 3 elaborou as mesmas frações que a equipe 1, acarretando nos mesmos erros.

Quanto aos comandos da questão, foram seguidos parcialmente pelas duas equipes, pois nenhuma das duas representou corretamente todos os itens elaborados, evidenciando falta de atenção ao ler o texto base.

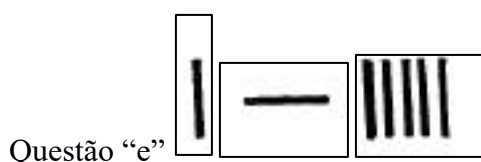
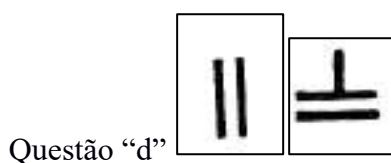
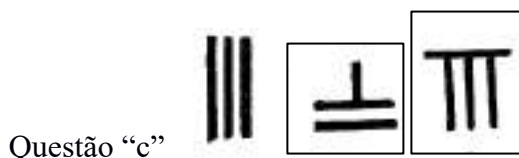
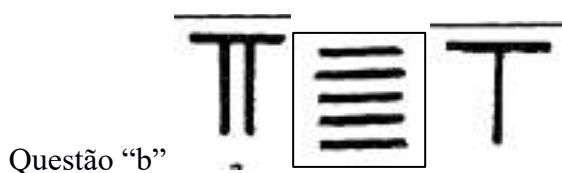
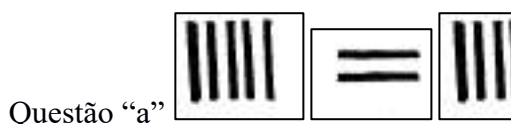
Atividade 05 - Frações em barras

Objetivo

- Compreender o modo como os chineses lidavam com frações.

Análise da tarefa 01

A tarefa demanda que os professores leiam o texto a fim de que entendam como os chineses lidavam com as frações e os numerais, bem como a simbologia utilizada para caracterizá-los. Essa tarefa exige atenção para que não se represente uma simbologia em um numeral que não seja correspondente. Respostas esperadas:



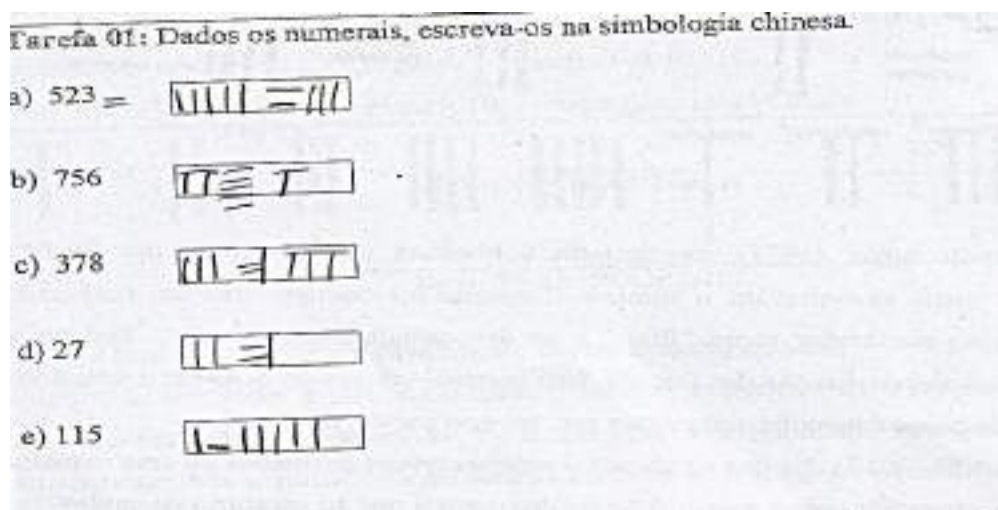
Atendendo à estrutura da tarefa, foram elaboradas oito categorias. Cada categoria apresenta as equipes que se enquadram na descrição. O Quadro 26 é referente à análise da tarefa 01 “frações em barras”.

Quadro 26 - Categorias de análise da atividade 05 tarefa 01 - frações em barras

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	E1/E2
Não respondeu a tarefa. (NR)	E3/E5
Representou corretamente a questão “a”. (RCA)	E1/E2/E4
Representou corretamente a questão “b”. (RCB)	E1/E2/E4
Representou corretamente a questão “c”. (RCC)	E1/E2/E4
Representou corretamente a questão “d”. (RCD)	E1/E2
Representou corretamente a questão “e”. (RCE)	E1/E2/E4

Fonte: Elaboração da autora.

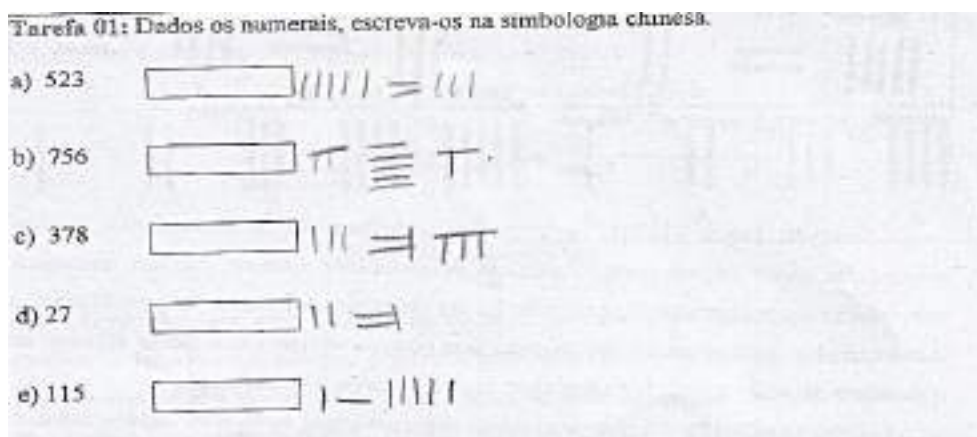
As equipes 1 e 2 acertaram 100% das questões, e a equipe 4 errou apenas a questão “d”. As figuras 26 a 28 são recortes das respostas das equipes 1, 2 e 4 respectivamente.

Figura 26 - Atividade 05 tarefa 01

Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1 respondeu todas as questões corretamente, obtendo um aproveitamento de 100%.

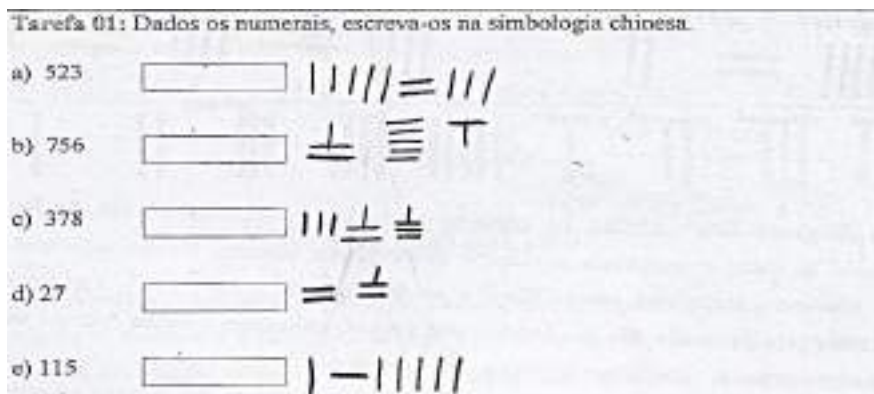
Figura 27 - Atividade 05 tarefa 01



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 2 respondeu todas as questões corretamente, obtendo um aproveitamento de 100%.

Figura 28 - Atividade 05 tarefa 01



Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 4 teve 80% de aproveitamento, dado que, talvez por falta de atenção, respondeu a questão “d” de forma incorreta, haja vista que o numeral 27 deve ser representado com duas barras verticais e não horizontais e mais a simbologia do numeral 7.

Na socialização, os componentes também explicitaram de forma clara a forma pela qual os chineses representavam os numerais e as frações, até porque a única diferença quando se compara com a forma atual é a não utilização de frações impróprias. Quanto à forma de representar os numerais, utilizavam barras verticais e horizontais de forma alternada, numerais na posição ímpar (barras verticais) e numerais na posição par (barras horizontais). Uma participante da formação, questionou a formadora, visto que, ao ler o texto, entendeu que se o numeral fosse ímpar deveria usar a barra vertical e se fosse par a barra horizontal. Porém, a

formadora mostrou que não era assim que essa civilização representava, mas o que o texto estava dizendo é que se deve alternar as barras verticais e horizontais levando-se em conta a posição ímpar e par, e não se o numeral era ímpar ou par. Um exemplo expresso pela professora foi o número 22, que de acordo com a ideia apresentada pela integrante deveria ser representado por barras horizontais, por ser composto de numerais pares. Mas assim ele poderia ser confundido com o numeral quatro, que é representado pela junção de duas barras horizontais. Logo, a formadora levou essa integrante a entender o motivo pelo qual os chineses utilizavam as barras de forma alternada: o primeiro numeral dois, que está na posição ímpar, deve ser representado por barras verticais que representam o numeral 2; e o outro dois deve ser representado por barras horizontais, de forma que não se confunde o numeral 4 com o numeral 22.

Análise da tarefa 02

No desenvolvimento da tarefa 02, faz-se necessário transformar a fração imprópria em números mistos. Os cursistas devem tomar cuidado para não efetuar a transformação de forma incorreta; para isso, é preciso que a definição de fração imprópria e números mistos esteja bem internalizada. Respostas esperadas:

- $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$
- $\frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 1\frac{3}{8}$
- $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$

Conforme demanda da tarefa e resoluções apresentadas pelas equipes, foram concebidas seis categorias. Em cada categoria, apresentam-se as equipes que se enquadram. O Quadro 27 é referente à análise da atividade 05 tarefa 02 “frações em barras”.

Quadro 27 - Categorias de análise da tarefa 02 - frações em barras

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	E1/E2/E4
Não respondeu a tarefa. (NR)	E3/E5
Respondeu a questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E4
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E4
Respondeu a questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E4

Fonte: Elaboração da autora.

Conforme evidenciado, as equipes E1/E2/E4 responderam todas as questões corretamente, correspondendo a 100% de aproveitamento, conforme explicitado nas figuras 29 a 31, concernentes às equipes 1, 2 e 4 respectivamente.

Figura 29 - Atividade 05 tarefa 02

Tarefa 02: Represente as frações impróprias utilizando-se dos números mistos.

a) $\frac{4}{3}$ $1 \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{11}{8}$ $1 \cdot \frac{8}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$

c) $\frac{5}{4}$ $1 \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 30 - Atividade 05 tarefa 02

Tarefa 02: Represente as frações impróprias utilizando-se dos números mistos.

a) $\frac{4}{3}$ $1 \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{11}{8}$ $1 \cdot \frac{8}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$

c) $\frac{5}{4}$ $1 \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 31 - Atividade 05 tarefa 02

Tarefa 02: Represente as frações impróprias utilizando-se dos números mistos.

a) $\frac{4}{3}$ $1 \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{11}{8}$ $1 \cdot \frac{8}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$

c) $\frac{5}{4}$ $1 \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Fonte: Equipe 4 (2018).

Com a devolutiva da sondagem, houve uma revisão dos conceitos/ideias concernentes às frações (fração equivalente, comparação de fração, fração mista, imprópria). Além do mais, foram explanados os cinco significados de fração, visto que nas atividades da sondagem

estavam inseridas questões envolvendo esses significados (parte/todo, numeral, quociente, operador multiplicativo e medidas). Acredita-se que, devido à correção das questões da sondagem, houve aprendizagem quanto às diferentes ideias de fração; logo, os conceitos de fração própria e imprópria estavam bem definidos.

Análise da tarefa 03

Na tarefa 03, espera-se a transformação de fração mista em imprópria, o que exige conhecimento das operações com frações. Acredita-se que a maioria não apresentará dificuldades, visto que, na correção das atividades diagnósticas, foi possível a ampliação do conhecimento do tema frações. A fração mista $2\frac{1}{3}$, dentre as possibilidades de solução, poderá ser resolvida conforme o exemplo: $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Os cursistas poderão conduzir as questões “b” e “c” de modo semelhante. Ressalta-se que alguns podem apresentar dificuldades para a realização da tarefa 03 se não identificarem quem é o todo (parte inteira).

Considerando essa tarefa e os dados das equipes participantes, foram concebidas sete categorias de análise. O Quadro 28 é referente à análise da atividade 05 tarefa 03 “frações em barras”.

Quadro 28 - Categorias de análise da atividade 05 tarefa 03 - frações em barras

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	E4
Não respondeu a tarefa. (NR)	E3/E5
Respondeu a questão “a” corretamente. (RAC)	E2/E4
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	E1/ E4
Respondeu a questão “c” corretamente. (RCC)	E2/E4/E1
Respondeu a questão “d” corretamente. (RDC)	E2/E4

Fonte: Elaboração da autora.

Segundo o quadro, 60% dos participantes responderam a tarefa (E1/E2/E4). Duas equipes não responderam a tarefa (E3/E5). Dos que responderam o solicitado, apenas as equipes E2/E4 acertaram a questão “a”; a questão “b” teve um índice de acerto de 40%, sendo

respondida corretamente pelas equipes (E4/E1); a questão “c” foi respondida de forma correta pelas três equipes; apenas as equipes 2 e 4 conseguiram responder corretamente a questão “d”.

Dado que apenas uma das três equipes participantes da tarefa respondeu corretamente todos os itens, fica evidente um obstáculo à interpretação das frações mistas e posterior transformação em fração imprópria. As figuras 32 a 34 retratam a resolução dessa tarefa pelas equipes E1/E2/E4.

Figura 32 - Resolução da atividade 05 tarefa 03

Tarefa 03: Conforme apresentação dos seguintes números mistos represente-os utilizando fração imprópria.

a) $2\frac{1}{3}$ $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

b) $5\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

c) $3\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

d) $1\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1, como explicitado, respondeu incorretamente as questões “a” e “d” e respondeu corretamente as questões “b” e “c”, obtendo um índice de aproveitamento de 50%. A equipe, talvez por falta de atenção, esqueceu de acrescentar a fração $\frac{1}{3}$ aos inteiros $\frac{3}{3} + \frac{3}{3}$. A “d” ao invés de colocar o inteiro $\frac{3}{3}$ equipe colocou $\frac{3}{5}$.

Figura 33 - Resolução da atividade 05 tarefa 03

Tarefa 03: Conforme apresentação dos seguintes números mistos represente-os utilizando fração imprópria.

a) $2\frac{1}{3}$ $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

b) $5\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

c) $3\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

d) $1\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Como já explanado, a equipe 2 respondeu incorretamente as questões “b” e “d” e respondeu corretamente as questões “a” e “c”. Na questão “d”, erro foi em acrescentar a fração $\frac{2}{3}$ a frente de $\frac{3}{3} + \frac{2}{3}$. Na questão “b” a equipe apresentou apenas quatro inteiros, ao invés de cinco.

Figura 34 - Resolução da atividade 05 tarefa 03

Tarefa 03: Conforme apresentação dos seguintes números mistos represente-os utilizando fração imprópria.

a) $2\frac{1}{3}$ $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ *imprópria*

b) $5\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

c) $3\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

d) $1\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 4 respondeu corretamente todas as questões. Assim, nem todas as equipes realizaram à tarefa e apenas uma delas obteve aproveitamento de 100%. Isso demonstra que ainda existe falta de domínio do objeto (fração mista) por esses professores, o que não devia acontecer, haja vista que esses sujeitos ensinam o objeto matemático fração imprópria e mista a estudantes dos anos iniciais, sendo necessário o pleno domínio desses conceitos.

Análise da tarefa 04

A tarefa quatro é para elaborar e apresentar as respectivas soluções das questões elaboradas.

As equipes elaboraram e socializaram as questões durante a formação, mas não registraram a elaboração no caderno de formação.

Atividade 06 - Frações na Índia

Objetivos

- Conhecer o modo como os hindus se relacionavam com as frações;
- Identificar semelhanças entre a forma como os hindus lidavam com as frações e a maneira como os ocidentais lidam.

Análise da tarefa 01

Para o desfecho da tarefa 01, indica-se a leitura do texto e a representação das frações conforme simbologia utilizada pela civilização hindu, utilizando três diferentes registros de representação semiótica (decimal, geométrico e percentual). Provavelmente, os cursistas não encontrarão dificuldades nessa atividade, visto que os hindus representavam as frações quase da mesma forma que a civilização indo-arábica³.

Essa tarefa demanda a representação das frações utilizando três diferentes registros. Assim para análise, criaram-se oito categorias. O Quadro 29 é referente à análise da tarefa 01 “irmãos hindus”.

Quadro 29 - Análise da atividade 06 tarefa 01 - irmãos hindus

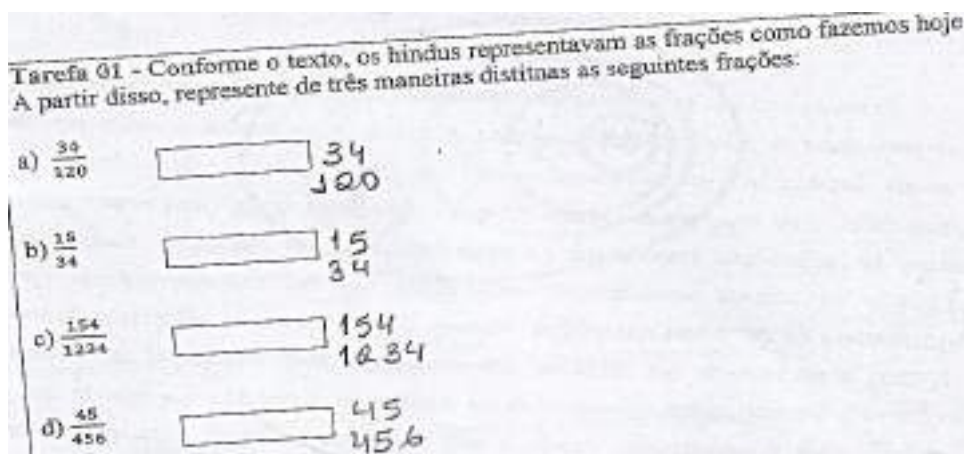
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E5
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	E5
Não respondeu a tarefa. (NR)	E4
Respondeu a questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu a questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu a questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E2/E3/E5
Utilizou os três registros de representação. (UTR)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

Conforme os dados, houve uma adesão maior das equipes (80%) a essa tarefa (E1, E2, E3, E5); somente a equipe 4 não respondeu a tarefa. Foi solicitado que representassem as frações de três formas distintas, mas apenas a equipe 5 se atentou a isso. Embora as equipes (E1, E2, E3) tenham respondido a questão, não utilizaram nenhum registro de representação. Fica evidente que a maioria se atentou ao texto norteador da questão e respondeu a tarefa mesmo que incompleta. Conforme texto, os hindus representavam as frações conforme fazemos hoje, a diferença residia em não utilizarem a barra separando numerador do denominador. Com o auxílio das figuras 35 a 38, será esclarecida em pormenores a resolução dessa tarefa pelas equipes.

³ Nossa civilização.

Figura 35 - Atividade 06 tarefa 01

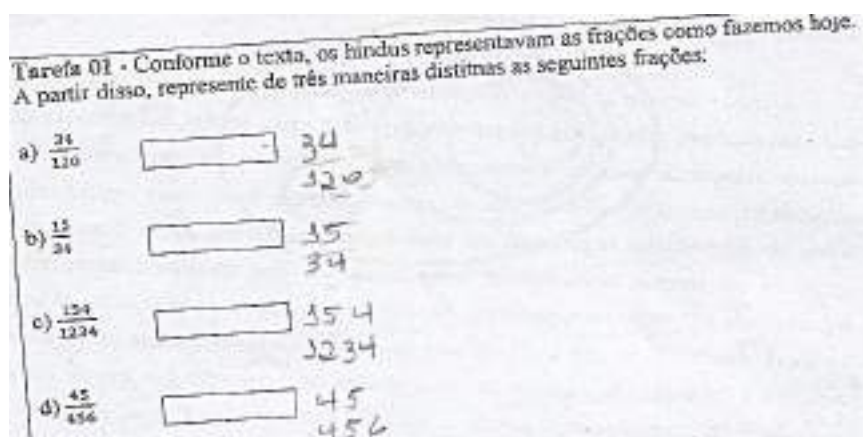


Fonte: Equipe 1 (2018).

Conforme já explicitado, a equipe 1 respondeu a tarefa, mas de forma incompleta, em virtude de não ter representado de três maneiras distintas as frações. Fica evidente a falta de atenção ao ler o enunciado da questão.

A figura 36 é recorte da resolução da equipe 2.

Figura 36 - Atividade 06 tarefa 01

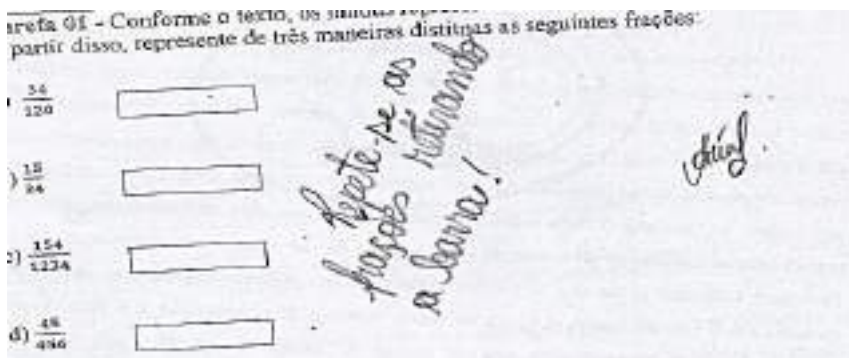


Fonte: Equipe 2 (2018).

De maneira análoga à equipe 1, a equipe 2 respondeu incompletamente a tarefa, visto que não fez uso de nenhum registro de representação, conforme solicitado pela questão.

A figura 37 é recorte da resolução da equipe 3.

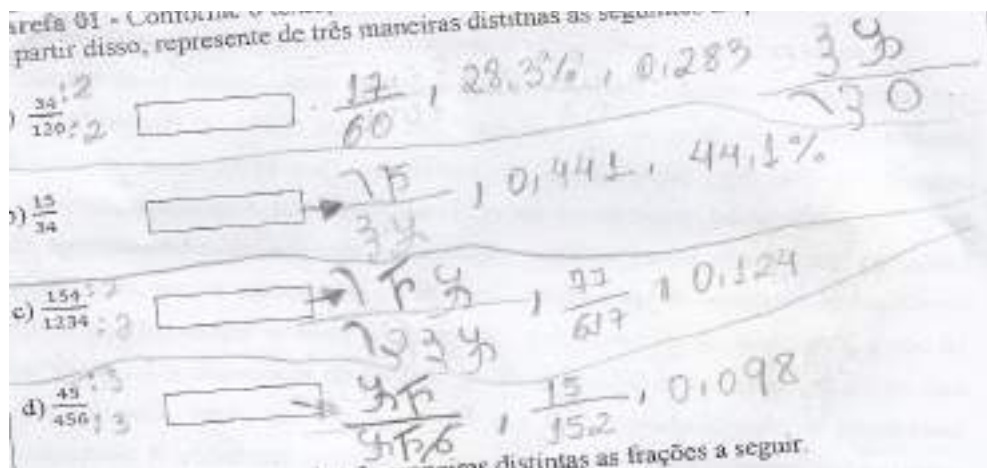
Figura 37 - Atividade 06 tarefa 01



Fonte: Equipe 3 (2018).

Conforme destacado na figura 37, a equipe 3 representou as frações conforme os hindus, utilizando o registro natural. A questão também foi respondida de forma incompleta por essa equipe, visto que as frações não foram representadas de três maneiras distintas.

Figura 38 - Atividade 06 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2018).

A equipe 5 respondeu a tarefa de modo completo e corretamente. De forma plausível, representou de três formas distintas a fração e ainda fez uso de tratamento ao simplificar as frações.

Assim, nessa tarefa houve adesão de 80% das equipes, porém a tarefa só foi respondida completamente por uma equipe, manifestando a falta de atenção das outras equipes ao ler o enunciado da questão.

Análise da tarefa 02

No desdobramento da tarefa dois, pleiteia-se o conhecimento de fração em relação ao significado parte/todo; logo, é preciso contar a quantidade de partes em que foi dividida a figura (denominador) e considerar a parte pintada (numerador) como parte do todo. A solução respectivamente dos itens “a” e “b” se dará da seguinte maneira: “a” $\frac{1}{3} = 0,333 = 33,3\%$; “b” $\frac{10}{16} = 0,625 = 62,5\%$. Sendo, portanto, possíveis modelos de solução para os demais itens.

Os participantes não apresentarão dificuldades nessa tarefa, dado que o significado de fração parte/todo está bem assimilado, porém deve-se tomar cuidado para não trocar numerador com denominador.

Para identificar as equipes que responderam a tarefa, responderam corretamente, representaram a figura utilizando os registros decimal, fracionário e percentual e fizeram uso de conversão, foram concebidas seis categorias. O Quadro 30 é concernente à análise da atividade 06 tarefa 02 “irmãos hindus”.

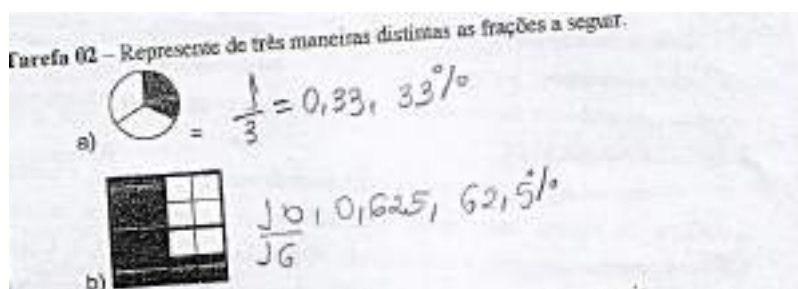
Quadro 30 - Categorias de análise referentes à atividade 06 tarefa 02 - irmãos hindus

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E5
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	-----
Não respondeu a tarefa. (NR)	E4/E3
Respondeu a questão “a” corretamente, (RAC)	-----
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E5
Fez conversão. (FC)	E1/E2/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Houve participação das equipes E1, E2, E5 na resolução dessa tarefa, e todas utilizaram três registros de representação, conforme solicitado pela questão. As três equipes participantes responderam quase que integralmente a questão; o único erro ocorreu ao representar a fração $\frac{1}{3}$ em sua forma percentual, que é 33,333%..., e não 33%, como respondido pelas três equipes. A delineação em pormenores das resoluções acontecerá a seguir, com auxílio das figuras 39 a 41, que são recortes das resoluções das equipes.

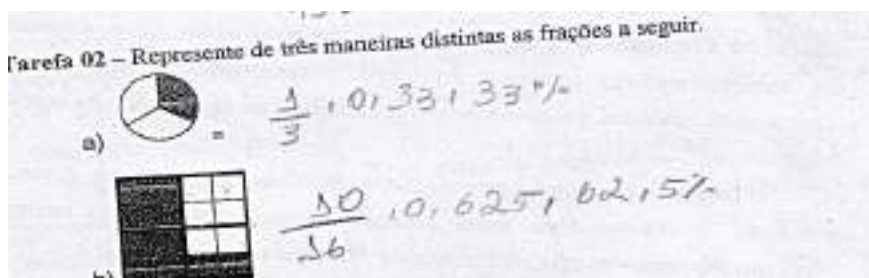
Figura 39 - Atividade 06 tarefa 02



Fonte: Equipe 1 (2018).

As duas questões foram representadas corretamente pela equipe 1, exceto a caracterização da forma percentual da questão “a”. De fato, segundo Martins (2016), constatou-se que os conteúdos matemáticos que os professores consideram mais difíceis para ensinar são os números racionais, tanto na representação decimal quanto na fracionária e suas relações com a porcentagem.

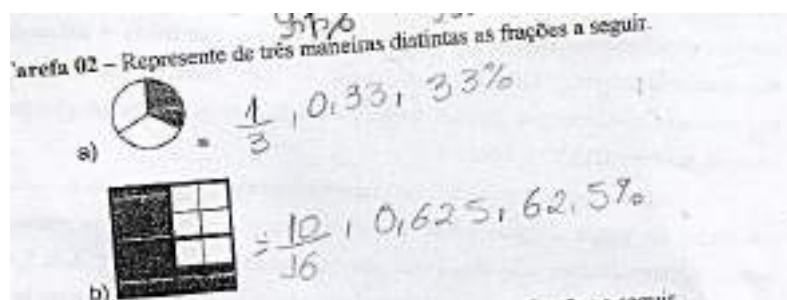
Figura 40 - Atividade 06 tarefa 02



Fonte: Equipe 2 (2018).

De forma análoga à equipe 1, a equipe 2 representou incorretamente a alternativa “a” em sua forma percentual. Porém, as outras representações foram realizadas corretamente, conforme solicitado pela questão.

Figura 41 - Atividade 06 tarefa 02



Fonte: Equipe 5 (2018).

A equipe 5 representou corretamente as questões, mas o item “a”, em sua forma percentual, foi realizado incorretamente.

Nessa questão, houve adesão de mais da metade das equipes e a questão foi realizada em sua completude. É notório o crescimento conceitual desses professores quanto ao uso dos registros de representação, dado que na sondagem poucos conseguiam representar as frações utilizando diferentes registros. Isso denota uma ampliação do conhecimento quanto ao objeto matemático fração. De fato, Duval (2009) conjectura que a aprendizagem em matemática se dá quando se consegue utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica referentes a um mesmo objeto.

O significado fracionário parte/todo é de domínio da grande maioria desses professores conforme evidenciado na resolução integral dos itens da questão. Segundo Silva (2005), os professores, ao ensinar fração, utilizam em especial a concepção parte/todo e como técnica de resolução de problemas a dupla contagem das partes.

Análise da tarefa 03

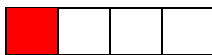
Na solução da tarefa três, os cursistas devem atuar da mesma forma que nas tarefas anteriores, representando cada item de três formas distintas, ou seja, utilizando três diferentes registros de representação semiótica. Considera-se que alguns participantes não apresentem dificuldades, uma vez que estão habituados a representar frações utilizando diferentes registros. Entretanto, outros podem encontrar dificuldades em função de não dominar alguns registros de representação semiótica, tais como decimal, linguagem natural, geométrico, porcentagem.

Respostas esperadas: uma das formas de proceder é

$$a) 10\% = 0,1 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} =$$



$$b) 0,25 = \frac{25}{100} = 25\% =$$



$$c) \frac{3}{4} = 75\% = 0,75 =$$



$$d) 2\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 = \frac{25}{10} =$$



$$e) \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\% = 0,5.$$



Tendo em vista os objetivos da tarefa e as resoluções das equipes, foram compostas nove categorias, as quais identificam as equipes que responderam a tarefa, as que responderam corretamente, fizeram conversão e representaram os numerais utilizando pelo menos três registros de representação semiótica. O Quadro 31 é concernente à análise da tarefa 03 “irmãos hindus”.

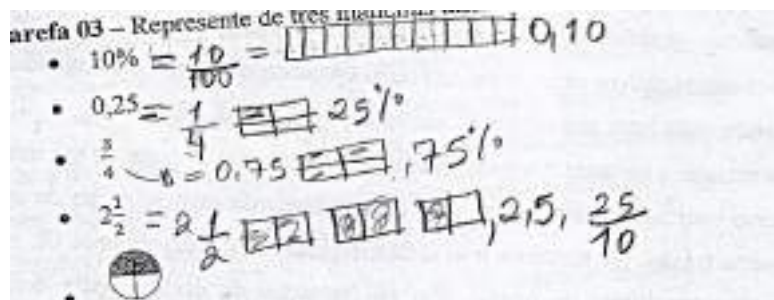
Quadro 31 - Categorias de análise da atividade 06 tarefa 03 - irmãos hindus

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E5
Respondeu todas as questões corretamente. (RTC)	E5
Não respondeu a tarefa. (NR)	E3/E4
Respondeu a questão “a” corretamente. (RAC)	E5
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E5
Respondeu a questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E5
Respondeu a questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E2/E5
Respondeu a questão “e” corretamente. (REC)	E2/E5
Fez conversão. (FC)	E1/E2/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Essa tarefa demanda dos participantes domínio de diferentes formas de representação fracionária, a saber, percentual, decimal, fracionária e geométrica. Ao analisar as respostas, verifica-se que as equipes responderam a maioria das questões corretamente e fizeram uso das diferentes representações. As figuras 42 a 44 demonstrarão de forma clara as resoluções desenvolvidas pelas equipes E1, E2 e E5 respectivamente.

Figura 42 - Atividade 06 tarefa 03



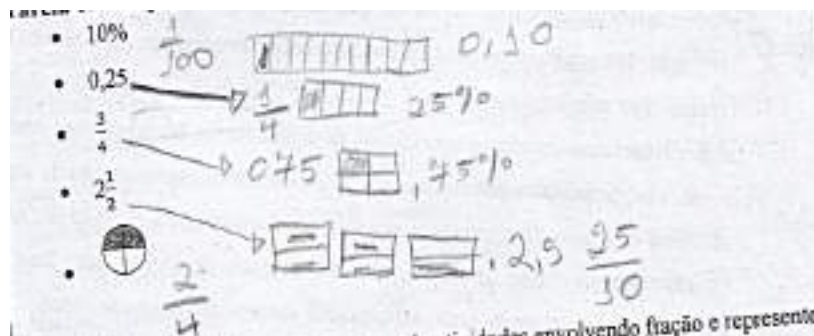
Fonte: Equipe 1 (2018).

Conforme demonstrado na figura 42, o primeiro item foi representado corretamente em sua forma fracionária e decimal e incorretamente em sua forma geométrica, visto que a figura foi seccionada em dez partes, mas não foi hachurada uma parte de dez, tornando a representação da fração $\frac{1}{10}$ incorreta.

O segundo item foi delineado corretamente em suas diferentes representações, seja fracionário, geométrico ou percentual. De forma similar, o terceiro e o quarto itens foram explanados corretamente. O quinto item não foi representado.

A figura 43 apresenta as soluções dadas pela equipe 2.

Figura 43 - Atividade 06 tarefa 03

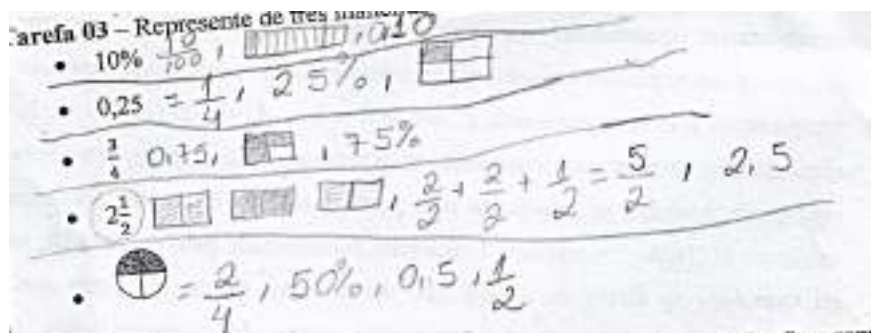


Fonte: Equipe 2 (2018).

Os itens “b”, “d” e “e” foram caracterizados corretamente nas três representações. Porém, o item “a” e “c” foram explanado incorretamente em sua forma fracionária e geométrica respectivamente, haja vista que na representação geométrica feita pela equipe indica 25% e não 75%, e na fracionária indica 1% e não 10% como demandado pela questão. O item “e” foi retratado apenas em sua forma fracionária.

A figura 44 é recorte da resolução da atividade 06 tarefa 03 concernente à equipe 5.

Figura 44 - Atividade 06 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2018).

A equipe 5 teve um aproveitamento de 100% na resolução dessa tarefa, uma vez que representou corretamente todos os itens. A equipe fez uso das representações fracionária, decimal, geométrica e percentual. Além do mais, ficou evidente o domínio das conversões e dos tratamentos ao caracterizar os itens. Duval (2009) conjectura que a aprendizagem em matemática se dá quando se consegue utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica referentes a um mesmo objeto. Com relação às outras equipes (E1/E2), ficou evidente a dificuldade em representar na forma geométrica.

Análise da tarefa 04

O objetivo da tarefa 4 é a elaboração de questões envolvendo frações e a utilização de pelo menos três registros de representação semiótica. Espera-se que não apresentem dificuldades na elaboração das questões e na utilização dos diferentes registros, dado que o seu uso foi bem enfatizado no encontro anterior, em que foi corrigida a sondagem.

Tarefa 04 – Agora é com você. Elabore três atividades envolvendo fração e represente-as de maneiras diferentes.

Os participantes da pesquisa socializaram as atividades concebidas com toda a turma. Porém, as atividades não foram registradas no caderno de respostas utilizadas em toda a análise dos dados da pesquisa. Desse modo, não foi possível realizar a sua análise.

Atividade 07 – Conhecendo mais sobre frações

Objetivo

- A partir de elementos históricos, ampliar a compreensão em relação ao conceito de fração.

Análise das tarefas 01 a 05

Para a realização das tarefas 01, 02, 03, 04 e 05, sugere-se a leitura do texto “E por falar em nós: frações nos dias atuais” e o uso dos materiais de apoio indicados no encaminhamento metodológico. Propõe-se a produção de um texto relacionado às frações e que aponte elementos

específicos, exemplificando-as. Acredita-se que os participantes não tenham dificuldades para realizar essa tarefa, uma vez que podem utilizar materiais de apoio.

Para análise da tarefa, foram concebidas treze categorias. O Quadro 32 é concernente à análise da atividade 07 tarefas 01 a 05 “frações nos dias atuais”.

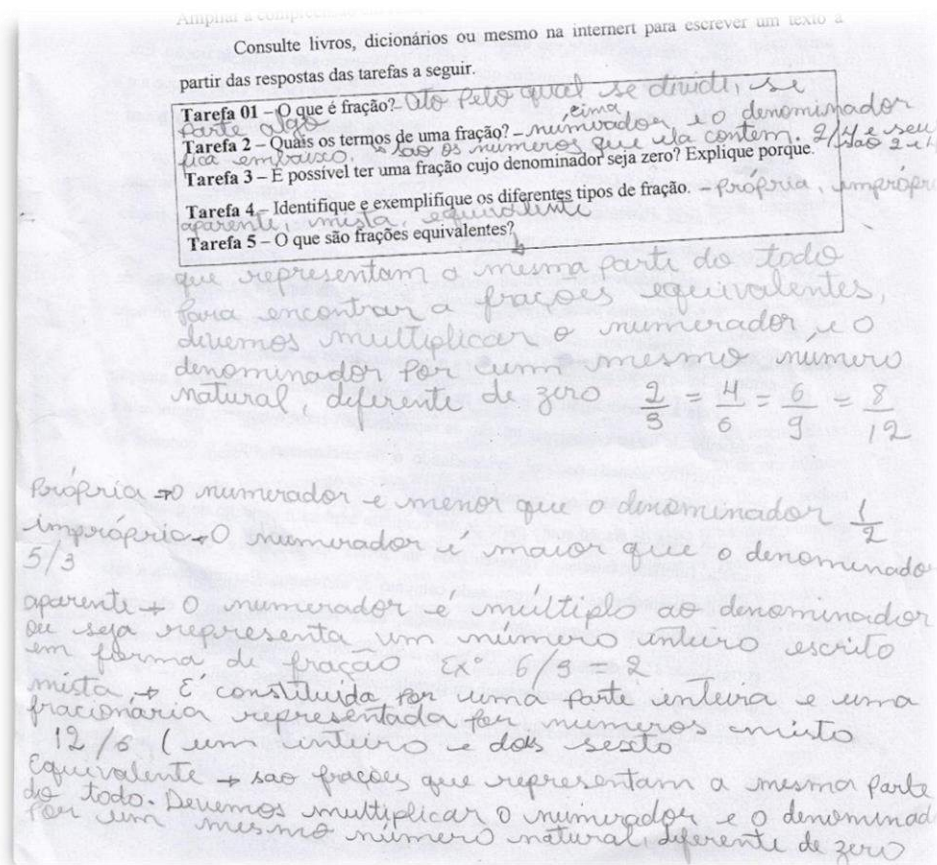
Quadro 32 - Categorias de análise da atividade 07 tarefas 01 a 05 - frações nos dias atuais

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa 1, 2, 3, 4 e 5 corretamente. (RTC)	E2/E3/E4/E5
Não respondeu as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5. (NRT)	-----
Respondeu a tarefa 1 corretamente. (R1C)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa 2 corretamente. (R2C)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa 3 corretamente. (R3C)	E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa 4 corretamente. (R4C)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa 5 corretamente. (R5C)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa 1. (NR1)	-----
Não respondeu a tarefa 2. (NR2)	-----
Não respondeu a tarefa 3. (NR3)	E1
Não respondeu a tarefa 4. (NR4)	-----
Não respondeu a tarefa 5. (NR5)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

Dentre as sete atividades do primeiro encontro, a única em que todas as equipes registram suas resoluções no caderno da formação foi essa (atividade 07, tarefas 01, 02, 03, 04 e 05). As equipes E2, E3, E4 e E5 responderam corretamente todas as tarefas, obtendo um aproveitamento de 100% na atividade. A equipe 1 não respondeu a tarefa 3, obtendo um aproveitamento na atividade de apenas 80%. No geral, houve um avanço desses professores concernente à compreensão do objeto matemático fração, haja vista que na sondagem poucos professores conseguiram conceituar corretamente o que era fração, seus termos e os tipos de frações. As figuras 45 a 52 subsidiarão os pormenores das respostas explanadas pelas equipes.

Figura 45 - Atividade 07 tarefas 01 a 05



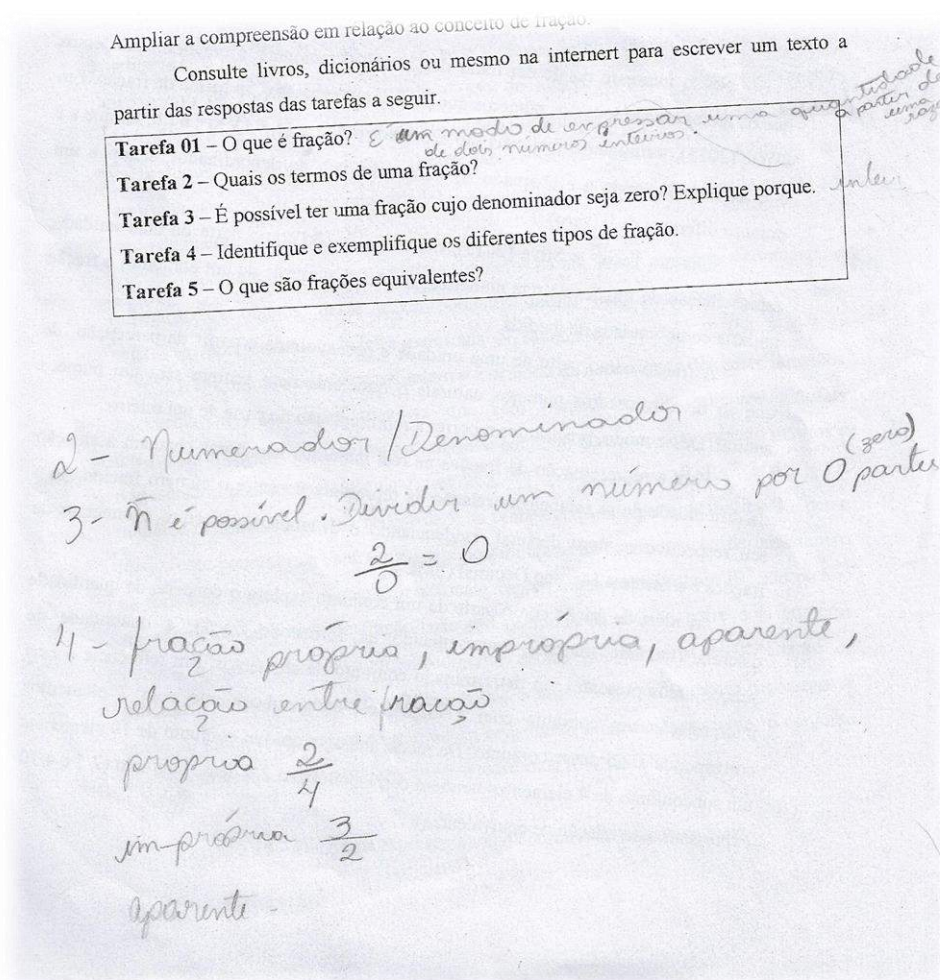
Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 1 respondeu corretamente a tarefa 01 ao definir fração como “algo que se divide, se parte algo”. Em relação aos termos da fração (tarefa 02) respondeu corretamente ao indicar “numerador” e “denominador”. A equipe não respondeu a tarefa 03, que solicitava se era possível ter um denominador que fosse zero. A equipe indicou os tipos de frações corretamente, bem como as exemplificou, assim respondeu corretamente a tarefa 04. Por fim, a equipe definiu e explicitou corretamente o que são frações equivalentes, respondendo a tarefa 05.

O aproveitamento da equipe 1 concernente aos conceitos de fração foi de 80%, dado que só não respondeu uma das tarefas solicitadas, indicando assim compreensão do objeto matemático em estudo.

A figura 46 é recorte das respostas apresentadas pela equipe 2.

Figura 46 - Atividade 07 tarefas 01 a 05



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe caracterizou corretamente a tarefa 01 ao responder que uma fração é “um modo de expressar uma quantidade a partir de uma razão de dois números inteiros”. Ao escrever numerador e denominador, respondeu corretamente a tarefa 02, que demandava conhecimento concernente aos termos de uma fração. Respondeu corretamente a tarefa 03 ao definir que não é possível divisão por zero. Além disso, a equipe construiu um texto em que tratou da definição de fração (numerador, denominador), conceituou os diferentes tipos de fração e as exemplificou, além de abordar a sua importância. Foram explanados e exemplificados os tipos frações (própria, imprópria, aparente, equivalente). A equipe obteve um percentual de aproveitamento de 100%, uma vez que respondeu corretamente todas as tarefas da atividade. Fica evidente o empenho e a ampliação do conhecimento, considerando os dados da sondagem, em que poucos professores participantes da pesquisa conseguiam responder corretamente as definições pertencentes às frações, seus elementos e seus tipos.

O texto a seguir (figuras 47 e 48) é de autoria da equipe 2 e retrata o conceito de fração, bem como seus elementos.

Figura 47 - Texto (parte 1)

S T Q Q S S Citividade 07. 17/05/2018

Há anos o sistema de numeração decimal vem evoluindo e, se transformando. Cada etapa é marcada por um avanço, que ao passar dos anos só evoluiu. Um marco nesta evolução foi a fração, onde para podermos compreendê-la melhor faz-se necessário a compreensão dos seus distintos significados. O objetivo principal da fração, é expressar uma quantidade por meio da razão/divisão, e um modo de expressar uma quantidade a partir de uma razão de dois números inteiros. Para muitos, compreender uma tabela é uma tarefa simples, mas, ao mesmo tempo compreender seus termos "numerador e denominador". Para entendermos o denominador, não podemos ter dúvida de que a fração é uma relação coincidente entre o denominador e o numerador. De modo geral, podemos explicar que o denominador é o número total de partes que o todo é dividido e o numerador é a quantidade de partes que são de interesse.

As frações podem ser classificadas em Fração Própria - são frações onde o numerador é menor que o denominador ($\frac{1}{2}$); Fração Imprópria - são frações em que o numerador é maior ($\frac{3}{2}$); Fração Aparente - são

SÃO DOMINGOS

Fonte: Equipe 2 (2018).

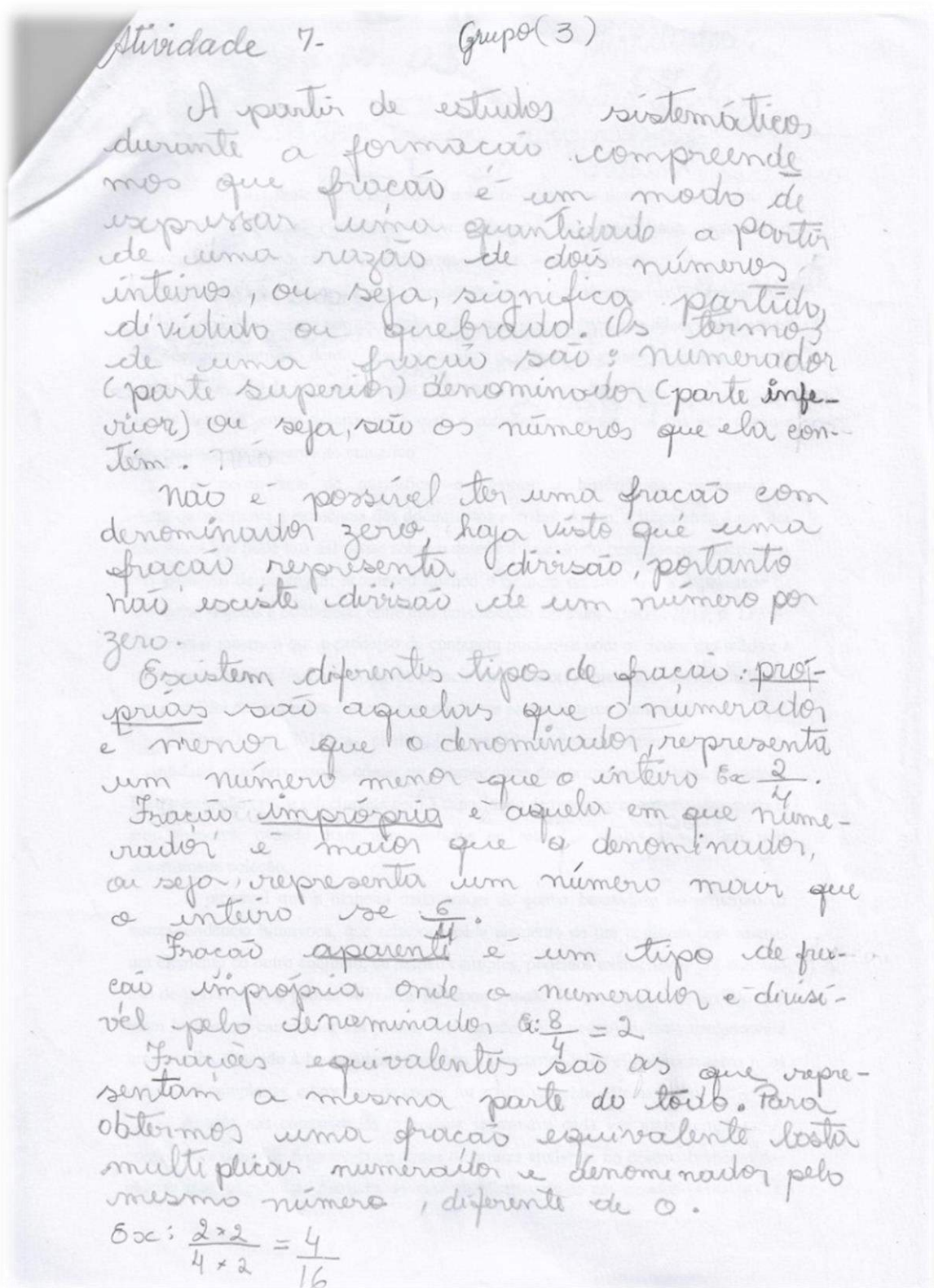
Figura 48 - Texto (parte 2)

frações em que o numerador é múltiplo
 ao denominador ($\frac{6}{3} = 2$); Fração mista é
 constituída por uma parte inteira e uma
 fracionária representada por números mistos
 ($1 \frac{2}{3}$). Existem mais outros tipos de fração,
 as quais são equivalente, irredutível, uni-
 tário, egípcia, decimal, composta continua
 e algébrica, que no exato momento, não
 faz-se necessário mais aprofundamento
 nos seus significados, dando apenas
 ênfase na fração equivalente a qual apa-
 rentemente parece ser diferente, mas que
 possuem o mesmo resultado. Sendo assim,
 representam a mesma quantidade ($\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$) se
 dividirmos o numerador e o denominador
 por 2 na fração $\frac{2}{4}$, obtemos o valor $\frac{1}{2}$.
 Para encontrarmos frações equivalentes,
 basta multiplicar ou dividir o numerador
 e denominador pelo o mesmo número, sen-
 do esse diferente de zero.

Fonte: Equipe 2 (2018).

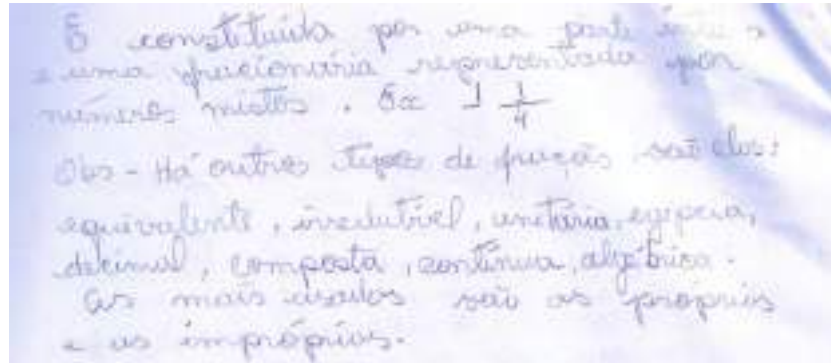
A equipe 3 respondeu a atividade 07 toda em forma de texto. Definiu corretamente o que é fração, bem como suas partes, indicou e exemplificou os tipos de fração e explicitou o motivo de não existir no denominador o numeral zero, haja vista que fração representa divisão e na matemática não existe divisão por zero. O texto a seguir (figuras 49 e 50) foi construído pela equipe 3 em referência à atividade 07 tarefas 01, 02, 03, 04 e 05.

Figura 49 - Atividade 07 tarefas 01 a 05 (parte 1)



Fonte: Equipe 3 (2018).

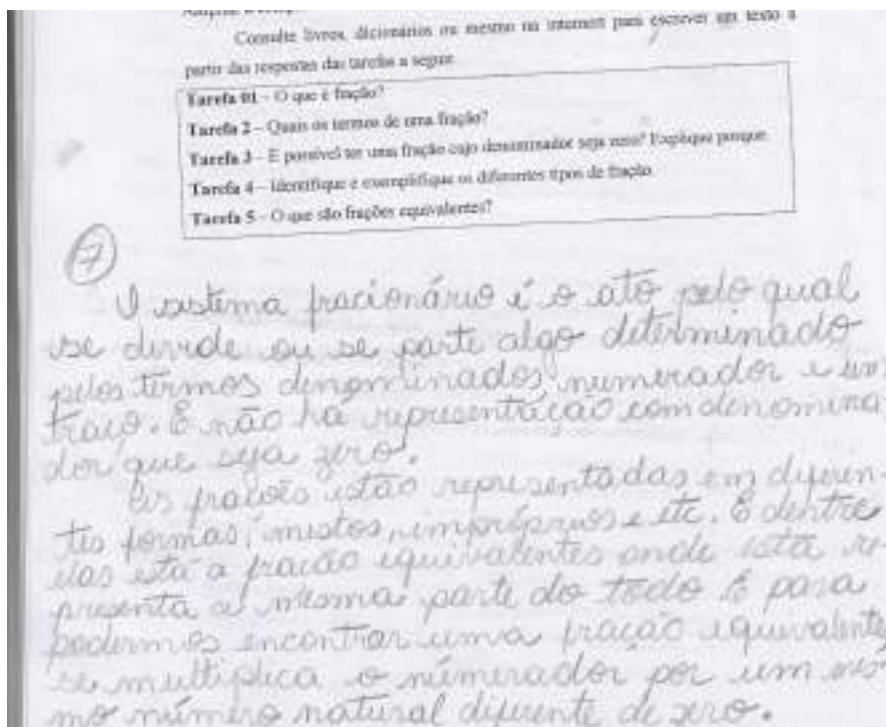
Figura 50 - Atividade 07 tarefas 01 a 05 (parte 2)



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 4 respondeu as tarefas da atividade 07 em forma de texto. Definiu de forma correta os termos de uma fração ao responder: “é o ato pelo qual se divide ou se parte algo, determinado pelos termos denominador, numerador e um traço”. Respondeu corretamente a tarefa 03 ao dizer que “não há representação com denominador que seja zero”. Além do mais, indicou no texto os diferentes tipos de fração e os exemplificou. Assim, a equipe respondeu corretamente toda a atividade 07, obtendo um aproveitamento de 100%. Acrescenta-se a isso uma ampliação do conhecimento, considerando-se os dados da sondagem. A figura 51 é consoante ao dito em relação à equipe 4.

Figura 51 - Atividade 07 tarefas 01 a 05



Fonte: Equipe 4 (2018).

Ao responder a atividade 07, a equipe 5 também construiu um texto. Definiu fração da seguinte maneira: “entendemos de fração a parte de um todo”, o que foi feito de forma correta. Retratou e exemplificou corretamente os termos de uma fração, os tipos de fração, bem como a explanação de que não existe fração com denominador zero. Assim, obteve um aproveitamento de 100%, tornando evidente sua compreensão de fração, conforme a figura 52.

Figura 52 - Atividade 07 tarefas 01 a 05

Fração

Entendemos de fração a parte de um todo conhecemos como os termos de uma fração o numerador e o denominador. É a parte consumida de uma fração seja ela própria, imprópria mista, aparente ou fração equivalente. Não é possível pois o zero representa nada, nesse caso não há possibilidade de realizar, indeterminado.

Identificamos as frações próprias através do numerador que é menor que o denominador. Fração imprópria é total mente ao contrário pois o numerador é maior que o denominador. Fração mista é composta por três números, uma parte representa a parte inteira e os outros dois a parte fracionária, para reconhecer uma fração aparente observamos sempre que o numerador é múltiplo e ao denominador que forma a parte inteira da fração aparente. Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo para encontrar frações equivalentes devemos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

Fonte: Equipe 5 (2018).

Considerações sobre a História das frações

De início, as equipes elaboraram um sistema de fração lógico e socializaram a maneira de operar com esse sistema. Nas primeiras tarefas, nenhuma equipe apresentou de forma correta a ideia de fração e suas partes. Porém, já no primeiro encontro, na atividade 07 tarefas de 01 a 05, todas as equipes conceituararam corretamente o que é fração, seus termos e os tipos de frações. Houve durante o desenvolvimento das atividades amadurecimento das ideias concernentes a fração e seus termos, o que tornou possível, com auxílio de alguns materiais de consulta, sua explanação.

Quanto à representação de frações com a simbologia egípcia, houve a análise de apenas duas equipes, uma vez que apenas estas responderam no caderno da formação, e destas apenas uma respondeu toda a tarefa corretamente. O texto norteador exibia informações suficientes para sua representação. Acredita-se que por falta de atenção a tarefa não foi respondida corretamente.

No sistema babilônico, as operações realizadas são na base 60; na socialização, as equipes não conseguiram apresentar o modo como essa civilização operava e as representava. Fica evidente a dificuldade dos participantes com relação à divisão e ao significado de fração quociente.

Dentre as civilizações estudadas, as tarefas relacionadas à civilização grega foram as que tiveram a participação de mais equipes e um maior número de acertos. Acredita-se que seja pela simplicidade em representar os signos gregos, diferentemente dos babilônicos, para os quais era preciso mudar a base e depois fazer a representação. Ainda com relação a formulação de numerais e frações e sua representação com a simbologia grega, ficou manifesta a falta de atenção ao ler o texto base, dado que não conseguiram representar corretamente as frações.

Os resultados apontam em relação à transformação de fração mista para imprópria que ainda existe falta de domínio do objeto (fração mista) pelos cursistas, uma vez que, das três equipes que fizeram o registro no caderno de formação, apenas uma resolveu todas as questões da tarefa corretamente, por mais que o erro das outras pareça ter sido por falta de atenção. Da fração imprópria para mista, todas as equipes responderam corretamente, apontando que houve aprendizagem desse conceito.

Nas tarefas envolvendo a civilização hindu, as equipes responderam corretamente todas as questões, talvez porque a maneira de essa civilização representar as frações seja a que mais se assemelha à nossa.

As equipes exibiram desenvoltura ao representar frações, utilizando os diversos registros de representação semiótica e evidenciando a aprendizagem de fração, uma vez que para Duval (2009) a aprendizagem em matemática se dá quando se consegue utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica referentes a um mesmo objeto.

Equivalência

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam o conceito de equivalência e o utilize na solução de situações que envolvem frações.

Atividade 01 – Construindo o tangram

Objetivo

- Explorar conceitos matemáticos na construção do tangram.

Análise da tarefa 01

Os cursistas devem se atentar aos comandos do professor regente e efetuar-los durante a resolução da tarefa 01. Possivelmente, grande parte dos cursistas apresentarão dificuldades, talvez por não se lembrarem de alguns conceitos matemáticos como diagonal, reta paralela e ponto médio. Essa tarefa requer silêncio por parte dos participantes e atenção às instruções.

Na instrução “a”, as dificuldades podem ser mínimas, uma vez que trata tão somente de desenhar um quadrado. Possivelmente alguns cursistas encontrarão dificuldades em traçar a diagonal, talvez por não saber o que significa e/ou por não saber identificá-la no quadrado desenhado. Parece-nos tranquilo a instrução para marcar os pontos médios de cada um dos lados do quadrado, resta saber se os cursistas efetivamente os indicarão. O comando “d” certamente causará alguma dificuldade, seja em função de saber o significado de paralela seja em relação à identificação do lado a ser traçada. A partir destas orientações, muito provavelmente os cursistas apresentarão mais dificuldades, especialmente em função da pouca familiaridade com os termos/conceitos ou por não conhecerem seus significados. Outro aspecto que pode gerar dificuldades é a necessidade de articular conceitos, como por exemplo, no comando “e”, traçar $\frac{3}{4}$ da segunda diagonal até encontrar a reta paralela à primeira diagonal. Presume-se que nas

demais instruções as dificuldades recaiam na interpretação, o que requer compreensão dos significados dos conceitos.

No dia 18 de maio de 2018, o orientador e a professora formadora elucidaram os objetivos daquele encontro, que seria trabalhar equivalência de frações. Feito isso, foi entregue a cada participante uma folha em branco, lápis, borracha e régua. O orientador solicitou silêncio, posto que os constituintes da formação deveriam seguir os seus comandos até conseguir desenhar o Tangram. Mas não foi revelado de antemão aos integrantes que, seguindo suas instruções, estariam desenhando esse material didático (jogo ou quebra-cabeça).

É importante observar que foram dados sete instruções. Mas, a partir do terceiro, houve embaraços e, depois do quinto, nenhum participante conseguiu executá-los de forma correta. Concluída a última orientação, foi entregue novamente aos integrantes uma folha de papel sulfite e, com orientação detalhada e com perguntas feitas pelo mestre, os cursistas foram conseguindo delinear o tangram.

Análise da tarefa 02

A tarefa 02 implica na revisão da tarefa 01, agora sob a orientação do mestre (orientador). Para tanto, faz-se necessária a retomada dos conceitos de cada um dos termos e sua identificação na figura em construção. Deve-se orientar os professores a consultar dicionários, livros didáticos e até mesmo a internet.

Com isso, os cursistas desenharão o tangram, atendendo à solicitação da tarefa 03 “a”. Certamente, apresentarão algumas dificuldades em atender ao que é demandado na questão “b”, e muito mais em relação às demais questões. Mesmo assim, acredita-se fortemente que o trabalho em equipe auxiliará uns aos outros a montar a figura em consonância com o comando.

Provavelmente muitos dos cursistas saberão definir muitas das figuras montadas; no entanto, o uso de recursos didáticos diversos os auxiliará a responder ao que foi solicitado. Conforme aumenta o número de peças do tangram para compor um quadrado, aumentará também o grau de dificuldade.

Encaminhamento metodológico

O professor solicita que os cursistas tomem uma nova folha de papel sulfite e, agora, sob sua orientação, respondam aos comandos indicados na tela. Ele repete cada um dos

comandos, acompanha e orienta os cursistas no desenvolvimento da atividade, promovendo assim discussões no sentido de apontar soluções aos problemas identificados.

Conforme as tarefas vão sendo executadas, o professor deve efetuar perguntas, no sentido de instrumentalizar os cursistas em relação a conteúdos/conceitos matemáticos. O professor deve orientar também para que os cursistas consultem o dicionário para encontrar respostas às perguntas.

Foi entregue novamente uma folha de papel sulfite e, por meio de instruções e perguntas feitas pelo orientador Idemar Vizolli a cada comando os integrantes foram conseguindo delinear o tangram. A cada nova instrução eram feitas perguntas sobre os termos. Por exemplo, o que é um quadrado? Uma diagonal? Ponto médio? Reta paralela? Essas perguntas se relacionavam com os comandos necessários para conseguir esboçá-lo. Em seguida, foi entregue uma cartolina a cada cursista e novamente teriam que delinear-lo, posteriormente recortar as sete peças para que fossem utilizadas nas tarefas seguintes.

Análise da tarefa 03

A partir de observações, comparação e análises das peças do tangram, assim como da relação entre elas, os professores devem estabelecer relação de equivalência e defini-las, o que entendemos que não se trata de uma tarefa trivial, uma vez que não estão acostumados com esse tipo de atividade, tampouco têm clareza do conceito. Ao resolver as questões que tratam da equivalência de fração, certamente muitos cursistas não responderão de forma adequada. Para formar o quadrado solicitado nas tarefas 03 e 04, deverão perceber que a composição se dá a partir do uso de diferentes peças.

Possivelmente, muitos apresentarão dificuldades em perceber que o tangram todo pode ser composto por 16 peças de triângulo pequeno, o que corresponde a $1/16$. Nesse caso, há que se retomar as questões anteriores e mostrar essa relação, estimulando-os a estabelecer a conexão entre cada uma das peças e sua fração correspondente, do mesmo modo que se deve estimular a comparação entre as próprias peças.

Em seguida, eles recebem as seguintes instruções:

- a) Embaralhe as peças e recomponha o quadrado inicial.
- b) Com as peças do tangram, monte quadriláteros. Comece com apenas uma peça do tangram, depois duas, depois três, depois quatro e assim, sucessivamente, até utilizar as sete peças. Não esqueça de anotar suas respostas.

Encaminhamento metodológico

Solicita-se que os cursistas desenhem o tangram na cartolina ou EVA e recortem cada uma das peças.

Ainda pela manhã do dia 17/05/018, a atividade 01 tarefa 03 do bloco equivalência foi iniciada. Era necessário embaralhar e recompor o tangram. Muitos cursistas mostraram dificuldades em recompor o quadrado inicial (tangram), mas com as instruções dos professores formadores (Idemar Vizolli, Leticia Cardoso), foram conseguindo montá-lo.

No turno vespertino, foi realizada a parte “b” da tarefa 03, mas o orientador modificou essa tarefa, solicitando que, ao invés de montar quadriláteros, fossem construídos quadrados utilizando uma peça, depois duas, depois três, depois quatro e assim, sucessivamente, até utilizar as sete peças do tangram. Essa tarefa requeria muita atenção e percepção. É relevante destacar que montar quadrados com até quatro peças do tangram foi simples, porém apenas dois participantes conseguiram montar quadrados com cinco peças. Nenhum participante conseguiu montar quadrados com seis ou sete peças. Todos estavam bem engajados, embora inicialmente não conseguissem perceber a relação do triângulo pequeno com as demais peças. Foi necessário intervenção da formadora no sentido de fazer os participantes perceberem a relação entre as peças, sobretudo do triângulo pequeno com as demais.

Atividade 02 – Entendendo a equivalência

Objetivos

- Verificar o conhecimento dos cursistas em relação à equivalência de frações;
- Pesquisar em diferentes fontes (dicionário, livros didáticos, internet) o significado de equivalência;
- Verificar a equivalência utilizando as peças do tangram.

Encaminhamento metodológico

Utilizando o papel sulfite fornecido pelo professor regente, os cursistas devem responder o que entendem por equivalência. Ademais, devem procurar em diferentes fontes (internet, livro didático, dicionário) o significado de equivalência de frações.

Nas tarefas dois, três, quatro e cinco, os participantes devem utilizar as peças do tangram que foram recortadas na atividade 01 tarefa 03 e seguir os comandos das tarefas sobrepondo as peças e verificando a equivalência.

Análise da tarefa 01

Nessa atividade, os cursistas devem descrever o que entendem por equivalência, podendo consultar livros, internet ou outra fonte de consulta. Um possível erro é a definição de outro termo que não seja o de equivalência.

A letra “d” é uma pergunta pessoal, em que devem responder se sabem estabelecer equivalência de fração. Certamente podem afirmar que sim, mas ao analisar possíveis exemplos demonstrados ou os ditos oralmente é possível verificar a veracidade do que for afirmado.

Os participantes pesquisaram em dicionários e livros didáticos o significado de equivalência. Foram feitas perguntas relacionadas ao que entendiam sobre essa concepção. Foi instigada a leitura do texto “Quantidades iguais representadas de modo diferente”.

Tarefa 02 – Leitura do texto (vide sequência didática).

Análise da tarefa 03

Na tarefa 03, é preciso dois triângulos pequenos para formar o quadrado pequeno, o triângulo médio e o paralelogramo. Para formar um triângulo grande precisa-se de quatro triângulos pequenos. Para formar o quadrado inicial, que é o tangram, precisa-se de dezesseis triângulos pequenos. Uma possível dificuldade é perceber que um triângulo médio equivale a dois triângulos pequenos e que um triângulo grande equivale a dois médios, logo um triângulo grande equivale a quatro triângulos pequenos.

Possivelmente, muitos professores apresentarão dificuldades em perceber que o tangram todo pode ser composto por 16 peças de triângulo pequeno, o que corresponde a $1/16$. Nesse caso, há que se retomar as questões anteriores, mostrar essa relação e estimulá-los a estabelecer conexão entre cada uma das peças e sua fração correspondente, do mesmo modo que se deve estimular a comparação entre as próprias peças.

Alguns apresentaram dificuldades, mas ao passo que a formadora estabeleceu relação do triângulo pequeno com o quadrado, eles entenderam a lógica e conseguiram fazer associação com as outras peças do tangram.

Análise da tarefa 04

Possivelmente, muitos professores apresentarão dificuldades em perceber que o tangram todo pode ser composto por 16 peças de triângulo pequeno, o que corresponde a $1/16$. Nesse caso, há que se retomar as questões anteriores, mostrar essa relação e estimulá-los a estabelecer a relação entre cada uma das peças do tangram e sua fração correspondente, do mesmo modo que se deve estimular a comparação entre as próprias peças do tangram.

Na tarefa 04, é necessário responder quantos paralelogramos são necessários para compor o quadrado inicial. Sabendo que um paralelogramo equivale a dois triângulos pequenos, então dois triângulos pequenos = 1 paralelogramo; um triângulo médio = 1 paralelogramo; dois triângulos grandes = 4 paralelogramos; um quadrado = 1 paralelogramo; e um paralelogramo = um paralelogramo. Logo, são necessários oito paralelogramos para compor o quadrado inicial.

Uma das possíveis dificuldades será fazer a relação de um paralelogramo com dois triângulos pequenos e perceber que é possível sobrepor os dois triângulos pequenos no paralelogramo, isto é, um paralelogramo equivale a dois triângulos pequenos.

Na letra “b”, é preciso identificar quantos triângulos médios são necessários para formar os dois triângulos grandes. Um triângulo grande equivale a dois triângulos médios, portanto são necessários quatro triângulos médios para formar os dois triângulos grandes.

Na letra “c”, é necessário informar a quantidade de quadrados pequenos necessários para formar o quadrado inicial. Sabendo que um quadrado pequeno equivale a dois triângulos pequenos, então: dois triângulos grandes = 4 quadrados; 1 paralelogramo = 1 quadrado; 2 triângulos pequenos = 1 quadrado; 1 triângulo médio = 1 quadrado; e 1 quadrado = 1 quadrado. Nessa perspectiva, são necessários oito quadrados.

Na letra “d”, é preciso informar quantos triângulos pequenos são necessários para formar os dois triângulos grandes. Sabendo que um triângulo grande equivale a dois triângulos médios, e um triângulo médio equivale a dois triângulos pequenos, logo um triângulo grande equivale a 4 triângulos pequenos. Nessa perspectiva, para formar dois triângulos grandes é preciso oito triângulos pequenos.

Na letra “e”, é preciso saber quantos triângulos pequenos são necessários para formar o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio. Para formar o quadrado é preciso dois triângulos pequenos; para formar o paralelogramo, são necessários mais dois triângulos pequenos; e para formar o triângulo médio, mais dois triângulos pequenos. Assim é preciso seis triângulos pequenos para formar o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio.

Na letra “f”, os cursistas precisam identificar que são necessários quatro triângulos grandes para formar o quadrado inicial.

Na letra “g”, é preciso perceber quantos triângulos pequenos são necessários para formar metade do quadrado inicial. A metade do quadrado inicial é formada por dois triângulos grandes, e dois triângulos grandes equivalem a oito triângulos pequenos.

Da tarefa 03 à tarefa 05 da atividade 02 do bloco “equivalência”, os cursistas teriam que verificar a equivalência nas peças do tangram. A formadora auxiliou as equipes a responder as perguntas, visto que a maioria não estava conseguindo perceber que, sobrepondo o triângulo pequeno, conseguiriam estabelecer a equivalência. Para isso, a formadora foi fazendo perguntas que estimulassem esse entendimento. Feito isso, conseguiram responder todas as questões.

Na tarefa 04, teriam que responder quantos paralelogramos seriam necessários para formar o quadrado inicial. Alguns não conseguiram lembrar que dois triângulos pequenos formam um paralelogramo; logo, para formar o quadrado inicial, eles precisariam de 08 paralelogramos, que equivalem a 16 triângulos pequenos. Com orientação da formadora, eles foram conseguindo responder todas as perguntas, posto que internalizaram que, para fazer as relações, teriam que tomar como orientação o triângulo pequeno. Assim, os participantes fluíram bem nas outras perguntas, exceto na pergunta “f” da tarefa 04, sobre quantos triângulos grandes eram necessários para formar o quadrado inicial. Alguns não perceberam que o quadrado inicial era o tangram completo, com suas 07 peças. Com as instruções da formadora, conseguiram entender e decorreram bem nas outras atividades.

Análise da tarefa 05

Possivelmente muitos professores apresentarão dificuldades em perceber que o tangram todo pode ser composto por 16 peças de triângulo pequeno, o que corresponde a $\frac{1}{16}$. Respostas esperadas:

A) qual a fração que o triângulo pequeno representa considerando o quadrado todo (tangram).

Como o quadrado todo equivale a dezesseis triângulos pequenos, logo um triângulo pequeno é $\frac{1}{16}$.

B) representar o quadrado pequeno, considerando o quadrado todo (tangram) é $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

C) a fração que representa o triângulo médio considerando todo o tangram, é $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

D) referindo-se ao paralelogramo, que também equivale a dois triângulos pequenos, considerando o quadrado todo, a fração que ele representa é $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

E) o triângulo grande. Um triângulo grande equivale a quatro triângulos pequenos, a fração é $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

F) o quadrado todo é constituído de dezesseis triângulos pequenos, assim a fração do quadrado todo é $\frac{16}{16} = 1$, o todo.

Na tarefa 05, que envolvia as frações com as peças do tangram, os participantes responderam todas as questões, sem a ajuda da formadora.

Atividade 03 – Equivalência fracionária

Objetivo

- Compreender a equivalência fracionária.

Materiais necessários

- Lápis
- Papel Sulfite
- Caneta
- Borracha

Encaminhamento metodológico

Após a entrega do material (papel sulfite, lápis, caneta e borracha), os participantes resolvem as tarefas seguindo os comandos indicados.

Análise da tarefa 01

Na tarefa 01, é preciso indicar a fração correspondente à cada figura. Como os professores já resolveram outras atividades parecidas, certamente não encontrarão dificuldades. É preciso perceber que as frações $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ são equivalentes. Além disso, na letra “c” pede-se que as frações sejam representadas na forma decimal e percentual; assim, é preciso perceber que uma fração pode ser representada de diferentes formas.

Alguns participantes ficaram em dúvida quanto à simplificação. Começaram a simplificar uma fração dividindo o numerador e o denominador por dois até não ser mais possível, poderiam continuar dividindo por três (numerador e denominador), mas não sabiam se podiam. A formadora explicou que poderiam escolher outro número que dividisse o numerador e o denominador e que continuasse a dividir ou seja, até chegar a uma fração irredutível. De fato, segundo Merlini (2005), uma das dificuldades no ensino e aprendizagem de fração é a noção de equivalência, isto é, que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações ($\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} \dots$). Após a realização das tarefas, o acompanhamento e as orientações feita pela formadora, com perguntas que instigassem os participantes a pensar para então chegarem às respostas solicitadas nas tarefas, foi feita a socialização das mesmas pelos integrantes da pesquisa, com auxílio da formadora.

Análise da tarefa 02

Para realizar a tarefa dois, os cursistas devem pintar a quantidade das figuras de modo a tornar verdadeira a sentença de equivalência. Na letra “a”, a figura pintada representa $\frac{1}{3}$. Para se obter uma igualdade, o integrante deverá pintar três partes, dado que a figura foi dividida em nove.

Na letra “b”, deve-se igualar a segunda figura com a primeira. A segunda figura foi dividida em dezesseis partes e dez foram pintadas; logo, na primeira figura, que foi dividida em oito partes, deve-se pintar cinco partes.

Na letra “c”, deve-se igualar a segunda figura com a primeira. Na segunda figura tem-se um todo $\frac{4}{4} + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$, que se precisa igualar à primeira. Porém, a primeira figura foi dividida apenas em quatro partes; logo, devem considerar cada quadradinho como um todo $\frac{4}{4}$ e pintar $\frac{3}{4}$ do outro, chegando ao resultado de uma fração imprópria $\frac{7}{4}$. Talvez alguns se descuidem nas letras “b” e “c” e pintem a segunda figura ao invés da primeira.

Inicialmente os cursistas ficaram em dúvida quanto à forma de responder essa tarefa. A formadora explicou que deviam pintar a mesma quantidade da primeira figura na segunda. Por exemplo, na primeira figura foi pintado um terço, assim devem pintar um terço da segunda. Com essas explicações conseguiram resolver as outras tarefas.

Análise da tarefa 03

Nas letras “a”, “b”, “c” e “d” da tarefa 03, os cursistas precisam retratar três frações equivalentes a: $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{4}$. Nas letras “e”, “f”, “g” e “h”, terão que encontrar a fração irredutível de $\frac{12}{24}$; $\frac{14}{42}$; $\frac{16}{40}$ e $\frac{15}{60}$. Na letra “a”, poderão multiplicar o numerador e o denominador por 2, assim: $\frac{2*2}{8*2}$; $\frac{4*2}{16*2}$; $\frac{8}{32}$. Já na letra “e”, tem-se que dividir numerador e denominador por um mesmo número diferente de zero, pode-se fazer: $\frac{12:2}{24:2} = \frac{6:2}{12:2} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$. Acredita-se que não encontrem dificuldades nas letras “a”, “b”, “c” e “d”; porém, nas perguntas “e”, “f”, “g” e “h” podem ter dificuldades em encontrar um fator comum que divida ao mesmo tempo numerador e denominador. Também devem entender que para encontrar a fração irredutível tem-se que considerar sempre um mesmo fator comum e que este pode mudar, desde que divida numerador e denominador até encontrar a fração irredutível.

No desenvolvimento da atividade, os cursistas resolveram as questões “a” a “d” sem dificuldades (multiplicaram numerador e denominador por um mesmo número natural diferente de zero). Mas não conseguiram proceder na resolução das questões “e” a “h”, uma vez que deviam realizar o processo inverso, dividir a fração por um mesmo fator comum. Assim, formadora explicitou que deviam fazer o processo inverso, isto é, dividir numerador e denominador por um mesmo fator comum até chegar a uma fração irredutível.

Fica evidente que os cursistas ainda possuem dificuldades em simplificar frações (encontrar frações equivalentes), dado que no desenvolvimento da tarefa surgiram muitas dúvidas e questionamentos. Isso corrobora com as conclusões de Merlini (2005) quanto à grande dificuldade na questão da noção de equivalência no ensino e aprendizagem de fração.

Análise da tarefa 04

É preciso que os mediadores acompanhem o desenvolvimento dessa tarefa para que os integrantes não fujam ao que está sendo proposto. Espera-se que os participantes não encontrem dificuldades, mas pode ocorrer de alguns poucos não terem criatividade para a execução do que foi solicitado.

Os cursistas elaboraram e socializaram as atividades concebidas, porém não registraram no caderno de formação.

Considerações sobre “Equivalência

Foi elaborado um texto norteador a fim de que os participantes entendessem o que é equivalência e como se revolvem problemas envolvendo esse objeto. Como facilitador da aprendizagem, produzimos tarefas com auxílio do tangram (quebra-cabeça), muito utilizado para o ensino de equivalência e comparação de fração. Propusemos inicialmente sua construção, mas todas as equipes apresentaram dificuldades em sua criação, conforme comando da tarefa, talvez por não se lembrarem de alguns conceitos matemáticos como diagonal, reta paralela e ponto médio. Com a intervenção dos formadores, fazendo perguntas instigadoras, e com o subsídio de dicionários para verificação da definição de alguns comandos, conseguiram conceber. Após a composição do tangram pelos cursistas, foram propostas tarefas com seu auxílio, mas muitos apresentaram dificuldades em perceber que o tangram todo pode ser composto por 16 peças de triângulo pequeno, o que corresponde a $1/16$. Foi necessário que os formadores interviessem, mostrando a relação/comparação do triângulo pequeno com cada uma das peças do tangram e sua fração correspondente. Após essa intervenção inicial, os resultados foram positivos, à medida que os professores conseguiram realizar as outras tarefas de equivalência e comparação com o uso do tangram corretamente, em diferentes contextos, sem o auxílio dos formadores.

Em tarefas de equivalência sem o uso do tangram, os professores apresentaram facilidade em encontrar frações equivalentes multiplicando numerador e denominador por um mesmo número natural, diferente de zero, porém manifestaram dificuldades no processo inverso, isto é, em simplificar frações, ao dividir a fração por um mesmo fator comum, até chegar a uma fração irredutível. Fica evidente que os cursistas ainda possuem dificuldades em simplificar frações (encontrar frações equivalentes), dado que no desenvolvimento da tarefa surgiram muitas dúvidas e questionamentos. Isso corrobora com as conclusões de Merlini (2005) quanto à grande dificuldade na questão da noção de equivalência no ensino e aprendizagem de fração.

5.2 Quarto encontro da formação

Conteúdo: Comparação de fração

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam e efetuem comparação de frações.

Atividade 01 – Entendendo comparação

Análise da tarefa 01

No direcionamento da tarefa 01, os cursistas devem apresentar o que entendem por comparação de fração, além de buscar o significado no dicionário. Na continuidade, devem fazer a leitura do texto para responder as atividades.

Considerando a tarefa proposta e os dados das equipes, foram concebidas cinco categorias. O Quadro 33 é concernente à análise da atividade 01 tarefa 01 “comparação de fração”.

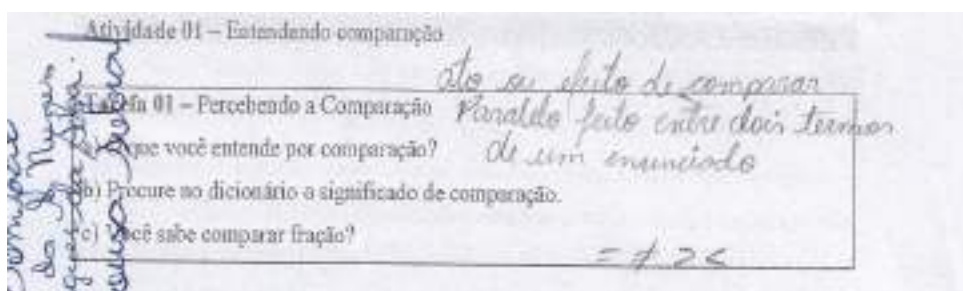
Quadro 33 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 01 - comparação de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E1/E2/E3/E4
Respondeu a questão “a” corretamente. (RAC)	E5
Respondeu a questão “b” corretamente. (RBC)	-----
Respondeu a questão “c” corretamente. (RCC)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

Essa tarefa teve a participação de apenas uma equipe (equipe 5). De três alternativas “a”, “b” e “c”, a equipe respondeu apenas a alternativa “a”. Para eles, comparar fração é o “ato ou efeito de comparar, paralelo feito entre dois termos de um enunciado”. Vide figura 53

Figura 53 - Atividade 01 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2018).

Conforme figura, a equipe respondeu corretamente a questão “a”.

Tarefa 02 – Leitura do texto sobre comparação

Atividade 02 – Tratando de comparação a partir do tangram

Objetivo

- Comparar frações com o auxílio do tangram

Análise da tarefa 01

Para o desenvolvimento da tarefa 01, os cursistas devem nomear as peças do tangram, sendo que o triângulo pequeno = t; triângulo médio = tm; triângulo grande = tg; quadrado pequeno = q; e o paralelogramo = p. Nesse sentido, a letra “a” solicita a representação do quadrado (q) tomando como referência o triângulo pequeno (t). Assim $q = 2t$.

Nessa perspectiva, a letra “b” que é o tm é equivalente a dois triângulos pequenos (2t).

Quanto à letra “c”, que se refere ao paralelogramo, é equivalente a dois triângulos pequenos (2t).

O triângulo grande (tg) é equivalente a quatro triângulos pequenos (4t).

Todas as peças do tangram equivalem a dezesseis triângulos pequenos, logo 16t.

Haja vista a proposta da tarefa, representar o triângulo médio, pequeno, grande e todas as peças do tangram, utilizando como referência o triângulo pequeno, foram criadas treze categorias para auxílio das análises. A organização das categorias de análise e das equipes as quais se inserem encontram-se no Quadro 34.

Quadro 34 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - comparação a partir do tangram

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Respondeu questão “a”. (RA)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “b”. (RB)	E1/E2/E3/E4/E5

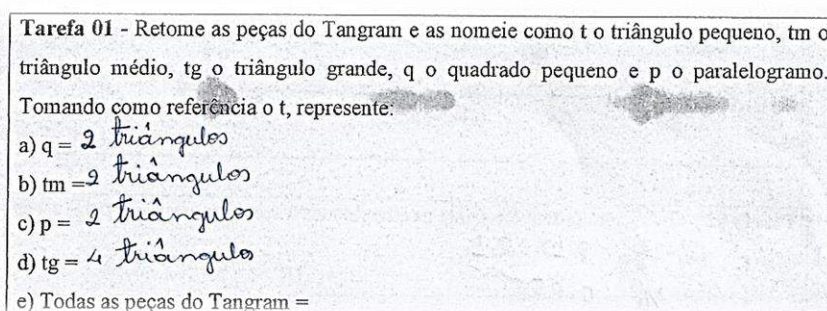
Respondeu questão “c”. (RC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “d”. (RD)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “e”. (RE)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “d” corretamente. (RDC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “e” corretamente. (REC)	E1/E2/E3/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

As maiores dificuldades foram concernentes ao que a tarefa estava solicitando. Foi explicitado pela formadora que deveriam fazer a relação das peças do tangram com o triângulo pequeno, assim como haviam realizado nas tarefas anteriores de equivalência. Após os esclarecimentos, os cursistas conseguiram resolver a tarefa. Isso indica que houve ampliação do conhecimento de equivalência e comparação de fração, considerando a sondagem, em que a maioria não conseguia simplificar e nem comparar fração (BARROS, 2018). Concordamos com Martins (2016) ao indicar que a formação continuada de professores é vital para a superação das lacunas deixadas pela formação inicial concernente aos conhecimentos matemáticos necessários à docência nos anos iniciais.

As figuras 54 a 58 são recortes das resoluções das equipes 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente.

Figura 54 - Atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 1 (2018).

Conforme figura, a equipe 1 respondeu corretamente toda a tarefa. De forma análoga fizeram as equipes 2, 3, 4 e 5.

Figura 55 - Atividade 02 tarefa 01





Tarefa 01 - Retome as peças do Tangram e as nomeie como t o triângulo pequeno, tm o triângulo médio, tg o triângulo grande, q o quadrado pequeno e p o paralelogramo. Tomando como referência o t, represente:

a) $q = 2t$
 b) $tm = 2t$
 c) $p = 2t$
 d) $tg = 4t$
 e) Todas as peças do Tangram = $16t$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 56 - Atividade 02 tarefa 01

Tarefa 01 - Retome as peças do Tangram e as nomeie como t o triângulo pequeno, tm o triângulo médio, tg o triângulo grande, q o quadrado pequeno e p o paralelogramo. Tomando como referência o t, represente:

a) $q = 2t$ 
 b) $tm = 2t$ 
 c) $p = 2t$ 
 d) $tg = 4t$ 
 e) Todas as peças do Tangram = $16t$

Fonte: Equipe 3 (2018).

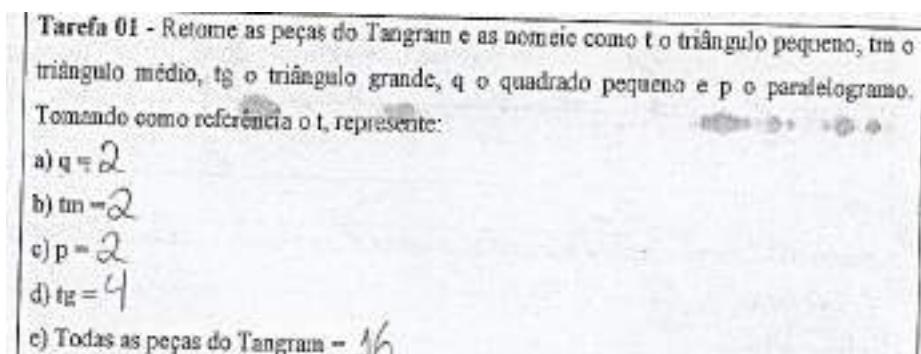
Figura 57 - Atividade 02 tarefa 01

Tarefa 01 - Retome as peças do Tangram e as nomeie como t o triângulo pequeno, tm o triângulo médio, tg o triângulo grande, q o quadrado pequeno e p o paralelogramo. Tomando como referência o t, represente:

a) $q =$ Quadrado / dois Triângulos pequenos.
 b) $tm =$ dois Triângulos pequenos.
 c) $p =$ dois triângulos pequenos.
 d) $tg =$ dois Triângulos pequenos 1 e médios.
 e) Todas as peças do Tangram = Formam um quadrado grande.

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 58 - Atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 02

A tarefa 02 envolve a relação das peças do tangram com seu respectivo valor monetário, a partir do custo total do tangram, o que parece não ser complicado. Talvez a dificuldade resida em estabelecer relação com a fração, ou seja, de que um triângulo pequeno representa $\frac{1}{16}$, portanto, seu custo é de R\$ 1,00.

As categorias foram delineadas considerando os objetivos da tarefa e as resoluções das equipes, assim o Quadro 35 subsidiará a sistematização das análises das respostas das equipes.

Quadro 35 - Análise da atividade 02 tarefa 02 - comparação a partir do tangram

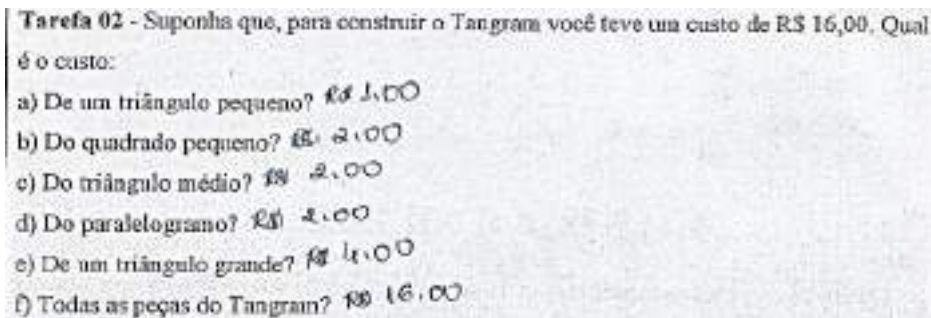
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Respondeu questão "a". (RA)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão "b". (RB)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão "c". (RC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão "d". (RD)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão "e". (RE)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão "f". (RF)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu "a" corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu "b" corretamente. (RBC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu "c" corretamente. (RCC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu "d" corretamente. (RDC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu "e" corretamente. (REC)	E1/E2/E3/E4/E5

Respondeu “f” corretamente. (RFC)	E1/E2/E3/E4/E5
-----------------------------------	----------------

Fonte: Elaboração da autora.

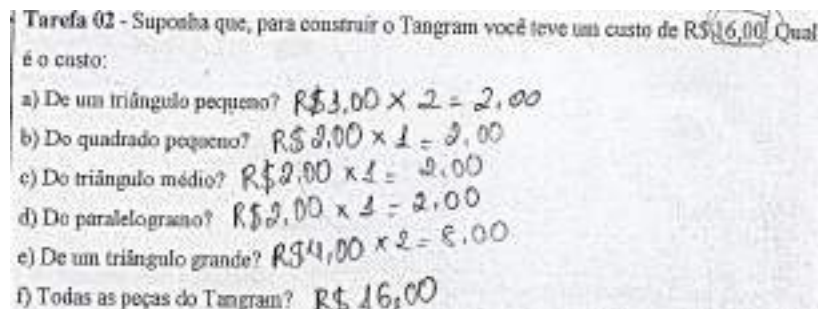
Durante o desenvolvimento, houve poucas dúvidas e questionamentos, uma vez que a tarefa anterior (tarefa 1) é base (continuação) para responder a tarefa 2. As equipes responderam corretamente, indicando aprendizagem do objeto em estudo (equivalência/comparação), o que se comprova com as figuras 59 a 63, referentes às resoluções das equipes.

Figura 59 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



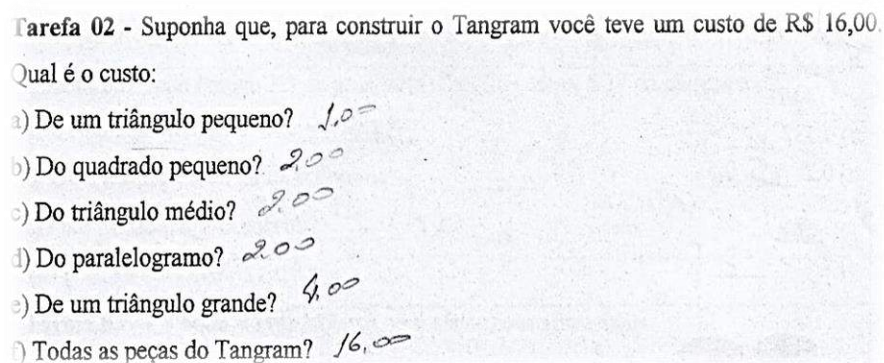
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 60 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 61 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 62 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - Suponha que, para construir o Tangram você teve um custo de R\$ 16,00.

Qual é o custo:

- a) De um triângulo pequeno? *vale 1 cada*
- b) Do quadrado pequeno? *vale 2*
- c) Do triângulo médio? *vale 2*
- d) Do paralelogramo? *vale 2*
- e) De um triângulo grande? *vale 4 cada*
- f) Todas as peças do Tangram? *16,00*

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 63 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - Suponha que, para construir o Tangram você teve um custo de R\$ 16,00. Qual é o custo: *1,0*

- a) De um triângulo pequeno? *1,0*
- b) Do quadrado pequeno? *2,0*
- c) Do triângulo médio? *2,0*
- d) Do paralelogramo? *2,0*
- e) De um triângulo grande? *4,0*
- f) Todas as peças do Tangram? *16,00*

Fonte: Equipe 5 (2018).

Conforme evidenciado nas figuras, as cinco equipes responderam corretamente a tarefa.

Análise da tarefa 03

Entendemos que, para o desenvolvimento das tarefas, os cursistas apresentarão reduzida dificuldade, especialmente porque estão familiarizados com as peças do tangram e já aprenderam a estabelecer relações entre elas.

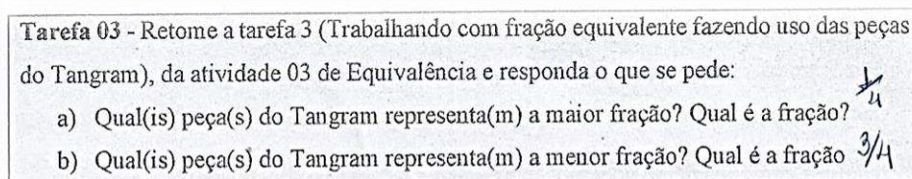
Para auxiliar as análises, foram concebidas categorias. As categorias foram elaboradas, considerando a proposta da tarefa, nessa perspectiva Quadro 36 sistematiza à análise da atividade 02 tarefa 03 “comparação a partir do tangram”.

Quadro 36 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - comparação a partir do tangram

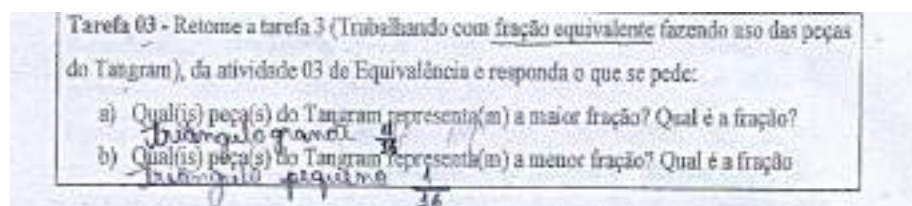
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E2/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Respondeu “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu “b” corretamente. (RBC)	E2/E3/E5

Fonte: Elaboração da autora.

As cinco equipes responderam a tarefa. As equipes 2, 3 e 5 responderam as questões corretamente. A equipe 1 respondeu a tarefa, porém a questão “b” foi respondida incorretamente. A equipe 4 respondeu a questão “a” corretamente e a “b” incorretamente, demonstrando ainda falta de domínio do conceito de equivalência e dúvidas quanto às relações entre as peças do tangram. Mesmo as duas equipes não respondendo corretamente a tarefa, considera-se que a maioria desses professores aumentaram sua compreensão do conceito de equivalência e comparação. As figuras 64 a 68 são recortes das resoluções das equipes.

Figura 64 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

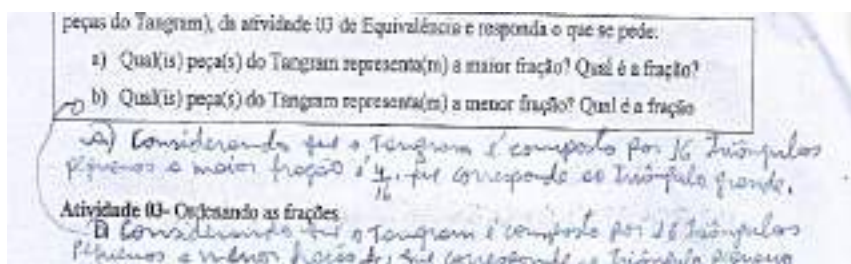
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 65 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 2 respondeu todas as questões corretamente, evidenciado domínio e aprendizagem do objeto em estudo.

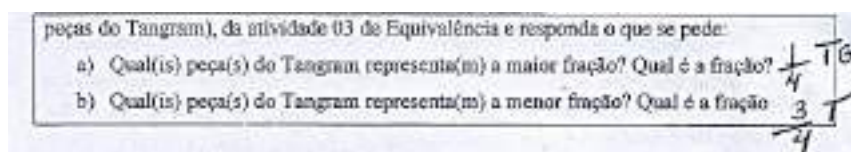
Figura 66 - Resolução da atividade 02 tarefa 03



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 3 respondeu toda a tarefa corretamente.

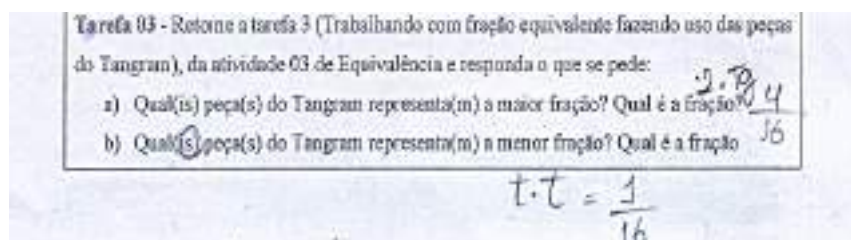
Figura 67 - Resolução da atividade 02 tarefa 03



Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe respondeu incorretamente a questão (“b”), indicando lacunas concernentes ao conhecimento e ao domínio de frações, sobretudo no que diz respeito à equivalência.

Figura 68 - Resolução da atividade 02 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2018).

Atividade 03 - Ordenando frações

Objetivos

- Localizar, ordenar e comparar frações;
- Resolver problemas que envolvem comparação de frações.

Material necessário

- Régua
- Lápis

- Caneta
- Papel sulfite

Análise da tarefa 01

A tarefa 01 envolve a localização das frações $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ na reta numérica. Para localizar a fração $\frac{1}{4}$, com o auxílio de uma régua, pode-se dividir a reta numérica em quatro partes e localizar a fração $\frac{1}{4}$ no primeiro segmento. Ou então, para localizar cada uma das frações, é preciso lembrar que fração é uma divisão e dividir o numerador pelo denominador e localizar na reta. Logo, a fração $\frac{1}{4} = 0,25$; a fração $\frac{3}{4} = 0,75$; a fração $\frac{1}{5} = 0,2$; e a fração $\frac{3}{5} = 0,6$. Assim, a fração $0,2 < 0,25 < 0,6 < 0,75$. Alguns talvez possam fazer a divisão do numerador pelo denominador de forma incorreta, o que conseqüentemente acarretará erro na localização das frações na reta numérica. Quanto a dividir a reta em quatro partes iguais, os cursistas devem tomar cuidado para não deixar uma das partes maior que a outra.

Para subsídio da análise, foram concebidas quatro categorias. Em cada categoria são indicadas as equipes que responderam a tarefa, responderam corretamente, não responderam e quais utilizaram números decimais na localização das frações. O Quadro 37 estrutura à análise da atividade 03 tarefa 01 “ordenando fração”.

Quadro 37 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 01 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso dos números decimais na localização das frações. (FUD)	E1/E4

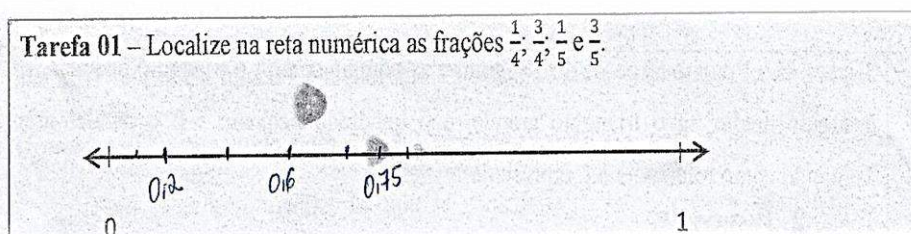
Fonte: Elaboração da autora.

Houve participação de todas as equipes na resolução dessa atividade, mas as equipes E2 e E4 localizaram as frações incorretamente. A equipe 2 localizou as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ incorretamente e a E4 localizou incorretamente as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{5}$. Essas duas equipes ainda estão tratando frações como uma sobreposição de dois números naturais, como quatro é menor que cinco, por isso indicou a fração $\frac{1}{4}$ como menor que $\frac{1}{5}$. Duas equipes fizeram uso da representação decimal (E4,

E1). As frações em sua representação numérica ainda são pouco trabalhadas. Esse pode ser um dos fatores que a explicam a ocorrência do número baixo de respostas corretas (CANOVA, 2006).

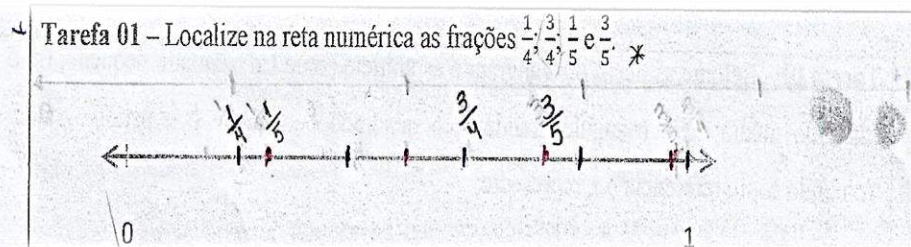
As figuras 69 a 73 refere-se às resoluções dessa tarefa pelas equipes 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Figura 69 - Resolução da atividade 03 tarefa 01



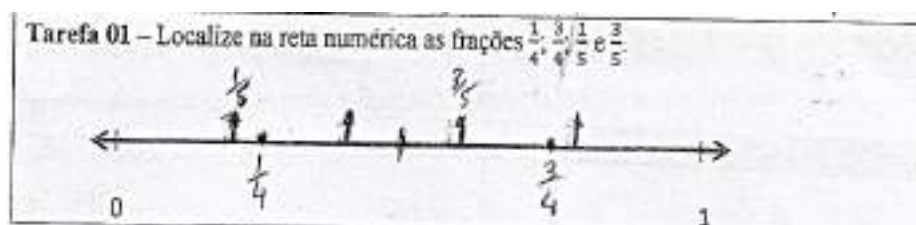
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 70 - Resolução da atividade 03 tarefa 01



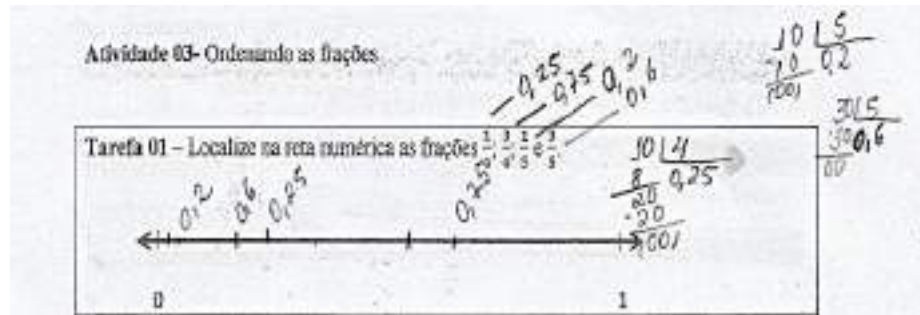
Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 71 - Resolução da atividade 03 tarefa 01



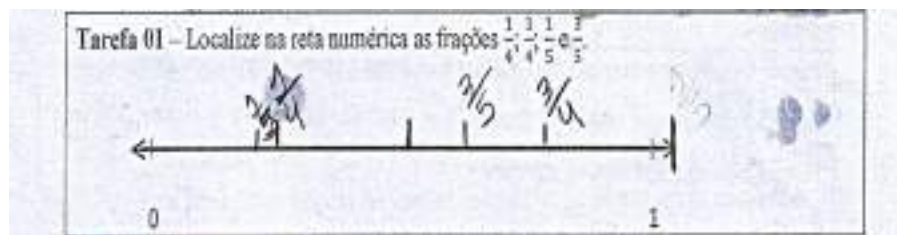
Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 72 - Resolução da atividade 03 tarefa 01




Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 73 - Resolução da atividade 03 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 02

A tarefa 02 demanda a ordenação das quantidades escritas em registros de representação semiótica distintos, em ordem crescente: 10%, 0,25, $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, . Diante disso, os cursistas podem passar as quantidades para a forma decimal e, em seguida, ordená-las. É preciso tomar cuidado ao dividir o numerador pelo denominador na conversão.

Considerando a extensão da tarefa e a organização de sua análise, foram elaboradas dez categorias, com o intuito de apresentar quais equipes realizaram os comandos da tarefa. O Quadro 38 refere-se à análise da atividade 03 tarefa 02 “ordenando fração”.

Quadro 38 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 02 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RCT)	E1/E2/E3
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E2/E3/E4/E5

Respondeu questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu questão “e” corretamente. (REC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E1/E2/E4

Fonte: Elaboração da autora.

Houve participação de todas as equipes na resolução da tarefa. A questão exige conhecimento de fração em diferentes registros (forma fracionária, mista, percentual, decimal, geométrica). Ao responder as questões, os participantes fizeram uso de diferentes registros, lançando mão, portanto, da conversão e do tratamento (DUVAL, 2009). Com essa tarefa, ficou explícita a compreensão, por parte dos participantes, dos registros de representação. Apenas duas equipes fizeram uso de dois ou mais registros de representação e apenas três utilizaram tratamento. Em geral, ficou evidente que as equipes sabem utilizar os diferentes registros e fazer uso de tratamento. Com isso, podemos afirmar que esses professores dominam o objeto matemático fração, uma vez que sabem utilizar os diferentes registros.

A equipe 2 fez uso do registro fracionário nas questões “a”, “b”, “c”, “d” e “e”, além do uso de conversão em “a” (percentual para fracionário), “b” (decimal para fracionário), “d” (fração mista para imprópria), e “e” (geométrico para fracionário). Nas questões “c”, “d” e “e”, fez uso de tratamento ao passar da fração $\frac{3}{4}$ para $\frac{75}{100}$; $\frac{5}{2}$ para $\frac{250}{100}$; e de $\frac{2}{4}$ para $\frac{50}{100}$. Essa equipe realizou toda a tarefa de forma correta, obtendo aproveitamento máximo e demonstrando que possui conhecimento de fração em suas diferentes formas, conforme explicitado na figura 74.

Figura 74 - Resolução da atividade 03 tarefa 02

+ Tarefa 02 - Ordene em ordem crescente as quantidades fracionárias representadas a seguir.

- $10\% = \frac{10}{100}$
- $0,25 = \frac{25}{100}$
- $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$
- $\frac{5}{2} = \frac{5 \times 50}{2 \times 50} = \frac{250}{100}$
- $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 25}{4 \times 25} = \frac{50}{100}$

• 10%
 • $0,25$
 • $\frac{3}{4}$
 • $2 \frac{1}{2}$
 • $\frac{5}{2}$

$10\% < 0,25 < \frac{3}{4} < \frac{2}{4} < \frac{5}{2}$

Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 1 também respondeu corretamente a tarefa, obtendo aproveitamento máximo. Fez uso de dois registros na questão “a” (fracionário e decimal), e ainda de tratamento ao passar do decimal 0,10 para 0,1.

Nas questões “b”, “c” e “e”, fez uso de dois registros (fracionário e decimal), ficando evidente o uso de conversão. Utilizou o registro decimal ao ordenar as quantidades fracionárias, como solicitado pela questão e verificado na figura 75.

Figura 75 - Resolução da atividade 03 tarefa 02

Tarefa 02 – Ordene em ordem crescente as quantidades fracionárias representadas a seguir:

- $10\% = \frac{10}{100} = 0,10 = 0,1$
- $0,25 = \frac{1}{4} = 0,25$
- $\frac{3}{4} = 0,75$
- $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$
- $\frac{2}{4} = 0,5$

$0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 2,5;$

Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 3 realizou toda a tarefa corretamente, fazendo uso em grande parte do registro decimal ao responder as questões, exceto na questão “e”, em que utilizou os registros percentual e decimal. Verificou-se o não foi feito uso de tratamento, mas a conversão foi utilizada na resolução de todas as questões dessa tarefa. A equipe não concluiu a tarefa, uma vez que não ordenou os itens como solicitado, conforme se observa na figura 76.

Figura 76 - Resolução da atividade 03 tarefa 02

Tarefa 02 – Ordene em ordem crescente as quantidades fracionárias representadas a seguir:

- 10% $0,10$
- $0,25$ $0,25$
- $\frac{1}{4}$ $0,25$
- $2\frac{1}{2}$ $2,5$
- $\frac{2}{4}$ 50% $0,50$

$\frac{5}{2} = 2,5$

$0,10; 0,25; 0,5; 0,75; 2,5$

Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 4, diferentemente das anteriores (E1, E2 e E3), não realizou toda a tarefa corretamente. No item “a” respondeu que $10\% = \frac{1}{5}$ e fez uso apenas do registro fracionário. A equipe respondeu corretamente as questões “b”, “c” e “e”. Na questão “b”, utilizou um só registro (fracionário), na “c” utilizou o decimal e na “e” o fracionário; além do mais, nesse item fez uso de tratamento ao passar da fração $\frac{2}{4}$ para $\frac{1}{2}$.

Na questão “d”, a equipe afirmou que $2\frac{1}{2} = 0,5$ o que está incorreto. A equipe teve um aproveitamento de apenas 60% nessa tarefa, como se observa na figura 77, que é recorte da resolução dessa equipe. Acrescenta-se ainda que a equipe não concluiu a tarefa, dado que não ordenou os itens.

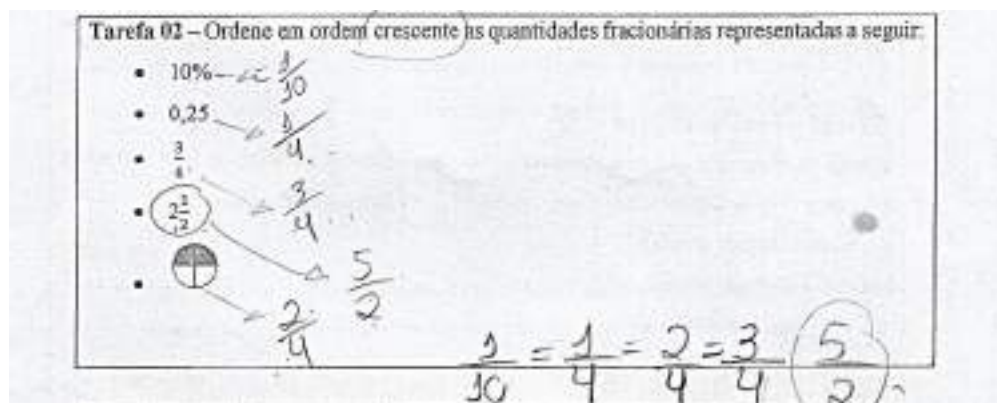
Figura 77 - Resolução da atividade 03 tarefa 02

The image shows a student's handwritten work for 'Tarefa 02'. The task is to order five fractions from smallest to largest. The fractions listed are: 1. 10% = 1/5, 2. 0,25 = 1/4, 3. 3/4, 4. 2 1/2, and 5. 1/4. The student has converted each to a decimal: 1. 0,2, 2. 0,25, 3. 0,75, 4. 2,5, and 5. 0,25. They have also written some conversion steps, such as 10/20 = 10,2/20 and 10/20 = 10,5/200. The items are numbered 1 through 5, but they are not in the correct order. There are some corrections and additional calculations, like 10/20 = 10,5/200 and 20/20 = 20,5/100.

Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 5 respondeu todos os itens corretamente, mas errou ao responder que $\frac{1}{10} = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$. Fez uso de apenas um registro (fracionário). Apesar de concluir a questão de forma incorreta, talvez por falta de conhecimento dos símbolos (em vez de usar = deveria ter usado <), a equipe ordenou corretamente as frações e respondeu os itens (a, b, c, d, e) de forma certa. Assim, observa-se um aumento da compreensão do objeto matemático fração, em comparação com a sondagem, em que poucos professores conseguiram responder as tarefas ou as responderam de forma incorreta. A figura 78 expõe o desempenho dessa equipe na referida questão.

Figura 78 - Resolução da atividade 03 tarefa 02



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 03

Ao comparar frações (tarefa 03), certamente alguns participantes apresentarão dificuldades em perceber que $\frac{1}{2}$, por exemplo, é maior que $\frac{1}{3}$ ou mesmo que $\frac{1}{4}$, assim como poderão se confundir em relação à utilização dos símbolos $>$ e $<$.

Uma das formas de resolver a questão “f” é por meio da passagem da representação geométrica para fração e/ou na forma decimal e comparar com a segunda coluna, ou seja, realizar conversões (DUVAL, 2009). Assim, $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$, comparando com a segunda coluna que tem a fração $\frac{5}{3} = 1,666$. Possivelmente a dificuldade dos cursistas residirá em perceber que se trata de uma fração maior que a unidade, ou ainda em não achar que se trata de um todo de oito partes em que se destacaram 7, escrevendo $\frac{7}{8}$.

Também é possível que uma das grandes dificuldades dos cursistas seja em perceber que uma mesma quantidade pode ser representada em diferentes registros de representação semiótica e em efetuar o processo de conversão (DUVAL, 2009), inclusive no processo de solução dos problemas apresentados em linguagem natural.

Considerando as informações dos participantes da pesquisa e os objetivos da tarefa, foram concebidas vinte categorias. O Quadro 39 refere-se às categorias de análise da atividade 03 tarefa 03 “ordenando fração”.

Quadro 39 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 03 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	-----

Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E3/E4/E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E3/E4/E5
Respondeu questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “e” corretamente. (REC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu questão “f” corretamente. (RFC)	E1
Respondeu questão “g” corretamente. (RGC)	E1/E3/E4
Respondeu questão “h” corretamente. (RHC)	E1/E2/E3/E5
Respondeu questão “i” corretamente. (RIC)	E3/E5
Respondeu questão “j” corretamente. (RJC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “k” corretamente. (RKC)	E1/E2/E4
Respondeu questão “l” corretamente. (RLC)	E1/E3/E4/E5
Respondeu questão “m” corretamente. (RMC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “n” corretamente. (RNC)	E1/E4/E5
Respondeu questão “o” corretamente. (ROC)	E2/E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E2/E3/E4/E5

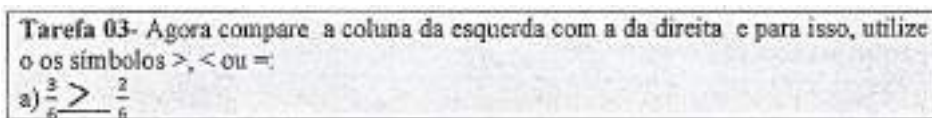
Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam corretamente a maioria das questões. O registro decimal foi o mais utilizado. Todas elas (E1, E2, E3, E4 e E5) realizaram a tarefa, algumas lançando mão de tratamento (DUVAL, 2009), mas nenhuma respondeu corretamente todas as questões. A questão com menor índice de acerto foi a “f” e as com maior foram “d”, “j”, “m”, que tratam de comparação com decimais, registro natural com fracionário e soma de fração com denominadores diferentes. A questão “f” foi respondida corretamente apenas pela E1 e envolve comparação de registro geométrico (estando implícita a fração mista) com fracionário em sua forma imprópria; nesse sentido, Nunes *et al* (2005) salientam que estudantes e professores apresentam maior dificuldade nas quantidades contínuas do que nas discretas. Além disso, ficou evidente a dificuldade em resolver problemas envolvendo frações mistas e impróprias.

A equipe 1 respondeu corretamente as questões a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l, m, n, apresentando respostas incorretas para apenas duas questões (i, o). Não fez uso de conversão

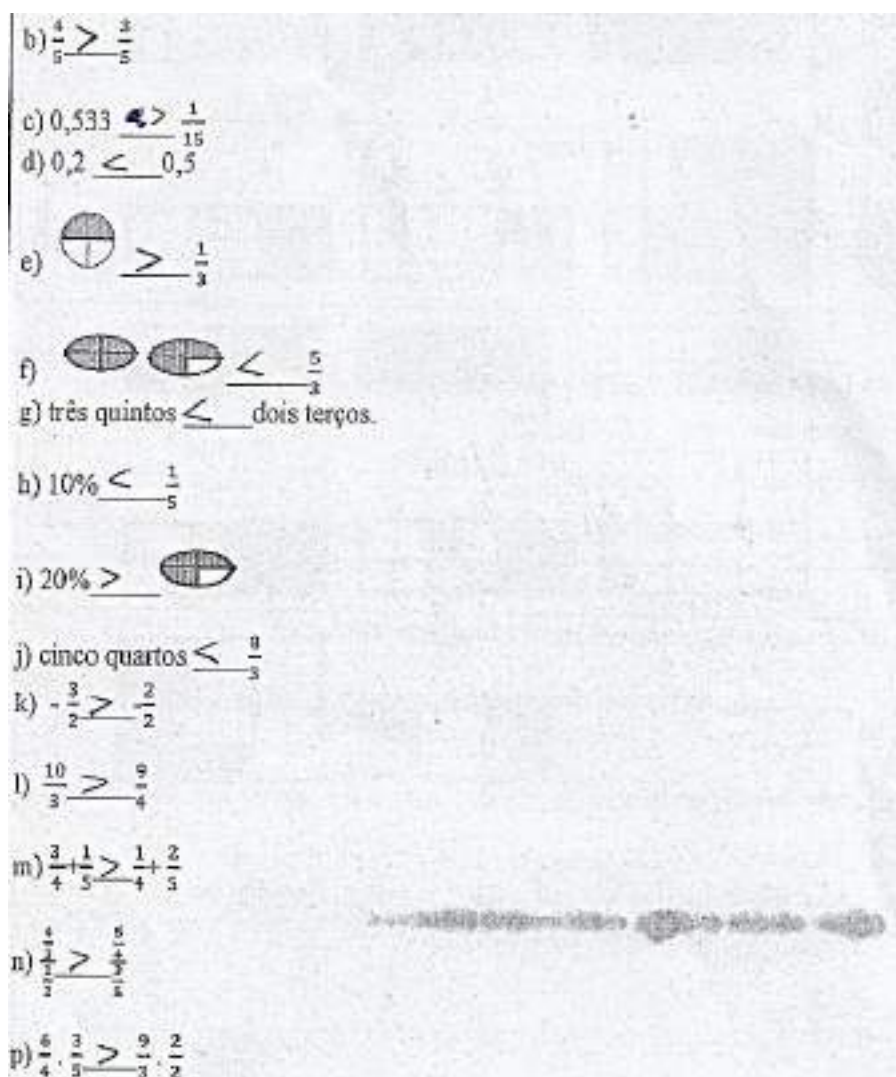
nem de tratamento, visto que não utilizou nenhum registro de representação (DUVAL, 2009). As figuras 79 e 80 exibem a resolução da equipe 1.

Figura 79 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 1 (2018).

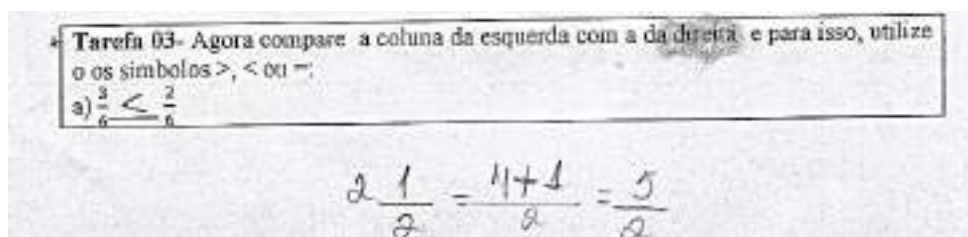
Figura 80 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 1 (2018).

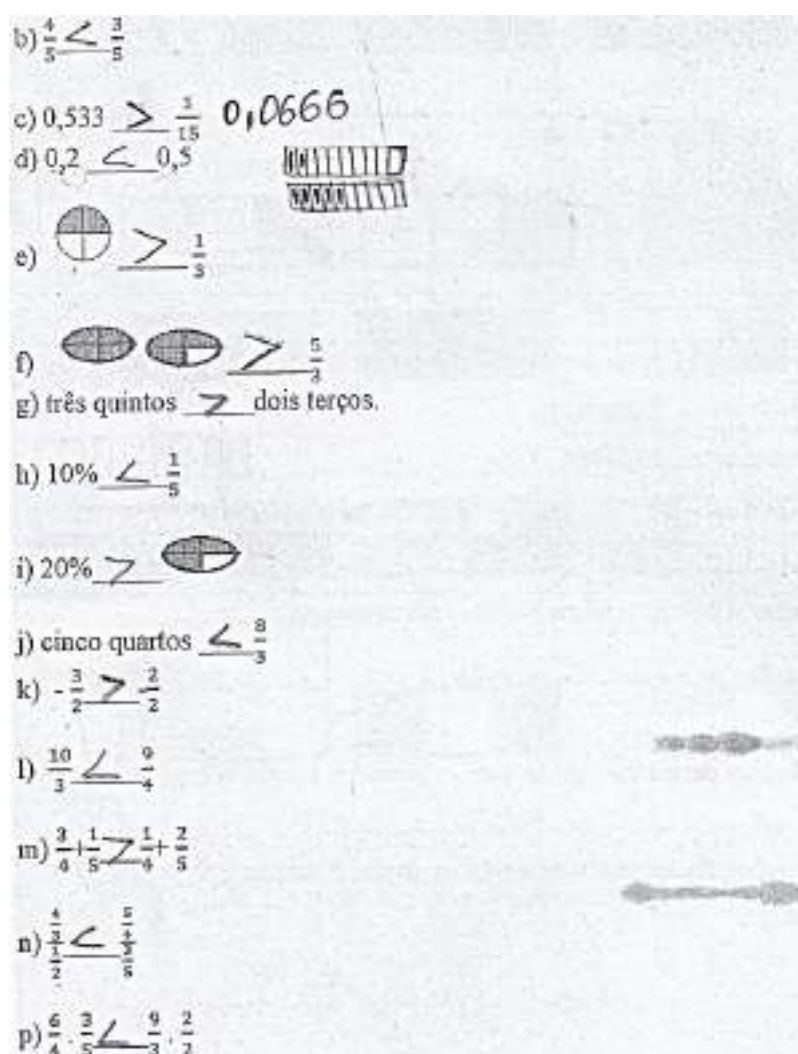
A equipe 2 respondeu corretamente as questões c, d, e, h, j, k, m, o, de um total de 15. Fez uso de registro geométrico na questão “d”, e não utilizou nenhum registro nas demais questões. Usou tratamento ao registrar que $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (DUVAL, 2009), conforme figuras 81 e 82.

Figura 81 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 82 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 3 utilizou o registro decimal na maioria das questões. Fez uso de tratamento nas questões i, m, p, (DUVAL, 2009). Respondeu corretamente 12 das 15 questões (a, b, c, d, e, g, h, i, j, l, m, o). A equipe respondeu incorretamente as questões f (que envolve registro

geométrico), k (ao afirmar que a fração imprópria $\frac{3}{2} < \frac{2}{2}$), bem como a questão “n” (sobre divisão de fração). Sua resolução é apresentada nas figuras 83 e 84.

Figura 83 - Resolução da atividade 03

Tarefa 03- Agora compare as frações utilizando os símbolos $>$, $<$ ou $=$.

a) $\frac{2}{6} > \frac{2}{6}$

b) $\frac{4}{4} > \frac{3}{4}$

c) $0,533 > \frac{1}{15}$

d) $0,2 < 0,5$

e) $\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$

f) $\frac{2}{4} > \frac{3}{4}$

g) três quintos $<$ dois terços.

Handwritten calculations and notes include: $\frac{2}{4} = 0,5$, $\frac{2}{4} > \frac{5}{3}$, $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, and long division for $\frac{7}{2} = 3,5$ and $\frac{5}{2} = 2,5$.

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 84 - Resolução da atividade 03 tarefa 03

h) $10\% < \frac{1}{5}$

i) $20\% < \frac{1}{4}$

j) cinco quartos $< \frac{3}{4}$

k) $-\frac{3}{2} < \frac{2}{2}$

l) $\frac{20}{4} > \frac{0}{4}$

m) $\frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

n) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

p) $\frac{4}{4} < \frac{3}{2}$

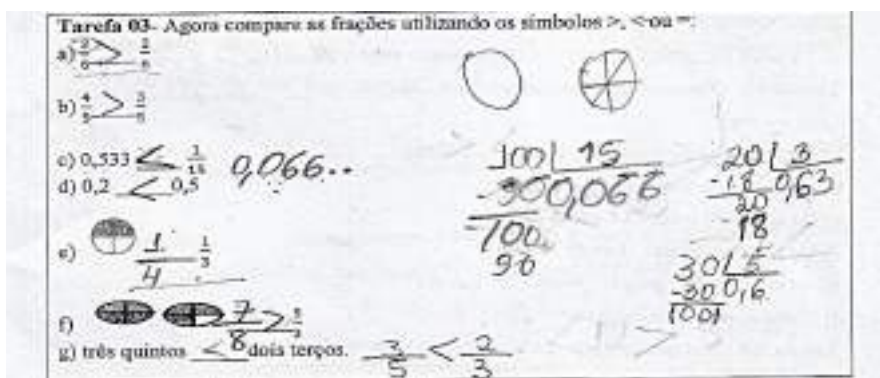
Handwritten calculations and notes include: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,20$, $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$, $\frac{8}{2} = \frac{13}{2}$, $\frac{15+4}{20} = \frac{19}{20}$, $\frac{5+8}{20} = \frac{13}{20}$, $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, and $\frac{4}{4} < \frac{3}{2}$.

Fonte: Equipe 3 (2018).

A E4 fez uso dos registros decimais, geométrico, fracionário, indicando uso de conversão. Usou tratamento nas questões “m” e “n”, que tratam de soma e divisão de fração, respectivamente. A equipe respondeu corretamente 9 de 15 questões, deixou em branco três questões (e, i, o) e respondeu incorretamente outras três (c, f, h). Das três questões deixadas em branco, duas (e, i) estão na forma geométrica. Acredita-se que a equipe tenha dificuldade em

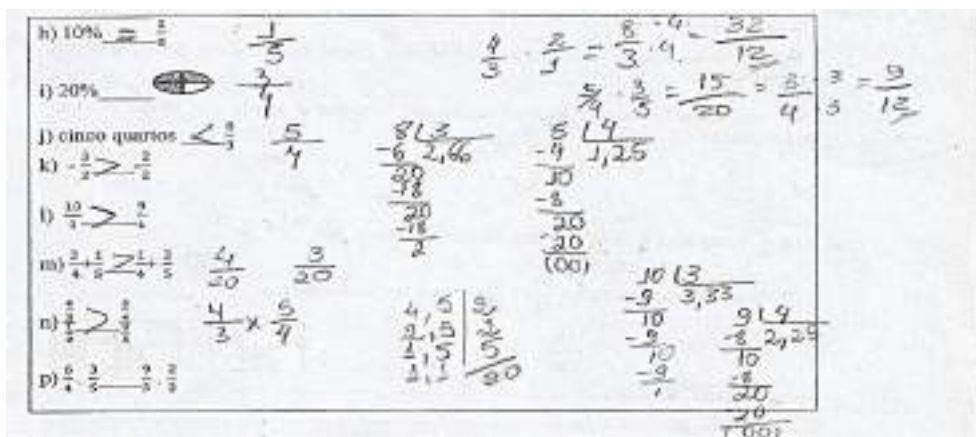
compreender esse tipo de registro, dificultando a conversão. Fica evidente também uma dificuldade com quantidade contínua. Duval (2009) afirma que o domínio de um objeto matemático acontece quando se consegue transitar de um registro para o outro. Ficou explícito que a equipe não conseguiu fazer isso. A terceira questão deixada em branco envolve comparação de fração. Talvez a equipe não tenha conseguido efetuar a divisão de fração, por isso a falha na resolução da questão. As figuras 85 e 86 mostram a resolução da equipe 4.

Figura 85 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 86 - Resolução da atividade 03 tarefa 03

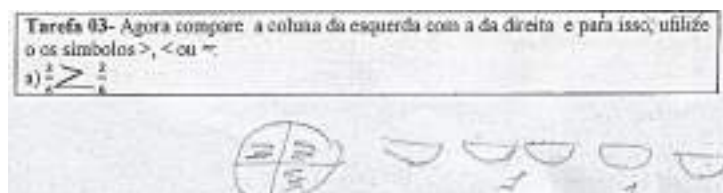


Fonte: Equipe 4 (2018).

Na mesma perspectiva da equipe 4, a equipe 5 fez uso dos registros decimal, geométrico e fracionário e usou tratamento nas questões “m” e “n”. A equipe respondeu incorretamente três questões (f, g, k) e não respondeu a “o”, que envolve comparação de fração com multiplicação de fração com denominadores diferentes. A questão “f”, que a equipe respondeu incorretamente, está no registro geométrico e a equipe não conseguiu fazer a conversão correta, indicando falta de compreensão desse tipo de registro e a compreensão parcial de fração. A

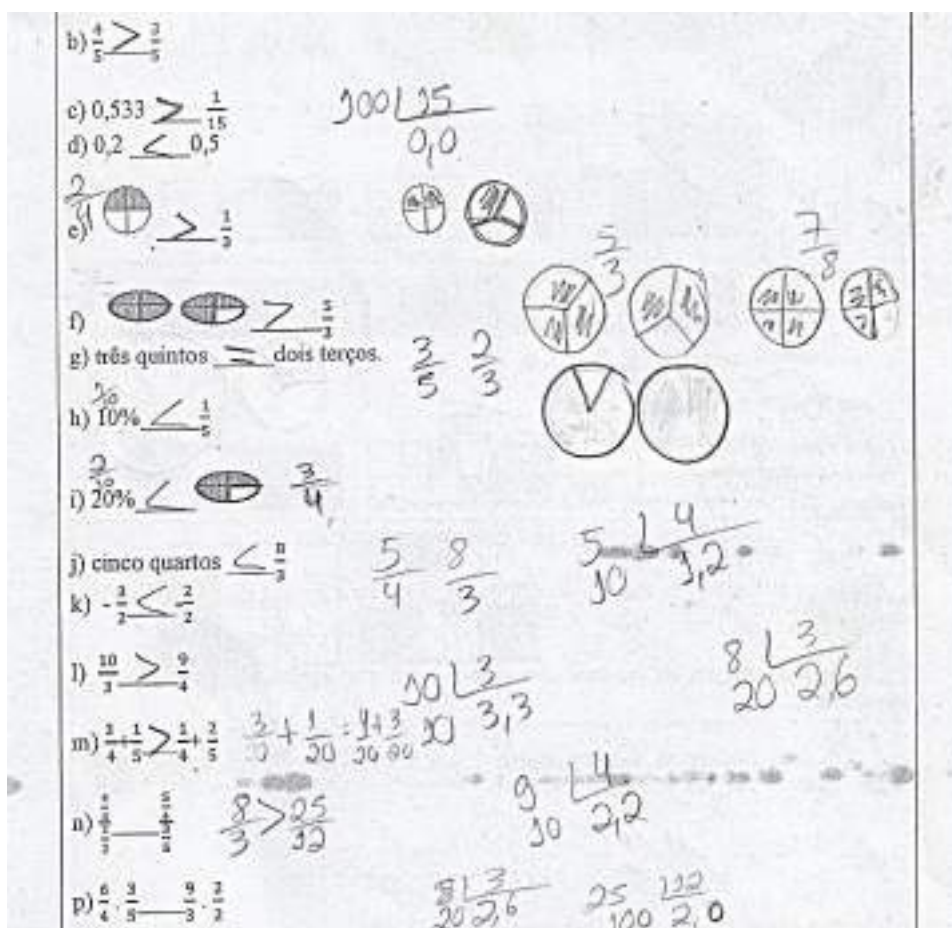
equipe acertou 11 de 15 questões, conforme fica evidente nas figuras 87 e 88, concernentes à resolução da equipe 5.

Figura 87 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2018).

Figura 88 - Resolução da atividade 03 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 04

Trata-se de um problema de comparação de fração em seu significado parte/todo. Assim, os integrantes precisam entender o que a tarefa requer e traçar os procedimentos

necessários para respondê-la. Uma das formas de elaborar a resposta seria conhecendo quanto representa em fração 40% do bolo, dessa maneira:

$$\frac{5}{5} \text{-----} 100\%$$

$$x \text{-----} 40\%$$

Multiplicando $\frac{5}{5} * 40$: $100 = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Logo, verifica-se que João comeu mais que Ana, posto que comeu $\frac{3}{5}$. O problema requer ainda a representação do resultado em forma geométrica, o que implica o domínio dos diferentes registros de representação semiótica, sobretudo neste caso, o geométrico e da quantidade contínua. Outra forma seria converter a fração $\frac{3}{5}$ para percentual = 60%, logo 40 % representa $\frac{2}{5}$.

Para sistematização dos dados e apresentação das equipes que responderam a tarefa e fizeram uso de conversão e/ou tratamento, foram criadas cinco categorias. O Quadro 40 refere-se à análise da tarefa 04 “ordenando fração”.

Quadro 40 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 04 - ordenando fração

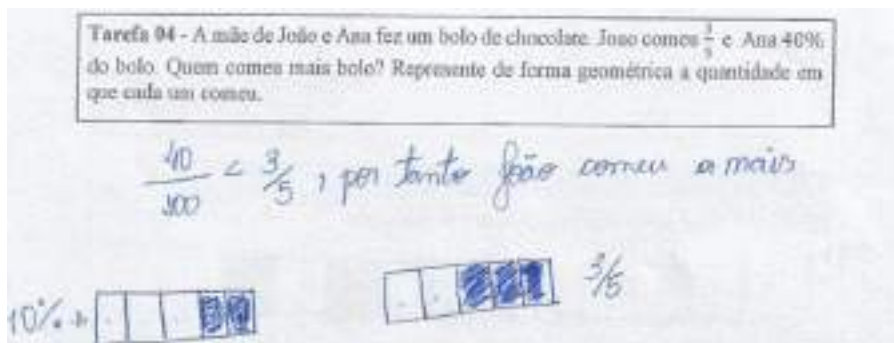
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E3

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes participaram dessa tarefa e quatro delas (E1, E2, E3 e E4) responderam corretamente. Fizeram uso dos registros decimal, fracionário, geométrico, percentual e natural, bem como de tratamento.

A equipe 1 fez a conversão de 40% para forma fracionária ($\frac{40}{100}$), bem como representou geometricamente a quantidade consumida por Ana e João e que João comeu mais que Ana (60%), conforme pode ser observado na figura 89.

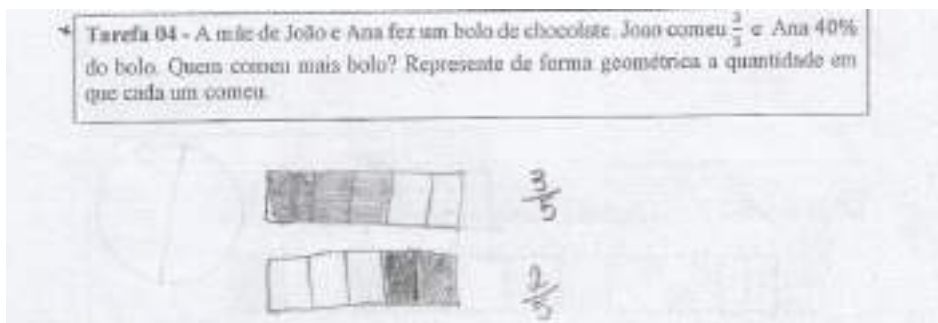
Figura 89 - Resolução da atividade 03 tarefa 04



Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 2 representou em forma geométrica a fração $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$, mas não indicou quem comeu mais, se João ou Ana. Mesmo assim, a equipe conseguiu converter 40% (forma percentual) para geométrica, conforme figura 90.

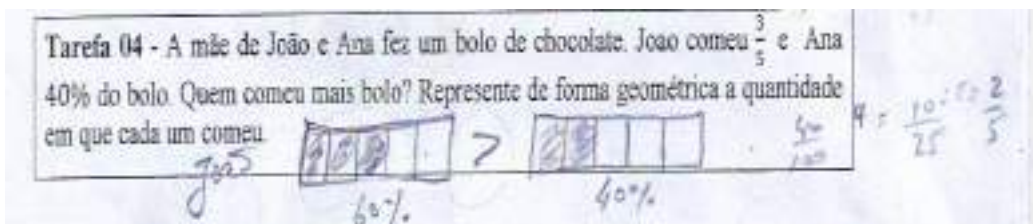
Figura 90 - Resolução da atividade 03 tarefa 04



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 3 respondeu corretamente a questão, fazendo uso dos registros geométrico, percentual e fracionário. Fez também uso de tratamento em $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Fez o registro geométrico para representar a quantidade que cada um comeu e utilizou o símbolo de maior ao afirmar que João comeu mais que Ana. A figura 91 expõe a resolução dessa equipe.

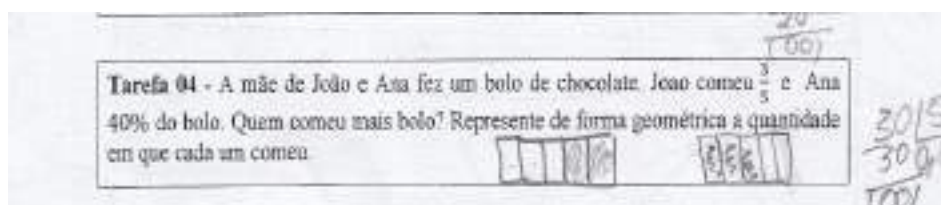
Figura 91 - Resolução da atividade 03 tarefa 04



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 4, da mesma forma que a 2, somente representou geometricamente as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, sem indicar quem consumiu mais bolo. Podemos perceber que a equipe sabe converter de um registro para outro, haja vista que o enunciado da questão foi dado na forma fracionária e percentual, e eles a representaram corretamente na forma geométrica. A equipe também fez uso do registro decimal ao converter a fração $\frac{3}{5}$ para a forma decimal 0,6, como se vê na figura 92.

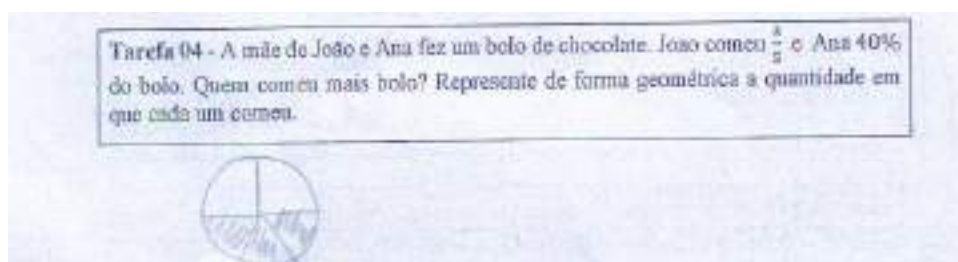
Figura 92 - Resolução da atividade 03 tarefa 04



Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 5 representou incorretamente quem mais consumiu do bolo, que foi João $\frac{3}{5}$, uma vez que dividiu a figura em partes não congruentes, de forma que a parte consumida conforme registro geométrico foi de 40% e não 60%, como indica a figura 93.

Figura 93 - Resolução da atividade 03 tarefa 04



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 05

Trata-se de uma tarefa que envolve o significado parte/todo. É preciso indicar a figura em que a fração do todo é maior. Os participantes podem indicar primeiramente a fração correspondente a cada figura. Depois, devem comparar e verificar qual fração do todo é maior. Na primeira, o todo foi dividido em quatro partes e foram tomadas 3, ficando $\frac{3}{4}$. A segunda figura foi dividida em oito partes e foram pintadas três, ficando: $\frac{3}{8}$. Comparando as frações, observa-se que $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$.

Eles podem perceber também que a figura é a mesma, a diferença é que a segunda foi dividida em mais partes e claramente a primeira, com três partes pintadas de quatro, é maior que a segunda, com três partes pintadas de oito. Alguns podem achar que a figura dividida em quatro partes e em que três foram tomadas é menor, pelo fato de existir menos partes que a outra figura, cujo todo possui oito segmentos. Silva (1997, p. 194) afirma que professores “se preocupam somente com a questão de as partes terem a mesma forma”.

Tendo em vista as informações das equipes e a estrutura da tarefa, foram elaboradas cinco categorias de análise. O Quadro 41 é concernente à análise da tarefa 05 “ordenando fração”.

Quadro 41 - Categorias de análise da tarefa 05 - ordenando fração

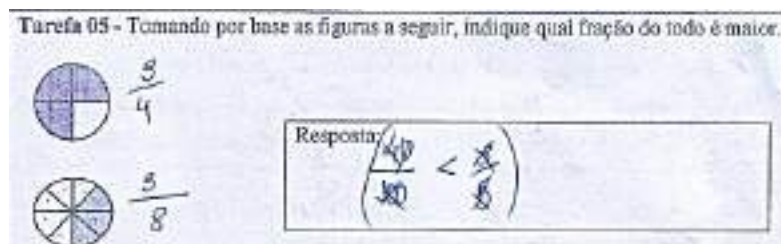
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E2/E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E5
Fez uso de conversão. (FUC)	E2/E3/E4
Fez uso de tratamento. (FUT)	----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes E1, E2, E3 e E4 responderam a tarefa. A E1 respondeu incorretamente, uma vez que afirmou que $\frac{40}{100} < \frac{3}{5}$, o que não tem relação com o contexto da questão. As equipes 2 e 3 fizeram uso do registro fracionário; portanto, lançaram mão da conversão e responderam corretamente a questão, ao responder que a fração do todo maior é $\frac{3}{4}$. A equipe 4 fez uso de conversão ao passar do registro geométrico para o fracionário, mas respondeu incorretamente ao indicar que a fração do todo maior é $\frac{3}{8}$. Merlini (2005, p. 9) afirma que a “compreensão da ordenação de fração é outra dificuldade”. Nos números naturais, o sucessor de um número é sempre o próprio número acrescido de uma unidade; já nos números racionais, especificamente ao tratar de frações, isso pode não acontecer, por exemplo $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Assim, 80% das equipes realizaram a questão, mas somente 40% a responderam corretamente. Fica evidente que alguns cursistas não se atentaram que a figura é a mesma, e que a primeira possui uma quantidade pintada maior que a segunda, embora a segunda tenha mais segmentos que a primeira, o que

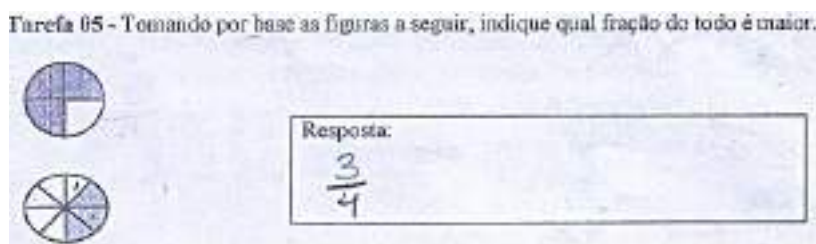
pode ser visto nas figuras 94 a 97, concernentes às resoluções das equipes 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Figura 94 - Atividade 03 tarefa 05



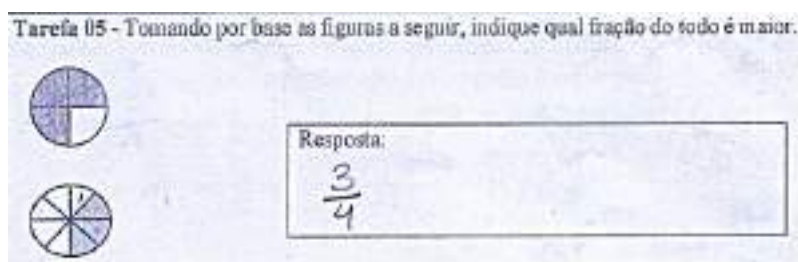
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 95 - Atividade 03 tarefa 05



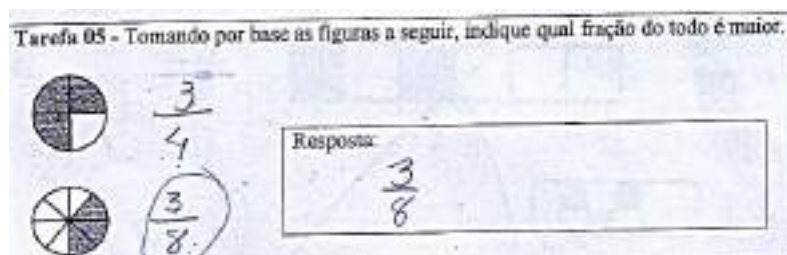
Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 96 - Atividade 03 tarefa 05



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 97 - Atividade 03 tarefa 05



Fonte: Equipe 4 (2018).

Análise da tarefa 06

A tarefa também envolve comparação de fração e é preciso ter conhecimento de fração considerando o significado parte/todo, acrescentando-se a isso as ideias de equivalência. Uma das formas de resolver seria encontrando frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{12}$, ou dividir o numerador pelo denominador de cada uma das frações e verificar quem é maior. Assim:

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \left| \quad \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} \right. \\ \bullet \quad \left| \quad \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9} \right. \\ \bullet \quad \left| \quad \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} \right. \end{array}$$

Assim, Camilo comeu mais que João, dado que Camilo comeu $\frac{5}{12}$ e João $\frac{4}{12}$. Um dos possíveis erros de alguns cursistas poderá ser na divisão de numerador pelo denominador de forma incorreta, ou ao comparar as frações $\frac{1}{3}$ com $\frac{5}{12}$ afirmar que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{5}{12}$.

A questão “b” qual a fração total da torta consumida, uma das formas de resolver é somar os numeradores da quantidade de torta comida por João e Camilo: $\frac{9}{12}$. Um dos possíveis erros poderá ser a soma das frações de tortas não consumidas.

Os cursistas na questão “c” podem verificar que o todo é 12 e apenas nove partes de doze foram consumidas, logo sobrou 3 partes: $\frac{3}{12}$. Alguns podem ter dificuldades em encontrar frações equivalentes e não conseguir identificar quem comeu mais (MERLINI, 2005). Outros, utilizando o significado número, podem não conseguir fazer a divisão do numerador pelo denominador de forma correta.

Para análise desta tarefa, foram sistematizadas cinco categorias de análise, as quais são exibidas no Quadro 42, referente à análise da tarefa 06 “ordenando fração”.

Quadro 42 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 06 - ordenando fração

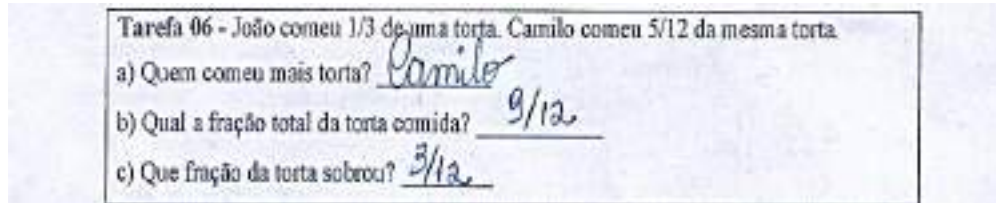
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E5
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E3

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam a tarefa, mas apenas 4 delas responderam corretamente (E1, E3, E4 e E5). Fizeram uso dos registros (geométrico, decimal e fracionário).

A equipe 1 respondeu corretamente todas as questões e fez uso do registro fracionário, como se vê na figura 98.

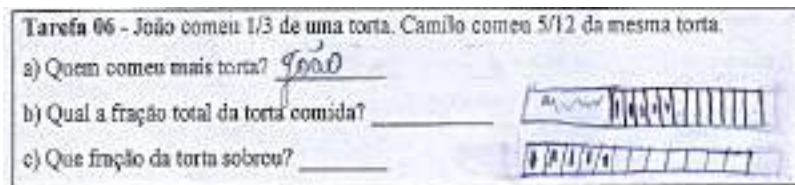
Figura 98 - Resolução da atividade 03 tarefa 06



Fonte: Equipe 1 (2018).

A equipe 2 respondeu incorretamente ao atribuir a João o maior consumo. Além do mais, representou incorretamente, fazendo uso do registro geométrico, a fração total de torta consumida e da torta que sobrou, conforme figura 99.

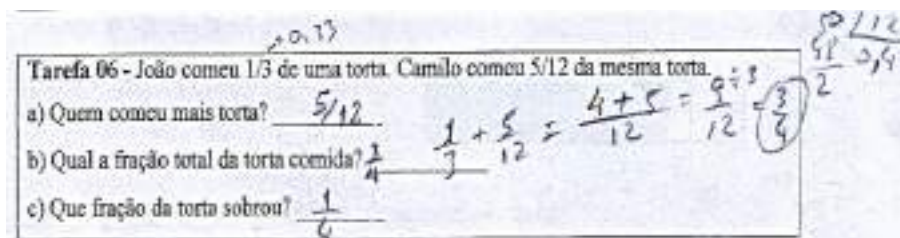
Figura 99 - Resolução da atividade 03 tarefa 06



Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 3 respondeu corretamente a questão, fazendo uso dos registros decimal e fracionário. Na questão “a”, fez uso de conversão ao mudar do registro fracionário para o decimal. Na questão “b”, o uso de tratamento ficou evidente na equivalência de $\frac{9}{12}$ com $\frac{3}{4}$. Vide figura 100.

Figura 100 - Resolução da atividade 03 tarefa 06



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 4 não fez uso de tratamento e utilizou o registro fracionário. Houve 100% de aproveitamento da equipe, haja vista que respondeu as três questões corretamente, conforme se nota na figura 101.

Figura 101 - Resolução da atividade 03 tarefa 06

Tarefa 06 - João comeu $\frac{1}{3}$ de uma torta. Camilo comeu $\frac{5}{12}$ da mesma torta.

a) Quem comeu mais torta? Camilo

b) Qual a fração total da torta comida? $\frac{9}{12}$

c) Que fração da torta sobrou? $\frac{3}{12}$

$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$

Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 5 fez uso de mais de um registro de representação (fracionário, geométrico e decimal). Representou de forma geométrica as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{12}$. Não fez uso de tratamento, conforme figura 102.

Figura 102 - Resolução da atividade 03 tarefa 06

Tarefa 06 - João comeu $\frac{1}{3}$ de uma torta. Camilo comeu $\frac{5}{12}$ da mesma torta.

a) Quem comeu mais torta? Camilo

b) Qual a fração total da torta comida? $\frac{9}{12}$

c) Que fração da torta sobrou? $\frac{3}{12}$

$\frac{1}{3} = 0,3$

$\frac{5}{12} = 0,4$

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 07

Essa tarefa também envolve a comparação de fração. Para isso, os integrantes devem analisar cada questão. Na letra “a”, precisam analisar se em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador. Verificou-se em tarefas anteriores que, quando encontravam-se os mesmos denominadores, bastava comparar os numeradores; quando o numerador era maior a fração correspondente era maior (verifique tarefa 06). Alguns podem dividir o numerador pelo denominador para comprovar essa afirmativa.

Na questão “b”, para exemplificar, pode-se citar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, em que se percebe que o numerador é o mesmo, porém os denominadores são diferentes; logo, ao dividir 01 (um) para 04 (quatro) = 0,25, cada parte será maior do que quando se divide 01 (um) para 05 (cinco) = 0,2.

Assim, quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior é a que possui menor denominador, afirmação verdadeira. Alguns podem achar que pelo fato de o 5 ser maior que o 4 a fração $\frac{1}{5}$ seja maior que $\frac{1}{4}$ (MERLINI, 2005).

Na questão “c”, conforme exemplo anterior, percebe-se que quando os numeradores são iguais, a maior é a que possui menor denominador, portanto, afirmação falsa.

Na questão “d”, para saber se a afirmação é verdadeira ou falsa, é preciso encontrar denominadores iguais e, depois, comparar os numeradores, visto que, quando os denominadores são iguais, comparam-se os numeradores – quanto maior o numerador, maior a fração. Assim:

- $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$, $\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$
- $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$,
- $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$,
- $\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$

Verifica-se que a fração $\frac{5}{10}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$ e a fração $\frac{4}{10}$ é equivalente a $\frac{2}{5}$, dessa forma: $\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$, o que prova que a afirmação é falsa.

Outra forma de resolver seria fazendo o “MMC”, o que remete a encontrar o menor múltiplo comum entre 2,5 2

1, 5 5

1, 1 10

$$\frac{*1}{:2} + \frac{2*}{5:} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

Para somar ou subtrair uma fração pelo método do “MMC”, é preciso primeiro encontrar o menor múltiplo comum, em seguida utilizar o menor múltiplo comum para dividir pelos respectivos denominadores e o resultado multiplicar pelos referentes numeradores. Em relação à soma das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$, encontra-se o menor múltiplo comum dos denominadores que foi 10 e depois pega-se o 10 e divide pelo primeiro denominador (2) e o resultado multiplica-se pelo numerador 01, resultando em (5). Da mesma forma, fazer com a outra fração, pegando o 10 dividindo pelo denominador (5) e o resultado multiplicar pelo numerador (2), resultando (4). Após, somar os numeradores e conservar o denominador (10), resultando a soma em $\frac{9}{10}$.

No caso da questão “e”, para saber se a afirmação está correta, uma das formas de resolver seria identificando quanto representa $\frac{60}{100}$. 200 e depois verificar se $3\frac{1}{5}$.200 tem a mesma

resposta que $\frac{60}{100} \cdot 200$. Assim, verifica-se que $\frac{60}{100} \cdot 200 = 120$, posto que se pode multiplicar $60 \cdot 200 : 100 = 120$. Quanto a $3\frac{1}{5} \cdot 200$, pode-se multiplicar $200 \cdot 1 : 5$ e resultado multiplicar por três (03), o que resulta em cento e vinte (120). Logo, a afirmação *60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200* é verdadeira. Alguns podem ter dificuldades em interpretar a parte do enunciado que diz triplo da quinta parte de 200 e não conseguir resolver o problema. É importante que os mediadores fiquem atentos para ajudar a sanar possíveis dúvidas.

Por fim, na questão “f”, primeiro os integrantes podem somar as frações $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$, mas como os denominadores são diferentes, podem encontrar denominadores iguais para que depois somem os numeradores e conservem o denominador comum. Assim:

- $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}; \quad \frac{3}{16}$
- $\frac{1}{4} = \frac{3}{12};$
- $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$.

Portanto, encontra-se que $\frac{4}{16}$ é equivalente a $\frac{1}{4}$ e possui o mesmo denominador que $\frac{3}{16}$. Prontamente, como os participantes já fizeram, basta somar os numeradores e conservar o denominador, dado que os denominadores, agora, são iguais: $\frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16}$. Dessa maneira, conclui-se que a afirmativa é verdadeira.

Devido à extensão da tarefa, foram criadas onze categorias de análise para facilitar sua sistematização. O Quadro 43 é concernente à análise da atividade 03 tarefa 07 “ordenando fração”.

Quadro 43 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 07 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E3
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E3
Respondeu questão “c” corretamente. (RCC)	E1/E2/E3
Respondeu questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E3/E5
Respondeu questão “e” corretamente. (REC)	E1/E3/E5
Respondeu questão “f” corretamente. (RFC)	E1/E3/E5

Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

Todas as cinco equipes resolveram a tarefa, mas somente as equipes 1 e 3 responderam corretamente todas as questões. Nenhuma delas fez uso de conversão e tratamento. No caso da questão “a”, todos responderam corretamente. A questão “b” somente as equipes E1 e E3 acertaram. O fato de as outras equipes não responderem corretamente talvez seja devido ao pensamento incorreto de que, em duas frações com numeradores iguais, a maior é a que possui maior denominador, uma vez que tratam fração como uma sobreposição de dois números naturais disjuntos e não como um só número, o fracionário, que denota divisão (MERLINI, 2005). As equipes E1, E2 e E3 responderam a questão “c” corretamente. A questão “d”, que versa sobre soma de fração, foi respondida corretamente somente pelas E1, E3 e E5. A questão “e”, referente ao significado de fração operador multiplicativo, foi realizada de forma correta pelas equipes E1, E3 e E5. A equipe 2 não respondeu essa questão. Por fim, a questão “f”, relacionada ao significado parte/todo, foi respondida corretamente pelas E1, E3 e E5, ao passo que a equipe 2 a deixou em branco. As figuras 103 a 109 revelam as respostas dadas pelas equipes 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Figura 103 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

() Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.

() Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador.

() Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.

() $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

() 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200.

() Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 104 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

(✓) Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.


(F) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador.

(F) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.

(✓) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

() 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200.

() Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.



Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 105 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

(✓) Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.

$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 106 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

(✓) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$


(F) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.

(F) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

(✓) 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200. $\frac{60}{100} \times 200 = 120$ $\frac{1}{5}$ de 200 = 40

(✓) Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.

$\frac{3+4}{16} = \frac{7}{16}$



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 107 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

(V) Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 108 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

(F) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador.

(V) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.


(V) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

(F) 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200.

$120 = \frac{3}{5} \text{ de } 200$

(F) Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.

$\frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16}$



Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 109 - Resolução da atividade 03 tarefa 07

Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

(V) Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.

(F) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador.


(V) Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.

(F) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ = MMC

(V) 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200.

(V) Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.

$3 + 4 = 7$



Handwritten notes on the right side of the page include: 4 pe, $\frac{9}{12}$, $\frac{3}{5}$ with a circled 5 in the denominator, $40 \times 3 = 120$, and $\frac{2}{3}$ and $\frac{2}{1}$.

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 08

Essa tarefa trabalha com o conhecimento de fração considerando o significado parte/todo, a quantidade contínua, bem como o domínio de operações com frações equivalentes. Percebe-se que se trata de uma soma de fração, embora esteja em forma geométrica; assim, os integrantes deverão indicar a fração correspondente a cada forma e realizar as respectivas somas. Por conseguinte, explicar o resultado de cada operação em forma de registro figural.

No caso da letra “a”, considerando a primeira figura, o todo foi dividido em doze (12) partes e três (03) foram pintadas, resultando em $\frac{3}{12}$.

Na segunda figura, o todo foi dividido em seis (06) partes, e duas foram tomadas, resultando em $\frac{2}{6}$. Realizando a soma $\frac{3}{12} + \frac{2}{6}$, como os denominadores são diferentes, precisa-se encontrar uma fração equivalente a $\frac{2}{6}$ tal que o denominador seja igual a 12, assim: $\frac{2*2}{6*2} = \frac{4}{12}$. Operando a soma dessas frações, agora, com o mesmo denominador: $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$. Logo, os integrantes deverão desenhar um todo dividido em doze (12) partes e pintar sete (07).

Nessa mesma linha de raciocínio:

$$\text{“b”} \frac{5}{12} + \frac{12}{12} + \frac{12}{12} = \frac{29}{12}.$$

$$\text{“c”} \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{18}{24} = \frac{8}{24} + \frac{10}{24} + \frac{18}{24} = \frac{36}{24}.$$

$$\text{“d”} \frac{12}{12} + \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = \frac{29}{12}.$$

$$\text{“e”} \frac{2}{3} + \frac{6}{12} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} + \frac{12}{24} + \frac{1}{24} = \frac{29}{24}.$$

$$\text{“f”} \frac{10}{24} - \frac{2}{3} = \frac{10}{24} - \frac{16}{24} = \text{não é possível.}$$

Para sistematização e análise desta tarefa, foram concebidas onze categorias que englobam seus objetivos. O Quadro 44 exibe a análise da tarefa 08 “ordenando fração”.

Quadro 44 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 08 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	-----
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	-----
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E5
Respondeu questão “c” corretamente. (RCC)	E1
Respondeu questão “d” corretamente. (RDC)	E1/E5
Respondeu questão “e” corretamente. (REC)	E1
Respondeu questão “f” corretamente. (RFC)	E1/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E2/E3/E4
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E1/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Conforme as figuras 110 a 113, somente duas equipes participaram da atividade. Talvez a pequena participação seja devido à dificuldade em compreender fração considerando o registro geométrico, bem como as quantidades contínuas (CANOVA, 2006), demonstrando, assim, que uma das maiores dificuldades reside em converter de registro geométrico para fracionário. De fato, das duas equipes que realizaram a tarefa, nenhuma conseguiu efetuar a toda corretamente. Por exemplo, nenhuma respondeu corretamente a questão “a”.

A equipe 1 respondeu corretamente as questões “b” a “f” e fez uso do registro fracionário e não figural ao representar as frações correspondentes.

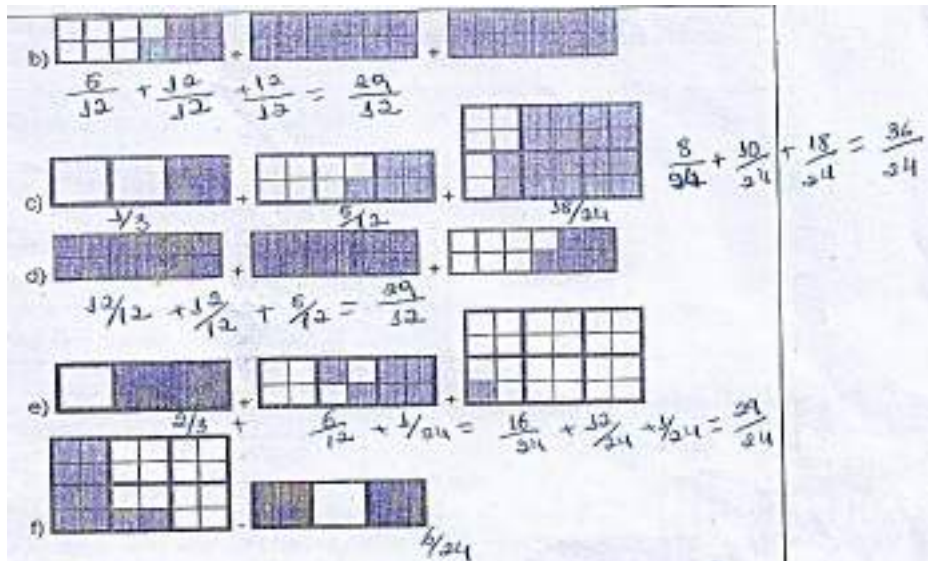
As E2, E3 e E4 não responderam a tarefa.

A E5 respondeu a tarefa, mas não acertou as questões “a”, “c” e “e”. A explanação dos resultados foi feita com o registro fracionário.

Figura 110 - Resolução da atividade 03 tarefa 08

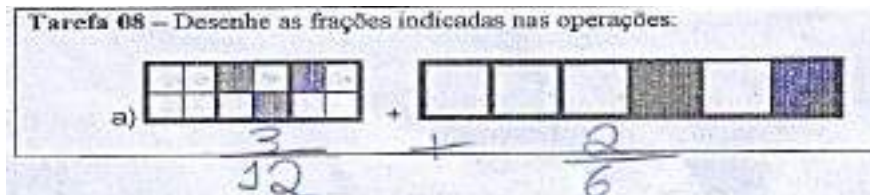
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 111 - Resolução da atividade 03 tarefa 08



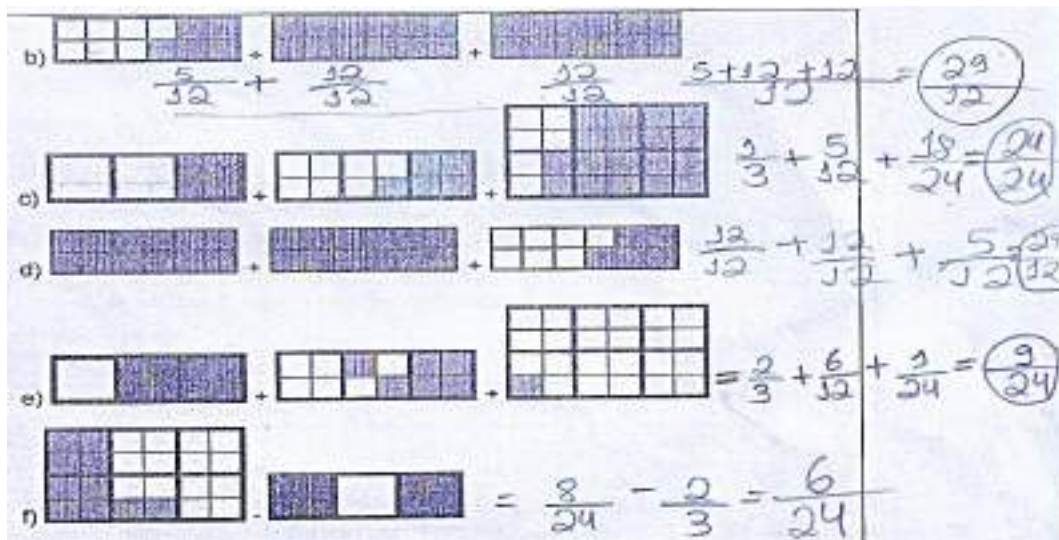
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 112 - Resolução da atividade 03 tarefa 08



Fonte: Equipe 5 (2018).

Figura 113 - Resolução da atividade 03 tarefa 08



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 09

Os cursistas deverão criar atividades relacionadas à comparação de frações tendo em vista estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Acredita-se que não terão dificuldades, visto que, já estarão bem familiarizados com comparação de fração.

As onze categorias de análise foram elaboradas para melhor organização da análise da tarefa. Foram concebidas conforme o objetivo proposto pela tarefa, e o Quadro 45 refere-se à análise da tarefa 09 “ordenando fração”.

Quadro 45 - Categorias de análise da atividade 03 tarefa 09 - ordenando fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Elaborou atividades de comparação. (EAC)	E1/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E2/E3/E4
Fez uso de conversão. (FUC)	E3
Fez uso de tratamento. (FUT)	----
Ao elaborar a questão utilizou significado parte/todo.(PT)	E1/E3
Ao elaborar a questão utilizou significado número. (SN)	E1
Ao elaborar a questão utilizou significado medida. (SM)	----
Ao elaborar a questão utilizou significado operador multiplicativo. (SOP)	-----
Ao elaborar a questão utilizou significado quociente. (SQ)	E1/E3
Fez uso da característica de quantidades discreta. (QD)	-----
Fez uso da característica de quantidades contínua. (QC)	E1/E3

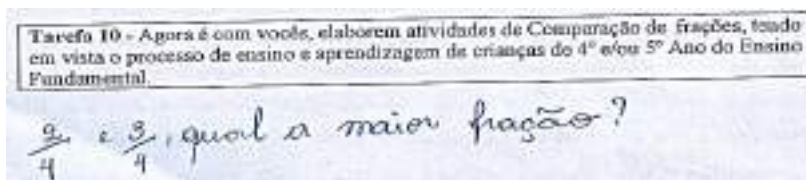
Fonte: Elaboração da autora.

Apenas as equipes 1 e 3 participaram dessa tarefa. A E1 elaborou uma atividade de comparação envolvendo significado parte/todo, podendo ser compreendido como numérico e quociente. Essa equipe não respondeu a questão que eles mesmos elaboraram. Assim, não foi possível identificar uso de conversão e tratamento. Foi utilizada a quantidade contínua na elaboração da questão.

A E3 fez uso do significado quociente, podendo ser compreendida como significado parte/todo também. Segundo Canova (2006), Merlini (2005) e Silva (2005), professores e estudantes têm mais facilidade com o significado parte/todo em contextos envolvendo frações.

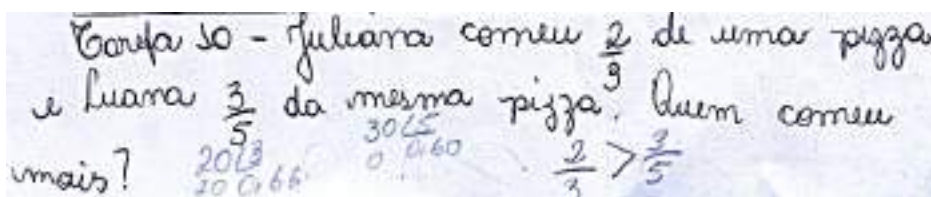
A equipe fez uso de conversão ao responder a questão. A conversão realizada foi de fracionário para decimal. Não foi utilizado tratamento. As figuras 114 e 115 são concernentes às equipes 1 e 3, respectivamente.

Figura 114 - Atividade 03 tarefa 09



Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 115 - Atividade 03 tarefa 09



Fonte: Equipe 3 (2018).

Considerações sobre a “ Comparação”

Na localização de fração na reta numérica, ainda duas equipes compreenderam fração como uma sobreposição de dois números naturais, dado que exibiram a fração $\frac{1}{4}$ como menor que $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ menor que $\frac{3}{5}$; de fato Merlini (2005, p. 9) conjectura que “o ensino e aprendizagem de frações pressupõe algumas rupturas dos números naturais” e que estudantes ainda possuem dificuldades em compreender essa ideia. Não só estudantes; verificamos que alguns professores ainda não a compreenderam.

É importante evidenciar que na atividade 03 tarefa 03 de “comparação” as equipes responderam corretamente a maioria das questões, sendo o registro de representação semiótica decimal o mais utilizado. Somente uma das equipes respondeu corretamente uma questão que envolvia comparação de registro geométrico (estando implícita a fração mista) com fracionário na forma imprópria, e a que mais apresentou desenvoltura foi a que comparava decimais, registro natural com fracionário e soma de fração com denominadores diferentes. Verifica-se mais uma vez a dificuldade desses professores com fração mista e desta vez com imprópria, e com a natureza das quantidades contínuas.

Na atividade 03 tarefa 05 – envolvendo a comparação de duas figuras de mesmo tamanho e forma, em que a primeira foi particionada em quatro partes e foram tomadas três, e a segunda em oito partes e também foram tomadas três –, os cursistas deveriam analisar e comparar qual apresentava a maior fração. Assim, das quatro equipes que apresentaram suas resoluções, apenas duas responderam corretamente. Percebemos que alguns cursistas, ainda se atentam apenas à quantidade de partes em que o todo foi seccionado, ou seja, ainda não romperam com a ideia dos números naturais; só observam que oito é maior que quatro e não que a fração $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{3}{8}$; de fato, ao raciocinar sobre frações como se fossem números naturais, os cursistas acabam por enfrentar vários obstáculos, dado que estão acostumados com $3 > 2$, nas frações terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ (BRASIL, 1998).

Na tarefa 07 da atividade 03 todas as equipes responderam corretamente que, ao se comparar fração de mesmo denominador, a maior é a que possui maior numerador. Na questão “b”, em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador, somente duas equipes responderam corretamente; e a questão “c”, em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador, somente três responderam corretamente. Logo, observa-se que persistem em tratar fração como uma sobreposição de dois números naturais disjuntos e não como um só número, o fracionário, que denota divisão (MERLINI, 2005).

Mais uma vez ainda na “comparação de fração”, foram evidenciadas dificuldades por parte dos cursistas em compreender fração considerando o registro geométrico, bem como a natureza das quantidades contínuas, uma vez que somente duas equipes participaram da tarefa e destas nenhuma conseguiu resolver todas as questões corretamente. A tarefa demandava conhecimento de fração considerando o significado parte/todo, a quantidade contínua, bem como o domínio de operações com frações equivalentes. Os professores deveriam realizar a soma de fração e indicar a fração correspondente a cada forma, mas nenhuma das duas equipes respondeu corretamente à questão “a”. Fica clara a dificuldade dos cursistas com registro de representação geométrico, natureza das quantidades contínuas e soma de fração.

Características das quantidades

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam as diferentes características das quantidades: discretas, contínuas; intensivas e extensivas.

Tarefa 01 – Leitura do texto sobre Característica das quantidades.

Análise da tarefa 02

Certamente os professores não terão dificuldades com a leitura do texto, no entanto poderão confundir algumas situações, especialmente quando envolver diferentes características. Nesse caso, devem retomar o texto e verificar cuidadosamente as definições, o que os auxiliará a responder uma série de perguntas.

As categorias foram elaboradas com a perspectiva de indicar as equipes que responderam a tarefa; responderam corretamente; definiram quantidade discreta; definiram quantidade contínua; e exemplificaram cada uma das quantidades. O Quadro 46 é referente a análise da tarefa 02 “característica das quantidades.

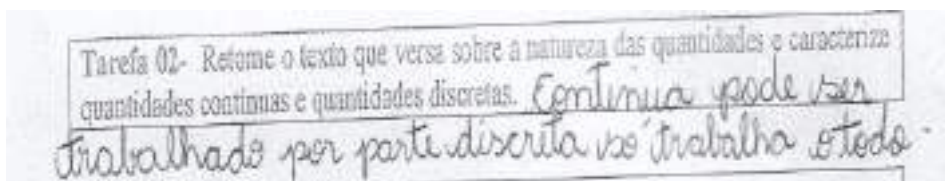
Quadro 46 - Categorias de análise da tarefa 02 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E2/E3/E4
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E3/E4
Definiu quantidade discreta. (DQD)	E2/E3/E4
Definiu quantidade contínua. (DQC)	E2/E3/E4
Exemplificou quantidade discreta. (EQD)	----
Exemplificou quantidade contínua. (EQC)	----
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E1/E5

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 2, 3 e 4 responderam a tarefa, mas somente E3 e E4 definiram corretamente. As figuras 116 a 118 são concernentes às respostas das equipes 2, 3 e 4, respectivamente.

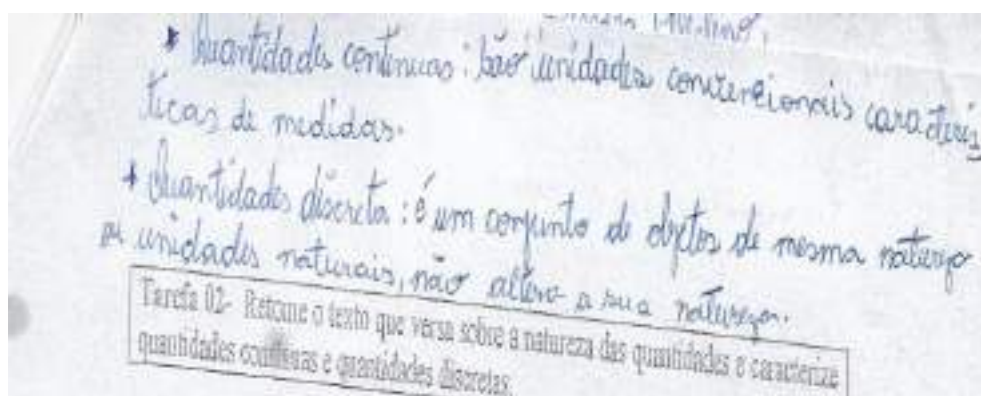
Figura 116 - Atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 2 (2018).

A definição da equipe 2 foi: “contínua pode ser trabalhado por parte, discreta só trabalha o todo”. A ideia não ficou claro e o conceito não foi definido corretamente.

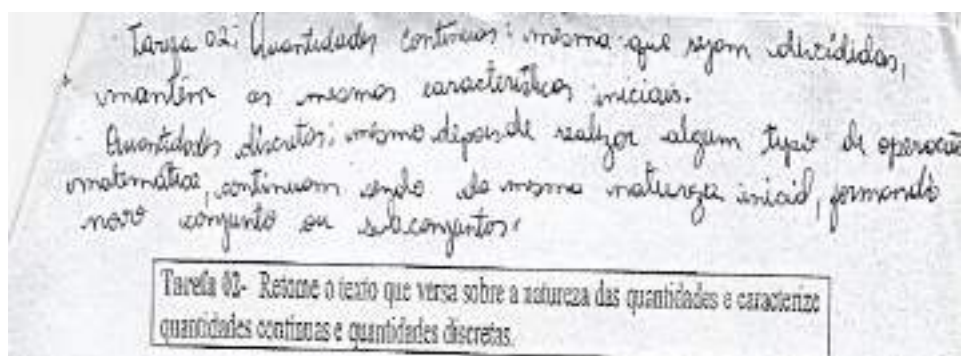
Figura 117 - Atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 3 definiu corretamente as duas quantidades. Contínua: “são unidades convencionais características de medida”. Essa definição poderia até ser mais expandida/explorada. Para quantidade discreta, a equipe afirmou: “é um conjunto de objetos de mesma natureza ou unidades naturais, não altera a sua natureza”.

Figura 118 - Atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 4 (2018).

A equipe 4 definiu as duas quantidades corretamente. Para quantidade contínua, explicou: “mesmo que sejam divididas, mantém as mesmas características iniciais”. Para quantidades discretas, respondeu: “mesmo depois de realizar algum tipo de operação matemática, continuam sendo de mesma natureza inicial, formando novo conjunto ou subconjuntos”.

Devido à participação de apenas três equipes na realização da tarefa e a definição incorreta pela equipe 2, fica evidente a reduzida compreensão das quantidades por esses professores. Isso evidencia um ensino muito raso de frações considerando quantidades contínuas, visto que o conteúdo envolvendo fração com quantidades contínuas é difícil de ser compreendido por professores e estudantes.

Análise da tarefa 03

Os participantes devem ler o texto cuidadosamente para entender e diferenciar quantidade intensiva de extensiva. Pode acontecer de algumas equipes inverterem as definições, caracterizando extensiva como intensiva e intensiva como extensiva.

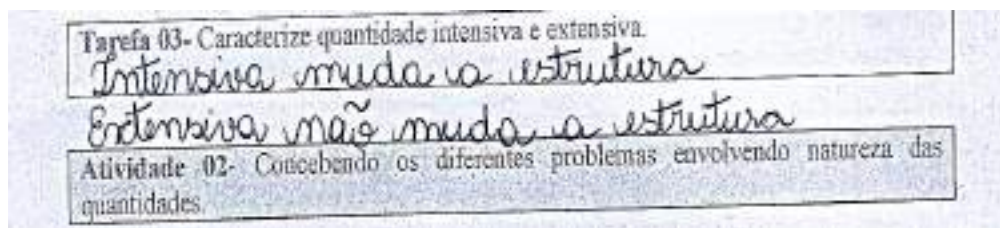
Considerando os dados das equipes e a estrutura da tarefa, foram criadas sete categorias de análise. O Quadro 47 exibe a análise da tarefa 03 “características das quantidades”.

Quadro 47 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 03 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E2/E3/E4
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E3/E4
Definiu quantidade extensiva. (DQE)	E2/E3/E4
Definiu quantidade intensiva. (DQI)	E2/E3/E4
Exemplificou quantidade extensiva. (EQE)	----
Exemplificou quantidade intensiva. (EQI)	----
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E1/E5

Fonte: Elaboração da autora.

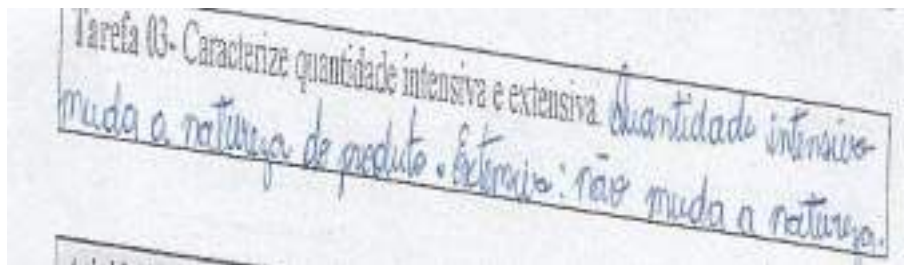
As equipes 2, 3 e 4 foram as que participaram dessa tarefa, porém a equipe 2 definiu as quantidades de maneira incompleta, conforme fica claro na figura 119.

Figura 119 - Atividade 01 tarefa 03

Fonte: Equipe 2 (2018).

Definir que quantidade intensiva “muda a estrutura” e que extensiva não muda, não está definindo em sua completude, dado que um leitor que não tem conhecimento desses conceitos não entenderia essa definição.

De forma reduzida a equipe 3 definiu: “quantidade intensiva muda a natureza do produto. Extensiva não muda a natureza”. Isso pode ser visto na figura 120.

Figura 120 - Atividade 01 tarefa 03

Fonte: Equipe 3 (2018).

Estão corretas as definições, mas poderiam ser explanadas com mais detalhes, haja vista que não são somente essas as únicas diferenças entre as duas.

Atividade 02 - Resolva os problemas a seguir e identifique as características das quantidades.

Objetivo

- Resolver diferentes problemas envolvendo natureza das quantidades.

Materiais necessários

- Lápis
- Caneta
- Papel sulfite
- Borracha

Nessa atividade, constam questões que figuraram na Prova Brasil. Para responder, os professores deverão reconhecer as representações indicadas e, mais que isso, efetuar conversões (DUVAL, 2009) seja da linguagem alfabética para figural seja ainda para representações numéricas (fracionárias, decimais ou percentual), o que pode se configurar em obstáculos para aqueles que não possuem familiaridade com o conteúdo de fração.

Análise da tarefa 01

Na tarefa 01, os participantes devem marcar a alternativa em que o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$. Trata-se de um problema que envolve o significado de fração parte/todo e quantidade discreta. Possivelmente, os cursistas resolverão a questão sem grandes dificuldades.

De posse dos dados das equipes, foram estruturadas seis categorias de análise, as quais são exibidas no Quadro 48, concernente à análise da atividade 02 tarefa 01 “características das quantidades”.

Quadro 48 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E1/E3/E4
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	----

Fonte: Elaboração da autora.

Todas as equipes (E1, E2, E3, E4 e E5) responderam a tarefa. Quatro delas (01, 03, 04 e 05) fizeram uso de conversão. Quanto à classificação da tarefa quanto à natureza das quantidades (contínua, discreta, intensiva e extensiva), apenas as equipes 1 e 2 responderam, mas de forma incompleta. A E1 respondeu que envolve quantidade extensiva, mas faltou classificar em discreta ou contínua. A E2 respondeu “discreta”, mas faltou classificar em extensiva ou intensiva. A E3 classificou em discreta e contínua, o que está incorreto, uma vez

que a classificação correta seria discreta e extensiva (extensiva por envolver significado parte/todo). A E4 classificou incorretamente como contínua e extensiva, e a E5 como discreta e contínua. Nenhuma das equipes conseguiu classificar completamente a questão quanto à natureza das quantidades.

A equipe 1 respondeu a tarefa corretamente e fez uso de conversão ao passar do registro geométrico para o fracionário. Também fez uso de tratamento ao passar da fração $\frac{4}{6}$ para fração equivalente $\frac{2}{3}$.

A equipe 2 respondeu corretamente, mas não fez uso de conversão e tratamento.

A E3 respondeu a tarefa corretamente e fez uso de conversão ao passar do registro geométrico para o fracionário, bem como de tratamento ao passar da fração $\frac{2}{3}$ para fração equivalente $\frac{4}{6}$.

A equipe 4 respondeu a tarefa corretamente e fez uso de conversão e tratamento ao representar $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$.

A E5 respondeu corretamente e fez uso de conversão ao passar do registro geométrico para o fracionário.

As figuras 121 a 125 são concernentes às resoluções das equipes 1, 2, 3, 4 e 5.

Figura 121 - Resolução da atividade 02 tarefa 01

Tarefa 01 - (Prova Brasil 2009) Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas?

(A) ●●○○○○

(B) ●●●○○○

X (C) ●●●●○○

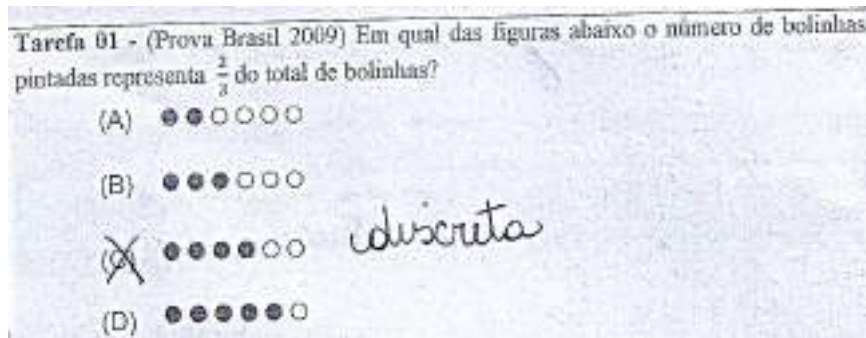
(D) ●●●●●○

$\frac{4}{6} \div 2 = \frac{2}{3}$

extensivas

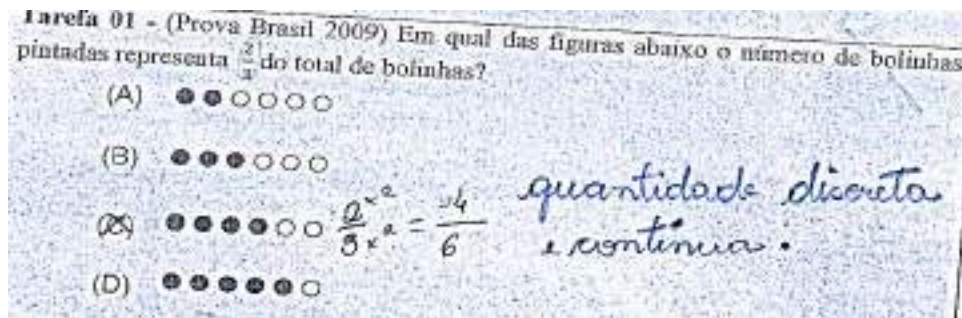
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 122 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



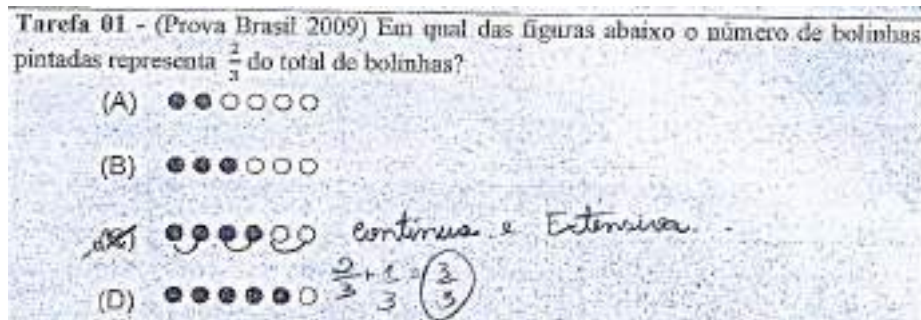
Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 123 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



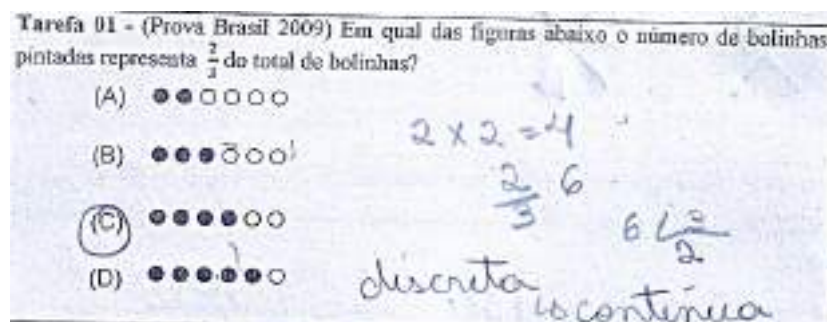
Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 124 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 125 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 02

A tarefa 02 envolve significado parte/todo e quantidade contínua. Como a figura é um círculo dividido em duas partes e somente uma foi pintada, tem-se a fração $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. Nessa mesma perspectiva, a segunda figura é um quadrado que foi particionado em quatro partes (quatro triângulos equiláteros) e uma dessas partes foi pintada; assim, a fração condizente é $\frac{1}{4}$. Dessa forma, a alternativa correta é a letra “a” $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Possivelmente, os cursistas não terão dificuldades de estabelecer as devidas conversões. Mas poderão classificar incorretamente quanto à natureza das quantidades.

A sistematização dos dados ocorreu conforme demanda da tarefa. Assim, foram elaboradas seis categorias de análise. O Quadro 49 é concernente à análise da atividade 02 tarefa 02 “característica das quantidades”.

Quadro 49 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	E3/E4

Fonte: Elaboração da autora.

Todas as equipes responderam a tarefa corretamente quanto à representação das partes pintadas da figura. No tocante à classificação da questão quanto à natureza das quantidades, apenas as equipes 3 e 4 relacionaram de forma correta e completa. A maioria classificou corretamente quanto à natureza das quantidades contínua, as dúvidas maiores são quanto a ser extensiva ou intensiva. A equipe 1 não fez uso de conversão e tratamento e classificou incompletamente a natureza das quantidades, dado que só respondeu que é extensiva, faltando a classificação contínua.

A equipe 2 não fez uso de conversão e tratamento e classificou incompletamente a natureza das quantidades, uma vez que respondeu que somente é contínua, faltando a classificação extensiva.


As equipes 3 e 4 responderam toda a tarefa corretamente, mas não fizeram uso de conversão e tratamento. Fizeram a classificação completa quanto à natureza das quantidades: contínua e extensiva.

A equipe 5 classificou incorretamente quanto à natureza das quantidades ao responder que é intensiva e contínua. Não fez uso de conversão e tratamento.

As figuras 126 a 130 são recortes das resoluções das equipes 1 a 5, respectivamente.

Figura 126 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - (Prova Brasil 2009) Observe as figuras a seguir:



A parte pintada destas figuras é representada pelas frações?

(A) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$


(D) $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$

contínua

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 127 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

Tarefa 02 - (Prova Brasil 2009) Observe as figuras a seguir:



A parte pintada destas figuras é representada pelas frações?

$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$

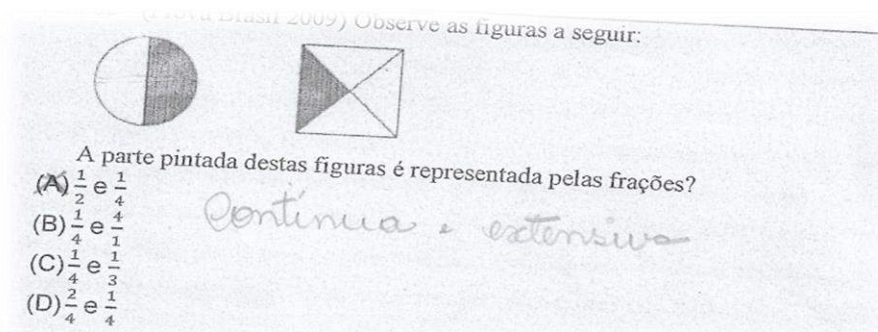
(C) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$

contínua

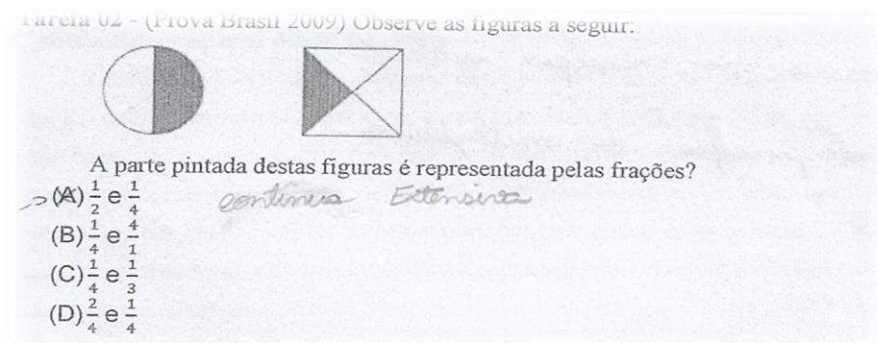
Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 128 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



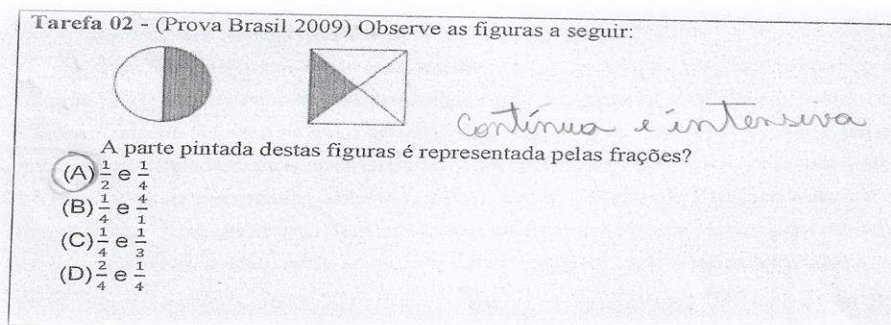
Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 129 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 130 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise tarefa 03

Na tarefa 03, os professores devem compreender que se trata de uma coleção constituída de objetos distintos, organizados separadamente em um espaço próprio, mas que compõem um todo. E esse todo deve ser visto em suas partes (frações), cujas respostas devem ser expressas

em porcentagem, o que pode se constituir numa dificuldade, sobretudo porque não é familiar, aos professores e estudantes, esse tipo de abordagem. De fato, Martins (2016, p. 101) indica que “as dificuldades de aprendizagem relacionadas à porcentagem podem ser entendidas na mesma perspectiva dos obstáculos referentes ao ensino de números racionais”. Uma das possíveis dificuldades será na classificação das quantidades (contínua, discreta, intensiva e extensiva).

As seis categorias indicam as equipes que responderam a tarefa; responderam corretamente; bem como fizeram conversão, tratamento e a classificação correta quanto às quantidades. O Quadro 50 é atinente à análise da atividade 02 tarefa 03.

Quadro 50 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - características das quantidades

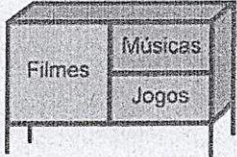
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	E2

Fonte: Elaboração da autora.

Todos responderam corretamente à porcentagem correspondente à coleção de jogos de Bruno, mas as equipes 1, 3, 4 e 5 fizeram a correlação incorreta da natureza das quantidades. A equipe 1 respondeu incorretamente como intensiva e discreta. A E2 respondeu corretamente como contínua, mas faltou informar se é extensiva ou intensiva. As E3 e E4 classificaram como discreta e intensiva, o que também não está correto, e a E5 respondeu extensiva e discreta. Nenhuma fez uso de conversão e tratamento, incorrendo em não uso de registros de representação. As figuras 131 a 140 são recortes das resoluções das equipes E1, E2, E3, E4 e E5.

Figura 131 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

Tarefa 03- (Prova Brasil 2009) A coleção de CD e DVD de Bruno estão em um armário, distribuído conforme representa a figura a seguir:



Que porcentagem da coleção de Bruno correspondem aos jogos?

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 132 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

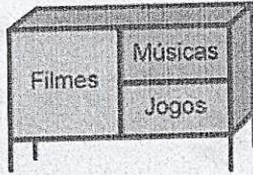
(A) 20%
 (B) 25%
 (C) 30%
 (D) 75%

discreta e intensivo

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 133 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

Tarefa 03- (Prova Brasil 2009) A coleção de CD e DVD de Bruno estão em um armário, distribuído conforme representa a figura a seguir:



Que porcentagem da coleção de Bruno correspondem aos jogos?

continua

Fonte: Equipe 2 (2018).

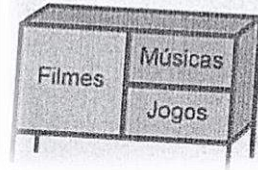
Figura 134 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

- (A) 20%
 (B) 25%
 (C) 30%
 (D) 75%

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 135 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

(Prova Brasil 2009) A coleção de CD e DVD de Bruno estão em um armário, distribuído conforme representa a figura a seguir:



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 136 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

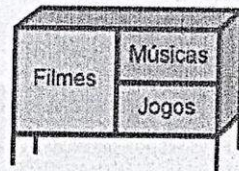
(A) 20%
 (B) 25%
 (C) 30%
 (D) 75%

discreta e extensiva

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 137 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

Tarefa 03- (Prova Brasil 2009) A coleção de CD e DVD de Bruno estão em um armário, distribuído conforme representa a figura a seguir:



Discreta intensiva

Que porcentagem da coleção de Bruno correspondem aos jogos?

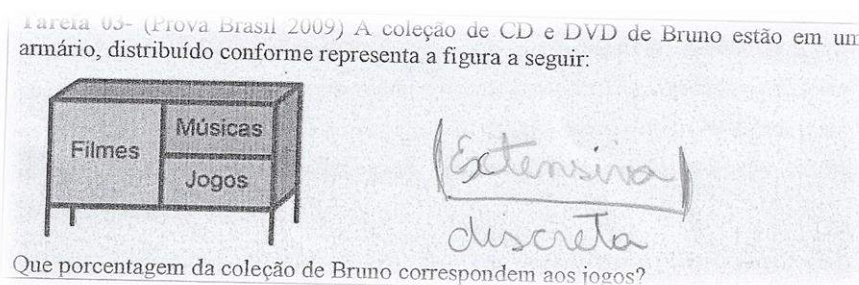
Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 138- Resolução da atividade 02 tarefa 03

Discreta intensiva

(A) 20%
 (B) 25%
 (C) 30%
 (D) 75%

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 139 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

Fonte: Equipe 5 (2018).

Figura 140 - Resolução da atividade 02 tarefa 03

- (A) 20%
(B) 25%
(C) 30%
(D) 75%

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 04

As dificuldades em compreender a tarefa 04 nos parece maior, porque requer a compreensão de que se trata de $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$. Para tanto, os participantes terão que perceber que o todo pintado corresponde a $\frac{1}{8}$ da figura toda, ou ainda, que o disco deve ser visto como um todo dividido em 8 partes, das quais se pintou 1.

As seis categorias de análise indicadas no Quadro 51 exibem o desempenho de cada equipe na atividade 02 tarefa 04.

Quadro 51 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	-----

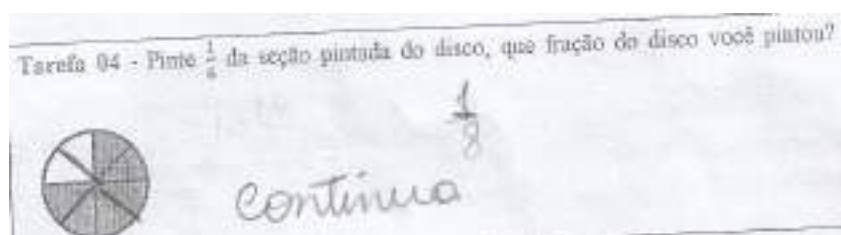
Fonte: Elaboração da autora.

Muitos participantes tiveram dificuldades com essa tarefa. Embora envolva o significado parte/todo e operador multiplicativo, a questão não é simples. Durante o seu

desenvolvimento, muitos solicitaram esclarecimentos dos formadores. Frequentemente esse tipo de questão solicita a fração da parte pintada, mas essa foi além e requereu dos participantes $\frac{1}{6}$ da fração pintada, o que envolve conhecimento dos significados parte/todo e operador multiplicativo.

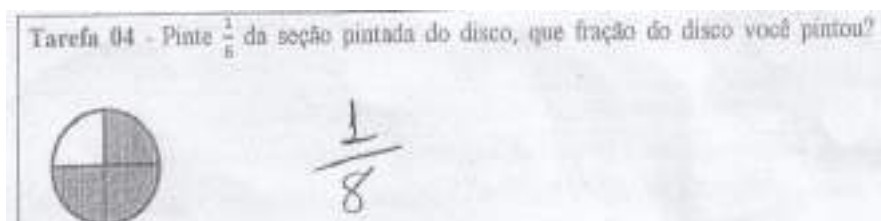
Todas as equipes responderam corretamente quanto à fração correspondente a $\frac{1}{6}$ da seção pintada. Mas nenhuma respondeu corretamente quanto à classificação da questão quanto à natureza das quantidades. Fizeram a conversão do registro geométrico para o fracionário, mas não de tratamento. As figuras 141 a 145 são recortes das resoluções da tarefa 4 pelas equipes E1, E2, E3, E4 e E5, respectivamente.

Figura 141 - Resolução da atividade 02 tarefa 04



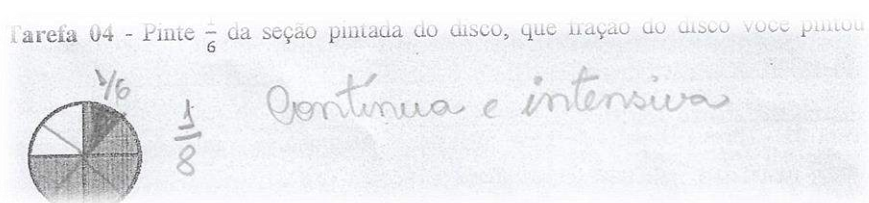
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 142 - Resolução da atividade 02 tarefa 04

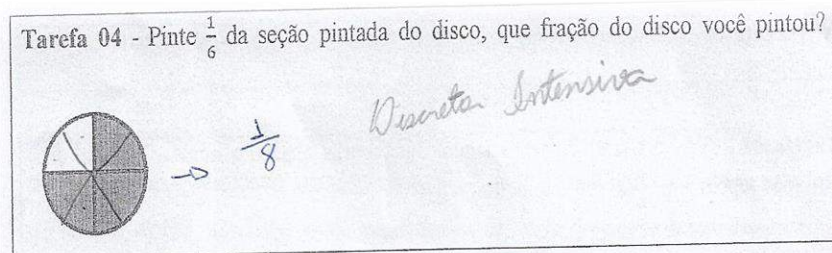


Fonte: Equipe 2 (2018).

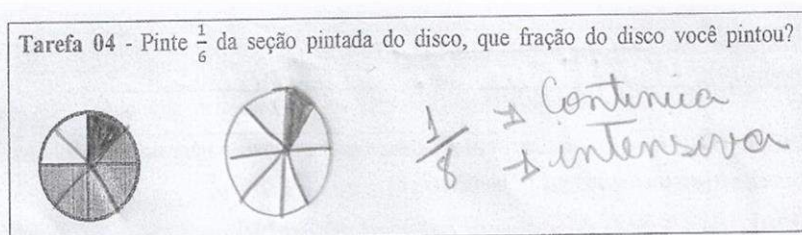
Figura 143- Resolução da atividade 02 tarefa 04



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 144 - Resolução da atividade 02 tarefa 04

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 145 - Resolução atividade 02 tarefa 04

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 05

A tarefa 05 envolve quantidades contínuas, com implicação de significado de fração operador multiplicativo, indicando tanto a parte relativa ($3/5$) como a parte absoluta (39) de um todo composto por líquido, cuja incógnita recai sobre a capacidade (absoluta) do recipiente. Os professores devem reconhecer que uma parte ($1/5$) corresponde a 13 litros, e que ainda faltam $2/5$ para encher o recipiente. Essa não é uma tarefa fácil, especialmente porque requer que o sujeito reconheça que 39 corresponde a $3/5$ das partes do líquido, logo $39 : 3 = 13$, ou seja, que isso significa uma parte de cinco ($1/5 = 13$); mas ainda faltam duas das cinco parte para compor o todo ($2/5$). Logo são duas vezes o 13 ($2 \cdot 13 = 26$). Com isso, temos a quantidade da parte que faltava; logo, o todo é composto por cinco partes, o que resulta em $5 \cdot 13 = 65$. Um dos possíveis erros será dividir 39 por cinco encontrando 7,8 (que não corresponde a $\frac{1}{5}$ do recipiente – 13 litros). Os participantes podem também caracterizar incorretamente a questão como uma quantidade discreta.

Ao estruturar as análises, foram concebidas seis categorias, as quais estão em conexão com o propósito da tarefa. O Quadro 52 se refere à análise da atividade 02 tarefa 05 “características das quantidades”.

Quadro 52 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - características das quantidades

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	E1/E3/E4

Fonte: Elaboração da autora.

Todas as equipes responderam a tarefa e a maioria demonstrou domínio em relação ao significado de fração operador multiplicativo. Em relação à natureza das quantidades, 60% classificaram corretamente as quantidades.

A equipe 1 respondeu a questão corretamente encontrando a unidade (dividindo 39 litros pela quantidade utilizada do recipiente). Encontrado o valor da unidade, a equipe multiplicou o valor por cinco, que é o total da capacidade do recipiente, resultando em 65 litros. Também classificou corretamente a quantidade que é contínua, mas não fez conversão e tratamento.

A equipe 2 não classificou a questão quanto às quantidades. Verificou que 39 é 13×3 , ou seja, cada unidade é constituída de 13 litros. Como o todo é cinco, multiplicou a unidade (13 litros) por cinco e encontrou 65, que é a capacidade total do recipiente. A equipe não fez uso de conversão e tratamento.

A equipe 3 classificou corretamente a quantidade em contínua e extensiva. Encontrou uma parte do todo dividindo 39 (que corresponde a $\frac{3}{5}$ da capacidade total do recipiente por 3, que foi a quantidade utilizada do recipiente, encontrando 13 litros), em seguida multiplicou 13×5 e encontrou 65 litros, que é a capacidade total do recipiente. A equipe não fez uso de conversão e tratamento.

A equipe 4 classificou corretamente a quantidade como contínua e extensiva. Ao dividir 39 por 3, verificou quantos litros corresponde a uma parte do todo (13 litros), em seguida,

representou corretamente a capacidade utilizada do recipiente $\frac{3}{5} = 39$ litros e a fração correspondente ao que falta para preencher todo o recipiente $\frac{2}{5} = 26$. Foi retratado também o todo, que é a capacidade total do recipiente como $\frac{5}{5} = 65$ litros. Não fez uso de conversão e tratamento.

A equipe 5 classificou incorretamente a natureza das quantidades como discreta e intensiva. Além do mais, respondeu incorretamente a questão ao dividir 39 por cinco encontrando 7,8 (que não corresponde a $\frac{1}{5}$ do recipiente). As figuras 146 a 150 correspondem às resoluções das equipes E1, E2, E3, E4 e E5 respectivamente.

Figura 146 - Resolução da atividade 02 tarefa 05

Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

$$\begin{array}{r} 39 \overline{) 117} \\ \underline{39} \\ 39 \\ \underline{39} \\ 00 \end{array}$$

continua

$$13 \times 5 = 65 \text{ litros contínuos}$$

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 147 - Resolução da atividade 02 tarefa 05

Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

65 litros

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \\ \hline 65 \end{array}$$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 148 - Resolução da atividade 02 tarefa 05

Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

$$\begin{array}{r} 39 \overline{) 117} \\ \underline{39} \\ 00 \end{array}$$

$$13 \times 5 = 65 \text{ l}$$

continua e extensiva

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 149 - Resolução da atividade 02 tarefa 05

Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

$\frac{3}{5} = 39$ 65 litros contínua e extensiva

$\frac{2}{5} = 26$ $\frac{5}{5} = 65$ litros

Extensiva: baseia no princípio aditivo

Intensiva: no princípio de multiplicação

39 | 3
 . 29 13
 (0)

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 150 - Resolução da atividade 02 tarefa 05

Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

$\frac{3}{5}$ de 39 = 23,400 → discreta

→ extensiva

39 (5)
 - 35 7,8
 04 × 3
 23,4

Fonte: Equipe 5 (2018).

Considerações sobre “Natureza das quantidades”

Após a leitura do texto norteador solicitou-se a definição de quantidades contínuas, discretas, intensivas e extensivas. Apenas três equipes registram suas definições e, destas, duas elucidaram claramente. Ficou evidente que alguns cursistas ainda não conseguem defini-las.

Em algumas tarefas em que se solicitou a definição, classificação e distinção da natureza das quantidades, os professores participantes da pesquisa tiveram dificuldades. Conseguiram responder corretamente tarefas envolvendo esse conhecimento, mas possuem dificuldades em defini-las, classificá-las e diferenciá-las.

Nas cinco tarefas da atividade 01 “natureza das quantidades”, as equipes resolveram corretamente os problemas propostos, mas algumas não conseguiram classificá-las corretamente quanto à natureza das quantidades. Na tarefa 01, que envolve o significado de fração parte/todo e quantidade discreta, todas as equipes responderam corretamente à questão, porém nenhuma conseguiu classificar corretamente quanto à natureza das quantidades (discreta, extensiva, contínua, intensiva). Na tarefa dois, inserida no significado parte/todo e natureza das

quantidades contínua, apenas duas equipes classificaram a questão corretamente. Das cinco equipes, quatro fizeram conversão (DUVAL, 2009).

Na tarefa 03, os cursistas deveriam perceber a figura considerando suas partes (frações), e apresentar as respostas em porcentagem; todas as equipes responderam corretamente à questão, mas somente uma classificou corretamente quanto à natureza das quantidades.

A tarefa 04 englobou os significados parte/todo e operador multiplicativo, e foi preciso informar a fração correspondente a $\frac{1}{6}$ da seção pintada. Todas as equipes responderam corretamente, mas nenhuma classificou corretamente quanto à natureza das quantidades. Todas converteram do registro geométrico para o fracionário, nenhuma realizou tratamento (DUVAL, 2009). Na tarefa 05, que tratava do significado operador multiplicativo e quantidade contínua, das cinco equipes, três classificaram corretamente quanto a natureza das quantidades. Fica evidente que as equipes já apresentam facilidade em resolver os problemas propostos, bem como realizar conversão, mas possuem dificuldades na classificação das quantidades (contínua, discreta, intensiva e extensiva).

Registros de representação semiótica

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam que o conceito de fração comporta diferentes registros de representação semiótica.

Atividade 01 - Concebendo os diferentes registros de representação semiótica

Análise tarefa 01 – Leitura do texto Registro de representação semiótica

Possivelmente, na leitura do texto, os participantes encontrarão termos/conceitos com os quais não estão familiarizados, o que certamente demandará que os formadores contribuam para o processo de compreensão a fim de facilitar a resolução das atividades. Os formadores devem dar atenção especial para que os professores compreendam o que significam as representações mentais, computacionais e semióticas; que a conversão implica na passagem de um registro de representação semiótica para outro também semiótico; que o tratamento é uma transformação interna a um registro semiótico; e que é necessária a utilização de diferentes registros de representação semiótica para que ocorra a aprendizagem.

Tendo clareza disso, certamente os professores não apresentarão dificuldades em responder as tarefas demandadas.

Análise tarefa 02

A atividade é simples: diferenciar conversão de tratamento. Acredita-se que os participantes não terão dificuldades, visto que o texto-referência é claro em diferenciar os dois termos. Um dos possíveis erros é a indicação de tratamento como conversão e de conversão como tratamento.

Para a análise dessa tarefa, criamos sete categorias, apresentadas no Quadro 53, a seguir.

Quadro 53 - Categorias de análise da atividade 01 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E3
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E3
Definiu conversão. (DC)	E1/E3
Definiu tratamento. (DT)	E3
Exemplificou conversão. (EC)	E3
Exemplificou tratamento. (ET)	E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E2/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

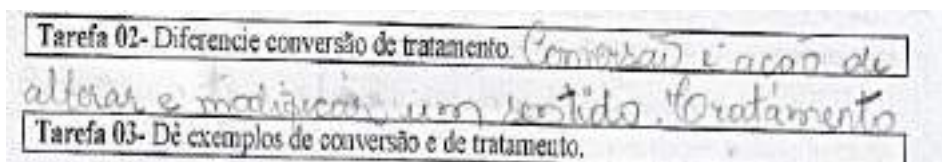
Apenas as equipes 1 e 3 responderam a tarefa. A E1 não exemplificou conversão e tratamento. A E3 fez uso de mais de dois registros de representação, exemplificou conversão e tratamento e definiu corretamente, segundo Duval (2009). Ficou evidente que essas equipes deram atenção à conversão e ao tratamento, embora apresentem dificuldades em definir os conceitos relacionados.

A equipe 1 definiu conversão como “ação de alterar e modificar um sentido”, o que está correto, uma vez que a conversão envolve mudar um registro e conseqüentemente seu sentido. Mas a equipe não definiu tratamento.

A equipe 3 definiu conversão como “quando muda de sistema” e tratamento “no mesmo sistema”, o que está correto segundo Duval (2009). A equipe exemplificou conversão e tratamento. Fez uso de registros natural, geométrico, fracionário, decimal e percentual.

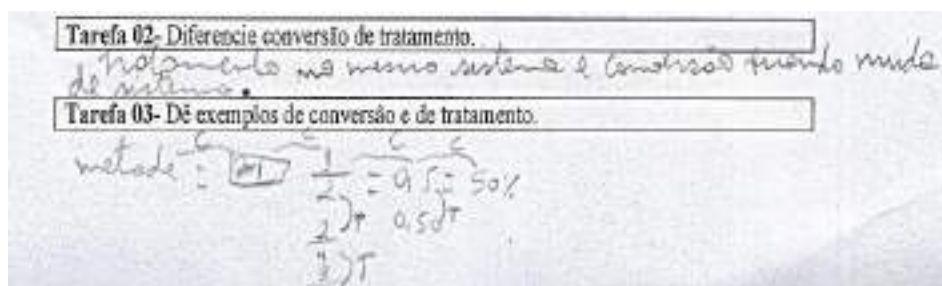
As demais equipes, 2, 4 e 5, não responderam a tarefa. As figuras 151 e 152 revelam as respostas das equipes E1 e E3, respectivamente.

Figura 151 - Resolução da atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 152 - Resolução da atividade 01 tarefa 02



Fonte: Equipe 3 (2018).

Análise da tarefa 03

A atividade visa exemplificar conversão e tratamento, o que provavelmente não revelará dificuldades, visto que o texto é claro em diferenciar os dois conceitos.

Conforme demonstrado nas figuras anteriores, apenas a equipe 3 exemplificou conversão e tratamento.

Análise da tarefa 04

Durante todo o desenrolar da formação continuada, os formadores ensinaram a utilizar os diferentes registros de representação semiótica. Embora a parte teórica tenha sido explanada nessa etapa, a parte prática já estava sendo ensinada e trabalhada desde as primeiras tarefas da sequência didática. Portanto, os integrantes não deverão apresentar dificuldades em utilizar os diferentes registros de representação semiótica, mas devem ter atenção durante os cálculos.

Uma das formas de proceder:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \color{red}{\blacksquare} & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \frac{25}{100} = 0,25 = 25\% =$$

Para analisar o desempenho das equipes na atividade 01 tarefa 04 “representação semiótica”, foram criadas cinco categorias de análise, as quais aparecem no Quadro 54.

Quadro 54 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 04 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

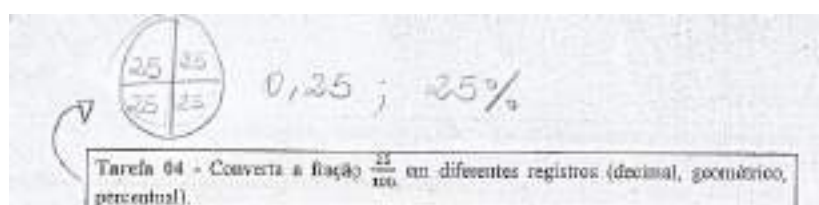
As equipes, com exceção da 4, responderam a tarefa corretamente. Fizeram uso de conversão e utilizaram mais de dois registros de representação (DUVAL, 2009). Somente a equipe 5 fez uso de tratamento. Fica manifesta a contribuição da formação com subsídio da sequência didática, dado que esses professores conseguem representar uma fração de várias formas (utilizando diferentes registros), o que a maioria não conseguia fazer por ocasião do início da pesquisa, ou seja no período da sondagem.

As equipes 1 e 2 responderam corretamente a atividade e fizeram uso dos registros geométrico, decimal e percentual, mas não fizeram uso de tratamento.

A equipe 3 respondeu a tarefa corretamente e fez uso dos registros decimal, fracionário, percentual e geométrico. Mas não fez uso de tratamento.

A equipe 4 converteu incorretamente do registro decimal ao percentual, afirmando que $0,025 = 25\%$. Mas fez a conversão correta da fração $\frac{1}{4}$ para decimal = 0,25 e incorreta do registro geométrico para o fracionário. A equipe não fez uso de tratamento.


Por fim, a E5 respondeu corretamente a tarefa e fez uso dos registros geométrico, decimal, fracionário e percentual, bem como de tratamento ao transformar a fração $\frac{25}{100}$ em $\frac{50}{200}$. As figuras 153 a 157 são concernentes às resoluções das equipes E1, E2, E3, E4 e E5, nessa ordem.

Figura 153- Resolução da atividade 01 tarefa 04

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 154 - Resolução da atividade 01 tarefa 04

Tarefa 04 - Converta a fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual).


0,25 \rightarrow  \rightarrow 25%

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 155 - Resolução da atividade 01 tarefa 04

$\frac{250}{100} = 2,5$
 $\frac{200}{100} = 2$
 $\frac{50}{100} = 0,5$
 $2 + 0,5 = 2,5$

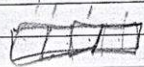
Tarefa 04 - Converta a fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual).

0,25 

Fonte: Equipe 3 (2018).

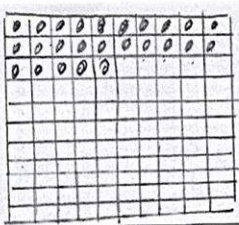
Figura 156 - Resolução da atividade 01 tarefa 04

Tarefa 04 - Converta a fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual). $0,025 = 25\%$

Tarefa 05 - Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100}$.  $\frac{1}{4} = 0,25$

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 157 - Resolução da atividade 01 tarefa 04

T.04 

$+05 - \frac{25 \times 2}{100} = \frac{50}{200}$

$\frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$

Tarefa 04 - Converta a fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual)

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 05

Uma das formas de resolver seria dividir numerador e denominador por um mesmo fator comum até encontrar uma fração irredutível. Nessa mesma perspectiva, poderia multiplicar numerador e denominador por um número natural diferente de zero e encontrar muitas outras frações equivalentes. Por exemplo: dividindo numerador e denominador por 25: $\frac{25:25}{100:25} = \frac{1}{4}$. Outra fração equivalente é: $\frac{25*2}{100*2} = \frac{50}{200}$. Um dos possíveis erros será a simplificação do numerador e denominador por um número que não seja múltiplo/divisível de forma exata do numerador e denominador.

Criaram-se cinco categorias de análise dessa tarefa, conforme a estrutura da tarefa demandou. O Quadro 55 mostra uma análise da atividade 01 tarefa 05 “registro de representação semiótica”.

Quadro 55 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 05 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/ E2/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E4
Fez uso de tratamento. (FUT)	E1/E2/E3/E5

Fonte: Elaboração da autora.

Quatro das cinco equipes conseguiram responder corretamente a tarefa. A equipe 1 respondeu corretamente, em vista de multiplicar a fração por um mesmo fator comum $\frac{25 \times 3}{100 \times 3} = \frac{75}{300}$. A equipe 2 fez uso de tratamento ao representar $\frac{25}{100} = \frac{50}{200} = \frac{100}{400} = \frac{200}{800}$, mas errou ao registrar que a fração $\frac{2}{8}$ é equivalente a $\frac{3}{12} = \frac{4}{12}$.

A equipe 3 respondeu corretamente, fazendo uso de tratamento, mas não de conversão. A equipe 4 fez uso de conversão, mas não realizou o solicitado, que é encontrar frações equivalentes. A equipe 5 fez uso de tratamento e representou apenas uma fração equivalente a $\frac{25}{100} = \frac{50}{100}$.


As figuras 158 a 162 são concernentes às resoluções das equipes E1, E2, E3, E4 e E5, nessa ordem.

Figura 158 - Resolução da atividade 01 tarefa 05

Tarefa 05- Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100} \cdot \frac{3}{3} = \frac{75}{300}$

Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 159 - Resolução da atividade 01 tarefa 05

0,25 \rightarrow  \rightarrow 25%
Tarefa 05- Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100} \rightarrow \frac{25 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{50}{200}$
 $\frac{25 \cdot 3}{100 \cdot 3} = \frac{75}{300}$
 $\frac{25 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{100}{400}$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 160 - Resolução da atividade 01 tarefa 05

Tarefa 05- Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{20} \div \frac{5}{5} = \frac{1}{4}$

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 161 - Resolução da atividade 01 tarefa 05

Tarefa 05- Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100}$  $\frac{1}{4} = 0,25$

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 162- Resolução da atividade 01 tarefa 05

Tarefa 05- Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100} \cdot \frac{2}{2} = \frac{50}{200}$

Fonte: Equipe 5 (2018).

Atividade 02 - Atividades envolvendo registros de representação semiótica

Muitas das tarefas integraram a Prova Brasil e se revestem de importância singular no processo de ensino e aprendizagem, especialmente porque tratam e/ou figuram situações implicadas em nosso dia a dia e, normalmente, despertam interesse das crianças. As questões requerem o reconhecimento e a utilização de diferentes registros de representação semiótica, a fim de encontrar respostas ao que está sendo solicitado. Outro aspecto importante é o fato de levar os professores a entender que a porcentagem pode ser vista como uma fração cujo denominador é 100.

Embora aparentemente o conteúdo seja simples, para muitos professores ele se configura em obstáculos. Daí a necessidade de possibilitar o desenvolvimento de atividades que exijam a mobilização de diferentes registros de representação semiótica.

Análise da tarefa 01

Os cursistas devem fazer uso dos diferentes registros de representação na atividade 02 tarefas 01, 02 e 03, referentes ao texto “natureza das quantidades”. Acredita-se que não apresentem dificuldades.

O Quadro 56 explicita, por meio de cinco categorias, a análise da atividade 02 tarefa 01 “registro de representação semiótica”.

Quadro 56 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E2/E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E4/E5
Fez conversão.	E1/E2/E3
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

Somente as equipes 1, 2 e 3 responderam a tarefa na qual fizeram uso dos diferentes registros ao representar as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

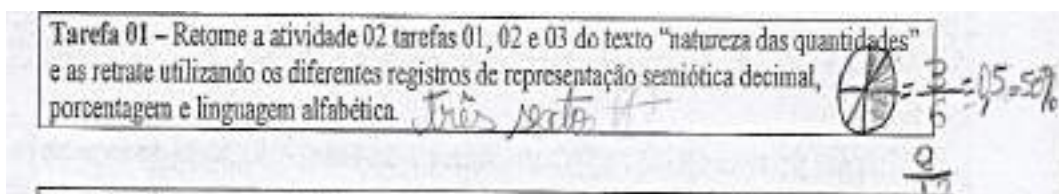
A equipe 1, talvez por falta de atenção, não respondeu a tarefa solicitada corretamente. A equipe fez conversão utilizando vários registros, mas não fizeram referência a nenhuma das três tarefas solicitadas.

A equipe 2 respondeu a tarefa corretamente e utilizou os registros natural, decimal e percentual para representar $\frac{2}{3}$ (tarefa 1 “natureza das quantidades”). Na representação de metade e um quarto (tarefas 02 e 03, respectivamente, referentes ao texto “natureza das quantidades”), foram utilizados os registros natural, decimal e percentual.

A equipe três representou corretamente com diferentes registros as tarefas 01 e 03 (natureza das quantidades). Referindo-se à tarefa 02 (natureza das quantidades), eles escreveram: “metade; um quarto; 50%; 25%; 0,5; 0,25”.

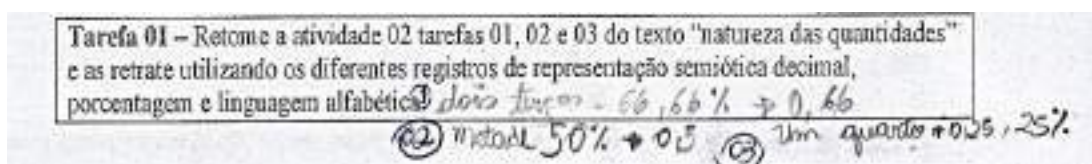
Os dados supracitados ficam evidentes nas figuras 163 a 165, referentes às resoluções das equipes 1 a 3 respectivamente.

Figura 163 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



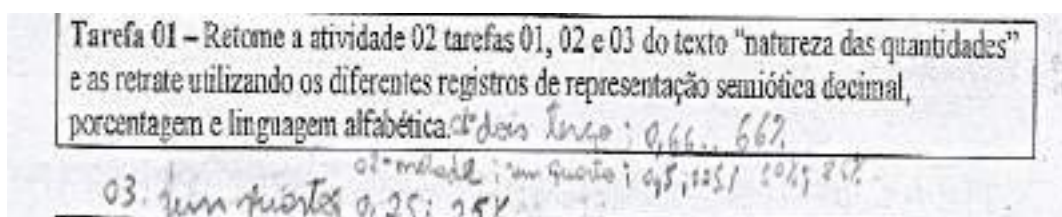
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 164 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 165 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 3 (2018).

Análise da tarefa 02

Uma das formas de proceder será utilizando o raciocínio da relação parte/todo, considerando cinco como o todo (100%) e três como partes do todo, o que corresponde a 60%.

Para a análise dessa tarefa, foram definidas cinco categorias que explicitam as equipes que responderam a tarefa, fizeram isso corretamente, usaram conversão e tratamento ou que não responderam. O Quadro 57 exibe a análise da atividade 02 tarefa 02 “registro de representação semiótica”.

Quadro 57 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - registro de representação semiótica

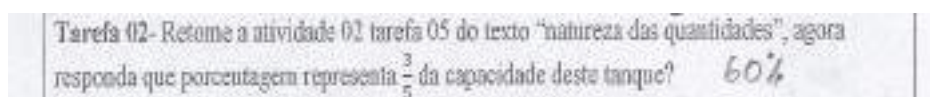
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E2/E3/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E2/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E1/E4
Fez conversão.	E3
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1 e 4 não responderam a tarefa. As E2 e E5 responderam corretamente, mas não fizeram uso de tratamento e conversão. A equipe 3 respondeu corretamente e fez uso de conversão ao transitar entre dois registros: o fracionário e o percentual. Mas não realizou tratamento (DUVAL, 2009).

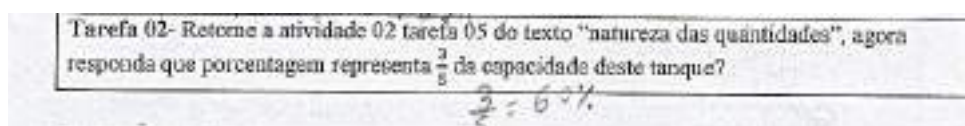
As figuras 166 a 168 exibem as respostas das equipes 2, 3 e 5, nessa ordem.

Figura 166 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

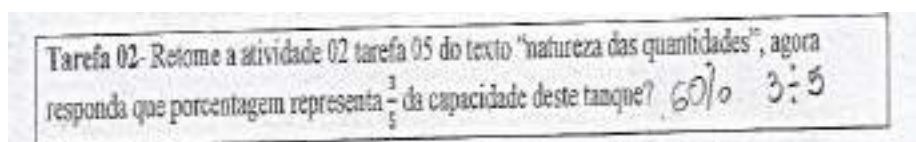


Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 167 - Resolução da atividade 02 tarefa 02



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 168 - Resolução da atividade 02 tarefa 02

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 03

Essa questão da Prova Brasil envolve o significado de fração parte/todo. Uma das formas de resolver seria considerar o todo como as quinze bolinhas e as partes do todo as seis bolinhas; logo, a fração que corresponde ao total de bolinhas que o irmão de Paulo ganhou é: $\frac{6}{15}$. Considera-se que os participantes não apresentarão dificuldades quanto a esse tipo de significado de fração, mas devem tomar cuidado para não confundir o todo com partes do todo e inverter a fração, ficando $\frac{15}{6}$. Um possível embaraço seria indicar a fração de bolinhas que o irmão de Paulo ganhou como $\frac{9}{15}$, que é a quantidade de bolinhas que ficaram com Paulo.

O Quadro 58 apresenta sete categorias de análise referentes à atividade 02 tarefa 03 “registro de representação semiótica”.

Quadro 58 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Utilizou um registro de representação. (U1R)	----
Utilizou dois ou mais registros de representação. (U2R)	E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

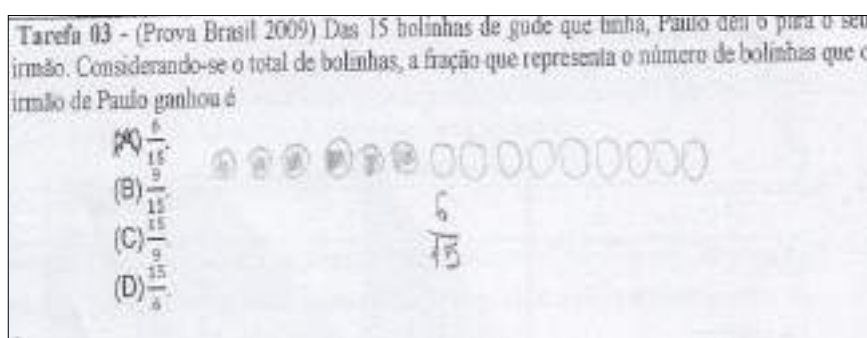
As equipes participaram dessa tarefa e houve um aproveitamento de 100%, uma vez que todas acertaram a questão. A maioria dos professores e estudantes possuem maior facilidade

com questões de frações envolvendo significado parte/todo (CANOVA, 2006; MERLINI, 2005; SILVA, 2005).

As equipes 1, 2, 3 e 4 responderam a tarefa corretamente, mas não fizeram uso de um ou mais registros de representação. Também não houve evidência de tratamento (DUVAL, 2009).

A equipe 5 fez uso de conversão ao transitar do registro fracionário para o geométrico, mas não realizou tratamento. A figura 169 mostra o desempenho da equipe 5.

Figura 169 - Resolução da atividade 02 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 04

Esse problema da Prova Brasil exige dos participantes conhecimento dos diferentes registros de representação semiótica. Percebe-se, assim, que as provas externas cobram o conhecimento dos diferentes registros, mas muitas vezes conversões e tratamentos não são ensinados aos estudantes. É preciso que os professores reflitam em como estão ensinando e comecem a instruir utilizando os diferentes registros (DUVAL, 2009).

No que diz respeito à resolução da questão, uma das formas de resolver seria analisando cada alternativa e, de forma clara, percebe-se que a letra “a” é a correta, dado que $\frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$.

Tendo em vista a estrutura da tarefa, foram estabelecidos apenas três critérios de análise, os quais revelam quais equipes responderam a tarefa, quais fizeram isso corretamente e quais não fizeram. O Quadro 59 mostra a análise da atividade 02 tarefa 04 “registro de representação semiótica”.

Quadro 59 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RCT)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam à questão corretamente. Ficou evidente que a formação contribuiu amplamente para o conhecimento dos participantes da pesquisa em relação a fração, uma vez que todos responderam corretamente essa tarefa. Inicialmente, na sondagem, a maioria dos professores não sabiam representar uma fração de diferentes formas, mas essas tarefas revelam que agora eles são capazes de responder corretamente questões que envolvem o uso de diferentes registros e até mesmo representar uma fração em suas diferentes formas (tratamento) e representações (conversão).

Análise da tarefa 05

Essa tarefa exige o conhecimento de fração em seu significado operador multiplicativo (MERLINI, 2005), bem como o de porcentagem. Compreende-se que porcentagem é uma fração centesimal. Assim, uma das formas de resolver seria calculando quanto representa 10% de 60 = $\frac{10}{100} \cdot 60 = 6$. Assim, seis alunos praticam vôlei como esporte. Alguns podem se embarçar e calcular 10% de 100, o que corresponde a 10 alunos, e errar a questão.

Cinco categorias de análise foram estabelecidas para aferir o desempenho das equipes nessa tarefa. O Quadro 60 exibe a análise da atividade 02 tarefa 05 “registro de representação semiótica”.

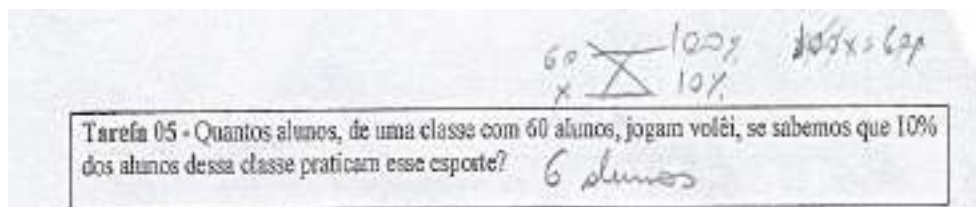
Quadro 60 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

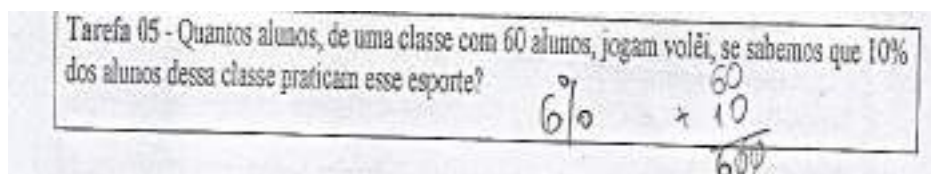
As equipes responderam a questão e quatro delas (E1, E2, E3 e E4) o fizeram corretamente. A equipe 3 utilizou regra de três na resolução da questão. Já a 5 respondeu incorretamente ao representar 10% de 60 como 6%. As figuras 170 e 171 revelam esses dados, referentes às equipes 3 e 5 respectivamente.

Figura 170 - Resolução da atividade 02 tarefa 05



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 171 - Resolução da atividade 02 tarefa 05



Fonte: Equipe 5 (2018).

Nenhuma equipe fez tratamento e conversão. Mesmo a equipe 5 não respondendo corretamente, fica evidente um avanço dos sujeitos participantes da pesquisa, dado que, na sondagem, quase nenhum professor conseguiu responder corretamente questões envolvendo porcentagem (BARROS 2018). Nessa etapa da sequência didática, porém, já é possível observar uma ampliação do conhecimento de frações e de porcentagem, visto que a maioria respondeu corretamente a tarefa.

Análise da tarefa 06

A tarefa envolve conhecimento de porcentagem e significado parte/todo. Como 13 é 50% (metade), a turma inteira tem vinte e seis alunos (todo, 100%). Logo, a alternativa correta é a letra “b”.

Foram criadas cinco categorias de análise para essa tarefa, conforme se observa no Quadro 61, relacionado à atividade 02 tarefa 06 “registro de representação semiótica”.

Quadro 61 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 06 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Fez uso de tratamento. (FUT)	-----
Fez uso de conversão. (FUC)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam à tarefa corretamente, contudo nenhuma fez uso de tratamento e conversão. Assim, fica evidente que os sujeitos participantes da pesquisa expandiram seu conhecimento de porcentagem.

Análise da tarefa 07

Essa tarefa exige o conhecimento do significado parte/todo e de frações equivalentes. Uma das formas de resolver seria encontrando frações equivalentes a:

$$\frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{9 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{6}{24}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$$

$$\frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{12}{18}$$

$$\frac{4 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{16}{24}$$

Os que se encontram no mesmo ponto são João e Pedro. Portanto, a alternativa correta é a letra “a”.

Para essa tarefa, foram definidas seis categorias de análise, que incluem a observação do método usado para resolver a questão. Procurou-se verificar se as equipes utilizaram o método de frações equivalentes, o método do mínimo múltiplo comum ou um método diferente desses. O Quadro 62 refere-se à análise da atividade 02 tarefa 07 “registro de representação semiótica”.

Quadro 62 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 07 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Resolveu utilizando frações equivalentes. (RUFE)	E2/E3
Resolveu pelo método do MMC (mínimo múltiplo comum). MMC	-----
Utilizou um método diferente dos dois acima citados. (MD)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

A equipe 1 respondeu corretamente, mas não registrou sua sistemática. As equipes 2 e 3 utilizaram o método das frações equivalentes. A equipe 4 não respondeu corretamente a tarefa, dado que respondeu que João e Maria se encontram no mesmo ponto. A equipe 5 converteu as frações para o registro decimal e verificou que João e Pedro se encontraram no mesmo caminho. As figuras 172 a 175 exibem as resoluções das equipes 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Figura 172 - Resolução da atividade 02 tarefa 07

Tarefa 07 - (Prova Brasil 2009) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$, Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria $\frac{4}{6}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
(B) João e Ana.
(C) Ana e Maria.
(D) Pedro e Ana.

João $\frac{6 \div 2}{8} = \frac{3}{4}$

Pedro $\frac{9 \div 3}{12} = \frac{3}{4}$

Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 173 - Resolução da atividade 02 tarefa 07

Tarefa 07 - (Prova Brasil 2009) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria $\frac{4}{6}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
 (B) João e Ana.
 (C) Ana e Maria.
 (D) Pedro e Ana.

Handwritten solution showing fraction conversions and comparisons:

$\frac{6}{8} J$; $\frac{9}{12} P$; $A \frac{3}{8}$; $M \frac{4}{6}$

$J \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$; $P \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$; $A \frac{3}{8}$; $M \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$

Vertical fraction comparisons:

$$\begin{array}{r} 60 \\ -50 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ -20 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 174 - Resolução da atividade 02 tarefa 07

Tarefa 07 - (Prova Brasil 2009) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria $\frac{4}{6}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
 (B) João e Ana.
 (C) Ana e Maria.
 (D) Pedro e Ana.

Handwritten solution showing a number line diagram with tick marks and labels for João and Maria.

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 175 - Resolução da atividade 02 tarefa 07

Tarefa 07 - (Prova Brasil 2009) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria $\frac{4}{6}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
 (B) João e Ana.
 (C) Ana e Maria.
 (D) Pedro e Ana.

Handwritten solution with annotations:

$\frac{6}{8} = 0,75$; $\frac{9}{12} = 0,75$; $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{4}{6} = 0,66$

Selected answer (A) João e Pedro.

Fonte: Equipe 5 (2018).

Das cinco equipes que responderam a tarefa, quatro responderam corretamente. Isso mostra que os sujeitos da pesquisa ampliaram o conhecimento quanto às frações equivalentes, uma vez que foi evidenciada grande dificuldade com esse assunto na sondagem (BARROS, 2018). Nessa etapa da sequência didática, contudo, a situação se inverteu e os professores demonstram domínio desse conhecimento.

Análise da tarefa 08

A tarefa envolve o significado de fração operador multiplicativo, o que também pode ser relacionado com o significado de fração parte/todo. Sabendo que 45 km é o todo (percurso total), se ele já percorreu $\frac{1}{3}$ isso significa que andou 15 km. Uma outra forma de resolver seria: $\frac{1}{3} \cdot 45 = \frac{45}{3} = 15$. Acredita-se que os participantes não apresentarão dificuldades na sua resolução.

Com base na estrutura e no escopo da tarefa, definiram-se sete categorias de análise, que incluem os métodos utilizados em sua resolução. O Quadro 63 refere-se à análise da atividade 02 tarefa 08 “registro de representação semiótica”.

Quadro 63 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 08 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Resolveu utilizando o significado operador multiplicativo. (SOM)	E2/E3
Resolveu utilizando o significado parte todo. (SPT)	E3
Representou com um ou mais registros de representação semiótica. (RURRS)	E3
Resolveu por outros métodos. (OM)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam a tarefa corretamente. As E1 e E4 não registraram o modo como chegaram à resolução. A E2 utilizou o significado operador multiplicativo ao resolver a tarefa, dado que encontrou o operador dividindo quarenta e cinco por três e verificou que quinze é a parte que foi percorrida. Tais dados podem ser verificados nas figuras 176 a 178.

Figura 176 - Resolução da atividade 02 tarefa 08

Fonte: Equipe 2 (2018).

A equipe 3 utilizou o significado parte/todo na resolução e utilizou o registro de representação geométrico para representar a fração $\frac{1}{3}$.

Figura 177 - Resolução da atividade 02 tarefa 08

Tarefa 08 - (Prova Brasil 2009) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

(A) 9 km
(B) 10 km
(C) 12 km
(D) 15 km

The image shows handwritten work for the problem. On the left, the options are listed with (D) circled. In the center, there is a vertical division: 45 divided by 3 equals 15 km. To the right, there is a box containing the number 15, with another 15 written below it, and a fraction $\frac{1}{3}$ written below the box.

Fonte: Equipe 3 (2018).

A equipe 5 utilizou outro método, conforme figura 178.

Figura 178 - Resolução da atividade 02 tarefa 08

Tarefa 08 - (Prova Brasil 2009) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ deste percurso. Isso significa que ele já percorreu:

(A) 9 km
(B) 10 km
(C) 12 km
(D) 15 km

The image shows handwritten work for the problem. On the left, the options are listed with (D) circled. In the center, there is a calculation: $\frac{1}{3}$ de 45, followed by $45 \cdot \frac{1}{3} = 15$ and $15 \times 1 = 15$.

Fonte: Equipe 5 (2018).

Fica notório o avanço dos professores participantes da pesquisa em relação ao significado de fração operador multiplicativo, visto que, na sondagem (BARROS, 2018), a maioria não conseguia resolver problemas envolvendo esse significado. Na devolutiva da sondagem, muitos agradeceram pelos conhecimentos proporcionados, os quais envolviam os cinco significados de fração, comparação de fração, equivalência e os diferentes registros de representação semiótica.

Análise da tarefa 09

A tarefa se baseia no conceito de fração com o significado operador multiplicativo. Sabendo que um quilo tem 1000 gramas: $\frac{1}{4} * 1000 = \frac{1000}{4} = 250$ gramas. Logo, a alternativa correta é a letra “b”.

Quatro categorias de análise foram utilizadas para avaliar o desempenho das equipes nessa tarefa. O Quadro 64 faz referência à análise da atividade 02 tarefa 09 “registro de representação semiótica”.

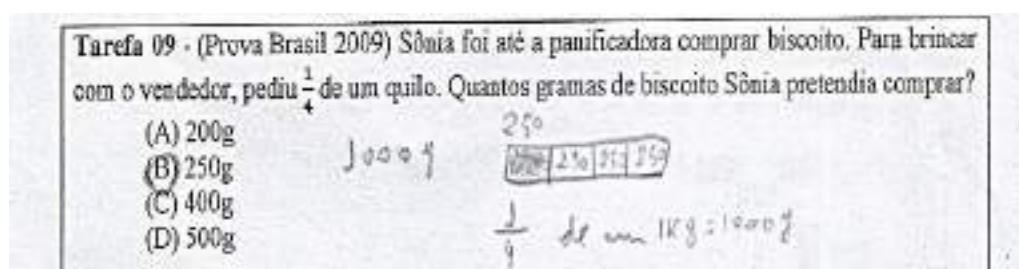
Quadro 64 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 09 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Representou com um ou mais registros de representação semiótica. (RURRS)	E3

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam a questão corretamente, mas as equipes 1, 2, 4 e 5 não colocaram por escrito o modo como chegaram às resoluções; apenas marcaram a alternativa correta. A equipe 3 fez uso de conversão e representou a fração $\frac{1}{4}$ utilizando o registro geométrico. A figura 179 comprova o modo como a equipe 3 realizou a resolução do exercício.

Figura 179- Resolução da atividade 02 tarefa 09



Fonte: Equipe 3 (2018).

Análise da tarefa 10

A tarefa insere-se no significado operador multiplicativo, porcentagem, e pode ser relacionada com o significado parte/todo também. Sabendo que $50\% = \frac{1}{2} = 0,5$ que é a metade, logo foram vendidos 60 ingressos, resposta correta letra “d”. Um dos possíveis erros seria considerar que 120 correspondem a 50% das cadeiras e incorretamente responder que 240 seria o total de cadeiras.

O Quadro 65 evidencia a análise da atividade 02 tarefa 10 “registro de representação semiótica”, para a qual foram definidas quatro categorias.

Quadro 65 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 10 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Representou com um ou mais registros de representação semiótica. (RURRS)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes participaram dessa tarefa e a realizaram corretamente. Três delas (1, 2 e 4) não registraram como chegaram à resposta. A E5 resolveu a questão utilizando o significado operador multiplicativo. Nenhuma representou com um ou mais registros de representação semiótica. As figuras 180 e 181 exibem a resolução das equipes 3 e 5, respectivamente.

Figura 180 - Resolução da atividade 02 tarefa 10

Tarefa 10 - (Prova Brasil 2009) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

(A) 30
(B) 40
(C) 50
(D) 60

$120 : 2 = 60$

Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 181 - Resolução da atividade 02 tarefa 10

Tarefa 10 - (Prova Brasil 2009) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

(A) 30
(B) 40
(C) 50
(D) 60

$\frac{50}{100} \cdot 120 =$
 6000
 100

Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 11

Envolve o significado operador multiplicativo, parte/todo e também o conhecimento de porcentagem. Sabendo que $25\% = \frac{1}{4}$, logo $\frac{1}{4} \cdot 36 = \frac{36}{4} = 9$. Assim, nove alunos levaram doces, nove alunos levaram refrigerantes e os outros 18 levaram salgados. A porcentagem dos alunos que levaram refrigerantes e salgados foi 50% (salgados) + 25% (refrigerantes) = 75% , um total de 27 alunos. Assim, a resposta correta é a letra “c”.

Considerando o escopo da tarefa, foram estabelecidas quatro categorias de análise, as quais aparecem no Quadro 66, referente à análise da atividade 02 tarefa 11 “registro de representação semiótica”.

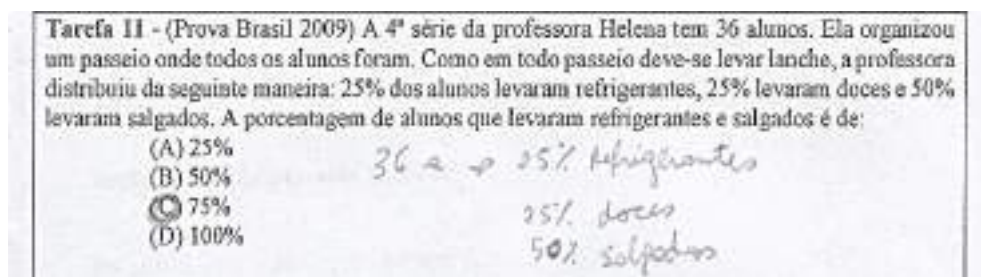
Quadro 66 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 11 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RCT)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Representou com um ou mais registros de representação semiótica. (RURRS)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

Somente a equipe 3 registrou como procedeu para chegar à resposta correta. A figura 182 evidencia a resolução dessa equipe.

Figura 182 - Resolução da atividade 02 tarefa 11



Fonte: Equipe 3 (2018).

Análise da tarefa 12

É preciso saber utilizar os diferentes registros de representação semiótica e identificar se o problema envolve uma quantidade contínua ou discreta, considerando a natureza das

quantidades. O desenho pode ser considerado como seis triângulos em que quatro foram pintados = $\frac{4}{6}$, ou pode ser considerado como três quadrados em que dois foram pintados = $\frac{2}{3}$. Em linguagem natural: dois terços; em fração: $\frac{2}{3}$, em decimal: 0,666, em porcentagem: 66,66%. Pode acontecer de alguns participantes inverterem numerador e denominador; outro possível erro será considerar que a questão se insere na quantidade discreta ao pensar que se compara triângulo com triângulo (parte/todo) ou quadrado com quadrado, mas é um pensamento incorreto. A quantidade contínua caracteriza essa tarefa (mesmo que as quantidades sejam divididas exaustivamente, elas mantêm as mesmas características iniciais. Em outras palavras, quando se toma um padrão e se compara esse mesmo padrão estamos tratando de quantidades contínuas).

Oito categorias de análise foram criadas para essa tarefa, buscando evidenciar quais equipes responderam a tarefa e fizeram isso corretamente, quais não responderam, bem como se fizeram uso de conversão e tratamento, se classificaram corretamente a questão quanto à natureza das quantidades e ainda se fizeram uso de um ou mais registros de representação. O Quadro 67 exibe a análise da atividade 02 tarefa 12 “registro de representação semiótica”.

Quadro 67 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 12 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RCT)	E4
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Utilizou um registro de representação. (U1R)	-----
Utilizou dois ou mais registros de representação. (U2R)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	E4
Classificou corretamente a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	E2/E3/E4

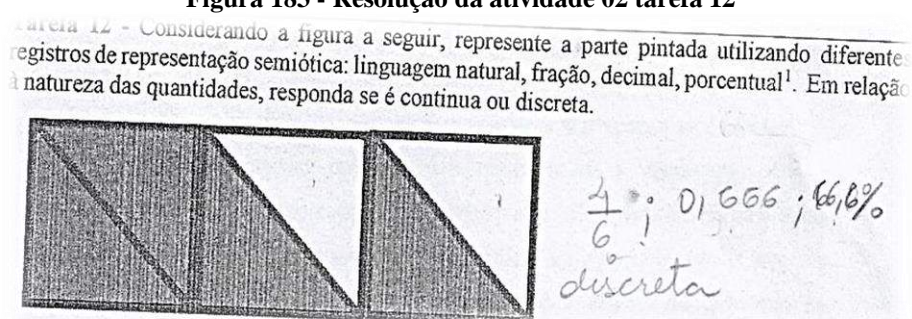
Fonte: Elaboração da autora.

A equipe 1 representou a parte pintada utilizando os registros fracionário, decimal e percentual, mas classificou erroneamente a natureza das quantidades como discreta. A equipe 2 representou a quantidade pintada utilizando os registros natural, fracionário, decimal e percentual. A representação percentual foi realizada incorretamente, uma vez que deveria ser 66,6% e a equipe representou como 66,4%. A equipe classificou corretamente quanto à natureza

das quantidades. A equipe 3 representou a parte pintada da figura com os registros fracionário, decimal, natural e percentual. Porém, no percentual, fez incorretamente colocando 66% ao invés de 66,6%. Quanto à natureza das quantidades, classificou corretamente como contínua.

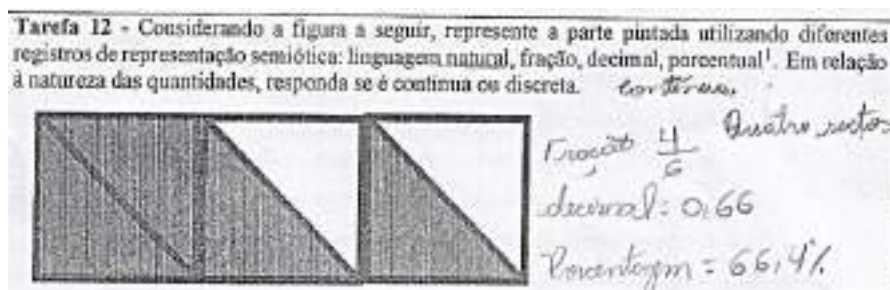
A equipe 4 registrou a parte pintada corretamente e utilizou os registros fracionário, decimal e percentual. Além do mais, fez uso de tratamento ao transitar da fração $\frac{4}{6}$ para $\frac{2}{3}$. A equipe também classificou corretamente quanto à natureza das quantidades. Por fim, a equipe 5 utilizou os registros fracionário, decimal e percentual na representação da parte pintada da figura. Assim como a equipe 3, essa equipe representou a parte percentual incorretamente, colocando 66% em vez de 66,66%. Quanto à classificação da natureza das quantidades, classificou corretamente como contínua e extensiva. As figuras 183 a 187 explicitam as resoluções das equipes 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente. Somente a equipe 4 respondeu corretamente toda a tarefa, representando 20% do total dos participantes.

Figura 183 - Resolução da atividade 02 tarefa 12



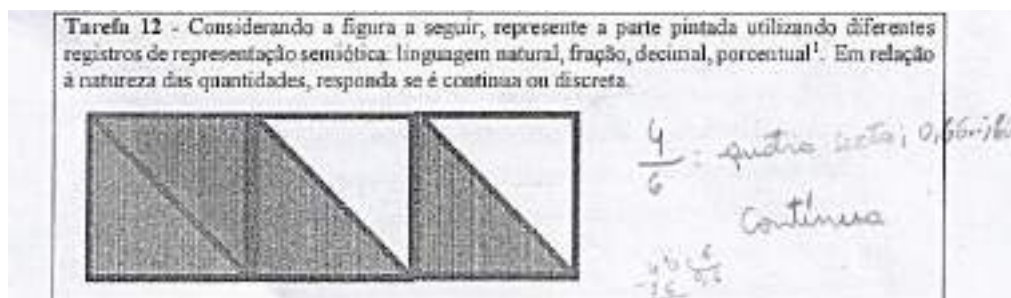
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 184 - Resolução da atividade 02 tarefa 12



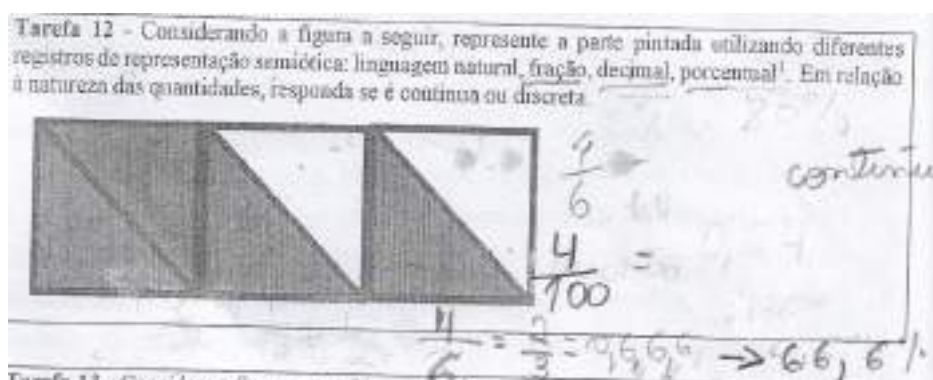
Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 185 - Resolução da atividade 02 tarefa 12



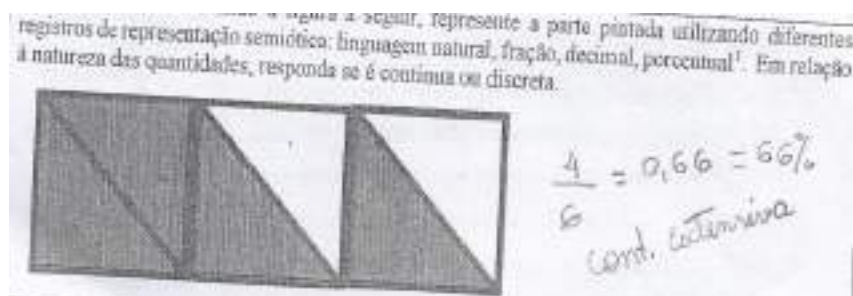
Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 186 - Resolução da atividade 02 tarefa 12



Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 187 - Resolução da atividade 02 tarefa 12



Fonte: Equipe 5 (2018).

Análise da tarefa 13

É preciso saber utilizar os diferentes registros de representação semiótica e identificar se o problema envolve uma quantidade contínua ou discreta. No caso dessa tarefa, a grandeza envolvida é a discreta. Como são cinco estrelas e três foram pintadas: $\frac{3}{5} = 0,6 = 60\% =$ três quintos. Alguns podem classificar erroneamente como uma quantidade contínua, outros podem

indicar a fração como $\frac{2}{5}$, o que também está correto, dado que não se indicou que deveria ser a fração de estrelinhas pintadas.

O Quadro 68 explicita oito categorias de análise da atividade 02 tarefa 13 “registro de representação semiótica”. Assim como na tarefa anterior, tais categorias visam revelar quais equipes responderam a tarefa e fizeram isso corretamente, quais não responderam, bem como se fizeram uso de conversão e tratamento, se classificaram corretamente a tarefa quanto à natureza das quantidades e ainda se fizeram uso de um ou mais registros de representação.

Quadro 68 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 13 - registro de representação semiótica

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RCT)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Utilizou um registro de representação. (UIR)	-----
Utilizou dois ou mais registros de representação. (U2R)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de conversão. (FUC)	E1/E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FUT)	----
Classificou a questão quanto à natureza das quantidades. (CCNQ)	E1/E3/E4

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes participaram da tarefa e utilizaram diferentes registros para representar a figura, que poderia ser interpretada como $\frac{3}{5}$ ou $\frac{2}{5}$, mas somente a equipe 3 teve essa percepção. As demais equipes entenderam como $\frac{3}{5}$. Todas as equipes responderam a tarefa corretamente.

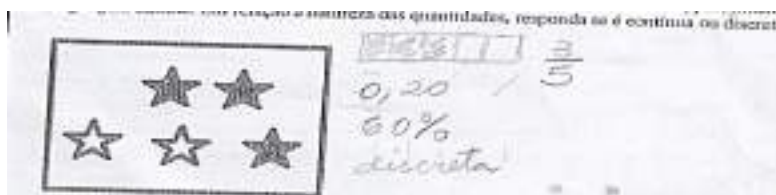
A E1 utilizou os registros geométrico, fracionário, decimal somente para a fração $\frac{2}{5}$ e percentual. A E2 fez uso dos registros geométrico, percentual, fracionário, decimal e natural. A E3 usou os registros geométrico, decimal, natural e percentual e a E4 utilizou os registros decimal, percentual, natural e fracionário. A E5 fez uso dos registros fracionário, decimal e percentual.

Três equipes (1, 3 e 4) classificaram corretamente quanto à natureza das quantidades, e as equipes 2 e 5 não fizeram a classificação. Duas (E1 e E5) não utilizaram o registro natural. A equipe 3 fez a representação semiótica em suas formas geométrica, percentual, decimal,

natural, tanto para a fração $\frac{3}{5}$ como para $\frac{2}{5}$. Essa equipe classificou corretamente quanto à natureza das quantidades. Segundo Merlini (2005, p. 119) “a quantidade discreta no significado parte/todo, normalmente, é pouco explorada nos livros didáticos”. Essa afirmação talvez explique o porquê de apenas três equipes classificarem a tarefa quanto à natureza das quantidades.

As figuras 188 a 192 são recortes das resoluções da tarefa 13 pelas equipes E1, E2, E3, E4 e E5, respectivamente.

Figura 188 - Resolução da atividade 02 tarefa 13



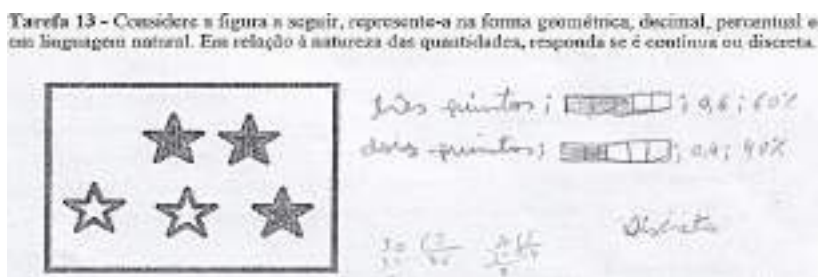
Fonte: Equipe 1 (2018).

Figura 189 - Resolução da atividade 02 tarefa 13



Fonte: Equipe 2 (2018).

Figura 190 - Resolução da atividade 02 tarefa 13



Fonte: Equipe 3 (2018).

Figura 191 - Resolução da atividade 02 tarefa 13

Tarefa 13 - Considere a figura a seguir, represente-a na forma geométrica, decimal, percentual e em linguagem natural. Em relação à natureza das quantidades, responda se é contínua ou discreta.

$\frac{3}{5} = 0,666... \rightarrow 66,6\%$

$\frac{3}{5} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$

discreta três quinto quinta parte

1 Ideia retirada de Santana (2012)

Fonte: Equipe 4 (2018).

Figura 192 - Resolução da atividade 02 tarefa 13

Tarefa 13 - Considere a figura a seguir, represente-a na forma geométrica, decimal, percentual e em linguagem natural. Em relação à natureza das quantidades, responda se é contínua ou discreta.

$\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$

$\frac{3}{5}$

Fonte: Equipe 5 (2018).

Considerações “registros de representação semiótica”

Após a leitura do texto norteador, as tarefas 02 e 03 demandavam diferenciar conversão de tratamento, e apenas as equipes 1 e 3 responderam a tarefa. A E1 não exemplificou conversão e tratamento, mas definiu conversão. A E3 exemplificou e definiu.

Nas tarefas envolvendo registros de representação semiótica, os professores demonstraram efetivo desempenho. Na tarefa 04, em que se solicitava a conversão da fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual), as equipes, com exceção da 4, responderam a tarefa corretamente, fizeram uso de conversão e utilizaram mais de dois registros de representação (DUVAL, 2009). Somente a equipe 5 fez uso de tratamento. Fica manifesta a contribuição da formação com subsídio da sequência didática, dado que esses professores conseguem representar uma fração de várias formas (utilizando diferentes registros), o que a maioria não conseguia fazer por ocasião do início da pesquisa, ou seja, no período da sondagem.

Também foi proposto encontrar frações equivalentes a $\frac{25}{100}$ (tratamento; DUVAL, 2009) na tarefa 05. Quatro das cinco equipes conseguiram responder corretamente a tarefa, tornando

evidente que as equipes aumentaram o conhecimento concernente as frações equivalentes (tratamento; DUVAL, 2009).

Na atividade 02, foi proposto aos cursistas o uso dos diferentes registros de representação nas tarefas 01, 02 e 03, referentes ao texto “natureza das quantidades”, os dados evidenciaram que três equipes resolveram as tarefas: duas corretamente e a outra realizou conversão, mas sem relação com o proposto.

Foi proposto um problema da Prova Brasil na tarefa 04, e esse exigia dos participantes conhecimento dos diferentes registros de representação semiótica; os resultados foram positivos, posto que todas as equipes responderam a tarefa corretamente.

A formação também proporcionou aumento do conhecimento concernente à porcentagem, uma vez que nas tarefas 05, 06, 11 a maioria dos cursistas responderam corretamente as três tarefas, exceto a equipe 05 na tarefa 05. Nessa perspectiva, quanto aos significados operador multiplicativo e parte/todo, as equipes apresentaram êxito, dado que nas tarefas 07, 08, 09, 10 e 11 as equipes responderam todas corretamente, exceto a equipe 04 na tarefa 07.

As tarefas 12 e 13 demandavam a representação da parte pintada da figura utilizando diferentes registros de representação semiótica: linguagem natural, fração, decimal, porcentual, além de solicitar a classificação quanto à natureza das quantidades em contínua ou discreta. As equipes responderam as tarefas corretamente, mas somente a equipe 04 classificou corretamente quanto à natureza das quantidades na tarefa 12 e todas classificaram corretamente na tarefa 13.

5.3 Quinto encontro da formação

Conteúdo: Significados de frações

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam que o conceito de fração comporta diferentes significados.

Atividade 01 - Compreendendo diferentes significados de fração

Análise da tarefa 01 – Leitura do texto significados de fração

Para que possam resolver atividades que envolvem o conceito de fração, os professores necessitam entender que a fração comporta diferentes significados, a depender do modo como a situação se apresenta e das características das quantidades implicadas na situação. Assim, a leitura e discussão do texto que versa sobre os diferentes significados de fração auxiliarão os professores a compreender melhor o conteúdo e ampliarão seu repertório didático em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

Muitas das tarefas retomam conteúdos já discutidos por ocasião do desenvolvimento de outras atividades, como por exemplo, a utilização de diferentes registros de representação semiótica, as características das quantidades, a equivalência e a comparação de fração, bem como a relação fração-decimal-porcentagem. Daí a importância de os formadores acompanharem de forma sistemática o processo de discussão e reflexão sobre o texto e o processo de solução das questões das atividades.

Ao resolver questões que exigem a compreensão do conceito de fração, muitas vezes os professores poderão encontrar dificuldades. Contudo, muitas delas podem ser superadas a partir da discussão entre os membros da equipe e/ou da socialização com a classe toda, momento em que o formador deverá atuar como mediador e contribuir significativamente com a superação das dificuldades que porventura se apresentarem.

Análise da tarefa 02

Essa tarefa envolve o significado de fração parte/todo. Como já estão acostumados com fração envolvendo esse significado, acredita-se que não apresentarão dificuldades. No caso da questão “a”, sabendo que as cinco partes em que foi dividida a barra de chocolate representam o todo e que as duas partes dadas a Ademir são parte do todo ($\frac{2}{5}$), logo sobrou a Adílio três partes ($\frac{3}{5}$). Alguns podem se embarçar e afirmar que sobrou a Adílio $\frac{2}{5}$.

No caso da questão “b”, uma das formas de se resolver seria unificando todos os denominadores, ou seja, deixando todos com o denominador 10. Assim:

- $\frac{4}{10} = 40\%$
- $\frac{1*2}{5*2} = \frac{2}{10} = 20\%$
- $\frac{1}{10} = 10\%$

Dessa forma, quem ganhou mais voto foi o candidato A, que ganhou $\frac{4}{10} = 40\%$. Alguns podem achar que o candidato C ganhou mais votos pelo fato de o denominador da fração do candidato C ser maior ($\frac{1}{10}$).

Para análise dessa tarefa, foram definidas onze categorias, as quais expõem as equipes que responderam a tarefa, que fizeram isso corretamente, bem como o uso de conversão, tratamento, um ou mais registros de representação, significados parte-todo, quociente e número. O Quadro 69 refere-se à análise da atividade 01 tarefa 02 “significado de fração”.

Quadro 69 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 02 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RCT)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Utilizou um registro de representação. (U1R)	E1/E2/E5
Utilizou dois ou mais registros de representação. (U2R)	E3/E4
Fez uso de conversão. (FUC)	E3/E4
Fez uso de tratamento. (FUT)	E1/E4/E5
Resolveu utilizando frações equivalentes. (RFE)	E1/E4/E5
Resolveu utilizando o significado parte/todo. (RPT)	E2/E3/E5
Resolveu utilizando o significado quociente. (RSQ)	E3
Resolveu utilizando o significado número. (RSN)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes participaram da tarefa e responderam corretamente. A E1 não representou a forma como procedeu para chegar à resposta correta, mas possivelmente deixou todos os denominadores iguais (encontrando frações equivalentes) e comparou as frações.

A E2 utilizou o registro geométrico e por meio do significado parte/todo encontrou a resposta correta. Esse processo foi realizado tanto na questão “a” quanto na “b”.

A equipe 3 utilizou o registro geométrico e o significado parte/todo na questão “a”. Na questão “b”, utilizou o significado quociente, dado que converteu do registro fracionário para o decimal.

A E4 fez uso do registro geométrico na questão “a” e utilizou frações equivalentes na “b”.

E a equipe 5 utilizou a ideia do significado parte/todo na questão “a”. Na questão “b”, utilizou a ideia de frações equivalentes deixando todas as frações com denominadores comum para então compará-las e se chegar à resposta correta, verificando quem é maior.

Análise da tarefa 03

Os integrantes deverão retomar o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterizar as quantidades contínuas e quantidades discretas. Um dos possíveis erros poderá ser a caracterização de uma quantidade contínua como discreta e discreta como contínua.

Para essa tarefa, criaram-se quatro categorias de análise, conforme Quadro 70, referente à atividade 01 tarefa 03 “significado de fração”

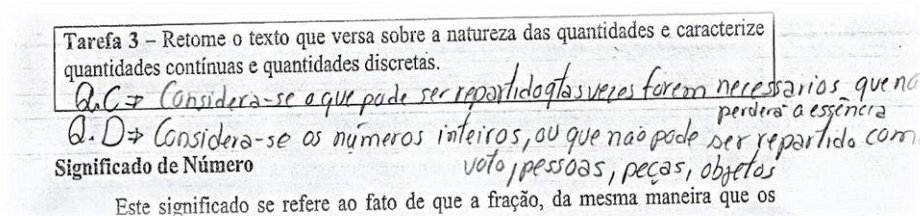
Quadro 70 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 03 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/ E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E2/E3
Definiu corretamente quantidades contínuas. (DQC)	E5
Definiu corretamente quantidades discretas. (DQD)	E5

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1 e 4 responderam a atividade dizendo que uma quantidade contínua “faz referência as partes iguais”, o que não foi definido corretamente. Também não definiram quantidades discretas. Duas equipes (E2 e E3) não responderam a tarefa. A E5 definiu quantidades contínuas e discretas corretamente ao afirmar que quantidades contínuas podem ser repartidas quantas vezes for necessário sem perder a essência e quantidades discretas são quantidades que não podem ser repartidas, visto que perdem a essência. A figura 193 exhibe a resolução da equipe 5 para essa tarefa.

Figura 193 - Resolução da atividade 01 tarefa 03



Fonte: Equipe 5 (2019).

Ficou evidente que os cursistas ainda não conseguem definir corretamente as quantidades contínuas e discretas, por mais que consigam resolver tarefas envolvendo essas quantidades. Por mais que no significado parte/todo a quantidade contínua, normalmente, seja a mais explorada nos livros didáticos, ainda assim persistem as dificuldades (MERLINI, 2005).

Análise da tarefa 04

Espera-se que os participantes não tenham dificuldades, posto que, desde a primeira etapa da sequência didática, foram instigados o ensino de diferentes registros. Assim, para transformar de decimal para fração, os professores precisam lembrar que devem considerar no numerador todo o número decimal sem a vírgula e no denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais. Como temos apenas o número cinco após a vírgula, no denominador ficará uma unidade seguida de apenas um zero. $1,5 = \frac{15}{10}$. Um dos possíveis erros será no acréscimo de duas casas decimais no denominador, ficando $\frac{15}{100}$ ou na inversão de numerador com denominador $\frac{10}{15}$.

Quatro categorias de análise foram elaboradas para avaliar as respostas dos cursistas a essa questão. Entre as categorias, expostas no Quadro 71, está se fizeram uso de tratamento para responder a tarefa.

Quadro 71 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 04 “significado de fração”

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Fez uso de tratamento. (FT)	----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2, 4 e 5 responderam a tarefa corretamente, mas nenhuma fez uso de tratamento. Fica evidente a facilidade que os cursistas em geral possuem com a conversão de decimal para fração.

Análise da tarefa 05

Como explicado no texto, uma fração também pode ser considerada como um número.

Assim:

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $\frac{3}{2} = 1,5$
- $\frac{2}{3} = 0,66$.

Logo, $0,5 < 0,66 < 1,5$. Um dos possíveis erros será localizar incorretamente as frações na reta numérica ou, ao converter de fração para decimal, realizar de forma incorreta a divisão de numerador pelo denominador.

Para saber quais equipes responderam à questão e se fizeram uso de conversão e tratamento, foram definidas cinco categorias de análise. Essas estão expressas no Quadro 72, que exhibe a análise da atividade 01 tarefa 05 “significado de fração”.

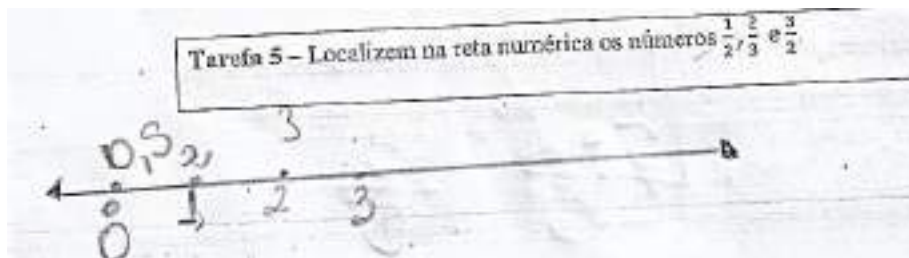
Quadro 72 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 05 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Fez uso de tratamento. (FT)	----
Fez uso de conversão. (FC)	E2/E5

Fonte: Elaboração da autora.

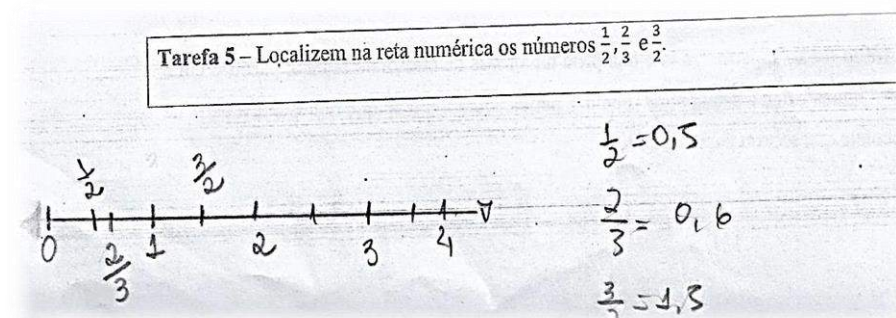
A E1 localizou apenas a fração $\frac{1}{2}$. As equipes 2 e 5 localizaram todas as frações corretamente e fizeram uso de conversão ao transformar fração em decimal. A E4 localizou as frações corretamente, mas não fez uso de conversão e tratamento (DUVAL, 2009). As figuras 194 a 197 mostram as resoluções das equipes 1, 2, 4 e 5, respectivamente:

Figura 194 - Resolução da atividade 01 tarefa 05



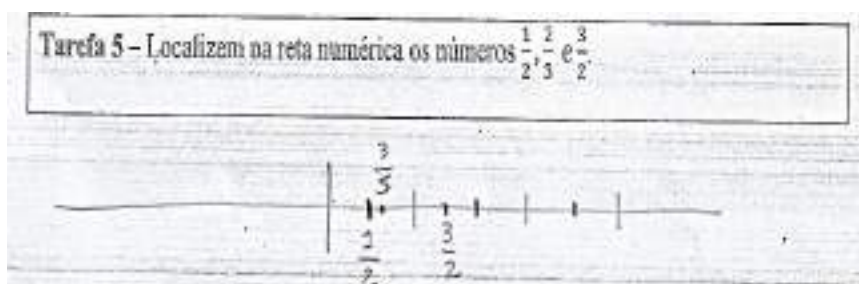
Fonte: Equipe 1 (2019).

Figura 195 - Resolução da atividade 01 tarefa 05



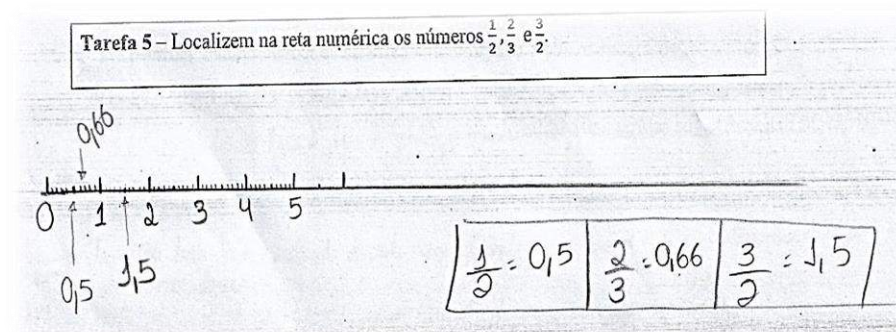
Fonte: Equipe 2 (2019).

Figura 196 - Resolução da atividade 01 tarefa 05



Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 197 - Resolução da atividade 01 tarefa 05



Fonte: Equipe 5 (2019).

A maioria das equipes participaram dessa tarefa e durante o seu desenvolvimento surgiram poucas dúvidas e questionamentos. Observa-se, assim, que houve pouca dificuldade em localizar frações e em converter de fração para decimal e de decimal para fração (vide tarefa anterior).

Análise da tarefa 06

É preciso retomar o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterizar quantidades intensivas e extensivas. Um dos possíveis erros será a caracterização de quantidade intensiva como extensiva e de extensiva como intensiva.

O Quadro 73 apresenta quatro categorias de análise da atividade 01 tarefa 06 “significado de fração”. Essas categorias revelam as equipes que responderam ou não a tarefa, bem como as que definiram corretamente as quantidades intensivas e extensivas.

Quadro 73 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 06 “significado de fração”

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E2/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E1/E3/E4
Definiu corretamente quantidades intensivas. (DQC)	E2
Definiu corretamente quantidades extensivas. (DQD)	E2

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 3 e 4 não responderam a tarefa, assim houve uma adesão de apenas 40% das equipes. A E2 apenas deu exemplos de quantidades intensivas e extensivas. Para quantidade intensiva, a equipe afirmou que “água e óleo não se misturam”; já em quantidades extensivas se “misturam”. Os exemplos abordados foram respondidos corretamente apenas pela equipe 2, dado que, se a medida se basear na comparação entre duas quantidades diferentes, trata-se de quantidades intensivas. Além do mais, segundo Nunes *et al* (2005, p. 122), “quando a medida de uma quantidade se baseia na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva.” Em outros termos, as quantidades extensivas estão baseadas no princípio aditivo e as quantidades intensivas no princípio multiplicativo (NUNES *et al*, 2005). A figura 198 apresenta a resolução da equipe 2.

Figura 198 - Resolução da atividade 01 tarefa 06

exemplo característico de quantidades discretas e extensiva.

Intensivas exemplo → não se mistura água óleo

Tarefa 06 – Retome o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterize quantidades intensivas e extensivas.

não se mistura → se mistura

Fonte: Equipe 2 (2019).

A equipe 5 definiu as quantidades intensivas e extensivas incorretamente, conforme figura 199.

Figura 199 - Resolução da atividade 01 tarefa 06

Tarefa 06 – Retome o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterize quantidades intensivas e extensivas.

IE = é quando não dá para separar pois as quantidades se misturam

IE = é quando é possível separar as quantidades

Tarefa 07 – Responda os problemas “a” e “b” relativos ao significado fração como medida:

Fonte: Equipe 5 (2019).

As quantidades intensivas podem ser separadas, uma vez que não se misturam (água e óleo). As quantidades extensivas não podem ser separadas, visto que se misturam, por exemplo, polpa de fruta e água.

Análise da tarefa 07

Na tarefa “a”, a quantidade total corresponde a 05 partes. Os participantes podem confundir as quantidades de medidas de cada componente (água e polpa) com a quantidade total. Assim, poderão estabelecer relação entre as quantidades dos componentes e responder que a quantidade de água no suco é representada por $\frac{3}{2}$ e não $\frac{3}{5}$.

Da mesma forma, na tarefa “b” os participantes devem somar o total de frutas, 4 maçãs + 3 bananas + 3 peras, resultando em dez (10) frutas. Esse valor se refere ao denominador. O

numerador será a quantidade de bananas da cesta três (03), assim, a fração que representa a quantidade de bananas da cesta é: $\frac{3}{10}$.

Cinco categorias de análise foram criadas para avaliar o desempenho das equipes nessa tarefa. O Quadro 74 apresenta a análise da atividade 01 tarefa 07 “significado de fração”.

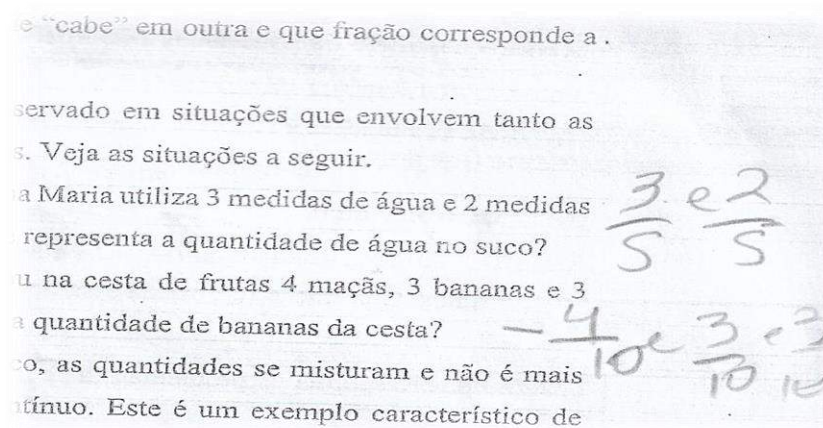
Quadro 74 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 07 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/ E2/ E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/ E2/ E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E2
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 4 e 5 responderam a tarefa corretamente em forma de fração, mas não fizeram uso de dois ou mais registros de representação semiótica. A E2 respondeu corretamente, fazendo uso dos registros figural e fracionário. Somente a equipe 3 não realizou a tarefa. As figuras 200 a 203 referem-se às respostas das equipes 1, 2, 4 e 5. Conforme as resoluções, houve aumento do conhecimento dos cursistas quanto ao significado medida.

Figura 200 - Resolução da atividade 01 tarefa 07



Fonte: Equipe 1 (2019).

Figura 201 - Resolução da atividade 01 tarefa 07

identificação de quantas vezes uma unidade "cabe" em outra e que fração corresponde a esta comparação.

O significado Medida pode ser observado em situações que envolvem tanto as quantidades extensivas quanto às intensivas. Veja as situações a seguir.

a) No preparo de um litro de suco, Dona Maria utiliza 3 medidas de água e 2 medidas de polpa de fruta. Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?

b) Júlia foi ao supermercado e colocou na cesta de frutas 4 maçãs, 3 bananas e 3 peras. Qual a fração que representa a quantidade de bananas da cesta?

Note que no caso do preparo do suco, as quantidades se misturam e não é mais possível separá-las, formando um todo contínuo. Este é um exemplo característico de quantidades contínuas e intensivas. Já o caso das frutas, há ampliação da quantidade de

Fonte: Equipe 2 (2019).

Figura 202 - Resolução da atividade 01 tarefa 07

água e 2 medidas $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$

água no suco?

is, 3 bananas e 3

cesta? $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$

cam e não é mais

característico de

Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 203 - Resolução da atividade 01 tarefa 07

n tanto as

2 medidas

o suco?

bananas e 3

ção é mais

erístico de

Fonte: Equipe 5 (2019).

Análise da tarefa 08

Na tarefa “a”, uma das formas de resolver seria dividir a pizza em quatro pedaços e distribuir aos amigos, assim cada um receberá um pedaço, tendo como resposta a fração $\frac{1}{4}$. Pode-se também dividir a pizza em 8 pedaços (cotidianamente é mais comum a divisão de pizzas com essa quantidade de pedaços) e, nesse caso, cada amigo ficará com 2 pedaços, que poderá ser representado por $\frac{2}{8}$ que também resulta em $\frac{1}{4}$. Pode-se ainda utilizar o registro língua natural para indicarem a fração de pizza que cada amigo ficará: “um pedaço de quatro”.

Para responder a questão “b”, os participantes podem dividir $35:5 = 7$ e verificar que cada um receberá sete bolinhas. Logo, a fração que representa essa divisão é $\frac{35}{5} = 7$ e cada um terá uma parte de trinta e cinco $\frac{7}{35}$. Pode-se também utilizar o significado parte/todo, evidenciando com uma figura o todo e as partes em que cada um ficará.

De acordo com o escopo e a estrutura dessa tarefa, definiram-se sete critérios para a análise do desempenho das equipes. O Quadro 75 exhibe a análise da atividade 01 tarefa 08 “significado de fração”.

Quadro 75 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 08 - significado de fração

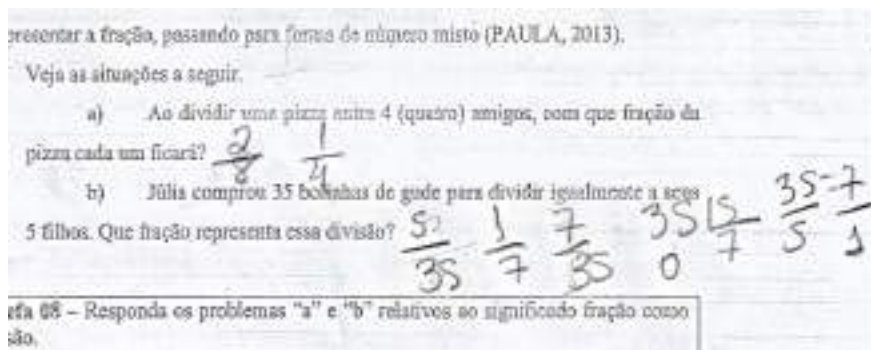
Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/ E2/ E3/ E4/ E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/ E2/ E3/ E4/ E5
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E3/E4/E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/ E2/ E3/ E4/ E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	----
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E2/E3
Fez uso de tratamento. (FT)	E1/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes realizaram integralmente essa tarefa. A E1 respondeu corretamente a letra “a” e fez uso de tratamento ao passar a fração $\frac{2}{8}$ para $\frac{1}{4}$, possivelmente considerando a pizza com oito pedaços. Na letra “b”, a equipe delineou várias respostas, fazendo uso de tratamento. De

início, a fração não representava a resposta solicitada, mas no fim a equipe respondeu de forma correta, conforme evidencia a figura 204.

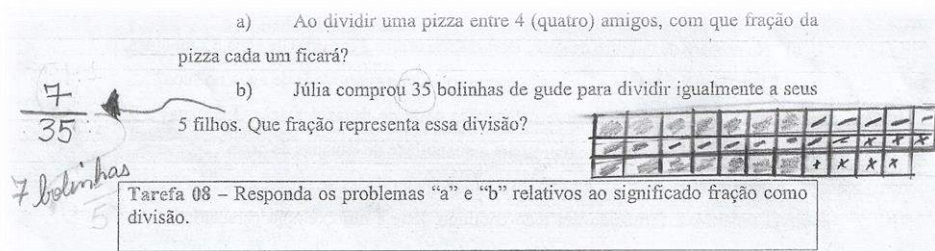
Figura 204 - Resolução da atividade 01 tarefa 08



Fonte: Equipe 1 (2019).

A equipe 2 não respondeu a questão “a”, mas respondeu corretamente a questão “b” e fez uso de dois registros de representação semiótico, o fracionário e geométrico, indicando que cada filho ficará com sete bolinhas ou $\frac{7}{5}$, conforme figura 205.

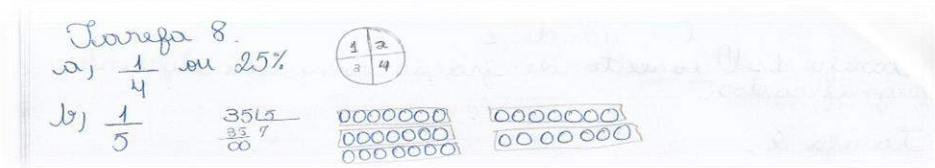
Figura 205 - Resolução da atividade 01 tarefa 08



Fonte: Equipe 2 (2019).

A equipe 3 respondeu as questões “a” e “b” corretamente e fez uso de três registros de representação semiótica (fracionário, percentual e geométrico). A figura 206 mostra isso.

Figura 206 - Resolução da atividade 01 tarefa 08



Fonte: Equipe 3 (2019).

As equipes 4 e 5 responderam corretamente as duas questões e fizeram uso de tratamento, conforme demonstrado nas figuras 207 e 208.

Figura 207 - Resolução da atividade 01 tarefa 08

de representar a fração, passando para forma de número misto (PAULA, 2013).

Veja as situações a seguir.

a) Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará? $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) Júlia comprou 35 bolinhas de gude para dividir igualmente a seus 5 filhos. Que fração representa essa divisão? $\frac{35}{5} = \frac{7}{1}$

Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 208 - Resolução da atividade 01 tarefa 08

Veja as situações a seguir.

a) Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará? $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{8}$

b) Júlia comprou 35 bolinhas de gude para dividir igualmente a seus 5 filhos. Que fração representa essa divisão? $\frac{35}{5} = \frac{7}{1}$

Fonte: Equipe 5 (2019).

Percebe-se, por conseguinte, que houve ampliação do conhecimento quanto ao significado de fração quociente, haja vista que todas as equipes responderam a tarefa corretamente.

Análise da tarefa 09

Uma das formas de resolver a tarefa “a” seria considerando o cinco como o todo (1000 ml) e o três como a parte do todo que foi consumida. Logo, utilizando regra de três:

$$5 \text{-----} 1000 \text{ ml}$$

$$3 \text{-----} x$$

$$\text{Assim, } 5x = 3000 \rightarrow x = \frac{3000}{5} = 600 \text{ ml.}$$

Outra maneira de resolver a mesma questão seria estabelecendo relação entre as partes ($\frac{3}{5}$) e o todo (1000 ml), dividindo-se 1000: 5 e encontrando o operador multiplicativo e depois multiplicando por 2 e encontrando a quantidade consumida: 600 ml. Um dos possíveis erros pode ser, ao encontrar o operador multiplicativo, dividir o todo (1000 ml) por 3, que é a quantidade consumida por João, o que está incorreto.

Na tarefa “b”, o participante pode considerar o denominador três como o todo (30 figurinhas) e o numerador dois como a parte do todo que foi presenteada a Adílio. Depois, resta analisar com quantas figurinhas Marcos ficou. Usando regra de três:

$$\begin{array}{l} 3\text{-----}30 \\ 2\text{-----}x \\ 3x = 60 \rightarrow x = \frac{60}{3} = 20 \end{array}$$

Portanto, Marcos presenteou Adílio com 20 figurinhas e ficou com apenas 10. Outra forma seria $\frac{2}{3}.30 = \frac{60}{3} = 20$. De outro modo, seria possível dividir 30:3 e depois multiplicar por dois que resultaria em 20, logo 30-20 = 10, assim, restariam 10 figurinhas com Marcos. Um dos possíveis erros é afirmar que Marcos ficou com 20 figurinhas e não com 10, como já demonstrado.

Acredita-se que não haverá dificuldades na resolução dessa atividade, já que, na correção da sondagem, foram resolvidos problemas envolvendo operador multiplicativo.

Sete categorias de análise foram estabelecidas para essa tarefa, as quais revelam as equipes que responderam as questões “a” e “b” da tarefa, as que não responderam, bem como as que usaram tratamento e dois ou mais registros de representação. O Quadro 76 refere-se à análise da atividade 01 tarefa 09 “significado de fração”.

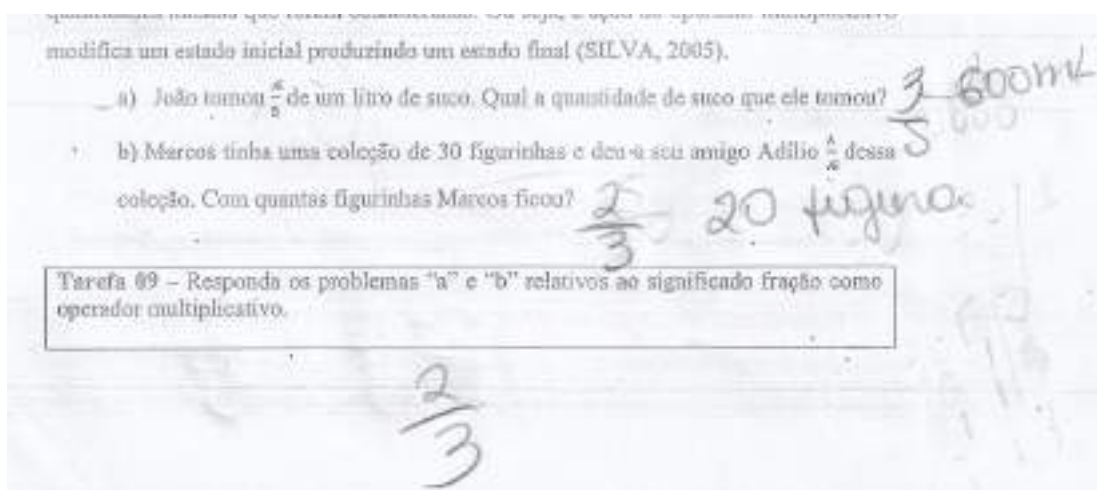
Quadro 76 - Categorias de análise da atividade 01 tarefa 09 “significado de fração”

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/ E3/ E4/ E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E3
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E2
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/ E4/ E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E3
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E1/E5
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

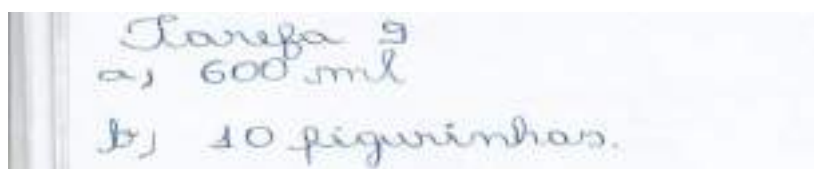
As equipes 1, 4 e 5 responderam a questão “a” corretamente, mas na questão “b” indicaram que Marcos ficou com 20 figurinhas, o que está incorreto. A E2 não respondeu a tarefa. Duas equipes (E1 e E4) fizeram uso de conversão. A E3 respondeu a tarefa corretamente, mas não fez uso de tratamento e conversão. Houve a participação de 80% das equipes e um aproveitamento de 20%, haja vista que a maioria das equipes responderam incorretamente a questão “b”. As figuras 209 a 212 apresentam respectivamente o desempenho das equipes 1, 3, 4 e 5 na referida tarefa.

Figura 209 - Resolução da atividade 01 tarefa 09



Fonte: Equipe 1 (2019).

Figura 210 - Resolução da atividade 01 tarefa 09



Fonte: Equipe 3 (2019).

Figura 211 - Resolução da atividade 01 tarefa 09

O significado operador multiplicativo que convém ao papel de transformador, isto é, "a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo" (MERLINI, 2005, p. 31). As situações que mobilizam esta concepção consideram que frações $\frac{a}{b}$ são apresentadas como números e compreendidas com operações de multiplicação dos fracionários com as quantidades iniciais que foram consideradas. Ou seja, a ação do operador multiplicativo modifica um estado inicial produzindo um estado final (SILVA, 2005).

a) João tomou $\frac{3}{5}$ de um litro de suco. Qual a quantidade de suco que ele tomou? $\frac{3}{5} \cdot 1 \text{ litro} = 600 \text{ ml}$

b) Marcos tinha uma coleção de 30 figurinhas e deu a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantas figurinhas Marcos ficou? $30 \cdot \frac{2}{3} = 20$

Tarefa 09 – Responda os problemas "a" e "b" relativos ao significado fração como operador multiplicativo.

Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 212 - Resolução da atividade 01 tarefa 09

como números e compreendidas com operações de multiplicação dos fracionários com as quantidades iniciais que foram consideradas. Ou seja, a ação do operador multiplicativo modifica um estado inicial produzindo um estado final (SILVA, 2005).

a) João tomou $\frac{3}{5}$ de um litro de suco. Qual a quantidade de suco que ele tomou? $\frac{3}{5} = 600 \text{ ml}$

b) Marcos tinha uma coleção de 30 figurinhas e deu a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantas figurinhas Marcos ficou? Marcos ficou com 20 figurinhas

Tarefa 09 – Responda os problemas "a" e "b" relativos ao significado fração como

Fonte: Equipe 5 (2019).

Atividade 02 – Analise as situações a seguir. Responda ao que se pede e classifique-as em relação ao significado de fração (parte-todo, medida, número, quociente, operador multiplicativo).

Objetivos

- Resolver problemas envolvendo os diferentes significados de fração;
- Classificar cada problema na perspectiva dos significados de fração (parte-todo, medida, número, quociente, operador multiplicativo).

Análise da tarefa 01

Essa tarefa se insere no significado de fração parte/todo (MERLINI, 2005). Segue-se uma análise da fração correspondente a cada figura.

Na tarefa “a”, o todo foi fracionado em três partes e uma parte foi colorida. Dessa forma, a fração correspondente à figura é $\frac{1}{3}$. Acredita-se que os cursistas não apresentarão dificuldades em indicar a qual dos significados de fração se relaciona essa fração e nem em resolver esse tipo de problema, visto que o significado parte/todo é o mais enfatizado pelos livros didáticos e conseqüentemente o mais trabalhado em sala de aula (MERLINI, 2005; SILVA, 2007). No entanto, alguns participantes podem inverter o todo com as partes e incorretamente responder $\frac{3}{1}$. Na questão “b”, o todo foi dividido em quatro partes, mas cada parte do todo foi dividida em três (embora nas outras três partes estejam omissas essas divisões). Como são quatro partes vezes três = 12 partes, assim o todo contém doze partes, mas foi pintada uma parte do todo (três partes) mais $\frac{1}{3}$ da segunda parte do todo. Logo foram pintados $\frac{4}{12}$. Os integrantes podem se confundir e considerar que foram pintadas quatro partes de quatro, o que não está correto.

Na tarefa “c”, o retângulo do meio (pequeno) cabe duas vezes nos retângulos da direita e da esquerda. Assim, tomando como referência o retângulo do meio (pequeno), a figura toda possui cinco retângulos. Mas, visto que foram pintados a metade do retângulo da esquerda, a metade do retângulo da direita e o retângulo do meio, ao todo foram pintados $\frac{3}{5}$ da figura. Alguns participantes talvez não consigam perceber que o retângulo do meio é equivalente aos outros dois retângulos maiores da direita e da esquerda e, por conseguinte, talvez não tenham sucesso em resolver o problema.

Assim como na questão anterior, foram criadas categorias de análise buscando avaliar as equipes que responderam cada questão da tarefa, as que não responderam, bem como as que usaram tratamento e dois ou mais registros de representação. O Quadro 77 remete à análise da atividade 02 tarefa 01 “significado de fração”.

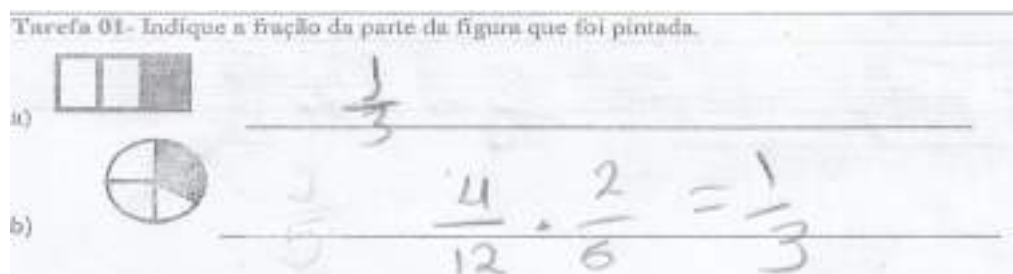
Quadro 77 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 01 significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Respondeu questão “a” corretamente. (RAC)	E1/E2/E4/E5
Respondeu questão “b” corretamente. (RBC)	E1/E4/E5
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	-----
Fez uso de tratamento. (FT)	E1/E4/E5

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2, 4 e 5 responderam a tarefa, sendo que E1, E4 e E5 responderam corretamente e fizeram uso de tratamento na questão “b” (DUVAL, 2009). A E2 respondeu “a” corretamente e “b” incorretamente, ao afirmar que a fração da parte pintada da figura é $\frac{2}{5}$, talvez porque não se atentou que uma das duas partes pintadas é menor que a outra, não podendo considerar o todo como cinco partes congruentes. De fato, Silva (1997, p. 194) afirma: “Professores apresentam sérias dificuldades em associar frações a figuras que não estiverem totalmente divididas e se preocupam somente com a questão de as partes terem a mesma forma”. As figuras 213 a 216 são relativas às respostas das equipes 1, 2, 4 e 5, respectivamente, para essa tarefa.

Figura 213 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



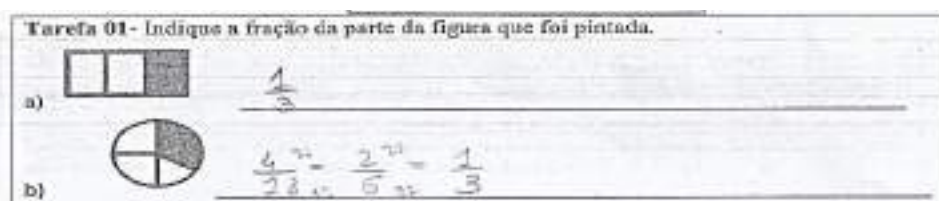
Fonte: Equipe 1 (2019).

Figura 214 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



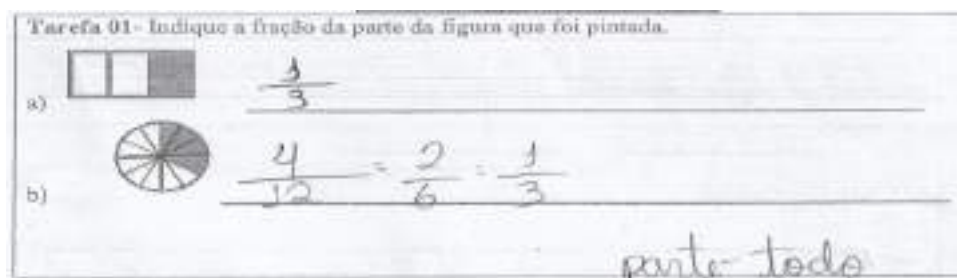
Fonte: Equipe 2 (2019).

Figura 215 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 216 - Resolução da atividade 02 tarefa 01



Fonte: Equipe 5 (2019).

Análise da tarefa 02

A tarefa envolve o significado de fração parte/todo (MERLINI, 2005). Ela apresenta alguns objetos geométricos. Nem todos são idênticos, mas nesse tipo de atividade a igualdade das partes perde o sentido. Espera-se que os cursistas contabilizem o total de objetos e verifiquem qual é a fração correspondente aos triângulos, o que é condizente com $\frac{4}{9}$.

Cinco categorias de análise foram definidas para evidenciar as equipes que responderam ou não a tarefa, bem como as que fizeram uso de tratamento e dois ou mais registros de representação. O Quadro 78 exhibe a análise da atividade 02 tarefa 02 “significado de fração”.

Quadro 78 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 02 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	-----
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2, 4 e 5 resolveram a tarefa corretamente. Nenhuma delas utilizou tratamento ou conversão (DUVAL, 2009). Segundo Merlini (2005) e Silva (2007), professores e estudantes têm facilidade em resolver problemas envolvendo o significado parte/todo.

Análise da tarefa 03

É preciso entender que cada bolinha representa $\frac{1}{12}$ do total de bolinhas, e a técnica consiste em agrupar as partes, identificar o total de bolinhas e a parte relativa a cada criança, para então finalizar indicando a fração da quantidade de bolinhas que cada um tem. É preciso que os cursistas entendam que o todo é a soma das quantidades de bolinhas e é preciso encontrar a fração correspondente à parte das bolinhas que cada um tem. Assim: Pedro tem $\frac{3}{12}$, João possui $\frac{4}{12}$ e Marcos tem $\frac{5}{12}$.

Em consonância com a tarefa anterior, foram definidas cinco categorias de análise para revelar as equipes que responderam ou não a tarefa, bem como as que fizeram uso de tratamento e dois ou mais registros de representação. O Quadro 79 apresenta a análise da atividade 02 tarefa 03 “significado de fração”.

Quadro 79 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 03 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	-----
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2, 4 e 5 responderam a tarefa. As equipes 1, 4 e 5 responderam a tarefa corretamente, mas não fizeram uso de tratamento e conversão (DUVAL, 2009). A E2 respondeu, mas errou ao afirmar que Pedro tem $\frac{2}{12}$ bolinhas. A E3 não realizou a tarefa. O percentual de participação na tarefa foi de 80% e houve um aproveitamento de 60%. Segundo Merlini (2005) e Silva (2007), problemas de fração envolvendo o significado parte/todo são o conteúdo de fração em que professores e estudantes apresentam melhor desempenho.

Análise da tarefa 04

Trata-se de uma questão da Prova Brasil que envolve o significado número. A figura é uma reta em que estão representados os valores em quilograma de uma balança. A reta numérica está numerada de um a três e a seta está apontada para o valor 2,3. Dessa forma, a resposta correta é a letra “c” – 2,30. Acredita-se que os cursistas não apresentarão dificuldades na realização dessa tarefa, visto que o significado número foi bem explanado e a maioria não demonstrou dificuldades nesse conteúdo. Mas talvez alguns não prestem atenção e marquem a alternativa “d” (2,03), o que está errado.

Novamente, foram criadas cinco categorias para analisar se as equipes responderam a questão e se fizeram uso de tratamento e de dois ou mais registros de representação semiótica. O Quadro 80 refere-se à análise da atividade 02 tarefa 04 “significado de fração”.

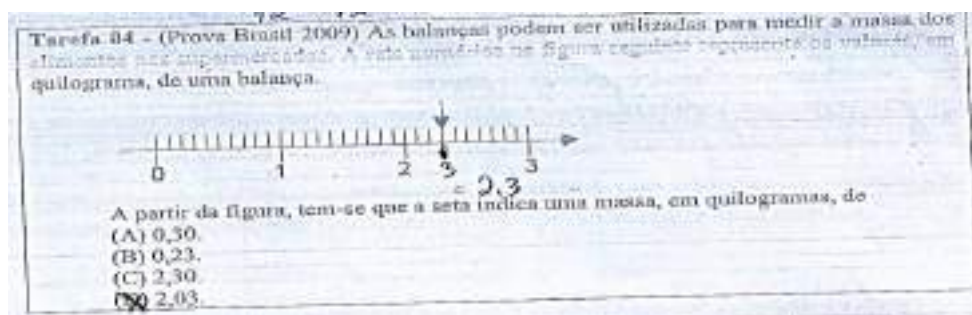
Quadro 80 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 04 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	E3
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	-----
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 2, 4 e 5 participaram da tarefa e três delas (1, 4 e 5) responderam corretamente. A E2 respondeu incorretamente 2,03, conforme figura 217. Assim, houve participação de 80% das equipes e um aproveitamento de 60%. Segundo Canova (2006), as frações são pouco trabalhadas em seu significado número, o que se comprovou nessa tarefa, que demonstrou baixo desempenho dos professores com relação a esse significado.

Figura 217 - Resolução da atividade 02 tarefa 04



Fonte: Equipe 2 (2019).

Análise da tarefa 05

É uma questão da Prova Brasil e também envolve o significado de fração número. A reta numérica está enumerada de zero a seis e a seta está marcando no número 4,5. Assim a resposta correta é a letra “c” – 4,5. Alguns podem assinalar incorretamente 0,45.

Quadro 81 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 05 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	----
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	-----
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes responderam à questão corretamente, resultando em um percentual de participação de 100%. Nenhuma delas lançou mão de conversão e tratamento (DUVAL, 2009).

Análise da tarefa 06

Envolve o significado de fração quociente e a natureza contínua das quantidades (NUNES *et al*, 2005). A questão quer saber quanto chocolate cada criança irá receber se forem distribuídas igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças. A quantidade a ser

distribuída é menor que a quantidade de partes. Assim, mantendo o aspecto partitivo da divisão, é preciso dividir cada uma das três barras de chocolate em cinco partes iguais, encaminhando a resposta de que cada um irá receber $\frac{1}{5}$ de cada barra ou $\frac{3}{5}$, se considerarmos o total de barras.

O Quadro 82 apresenta as equipes que responderam a tarefa, bem como as que fizeram uso de tratamento e de dois ou mais registros de representação. Esse quadro refere-se à análise da atividade 02 tarefa 06 “significado de fração”.

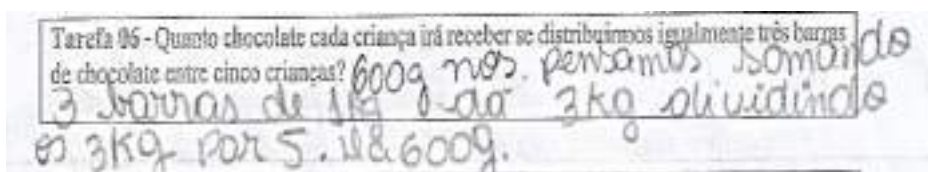
Quadro 82 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 06 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	----
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E2/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

A equipe 1 resolveu corretamente e lançou mão do registro natural: “600 g, nós pensamos, somando 3 barras de 1 kg dá 3 quilos e dividindo os 3 kg por 5 da 600 g”. A figura 218 é concernente à resolução da equipe 1.

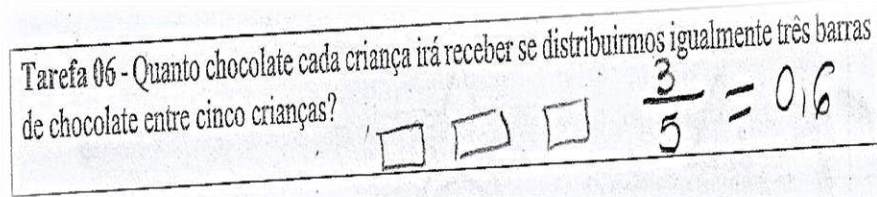
Figura 218 - Resolução da atividade 02 tarefa 06



Fonte: Equipe 1 (2019).

A equipe 2 utilizou a lógica partitiva, dividindo numerador pelo denominador e encontrando a parte referente a cada criança ($0,6$ ou $\frac{3}{5}$). Fez uso de três registros de representação semiótica (geométrico, fracionário, decimal) e resolveu corretamente a questão, conforme figura 219.

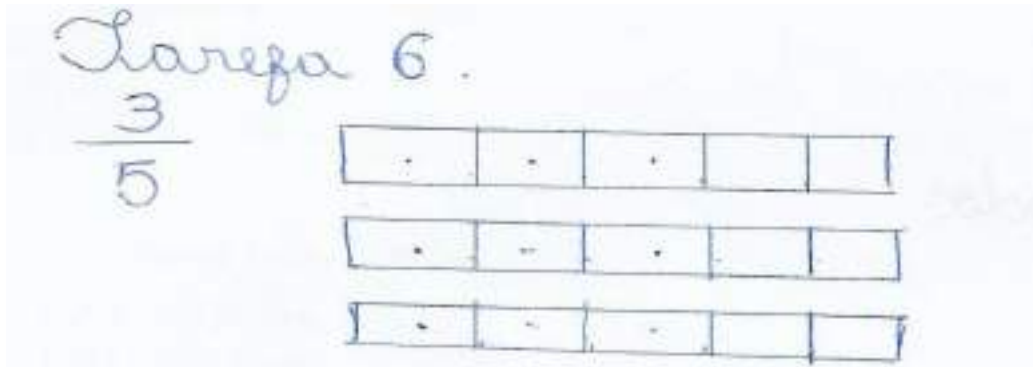
Figura 219 - Resolução da atividade 02 tarefa 06



Fonte: Equipe 2 (2019).

Utilizando a lógica parte/todo e a representação com dois registros de representação semiótica (fracionário, geométrico), a equipe 3 respondeu a tarefa corretamente. Isso fica evidente na figura 220.

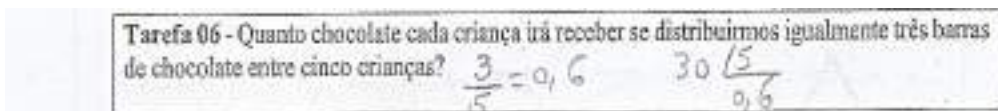
Figura 220 - Resolução da atividade 02 tarefa 06



Fonte: Equipe 3 (2019).

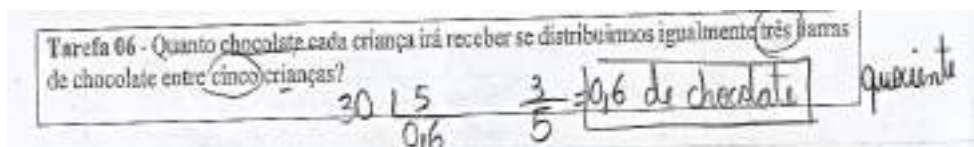
As equipes 4 e 5, mantendo o aspecto partitivo da divisão, resolveram corretamente a tarefa e fizeram uso dos registros fracionário e decimal. As figuras 221 e 222 exibem as respostas das equipes 4 e 5, respectivamente.

Figura 221 - Resolução da atividade 02 tarefa 06



Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 222 - Resolução da atividade 02 tarefa 06



Fonte: Equipe 5 (2019).

Verifica-se que houve avanço concernente ao entendimento de significado quociente.

Análise da tarefa 07

Refere-se ao significado de fração quociente e, quanto à natureza das quantidades, envolve a grandeza discreta. Para resolver, pode-se usar a divisão no seu aspecto partitivo; assim $12:3 = 4$. Ou, usando o significado de fração operador multiplicativo: $\frac{1}{3} \times 12 = 4$, posto que um terço das doze bolinhas é igual a quatro, ou seja, um inteiro (12 bolinhas) foi dividido em três grupos de quatro bolinhas cada um.

Para análise dessa tarefa, cinco categorias foram definidas. Elas revelam as equipes que responderam ou não a questão, bem como as que fizeram uso de tratamento e de dois ou mais registros de representação semiótica. O Quadro 83 refere-se à análise da atividade 02 tarefa 07 “significado de fração”.

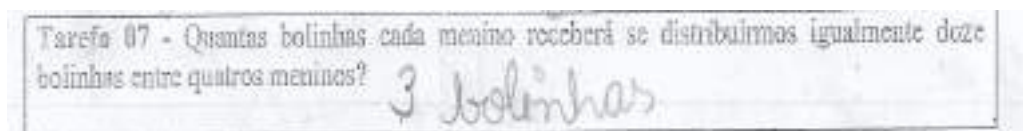
Quadro 83 – Categorias de análise da atividade 02 tarefa 07 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E2/E3/E4/E5
Respondeu a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E2/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	----
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E2/E5
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

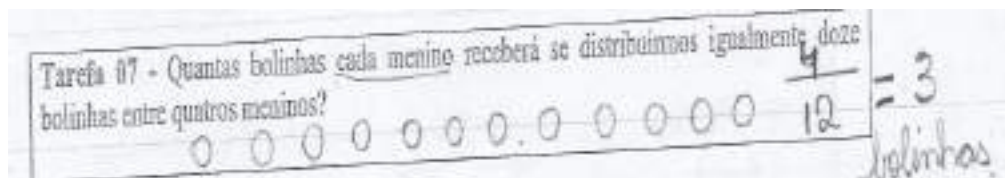
A equipe 1 fez uso somente de um registro, o natural, ao passo que a E2 fez uso dos registros figural, fracionário e natural. As equipes 3 e 4 utilizaram a divisão em sua forma não fracionária, e a 5 fez uso dos registros fracionário e natural. Todas responderam a questão corretamente, sendo que duas lançaram mão de dois ou mais registros de representação semiótica. Nenhuma fez uso de tratamento. As figuras 223 a 227 exibem as resoluções de cada equipe.

Figura 223 - Resolução da atividade 02 tarefa 07



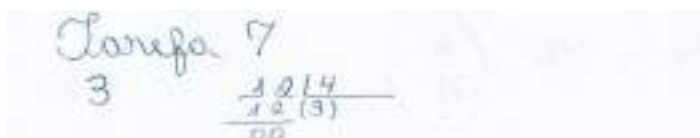
Fonte: Equipe 1 (2019).

Figura 224 - Resolução da atividade 02 tarefa 07



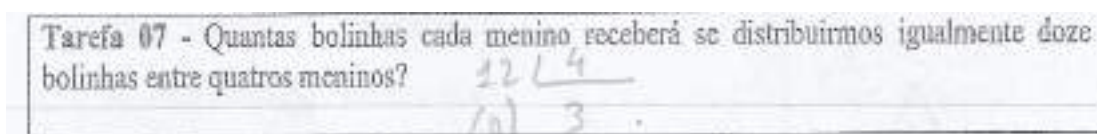
Fonte: Equipe 2 (2019).

Figura 225 - Resolução da atividade 02 tarefa 07



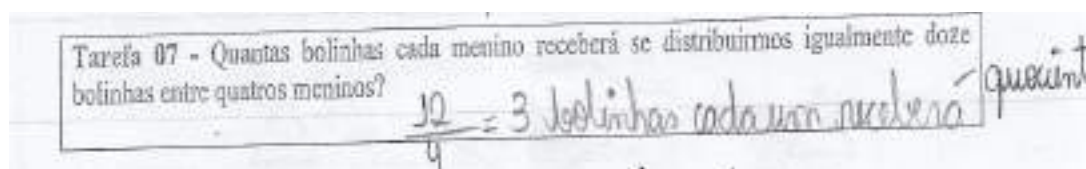
Fonte: Equipe 3 (2019).

Figura 226 - Resolução da atividade 02 tarefa 07



Fonte: Equipe 4 (2019).

Figura 227 - Resolução da atividade 02 tarefa 07



Fonte: Equipe 5 (2019).

Com o significado quociente, a maioria não apresentou dificuldades. Entretanto, observou-se que muitos membros das equipes ficaram confusos em questões de divisão de pizzas; por exemplo, “ao dividir uma pizza entre quatro pessoas, entre oito e assim por diante”.

Análise tarefa 08

Essa questão envolve o significado parte/todo. Sabendo que o todo são vinte e quatro pedaços, é preciso identificar quantas partes do bolo foram consumidas. Assim, foram consumidas 12 partes do todo, ou seja, $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. A resposta correta é a letra “d”. Um dos possíveis erros é a inversão do todo com as partes do todo $\frac{24}{12}$.

O Quadro 84 apresenta a análise da atividade 02 tarefa 08 “significado de fração”, dividida em cinco categorias definidas conforme o escopo e a estrutura da tarefa.

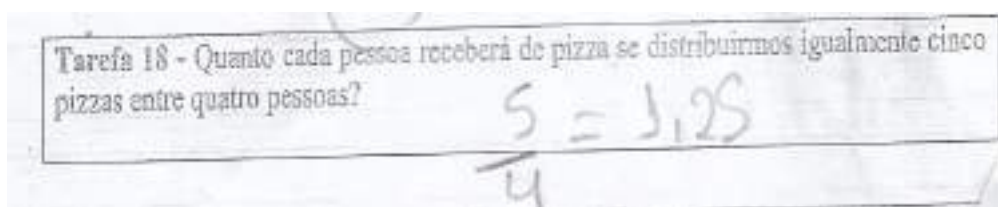
Quadro 84 - Categorias de análise da atividade 02 tarefa 08 - significado de fração

Categorias de análise	Equipes participantes
Respondeu a tarefa. (RT)	E1/E3/E4/E5
Respondeu toda a tarefa corretamente. (RTC)	E1/E3/E4/E5
Não respondeu a tarefa. (NRT)	-----
Utilizou dois ou mais registros de representação semiótica. (URRS)	E1/E3/E4/E5
Fez uso de tratamento. (FT)	-----

Fonte: Elaboração da autora.

As equipes 1, 4 e 5, utilizando o significado quociente, dividiram 5 para 4 e verificaram que cada um comerá uma pizza inteira e um quarto de outra (1,25). A figura 228 expõe a resolução da equipe 1.

Figura 228 - Resolução da atividade 02 tarefa 08



Fonte: Equipe 1 (2019).

A E3 fez uso do registro geométrico e apresentou que cada um comerá uma pizza e um quarto de outra, conforme figura 229.

Figura 229 - Resolução da atividade 02 tarefa 08



Fonte: Equipe 3 (2019).

Atividade 03 – Elabore problemas (para serem resolvidos por estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental) de fração, de modo a contemplar os significados:

- a) parte-todo
- b) medida
- c) número
- d) quociente
- e) operador multiplicativo

Os participantes da pesquisa realizaram a atividade, mas não registraram no caderno de anotações, todavia, a atividade foi socializada com a turma.

Considerações sobre Significados

Dos cinco significados apresentados nessa seção, os cursistas apresentaram dificuldades apenas com o operador multiplicativo. Assim:

Parte/todo - na atividade 01 tarefa 02 as cinco equipes responderam a tarefa corretamente. Na atividade 02 tarefa 01, a qual solicitava a indicação da fração da parte da figura que foi pintada, das quatro equipes que responderam a tarefa, apenas uma respondeu incorretamente, dado que não se atentou que uma das duas partes pintadas é menor que a outra, não podendo considerar o todo como cinco partes congruentes. De fato, Silva (1997, p. 194) afirma: “Professores apresentam sérias dificuldades em associar frações a figuras que não estiverem totalmente divididas e se preocupam somente com a questão de as partes terem a mesma forma”. Assim como os estudantes, alguns professores ainda levam em conta somente a quantidade de partes em que o todo foi particionado, ficando evidente mais uma vez a dificuldade dos cursistas com a natureza das quantidades contínuas. Por isso, há necessidade do ensino de fração considerando as múltiplas quantidades (discreta, contínua, intensiva e extensiva).

Na tarefa 02 da atividade 02, os cursistas deveriam observar a coleção de figuras e indicar a fração que corresponde aos triângulos; as quatro equipes que participaram da tarefa a realizaram corretamente. Ao indicar as partes de bolinhas que Pedro, João e Marcos têm (tarefa 03), das quatro equipes participantes, três solucionaram o problema corretamente; a equipe 2, talvez, por falta de atenção, representou como $\frac{2}{12}$. Nessa mesma perspectiva, na tarefa 08, os cursistas deveriam indicar a fração referente à quantidade de bolo consumida; as cinco equipes responderam o problema apresentado corretamente.

Número - na conversão do número decimal 1,5 para fração na atividade 01 tarefa 04, as quatro equipes participantes responderam corretamente. Nessa perspectiva, as equipes também apresentaram bom desempenho ao localizar na reta numérica as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ (tarefa 05); as quatro equipes participantes localizaram corretamente todas as frações. Na tarefa 4 da atividade 02, apresentou-se uma figura com uma reta em que estão representados os valores em quilograma de uma balança; a reta numérica estava numerada de um a três e a seta está apontada para o valor 2,3. Das quatro equipes que resolveram o problema proposto, três realizaram corretamente e uma respondeu incorretamente como 2,03. De forma semelhante, a tarefa cinco apresentou uma reta numérica enumerada de zero a seis e a seta apontando para o número 4,5; os cursistas, por sua vez, deveriam indicar o número decimal apontado pela seta, as cinco equipes responderam a tarefa corretamente.

Medida - após a leitura do texto norteador, os cursistas deveriam responder os problemas relativos a esse significado os quais estavam presentes no texto; as cinco equipes responderam os problemas corretamente.

Quociente - também foi proposta a leitura do texto relativo a esse significado, bem como tarefas com problemas que foram apresentados no texto. A tarefa 08 da atividade 01 se insere nesse contexto. As cinco equipes resolveram os problemas apresentados corretamente. A tarefa 06 da atividade 02 envolveu esse significado e a natureza contínua das quantidades. Os cursistas precisavam indicar a quantidade de chocolate que cada criança iria receber se fossem distribuídas igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças, as cinco equipes responderam a tarefa corretamente.

Na tarefa 07 ainda da atividade 02, foi proposto um problema, dessa vez envolvendo a natureza das quantidades discreta, os cursistas deveriam apontar a quantidade de bolinhas que cada menino receberia se fossem distribuídas igualmente doze bolinhas entre quatro meninos; as cinco equipes responderam a tarefa corretamente.

Operador multiplicativo - de forma semelhante aos significados medida e quociente, foi proposta uma tarefa (tarefa 09 atividade 01) para os cursistas resolverem referente a esse significado. Das quatro equipes que procuraram resolver o problema, apenas a equipe 3 resolveu corretamente.

5.4 Estudando sobre sequência didática

Atividade 01 – Estudando sequência didática

Objetivo

- Refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem a partir de sequência didática.

Análise

A continuação deste trabalho com as análises dos planos de ensino, será realizada no trabalho do mestrando Ademir Brandão “O legado do curso de formação continuada sobre fração”.

6 DESDOBRAMENTOS

Na tentativa de responder a pergunta de pesquisa realizamos o levantamento de pesquisas que tematizam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração no banco de dados, da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), do Instituto Brasileiro de Informação em Ciências e Tecnologia (IBICT) e do Banco de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), cujos estudos indicam que os professores ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental carecem de conhecimentos em relação ao conceito de fração, de modo a considerar a diversidade de registros de representação, os diferentes significados que ela comporta, bem como sua relação com os números decimais e a porcentagem; que os professores tendem a ensiná-la em significado fracionário parte/todo, o que é importante, porém insuficiente à compreensão conceitual. As pesquisas destacam também a necessidade de formações continuadas para o ensino de fração, uma vez que, a falta de conhecimentos didáticos e/ou conceituais pode criar obstáculos tanto ao ensino como à aprendizagem.

Esse panorama nos levou a realizar a pesquisa tendo como foco o desenvolvimento de uma Sequência Didática (ZABALA, 1998) com professores que ensinam matemática nos 4º e 5º Anos do Ensino Fundamental na rede municipal de Araguaína, considerando a história das frações; a utilização de diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2009; BIFFI 2001); os significados de fração de que trata Merlini (2005); a característica quantidades (NUNES *et al*, 2003); comparação e equivalência fracionária.

A história da Matemática indica que diferentes povos desenvolveram modos próprios de operar com as frações, o que nos motivou a solicitar que os participantes da pesquisa elaborassem sistemas de numeração e operassem matematicamente com fração, o que provocou certo desconforto, haja visto que esse tipo de atividade exigia ação intelectual dos cursistas, o que não é algo trivial em cursos de formação de professores. Nenhuma das equipes apresentaram de forma correta a ideia de fração e suas partes, embora conceituassem adequadamente o que é fração, seus termos e tipos. A ampliação e melhor compreensão só foi possível a partir da socialização e discussão das respostas das atividades no grande grupo.

Ficou evidente que muitos participantes não conheciam elementos da história das frações; a relação com as características dos sistemas de numeração; a existência de distintas bases numéricas e os diferentes modos de representar uma fração. Ficou patente que os conhecimentos que os participantes dispunham sobre fração dizem respeito a civilização hindu, tanto assim que as equipes responderam corretamente todas as questões.

Por ocasião das discussões/reflexões no grande grupo, muitas questões foram discutidas, o que propiciou condições para que os professores pudessem se inteirar de algumas situações. Registra-se, no entanto, a desenvoltura de algumas equipes ao representar frações utilizando diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2009).

Explorar os conceitos de equivalência fracionária e o estabelecimento da comparação, a partir das peças do tangram, instigou os professores a estabelecer relações que muitas vezes passavam despercebidas no processo de ensino e aprendizagem. A socialização, discussões e reflexões nas equipes e no grande grupo possibilitou que os cursistas passassem a perceber a existência de fração em diferentes contextos matemáticos, sobretudo ao se tratar de figuras geométricas uni e bidimensionais. Este trabalho exigiu muita dedicação e atenção por parte dos cursistas e a interlocução dos formadores, a fim de que fossem estabelecidas relações que conduzissem a ampliação dos conceitos matemáticos em voga. Foi necessário, por exemplo, que os formadores intervissem mostrando a relação/comparação do triângulo pequeno com cada uma das peças do tangram e sua fração correspondente.

Esse trabalho mostrou-se importante por ocasião das operações com fração. Em tarefas de equivalência sem o uso do tangram, os professores apresentaram facilidade em encontrar frações equivalentes multiplicando numerador e denominador por um mesmo número natural, diferente de zero, porém manifestaram dificuldades no processo inverso, isto é, em simplificar frações, ao dividir a fração por um mesmo fator comum, até chegar a uma fração irredutível. Fica evidente que os cursistas ainda possuem dificuldades em simplificar frações (encontrar frações equivalentes), dado que no desenvolvimento da tarefa surgiram muitas dúvidas e questionamentos. Isso corrobora com as conclusões de Merlini (2005) quanto à grande dificuldade na questão da noção de equivalência no ensino e aprendizagem de fração.

Na localização de fração na reta numérica, mesmo para professores que atuam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, se apresenta como dificuldade, sobretudo porque concebem a fração como uma sobreposição de dois números naturais. Merlini (2005, p. 9) conjectura que “o ensino e aprendizagem de frações pressupõe algumas rupturas dos números naturais e que estudantes ainda possuem dificuldades em compreender essa ideia”. Não só estudantes, verificamos que alguns professores ainda não a compreenderam.

Na comparação de fração foi evidenciado dificuldades por parte dos cursistas em compreender fração considerando o registro geométrico, bem como a natureza das quantidades contínuas, uma vez que, somente duas equipes participaram da tarefa e destas nenhuma conseguiu resolver todas as questões corretamente.

Nas cinco tarefas da atividade 1, sobre natureza das quantidades, as equipes resolveram corretamente os problemas propostos, mas algumas não conseguiram classificá-las corretamente quanto a natureza das quantidades. A tarefa 1 que envolve o significado de fração parte/todo e quantidade discreta, todas as equipes responderam corretamente à questão, porém, nenhuma conseguiu classificar corretamente quanto a natureza das quantidades (discreta, extensiva, contínua, intensiva). Na tarefa dois inseridas no significado parte/todo e natureza das quantidades contínua, apenas duas equipes classificaram a questão corretamente. Nas tarefas envolvendo características das quantidades, ficou evidente a falta de informação sobre o assunto, tanto que mesmo após a leitura do texto alguns cursistas ainda não conseguem defini-las, o que foi necessário, mais uma vez a ação da equipe de formação, auxiliar nas discussões e reflexões no grande grupo.

Chamou-nos a atenção o fato de poucos professores perceberem a relação entre fração, decimal e porcentagem, ao que recorremos a Duval (2009), para então trabalhar tratamento e conversão em diferentes registros de representação semiótica. No entanto, a partir da leitura e reflexões do texto, os professores demonstraram efetivo desempenho. Na tarefa 04 em que solicitava a conversão da fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual), as equipes, com exceção da 4, responderam a tarefa corretamente, fizeram uso de conversão e utilizaram mais de dois registros de representação (DUVAL, 2009).

Dos cinco significados apresentados no desenvolvimento da sequência didática, os cursistas apresentaram facilidade com os significados numérico, medida, parte/todo e quociente. Os cursistas apresentaram maiores obstáculos com o operador multiplicativo. Tais resultados corroboram com Silva (1997, p. 194): “Professores apresentam sérias dificuldades em associar frações a figuras que não estiverem totalmente divididas e se preocupam somente com a questão de as partes terem a mesma forma”. Assim como os estudantes, alguns professores ainda levam em conta somente a quantidade de partes em que o todo foi particionado, ficando evidente mais uma vez a dificuldade dos cursistas com a natureza das quantidades contínuas. Por isso a necessidade do ensino de fração considerando as múltiplas quantidades (discreta, contínua, intensiva e extensiva).

Nosso entendimento é que os professores participantes da pesquisa ampliaram seus conhecimentos em relação a fração a medida que apresentaram desenvoltura ao converter frações e resolver problemas de fração envolvendo os diversos significados e natureza das quantidades, esses foram seus efeitos. Indica-se esse trabalho como instrumento para outras

formações, mas de modo algum ele está pronto e acabado, pois a educação é um processo e como tal, há que se buscar constantemente novas perspectivas.

REFERÊNCIAS

ALVES, K. S. F. **O ensino de frações por atividades**. 2018. 318 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará, Belém-PA, 2018.

ANGELOTTI, V. C. **Ensino informatizado de frações a crianças surdas e ouvintes por meio do Paradigma de Equivalência de Estímulos**. 2016. 61 f. Dissertação (Mestrado em Educação Especial) – Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2016.

ARAUJO, V. S. **Khan Academy: possibilidades do uso do jogo como ferramenta de apoio pedagógico no ensino e aprendizagem de frações no ensino fundamental**. 2017. 129 f. Dissertação (Mestrado em metodologias para o ensino de Linguagens e suas Tecnologias) – Programa de Pós-graduação *Strictu Sensu*, Universidade Norte do Paraná (UNOPAR), Londrina-PR, 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ASSUMPCÃO, S. D. **Uso de elementos da cultura infanto-juvenil na introdução do conceito de fração**. 2013. 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2013.

BARROS, M. J. C. S. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial**. 2007. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2007.

BARROS, M. J. P. **A solução de situações que envolvem o conceito de fração por professores que ensinam matemática nos anos iniciais**. 2018. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Tocantins, Palmas-TO, 2018.

BARTHÉLEMY, G. **2500 anos de matemática: a evolução das ideias**. 2. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 1999.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de historia da matemática para uso em sala de aula: álgebra**. São Paulo: Atual, 1992.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan, 1992.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV: frações e números fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BESSA, M. L. **Concepções e práticas de professores sobre o ensino e a aprendizagem e uma intervenção intencionalmente planejada no ensino de frações por meio da resolução**

de problemas em um 5º ano do ensino fundamental. 2007. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília-DF, 2007.

BEZERRA, F. J. B. Introdução do conceito de números fracionários e de suas representações: uma abordagem criativa para sala de aula. In: SBEM - COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA DO GT 2: Educação matemática nas séries finais do ensino fundamental. 8., 2001, São Paulo. **Anais do VIII SBEM...** São Paulo: PUC/ SP, 2001. Disponível em: <<http://sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/1CC04772553886.pdf>>. Acesso em: 02 nov. 2018.

BIFFI, D. L. **Conceito de frações através do estudo dos registros de representação.** 2001. 123 f. Dissertação (Curso de Mestrado Interinstitucional) – Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Lages-SC, 2001.

BOCALON, G. Z. **O erro na aprendizagem de frações no ensino fundamental:** concepções docentes. 2008. Dissertação (Mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba-PR, 2008.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. M. J. Alvarés; S. B Santos; T. M, Baptista. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

BOLOGNANI, A. C. A. **Ensino e aprendizagem de frações mediados pela tecnologia:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. 2015. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá-MG, 2015.

BORGES NETO, H.; SOUSA, F. E. E.; VASCONCELOS, F. H. L.; LIMA, I. P.; SANTOS, M. J. C.; ANDRADE, V. S. **Sequência Fedathi:** uma proposta para o ensino de Matemática e Ciências. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRITA, F. C. S. **Contribuições dos registros de representação semiótica para a compreensão dos números decimais:** um estudo com alunos do 6º ano. 2015. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá-PR, 2015.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração.** 2006. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 2005.

CARVALHO, E. S. **Sequência Didática**: uma proposta para o ensino de conceito de fração. 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

CATALANI, E. M. T. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração**. 2002. 216 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas-SP, 2002.

CASTRO, F. C. **Quantidades intensivas**: análise de uma intervenção com alunos do 5º ano do ensino fundamental. 2014. 253 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis-SC, 2014.

CELESTINO, K. G. As frações em algumas civilizações antigas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Unioeste de Cascavel, 21 a 23 de setembro de 2017. **Anais...** Cascavel, PR: Unioeste, 2017.

CERVANTES, P. B. M. **Uma formação continuada sobre frações**. 2011. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

CHEQUETTO, J. J. **Uma experiência didática para a aprendizagem de frações**: matemática para residentes de uma casa de passagem. 2016. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus-ES, 2016.

CORREIA, P. L. **Frações**: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras. 2015. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2015.

COSTA, A. B. **Uma proposta no ensino de fração para adolescentes com e sem deficiência visual**. 2013. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Especial) – Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2013.

CRUZ, L. S. **Abordando frações em perspectiva histórica**: uma possibilidade de ensino para a educação básica. 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e da Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, História, Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André-SP, 2016.

CRUZ, F. M. **Tecnomatemática**: site como ferramenta tecnológica para o ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental. 2017. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa-PR, 2017.

CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, L. M. P. **Formação de professores em comunidades práticas: frações e raciocínio proporcional**, discussões a respeito do ensino e da aprendizagem. 2014. 62 f. Londrina: UEL, 2014.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. 2007. 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC- SP, São Paulo, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicação**. vol 1. São Paulo: Ática, 2013.

DIAS, J. L. **Compreensão de professores de Matemática sobre números fracionários**. 2012. 144 f. Tese (Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

DIAS, M. L. S. **Mapeamento das pesquisas produzidas em São Paulo acerca de números fracionários, entre os anos de 2000 e 2016**. 2016. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2018.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern, Berlin, Frankfurt, New York, Paris, Wien: Peter Lang, Editions Acientifiques Européennes, 1995.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DRUZIAN, M. E. B. **Jogos como recurso didático no ensino-aprendizagem de frações**. 2007. 63 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria-RS, 2007.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

_____. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FERREIRA, E. R. P. **Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos: obstáculos didáticos e epistemológicos**. 2014. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2014.

GOIS, R. C. **O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental**. 2015. 98 f. Dissertação (Mestrado)–Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2015.

GONÇALVES, M. I. S. M. **Crenças e dificuldades de futuros professores de Matemática acerca dos números racionais**. 2013. 201 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de

Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, 2013.

GUELLI, O. **Contando a história da matemática: a invenção dos números**. São Paulo: Ática, 2002.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS (INEP). **Sinopse Estatística da Educação Superior 2016**. [Online]. Brasília: Inep, 2016. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/basica-censo-escolar-sinopse-sinopse>>. Acesso em: 03 jan. 2019.

LAPA, C. M. S. **O ensino de frações e seus diferentes significados: um estudo a partir do livro didático *A Conquista da Matemática* e dos registros dos cadernos de alunos do 7º ano da rede municipal de Aracaju/SE**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão-SE, 2013.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo humano**. São Paulo: Moraes, 1972.

LIMA, R. P. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II**. 2014. 233 f. Tese (Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), Universidade Federal do Amapá. Macapá, AP, 2014.

MACHADO, C. T. O. **Concepções epistemológicas e experiências de professores de matemática sobre números fracionários: as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental**. 2007. 132 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife-PE, 2007.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do ensino fundamental**. 2007. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2007.

MAROQUIO, V. S.; PAIVA, M. A. V.; FONSECA, C. O. Didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. 2015. Metodologias para o ensino de Matemática na Educação Básica: debates para compreender e intervir. **Anais...** Vitória, ES: IFES; UFES, 2015.

MARTINS, F. M. A. B. **O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representação semiótica**. 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) – Mestrado em Ciências da Linguagem, Universidade do Sul de Santa Catarina, Palhoça-SC, 2012.

MARTINS, J. B. J. **Relação entre formação docente e desempenho de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas matemáticos**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação *Strictu Sensu* em Educação, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel-PR, 2016.

MELO, V. N. **Sequência Fedathi e análise de erros aplicados ao ensino de frações**. 2017. 76f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2017.

MENEGAZZI, M. **Potencialidades e limitações de um trabalho colaborativo sobre frações na formação inicial de professores que ensinam matemática**. 2014. 221 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2014.

MENOTTI, R. M. **Frações e suas operações: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem**. 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2014.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental**. 2005. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED/UFGM, 2013.

MONTEIRO, A. B. M.; GROENWALD, C. L. O. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência utilizando testes adaptativos. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, p. 103-135, nov, de 2014.

MOTTA-ROTH, D.; HENDGES, G. R. **Produção textual na universidade**. São Paulo: Parábola Editorial, 2010.

MOUTINHO, L. V. **Frações e seus diferentes significados: um estudo com os alunos da 4 e 8 séries do Ensino Fundamental**. 2005. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2018.

NASCIMENTO, R. L. **Aplicação e análise de uma sequência didática sobre frações no ensino fundamental II**. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado)–Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 2018.

NUNES, T. **Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas**. São Paulo: Proem, 2001.

_____; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

_____; *et al.* The effect of situations on childrens's understanding of fractions. In: **British Society For Research On The Learning Of Mathematics**. Oxford: June, 2003.

_____; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, R. G. **Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5a. serie do 1o. grau**. 1996. 165 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas-SP, 1996.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, M. H. P. **Aprendizagem de frações com software e aplicativos matemáticos online.** 2016. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Programa de Pós-Graduação *Strictu Sensu*, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates, Lajeado-RS, 2016.

PALMA, R. C. D. **A produção de sentidos sobre o aprender e o ensinar matemática na formação inicial de professores para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental.** 2010. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2010

PAVANELLO, R. M. Educação matemática e Criatividade. **Revista da SBEM**, ano II, n. 3, pp. 5-11, 1994.

PATRONO, R. M. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental:** análise de uma proposta de ensino. 2011. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG, 2011.

PAULA, M. R. Reflexões sobre possíveis significados para frações. In: SIMPED – Simpósio Pedagógico e Pesquisas em Educação, 8., 2013. **Anais... SIMPED, 2013.**

PEREIRA, O. R. **Uma sequência didática para o ensino de adição de frações.** 2017. 98 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

PERLIN, P. **A formação de professores nos anos iniciais do Ensino Fundamental no movimento de organização do ensino de frações:** uma contribuição da atividade orientadora de ensino. 2014. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, 2014.

PINHEIRO, M. G. C. **Formação de professores dos anos iniciais:** conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração. 2014. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Curso de Pós- Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo-SP, 2014.

POLESE, F. O. **Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas.** 2011. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2011.

POST, T. R.; WACHSMUTH, I.; LESH, R.; BEHR, M. Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 16, n.1, p. 18-36, 1985.

POST, T. R.; BEHR, M.; LESH, R. Research-based observations about children's learning of rational number concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, vol. 8, n. 1, p. 39-48, 1986.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Freevale, 2013.

ROCHA, M. R. **Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações**. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.

RODRIGUES, S. P. **A aprendizagem do conceito científico de fração por alunos com deficiência intelectual: os resultados de uma intervenção**. 2017. 168 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) – Universidade Federal do Pampa, Jaguarão-RS, 2017.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. São Paulo: Zahar, 2012.

SANTANA, L. E. L. **Os saberes conceituais de pedagogos em formação inicial, acerca de fração**. 2012. 182 f. Dissertação (Mestrado)–Curso de Mestrado Acadêmico em Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza-CE, 2012.

SANTOS, A. **O conceito de fração e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS FILHO, J. F. **Investigando como os professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais**. 2015. 131 f. Dissertação (Mestrado)–Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2015.

SANTOS, R. G. **A sequência Fedathi na formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria básica e frações equivalentes com o uso do software Geogebra**. 2015. 121 f. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2015.

SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/UFRJ, 1993.

SCHASTAI, M. B. **Pró-letramento em Matemática: problematizando a construção do conceito de frações – uma contribuição para a formação de professores**. 2012. 204 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa-PR, 2012.

_____; FARIAS, E. R. S.; SILVA, S. C. R. **Formação de professores e o ensino de frações nos anos iniciais**. 1. ed. Curitiba: Appris, 2017.

SCHON, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1983.

SEGETI, L. G. C. A. **O ensino de frações por uma abordagem inspirada nos pressupostos educacionais da Teoria de Inteligências Múltiplas**. 2015. 164 f. Dissertação (Mestrado)– Programa De Pós-Graduação em Ensino, História, Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC, 2015.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: **Educational Researcher**, v. 15, n. 2. fev. 1986, p. 4-14.

SIEBERT, V. T. **Estudo e ensino de frações: aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada**. 2015. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá-MT, 2015.

SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 276 f. Tese (Doutorado e Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). São Paulo, 2005.

SILVA, A. M. **Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do ensino fundamental e do ensino médio**. 2006. 104 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife-PE, 2006.

SILVA, A.F.G. **O desafio do desenvolvimento profissional do docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objetivo de discussão o processo de ensino e aprendizagem de frações**. 2007. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

SILVA, W. R. **O ensino de matemática na escola pública: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração**. 2011. 260 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória-ES, 2011.

SILVA, M. S. L. C. **Concepções e práticas de professores do Ensino Fundamental sobre o ensino de frações: um estudo em escolas de Cuiabá**. 2013. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá-MT, 2013.

SILVA, A. R. M. **Como os estudantes lidam com diferentes representações? Um estudo com o bingo dos números racionais**. 2016. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2016.

SILVA, P. H. F. **Ensino-aprendizagem de frações: um olhar para as pesquisas e para a sala de aula**. 2017. 164 f. Dissertação (Mestrado)–Programa de Pós-Graduação em Ensino de

Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB, 2017.

SOUZA, M. J. A. Sequência Fedathi: Apresentação e Caracterização. In: BORGES NETO, H.; SOUSA, F. E. E.; VASCONCELOS, F. H. L.; LIMA, I. P.; SANTOS, M. J. C.; ANDRADE, V. S. **Sequência Fedathi**: uma proposta para o ensino de Matemática e Ciências. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático**: um estudo investigativo. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

THIOLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 2008.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática da matemática**: como dois e dois – a construção da matemática. São Paulo: FTD, 2010.

TRAVASSOS, W. B. **Um estudo sobre o conceito de inequação com licenciandos em matemática**: contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2018. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciência e a Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2018.

TULON, A. S. **Ensino de frações e equivalência de estímulos**: um estudo com uso de software educativo. 2008. 151 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

VALERA, A. R. **Uso social e escolar dos números racionais**: representação fracionária e decimal. 2003. 164 f. Dissertação (Mestrado)–Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, 2003.

VALIO, D. T. C. **Frações**: estratégias lúdicas no ensino da matemática. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2014.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números fracionários**: a construção dos diferentes significados por alunos de 4^a a 8^a séries de uma escola do ensino fundamental. 2007. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2007.

_____. **A compreensão das relações numéricas na aprendizagem de frações**: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4^o ano da educação básica. 2015. 143 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2015.

VERNEQUE, L. **Aprendizagem de frações equivalentes**: efeito do ensino de discriminações condicionais minimizando o erro e da possibilidade de consulta a dicas. 2011, 105 f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de Brasília, Brasília-DF, 2011.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

Atividades da experimentação da Sequência Didática

Conteúdo: História das frações

Objetivos

- Conhecer um pouco da história das frações em diferentes civilizações;
- Compreender de que modo diferentes civilizações operavam e simbolizavam as frações;
- Desenvolver atividades fazendo uso da simbologia de distintas civilizações.

Encaminhamento metodológico

Os professores foram organizados em equipes e distribuíram-se os textos (fração em diferentes civilizações, desatando nós, cunhando frações, frações gregas, frações em barras, irmãos hindus e frações nos dias atuais) a fim de serem lidos e discutidos, para, em seguida, responder as atividades propostas. Ao concluir as atividades houve a socialização das respostas, ocasião em que cada equipe apresentou o modo como as resolveu.

Fração em diferentes civilizações

A história matemática nos conta que essa ciência se desenvolveu a partir das necessidades humanas e, nesse processo, diferentes civilizações foram instigadas a utilizar números menores que a unidade, o que denominamos de fração.

O processo de contagem precede todos os movimentos matemáticos mais sofisticados, exatamente porque a espécie humana desenvolveu habilidades para pensar noções quantitativas, dentre elas o muito, o pouco, o grande e o pequeno. O desenvolvimento da humanidade nos conduziu a viver em sociedade, o que provocou novos desafios, como os arranjos sociais e econômicos, o que, por sua vez, gerou a necessidade do pensamento numérico.

A necessidade de quantificar é anterior à história da matemática e, conseqüentemente, à existência dos documentos escritos. Assim, a linguística é um dos caminhos que podem nos dar pistas sobre o desenvolvimento do pensamento matemático. “O processo de contagem aconteceu quando o homem desenvolveu a capacidade de comparar objetos e estabelecer entre eles uma relação um a um” (MOL, 2013, p. 13). As evidências mostram que o processo de contagem se iniciou com os dedos das mãos e a maneira de usá-los (fazendo correspondência entre dedo(s)/objeto(s) – correspondência um a um) foi determinante nas escolhas das bases para o sistema numérico.

Para Eves (2011), as civilizações primitivas tinham alguma percepção de quantidade, e o processo de contagem ocorreu antes dos primeiros registros históricos. Essa percepção

envolvia a capacidade de reconhecer quantidades maiores e/ou menores, quando eram acrescentados ou retirados alguns objetos em uma determinada coleção.

É provável que a maneira mais antiga de contar baseava-se no princípio da correspondência biunívoca, que relaciona cada elemento de um conjunto com apenas um elemento de outro conjunto. De maneira simples, podemos exemplificar por meio do uso de gravetos e/ou pedras utilizadas na representação do quantitativo de ovelhas que eram levadas ao campo por um pastor; desse modo, cada pedra/graveto correspondia a uma ovelha. Quando a humanidade percebeu a necessidade de efetuar contagens mais extensas e complexas, o processo de contar foi gradativamente sistematizado.

A vida nas comunidades primitivas se tornava cada vez mais complexa. A confecção e o uso de ferramentas e armas de bronze ajudaram no desenvolvimento das aldeias que, situadas às margens de rios, transformaram-se em cidades (4000 a.C.). Logo, novas atividades se fizeram necessárias. Agricultores passaram a produzir quantidades de alimentos além da necessidade familiar e, em virtude disso, outras atividades, como a do comércio, artesanato, sacerdócio e administração, se desenvolveram articuladamente. A escrita e a sistematização de signos e símbolos passaram a se constituir numa necessidade, e isso determinou o fim da Pré-História e o início da História (GUELLI, 2002).

Nessa perspectiva, o interesse neste estudo reside em deslindar a história das frações em diferentes civilizações, bem como estabelecer imbricações do amadurecimento e sistematização do ato de contar ao longo da história da humanidade até chegar ao sistema de numeração indo-arábico utilizado de maneira (re)corrente na atualidade. Assim, para compreender a ideia de fração nas diferentes civilizações, necessitamos entender a origem do sistema de numeração adotado em cada uma delas.

Atividade 01 – Sistema de numeração

Objetivo

- Criar um sistema de numeração

Material Necessário

- Lápis
- Papel
- Borracha
- Caneta

- Lápis de cor
- Régua
- Cartolina, se necessário

Tarefa 01 – O texto informa que o objetivo principal da atividade “reside em deslindar a história das frações em diferentes civilizações (...)”. Você já ouviu falar e também já estudou fração. Agora responda:

- O que é fração?
- Quais os elementos constituintes da fração?
- Que ideias matemáticas a fração comporta?

Tarefa 02 – Elaborar um sistema de numeração.


O texto dá indícios de que diferentes civilizações elaboraram seus próprios sistemas de numeração, muitos dos quais distintos do indo-arábico, o qual utilizamos nos dias atuais. Agora é a sua vez. Elabore um sistema de numeração distinto do que utilizamos hoje.

Tarefa 03 – Socializar com a classe o sistema de numeração produzido.

Desatando nós...








Os referenciais estudados nos contam que um súdito chamado Aahmesu, cujo nome significa “Filho da Lua”, foi de extrema importância para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos na civilização egípcia (GUELLI, 2002). Conhecido pelos cientistas como “Ahmes”, ele foi o autor do “Papiro Ahmes”, um antigo manual de Matemática contendo cerca de 80 (oitenta) problemas resolvidos que tratavam de assuntos do cotidiano, como preço do pão, armazenamento de grãos e também alimentação do gado. Por meio do “Papiro de Ahmes”, os cientistas egípcios conseguiram entender o padrão utilizado no sistema de numeração egípcia (BOYER, 1974; GUELLI, 2002). A escrita hierática⁴ do sistema de numeração substituiu o princípio repetitivo de numeração hieroglífica por símbolos especiais que representavam dígitos e múltiplos de potências de 10. Por exemplo, o número 4 (quatro) no sistema de numeração hieroglífica era representado por quatro riscos verticais, mas na hierática foi substituído por uma barra horizontal. Do mesmo modo, o número 7 (sete), que era representado

⁴ Em seus relatos, poemas, códigos e textos religiosos, os egípcios usavam três sistemas de escrita diferentes entre si: os hieróglifos, o hierático e o demótico. A escrita hieroglífica – uma escrita sagrada cujos símbolos (enigmas) eram grafados da direita para a esquerda, era utilizada para a impressão de mensagens em túmulos e templos, portanto a mais importante para eles; a escrita hierática, uma simplificação da hieroglífica, era utilizada pelos sacerdotes; e a demótica era utilizada para escritos de menor importância.

em numeração hieroglífica por sete riscos verticais, passou a ser simbolizado por um símbolo semelhante a uma foice ().

O sistema de numeração egípcio foi constituído de modo rudimentar (hieroglífico), com sete números-chave (figura 230).

Figura 230 - Símbolos numéricos egípcios

Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Fonte: Uol Mundo Educação⁵.

Os números eram escritos combinando os números-chave, sem importar com a ordenação desses símbolos, apenas levando em consideração o valor atribuído a cada um desses símbolos e a quantidade de vezes que cada um precisava ser escrito para formar determinada representação.

Essa característica difere da escrita numérica da atualidade, tendo em vista que nosso sistema numérico é posicional, ou seja, a ordem em que os algarismos são escritos é de extrema importância para determinar sua quantidade (figura 231).

Figura 231 - Símbolos numéricos egípcios

5		34		1240	
30		125		2000	

Fonte: Blog do Kratos⁶.

⁵ MIRANDA, Danielle de. Sistema de numeração egípcio. Disponível em: <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm>>. Acesso em: 20 dez. 2018.

⁶ ALMEIDA, Luan. Sistemas numéricos. 2015. Disponível em: <<http://kratosnew.blogspot.com/2015/05/sistemas-de-numeracao-sao-um-conjunto.html>>. Acesso em: 20 dez. 2018.

Guelli (2002) informa que a inserção da ideia de fração no Egito é datada de 3000 a.C., em virtude da repartição do solo às margens do rio Nilo entre os habitantes do Egito. As terras localizadas à beira do rio Nilo eram conhecidas por sua fertilidade, principalmente no período pós-inundação. Por essa razão, as demarcações dos terrenos de cada agricultor eram muito criteriosas. Em virtude das inundações, as cercas de pedras eram derrubadas, tornando-se necessárias novas demarcações.

Funcionários do governo egípcio traçavam novamente os limites do terreno de cada agricultor. Para executarem essas medições, usavam cordas com unidades de medidas assinaladas por nós. Os “estiradores de cordas” verificavam quantas vezes a unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Por mais adequada que fosse a unidade de medida escolhida, dificilmente coincidia com um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Assim, os egípcios começaram a pensar em uma nova representação numérica: as frações.

Os egípcios interpretavam a fração como parte da unidade de medida. Por essa razão, usavam apenas frações unitárias, ou seja, frações cujo numerador sempre era o algarismo 1 (um). Para escrever essas frações unitárias, colocavam um sinal oval alongado representando o numerador e abaixo representavam o denominador, conforme seu sistema numérico. A figura 232 apresenta algumas das frações unitárias egípcias.

Figura 232 - Fração em notação hieroglífica

escrita egípcia	nossa escrita
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{21}$

Fonte: Blog do Professor Ines Reynold⁷.

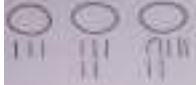
A notação de fração unitária era utilizada de maneira (re)corrente pelos habitantes do Egito, “mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios” (BOYER, 1974, p. 10). Esse autor indica que os egípcios se sentiam à vontade com o uso da fração $\frac{2}{3}$, tanto que ela possuía um símbolo hierático (); também ocasionalmente utilizavam sinais especiais (não

⁷ REYNAUD, Ines. Os egípcios e as frações. 2010. Disponível em: <<http://profinesreynaud.blogspot.com/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html>>. Acesso em: 20 dez. 2018.

elencados pelo autor) para frações do tipo $n/(n+1)$, notação que indica frações que complementam as frações unitárias. Exemplificando, $27/28$ é complemento da fração $1/28$. Quando somamos essas frações, encontramos o valor correspondente a uma unidade de medida.

Outra particularidade da civilização egípcia apresentada por Guelli (2002) e Boyer (1974) se trata das frações irredutíveis. Os autores elucidam o modo particular e complexo pelo qual os egípcios representaram essas frações (vide quadro 85).

Quadro 85 - Fração não-unitária e sua notação egípcia

Fração Geral	Decomposição em frações Unitárias	Notação Egípcia
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$	 (GUELLI, 2002, p.24)

Fonte: Elaborado pela equipe formadora.

“Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de $2/3$, como soma das frações chamadas *unitárias*, ou seja, aquelas de numerador igual a 1” (EVES, 2011, p. 73). Essas dificuldades foram amenizadas pela construção de duas tábuas de decomposição das frações, nas quais estão expressas algumas quantidades fracionárias e suas respectivas representações por meio das frações unitárias.

Boyer (1974) e Eves (2011) mencionam alguns valores de frações presentes nessas tábuas e sua respectiva representação hieroglífica. “Assim, encontramos $2/7$ expresso como $1/4 + 1/28$; $2/97$ como $1/56 + 1/679 + 1/776$; e $2/99$ como $1/66 + 1/198$. Apenas uma decomposição é dada para cada caso” (EVES, 2011 p. 73). Segundo Eves (2011) e Boyer (1974), existem inúmeras maneiras de representar uma fração por meio de frações unitárias, mas apenas um modo aparecia nos papiros (tábuas), ficando difícil identificar qual foi o critério adotado pelos egípcios para optarem por determinadas representações.

Tendo como base o processo de representação de frações por meio de frações unitárias (modelo hieroglífico), os egípcios sistematizaram alguns padrões que permitiram a representação de diversas frações em sua forma hieroglífica. “Assim como os egípcios, outros povos também criaram o seu próprio sistema de numeração. Porém, na hora de efetuar os cálculos, em qualquer um dos sistemas empregados, as pessoas sempre esbarravam em alguma dificuldade” (GUELLI, 2002, p. 25).

A complexidade das representações das frações não-unitárias, em virtude da repetição dos símbolos, fez com que os cálculos se tornassem extremamente complicados, impossibilitando estabelecer relação direta com o nosso sistema de numeração. Guelli (2002) afirma que apenas no século III a.C. é que começou a se formar um sistema de numeração mais prático e mais eficiente, o que foi acontecendo com o passar do tempo em diferentes civilizações.

Atividade 02 – Desatando nós de frações egípcias

Objetivo

- Conhecer o modo como os egípcios se relacionavam com as frações.

Material Necessário

- Lápis
- Papel
- Caneta

Tarefa 01: A partir das informações apresentadas no texto, represente cada fração a seguir, utilizando a simbologia egípcia.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2050}$

c) $\frac{1}{10200}$

d) $\frac{1}{69}$

Tarefa 02 – Fazendo uso da simbologia egípcia, represente as frações a seguir:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$

c) $\frac{1}{520} + \frac{1}{122}$

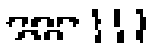
d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$

Cunhando frações

A Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, hoje correspondendo aos territórios do Iraque e regiões adjacentes da Assíria nos períodos de 3500 antes de Cristo até a Era Cristã. Ela é considerada o berço da civilização, onde a vida urbana floresceu e onde houve o domínio da metalurgia, assim como da engenharia e pela primeira vez na história passou a existir uma economia de larga escala.

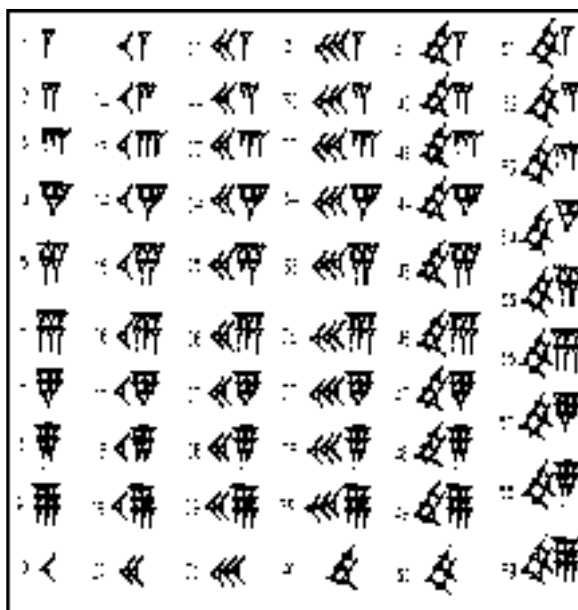
No quarto milênio da nossa era, essa civilização deixou o legado da comunicação escrita. Eles utilizavam placas de argila marcadas com estiletos, as quais eram secadas ao sol ou cozidas para aumentar sua durabilidade. Esse processo preservou por muitos anos seus documentos e, em particular, documentos envolvendo as operações matemáticas (BOYER, 1974).

A matemática na Mesopotâmia apresentava um aspecto eminentemente prático. Eles desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que era usado em soluções de problemas econômicos e comerciais. O seu sistema numérico era constituído pela base 60, e, para números inteiros menores até 59 (cinquenta e nove), seguiam a mesma estrutura que a hieroglífica egípcia, com repetição de símbolos para unidades e dezenas. Para além do número 59, os sistemas egípcios e babilônicos apresentavam divergências.

O número 59 na civilização egípcia era simbolizado por cinco calcanhares e nove bastões () e os babilônios, similarmente, utilizando símbolos diferentes, representavam esse número com cinco cunhas largas colocadas de lado, sendo que cada uma representava dez unidades e nove cunhas verticais finas (vide figura 4).

Anos mais tarde, esse povo percebeu que os símbolos da unidade e da dezena poderiam ser utilizados para representar qualquer número inteiro, por maior que fosse. Isso foi possível com a invenção da notação posicional, o mesmo princípio que assegura a eficácia do nosso sistema de numeração. “Eles viram que os seus símbolos poderiam ter função dupla, tripla, quádrupla, ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número” (BOYER, 1974, p. 20). Eles utilizavam um espaçamento adequado entre grupos de cunha para estabelecer as posições, e a leitura dos números deveria ser feita da direita para a esquerda, de forma crescente conforme a sua base (60), sendo que cada grupo (mesmo com símbolos iguais) apresentava um valor dependendo de sua posição, conforme figura a seguir.

Figura 233 - Sistema numérico mesopotâmico até o numeral 59



Fonte: Fiocruz.

O sistema posicional mesopotâmico era muito parecido com o que utilizamos hoje. Por exemplo, o número 222 usa o mesmo algarismo três vezes, com significados diferentes de cada vez. Fazendo a contagem da direita para a esquerda, o primeiro dois (2) corresponde a duas unidades, depois corresponde a duas dezenas e finalmente a duas centenas (duas vezes o quadrado de base 10), ou seja, $2(10)^2 + 2(10)^1 + 2(10)^0$. De maneira similar, para escrever o número 7322 no seu sistema, os babilônios faziam uso de forma múltipla do símbolo ($\begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix}$), ou seja, eles representaram com três grupos de duas cunhas cada ($\begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix}$), da direita para esquerda. O grupo da direita representava duas unidades; o segundo, o dobro da sua base; e o terceiro (mais da esquerda) o dobro do quadrado da base, ou seja, $2(60)^2 + 2(60)^1 + 2(60)^0 = 2 \cdot 3600 + 120 + 2 = 7200 + 120 + 2 = 7322$, em nossa notação. O símbolo zero consistia de duas cunhas colocadas obliquamente, e foi inventado para suprir a falta de um número, dessa forma foi possível distinguir $\begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix}$, ou seja, $2(60)^2 + 0(60)^1 + 2(60)^0 = 2 \cdot 3600 + 0 + 2 = 7202$ de $\begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{TT} \\ \text{TT} \end{smallmatrix}$, $2(60)^1 + 2(60)^0 = 120 + 2 = 122$ (BOYER, 1974).

Segundo Ifrah (2005), os babilonicos foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, fazendo uso de sua numeração de posição com base sessenta. Eles convertiam as frações em frações sexagesimais (frações cujo denominador é igual a uma potência de 60). Além do mais, o sistema posicional também era utilizado nas operações com frações.

Segundo Boyer (1974), os símbolos (𐎶 𐎶) eram usados não só para representar o número 122, mas também a fração $\frac{122}{60}, \frac{122}{3600}$. O número 122 era operado da seguinte forma: $2(60^1) + 2 = 120 + 2 = 122$.

Já a fração $\frac{122}{60} = 2 \cdot (60)^{-1} + 2 = 2 \cdot \frac{1}{60^1} + 2 = \frac{2}{60} + 2 = \frac{2+120}{60} = \frac{122}{60}$ e possuía a mesma simbologia do número 122 (𐎶 𐎶).

A fração $\frac{122}{3600}$ também utilizava o mesmo símbolo do 122 e da fração $\frac{122}{60}$, operada assim: $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{60^1} + 2 \cdot \frac{1}{60^2} = \frac{2}{60} + \frac{2}{60^2} = \frac{122}{60^2} = \frac{120+2}{3600} = \frac{122}{3600}$. Percebemos que o mesmo símbolo representa vários números diferentes, incluindo os fracionários, tudo dependia do contexto.

Na tentativa de melhorar a compreensão da maneira como os babilônios utilizavam as frações, Ifrah (2005), de forma análoga, estabelece a comparação entre a representação de fração utilizada pelos babilônios com a nossa noção de horas, minutos e segundos. O autor utiliza desse artifício para facilitar o entendimento acerca da utilização da base sexagesimal (base 60), tendo em vista que estamos habituados a utilizar apenas a base 10.

Os babilônios escreviam as frações na forma sexagesimal e as representavam como as frações de horas transformadas em minutos e segundos (IFRAH, 2005). Por exemplo, transformar 33 min 45 s em fração, o que foi realizado da seguinte maneira: Como uma hora tem 60 minutos, logo o denominador tem base 60 e o numerador é a quantidade de partes de uma hora (33). De maneira similar com os 45 segundos: sabemos que uma hora tem 60 minutos e 60 minutos têm 3.600 segundos $(60)^2$; logo, o denominador do 45s é 60^2 e o numerador o 45s, ficando assim: $\frac{33}{60}h + \frac{45}{60^2}h$. Percebemos que os denominadores estão todos relacionados com a base 60, a exemplo disso o $3.600 = (60)^2$. Outro exemplo, transformar 30 minutos e 02 segundos em fração $= \frac{30}{60}h + \frac{2}{60^2}h$.

Atividade 03 – Decifrando cunhas

Objetivo

- Conhecer o modo como os babilônios se relacionavam com as frações.

Material necessário

- Lápis
- Papel
- Caneta

Tarefa 01. A partir do estudo do texto, represente com a simbologia babilônica os seguintes numerais:

a) 7322

b) 136

c) 224

Tarefa 02. Tomando como referência a simbologia babilônica, represente as frações a seguir:

a) $\frac{7322}{60}$

b) $\frac{1230}{60}$

c) $\frac{136}{60}$

d) $\frac{225}{60}$

Tarefa 03. Agora é com você. Elabore uma fração e represente-a com símbolos babilônicos

Frações gregas ...

Todas as civilizações adotaram um sistema de numeração para desenvolver suas matemáticas envolvendo símbolos ou letras. Com os gregos não foi diferente. Eles utilizaram pelo menos dois tipos de numeração: ático e herodiânico (figuras 5 e 6). Esse sistema era organizado em agrupamento e utilizava a base 10. O sistema de numeração jônico ou alfabético (figura 5) também utilizava um sistema de base decimal e posicional, cifrado, representado por letras.

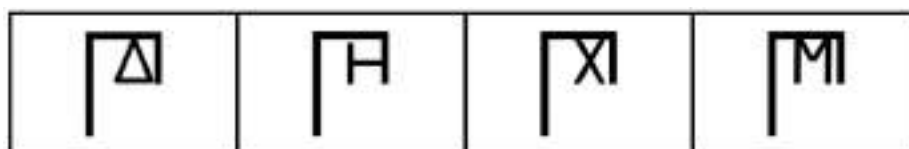
A origem de alguns dos símbolos dos numerais áticos ou herodiânicos advém do sistema romano, iniciando em maiúsculo. “Só maiúsculas eram usadas na época, tanto em obras literárias como na matemática, as letras minúsculas sendo uma invenção do período antigo final ou medieval inicial” (BOYER, 2012, p. 40). Observe a figura:

Figura 234 - Numeração ática

I	∏	Δ	H	X	M
-	Penta	Deca	Hecaton	Kilioi	Mirion
1	5	10	100	1.000	10.000

Fonte: Ciência de Garagem⁸

O símbolo para o número cinco Γ (penta) era utilizado em combinações com outros símbolos para representar múltiplos. Os números 50, 500, 5.000 e 50.000, por exemplo, eram representados da seguinte maneira (figura 235):

Figura 235 - Representação de 50, 500, 5000 e 50000 em grego

Fonte: Ciência de Garagem⁹

Uma vez que os gregos não dispunham de um sistema de numeração comum a todos os povos, havia diferenças em seu emprego em cada cidade-estado. Por consequência, esse sistema foi se aperfeiçoando e ganhando novos elementos até chegar ao sistema de numeração jônico ou alfabético.

δ(...) o sistema de numeração grego, conhecido como jônico ou alfabético, cujas origens situam-se já por volta do ano 45 a. C., é um exemplo de sistema cifrado. Ele é decimal e emprega 27 caracteres – as 24 letras do alfabeto grego mais três outras obsoletas: *digamma*, *kopa* e *sampi*. Embora se usassem letras maiúsculas (as minúsculas só muito mais tarde vieram a substituí-las) [...] (EVES, 2004, p. 35).

O sistema de numeração alfabético grego pode ser visto na figura a seguir, e as quantidades eram representadas por letras maiúsculas e minúsculas.

⁸ Blog Ciência de Garagem. **Como os sistemas numéricos evoluíram ao longo da história**. 2014. Disponível em: <<https://cienciadegaragem.blogspot.com/2014/12/como-os-sistemas-numericos-evoluiram-ao.html>>. Acesso em: 04 fev. 2019.

⁹ Blog Ciência de Garagem. **Como os sistemas numéricos evoluíram ao longo da história**. 2014. Disponível em: <<https://cienciadegaragem.blogspot.com/2014/12/como-os-sistemas-numericos-evoluiram-ao.html>>. Acesso em: 04 fev. 2019.

Figura 236 - Numeração alfabética

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ε	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	φ	phi	500
Ζ	ζ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	tota	9	Κ	ϙ	kopa	90	Ϟ	ϟ	san	900

Fonte: Fiocruz¹⁰

Para representar valores, agrupavam-se esses símbolos de forma a compor o número desejado, respeitando a ordem de posição. Para escrever o numeral 65, usava-se a letra *ksi* (Ξ ou ξ) juntamente com a letra *épsilon* (Ε ou ε), resultando Ξ Ε ou ξ ε. Esse formato poderia ser combinado somente até o numeral 999. Ou seja, poderíamos utilizar até três símbolos.

Para os numerais na casa dos mil até dez mil, utilizava-se o sinal que conhecemos hoje como apóstrofo (‘), porém, naquela época, de acordo com Boyer (2012) e Mol (2013), usava-se somente um risco na parte superior à esquerda do símbolo que representava as unidades, significando que 1.000 era ‘α. Por exemplo, o número 9.871 na simbologia grega era ‘θωα. Portanto, utilizavam-se quatro símbolos para formar números no intervalo do numeral 1.000 a 9.999. Já aos numerais iguais ou acima de 10.000, aplicava-se o fator multiplicativo acompanhado da *miríade* ou *mirion* Μ. Assim, o numeral 3.257.888 era representado τΜκΜεΜ’ξωπη ou Μ^τΜ^κΜ^ε’ξωπη.

Sabemos que tanto os números quanto as letras eram representados pelos mesmos símbolos. Imagine números e letras dentro de um mesmo texto, sendo enviados a um destinatário em uma carta ou papiro. Para diferenciar as palavras dos números dentro de um contexto usava-se uma barra sobre aquelas letras que representavam números, por exemplo, $\overline{\theta\phi\pi}$. Enquanto os gregos se organizavam, ao mesmo tempo iam estruturando de forma rigorosa e excepcional a matemática que desenvolviam, por meio de provas dedutivas e da sistematização de teoremas e demonstrações. Desse modo, os gregos elevaram a Matemática

¹⁰ MORAES, Denise. O sistema numérico grego. Disponível em: <<http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?inford=985&sid=9>>. Acesso em: 04 fev. 2019.

ao patamar de excelência entre as ciências (BARTHÉLEMY, 1999). Basicamente, sua matemática era baseada na geometria e na aritmética. A aritmética era conhecida como a arte de calcular os números (EVES, 2004). Porém, autores como Barthélemy (1999), Boyer (2012), Baumgart (1992), Eves (2004) e Roque (2012) afirmam que os gregos tinham muitas dificuldades em operações com números racionais e irracionais.

A notação dos números fracionários era bastante confusa, pois os símbolos apóstrofo ou risco também eram utilizados para indicar fração de numerador 1 ou fração unitária, porém, usava-se o risco na parte superior à direita do símbolo. Contudo, para a fração $\frac{1}{5}$ temos ε' , $\frac{1}{63}$ é igual a $\xi\gamma'$ e $\frac{1}{150}$ representava $\rho\nu'$.

Atividade 04 - Operando com os gregos

Objetivo

- Conhecer o modo como os gregos se relacionavam com frações.

Tarefa 01. Represente com a simbologia grega os seguintes numerais:

- a) 30
- b) 120
- c) 740
- d) 215
- e) 435

Tarefa 02: Simbolize como os gregos as seguintes frações:

- a) $\frac{1}{10}$
- b) $\frac{1}{36}$
- c) $\frac{1}{150}$
- d) $\frac{1}{360}$
- e) $\frac{1}{80}$

Tarefa 03: Agora é com você. Formule um numeral e o represente com a simbologia grega. Faça o mesmo com uma fração.

Frações em barras ...

Os chineses elaboraram seus sistemas de numeração há mais de 3.000 anos e ainda os utilizam até hoje. Eles contavam com dois sistemas de numeração: o posicional e o princípio multiplicativo. Em relação ao princípio multiplicativo, existiam símbolos diferentes para os dígitos de um a dez, e símbolos adicionais para as potências de dez. O zero era representado com um espaço vazio. Na figura 237, constam os treze (13) símbolos fundamentais utilizados pelos chineses.

Figura 237 - Sistema de numeração chinês

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	十	百	千	萬				
	10	100	1.000	10.000				

Fonte: IFRAH (2005, p. 228).

De um modo geral, a representação de um número usando o princípio multiplicativo era feita pela combinação dos símbolos das dezenas, das centenas, dos milhares e dezenas de milhares com os símbolos das unidades. Assim, o número 79.564, era representado com um símbolo de 10.000 precedido do algarismo 7, depois o de 1.000, antecedido do algarismo 9, o de 100 precedido pelo número 5, o de 10 antecedido pelo algarismo 6 e, por fim, o algarismo 4 (vide figura 238).

Figura 238 - Representação do número 79.564

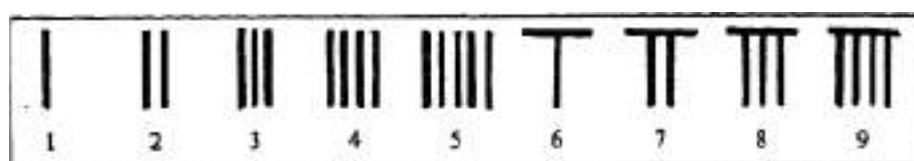
七	萬	九	千	五	百	六	十	四								
7	×	10.000	+	9	×	1.000	+	5	×	100	+	6	×	10	+	4
79.564																

Fonte: IFRAH (2005, p. 232).

Segundo Ifrah (2005), o sistema de numeração posicional foi redescoberto na época da dinastia Han (séculos II a.C. – III d.C.). A simbologia deste sistema numérico era feita com barras verticais e horizontais que correspondiam a nove unidades simples. As cinco primeiras

unidades eram concebidas por uma quantidade correspondente de traços verticais justapostos (uma unidade era representada por um traço vertical, duas unidades por dois traços verticais e assim sucessivamente até a representação de cinco unidades), o algarismo 6 (seis) por um traço horizontal com uma barra vertical, formando uma espécie de letra (T). As três últimas unidades eram representadas com duas, três e quatro barras verticais e uma barra horizontal sobreposta, formando respectivamente os algarismos 7 (sete), 8 (oito) e 9 (nove), contendo a simbologia do sistema de numeração posicional (vide figura 239). A partir daí, os números concebidos de duas ou mais ordens de unidades eram retratados segundo o princípio de posição.

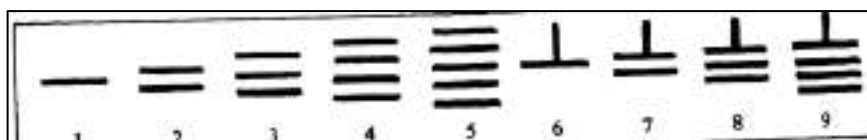
Figura 239 - Sistema posicional chinês



Fonte: IFRAH (2005, p. 244).

Contudo, essa numeração foi mudada, uma vez que causava ambiguidades. Os usuários se limitavam a justapor o mesmo número de barras para a representação das unidades das ordens consecutivas. Então, para contornar esse obstáculo, os sábios chineses introduziram uma segunda notação para as unidades simples, reformulando os símbolos semelhantes aos precedentes, mas desta vez com barras horizontais (vide figura 240).

Figura 240 - Símbolos chineses após reformulação



Fonte: IFRAH (2005, p. 245).

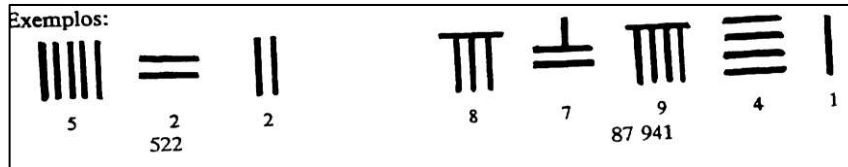
Após essa reformulação,

As cinco primeiras unidades passaram a ser figuradas pela mesma quantidade de barras horizontais superpostas, o número 6 por uma barra vertical em cima de uma barra horizontal, e as três últimas unidades colocando abaixo do traço vertical duas, três ou quatro barras horizontais (IFRAH, 2005, p. 245).

Além disso, distinguiram-se as diversas ordens de unidade alternando os algarismos da figura 10 (primeira série de símbolos) com os da segunda série (figura 11). Assim, as unidades da casa ímpar (unidades simples, centenas, dezenas de milhar, milhões) foram expressas por

meio dos algarismos verticais (figura 10); e as unidades de casas pares, com a ajuda dos algarismos horizontais (figura 11). Na figura 241, a seguir, observa-se o modo como os chineses representavam o número quinhentos e vinte e dois (522) e o número oitenta e sete mil novecentos e quarenta e um (87.941).

Figura 241 - Representação do número 522 e o 87942 pelos chineses



Fonte: IFRAH (2005, p. 245).

Segundo Boyer (1974), os chineses conheciam as operações com frações comuns, com as quais encontravam o mínimo denominador comum. Eles faziam analogias, referindo-se ao numerador como “filho” e ao denominador como “mãe”. Tinham a tendência pela decimalização das frações, isso porque utilizavam a forma decimal no tratamento de pesos e medidas e seguiram esse mesmo padrão nas frações.

Celestino (2017) diz que os chineses representavam as frações de uma maneira bem prática e parecida com a nossa. A única diferença é que, ao contrário de simbolizar a “fração imprópria” ($\frac{7}{3}$), eles escreviam por meio do número misto $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Todas as regras usuais, como reduzir uma fração que não está simplificada, somar e multiplicar frações, eram utilizadas pelos chineses.

Atividade 05 - Frações em barras

Objetivo

- Compreender o modo como os chineses lidavam com frações.

Tarefa 01: Dados os numerais, escreva-os na simbologia chinesa.

- | | |
|--------|----------------------|
| a) 523 | <input type="text"/> |
| b) 756 | <input type="text"/> |
| c) 378 | <input type="text"/> |
| d) 27 | <input type="text"/> |
| e) 115 | <input type="text"/> |

Tarefa 02: Represente as frações impróprias utilizando-se dos números mistos.

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{11}{8}$

c) $\frac{5}{4}$

Tarefa 03: Conforme apresentação dos seguintes números mistos; represente-os utilizando fração imprópria.

a) $2\frac{1}{3}$

b) $5\frac{1}{2}$

c) $3\frac{1}{4}$

d) $1\frac{2}{3}$

Tarefa 04: Agora é com você: elabore e responda uma questão similar a cada uma das três tarefas respondidas.

Irmãos hindus . . .

Segundo Eves (2011) e Boyer (1974), em virtude da falta de registros históricos autênticos, pouco se sabe sobre o desenvolvimento da Matemática hindu. A única fonte histórica preservada são as de uma ruína situada em Mohenjo Daro, uma cidade com aproximadamente 5.000 anos localizada em um sítio arqueológico no nordeste do Paquistão.

Nas ruínas dessa cidade foram encontrados vestígios de fundamentação científica baseada na Matemática e na Engenharia como, por exemplo, ruas largas, habitações de tijolos com banheiros ladrilhados, piscinas públicas e esgotos subterrâneos. Passados alguns anos, o país foi tomado pelos invasores arianos, que introduziram os sistemas de castas¹¹ e desenvolveram a literatura sânscrita¹².

O desenvolvimento da notação numérica na Índia parece ter seguido a mesma linha que se encontra na Grécia. A princípio, a notação numérica na Índia era feita com simples traços

¹¹ Um modelo de organização da sociedade a partir da divisão de classes sob a justificativa de preceitos religiosos.

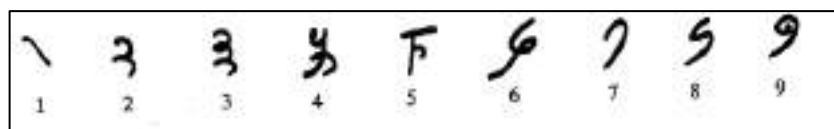
¹² É uma língua ancestral do Nepal e da Índia. Faz parte do conjunto das 23 línguas oficiais da Índia, visto que tem importante uso litúrgico no hinduísmo, budismo e jainismo. Suas origens apontam para uma língua hipotética mais antiga, que teria dado origem também ao grego, ao latim, ao celta e a outras línguas antigas da Europa e do Oriente.

verticais, dispostos em grupos. Mas na época de Asoka¹³, no terceiro século antes de Cristo, estava em uso um sistema semelhante ao herodiânico¹⁴. No novo sistema, a escrita era chamada de Karosthi, e nesta forma de escrita foram criados novos símbolos de ordem superior para quatro, dez, vinte e cem e continuou vigorando o princípio de repetição (EVES, 2011).

Aos poucos, essa escrita foi substituída por outra notação chamada de Brahmi, que se assemelhava à alfabética do sistema grego jônico. Para ocorrer a passagem dos numerais inteiros na notação Brahmi para a notação usual foram necessários dois passos. Primeiro, a percepção de que, pelo uso do princípio posicional, os símbolos para as primeiras nove unidades poderiam servir para os múltiplos correspondentes de dez e para qualquer potência de dez, o que tornaria supérfluos todos os símbolos Brahmi além dos nove primeiros. O segundo foi a introdução do numeral zero, que ocorreu em 876, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Com a introdução do décimo numeral (um ovo de ganso) para representar o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo, embora fosse bastante diferente do que temos hoje.

O sistema numérico hindu era feito de uma combinação de três princípios básicos, todos de origem antiga: (1) base decimal; (2) notação posicional; (3) forma cifrada para cada um dos dez numerais. A combinação desses três sistemas formou o moderno sistema de numeração. O desenvolvimento do nosso sistema de notação para os inteiros foi fruto das contribuições do moderno sistema numérico hindu. Na figura 242 constam os nove primeiros símbolos do sistema numérico hindu e seus correspondentes em nosso sistema numérico (BOYER, 1974).

Figura 242 - Nove primeiros símbolos do sistema numérico hindu



Fonte: IFRAH (2005, p. 265).

Segundo Ifrah (2005), a notação moderna das frações se deve aos hindus, que devido a sua numeração decimal de posição, simbolizavam as frações mais ou menos como usamos hoje. Como exemplo disso, é possível observar na fração $\frac{34}{1265}$, na qual o 34 é o numerador e o 1265 é o denominador, que os hindus não utilizavam a barra horizontal para separar o numerador do denominador, como é feito hoje.

¹³ Reinou sobre a maior parte do subcontinente índio, de 304 a. C. a 232 a. C. É considerado o fundador da Índia.

¹⁴ Também conhecido como os numerais áticos ou acrofônicos, foram usados na Grécia antiga por volta do século VII a. C. Foram descritos pela primeira vez no século II a. C num manuscrito de Aelius Herodianus.

Segundo Celestino (2017), para representar as frações eles escreviam os dois números, um sobre o outro, e a parte de baixo (denominador) representava o número de vezes em que foi dividido o inteiro. Não havia linha separando os números. A notação utilizada pelos hindus foi adotada pelos árabes, os quais aperfeiçoaram essa notação criando a barra horizontal para separar o numerador do denominador, estilo que ainda hoje utilizamos.

Atividade 06 - Frações na Índia

Objetivos

- Conhecer o modo como os hindus se relacionavam com as frações;

Tarefa 01 Conforme o texto, os hindus representavam as frações como fazemos hoje. A partir disso, represente de três maneiras distintas as seguintes frações (decimal, geométrico e percentual).

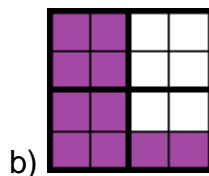
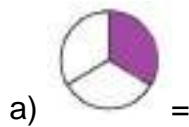
a) $\frac{34}{120}$

b) $\frac{15}{34}$

c) $\frac{154}{1234}$

d) $\frac{45}{456}$

Tarefa 02 – Represente a fração correspondente a cada figura de três maneiras distintas (fração, decimal, porcentagem).



Tarefa 03 – Represente de três maneiras distintas os numerais a seguir.

a) 10%

b) 0,25

c) $\frac{3}{4}$

d) $2\frac{1}{2}$

e) 

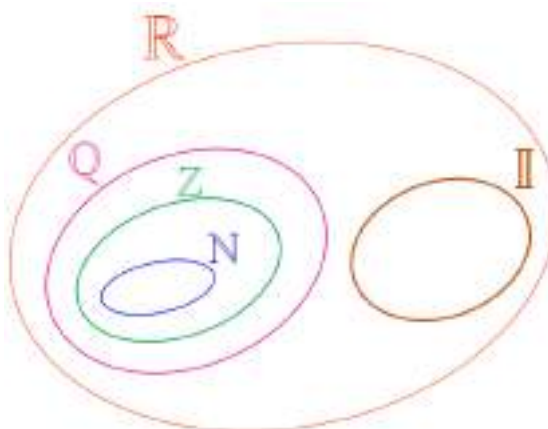
E por falar em nós: frações nos dias atuais...

O modo com que as civilizações organizaram suas noções de quantidades e com que estabeleceram relações simbólicas para expressar essas noções contribuiu de maneira substancial para o entendimento que temos sobre a representação de quantidades, qual seja, nosso sistema de numeração. Essas contribuições foram de fundamental importância no estabelecimento das linguagens matemáticas utilizadas no sistema hindu-arábico, considerado um dos desenvolvimentos mais significativos no campo da matemática. Trata-se de um sistema de numeração de base 10 (dez), constituído de dez símbolos, incluindo o 0 (zero), com os quais se pode representar os números. Outro diferencial desse sistema de numeração é o fato de que o mecanismo de funcionamento simula o uso do ábaco no papel. Esse mecanismo possibilitou a constituição do que denominamos conjuntos numéricos. A sistematização em naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais remete aos avanços na representação simbólica das quantidades e atendem às necessidades humanas ao longo da história (GUELLI, 2002).

O conjunto dos números naturais (números da natureza) remete a contagens e ordenação de objetos. Desse modo, podemos definir como números inteiros não negativos, representados pela letra maiúscula N, sendo eles $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$. O conjunto dos números inteiros é oriundo da necessidade dos seres humanos de representar quantidades menores que zero (negativas). Os números naturais integrados aos negativos originaram um novo conjunto numérico denominado inteiros e representado pela letra maiúscula Z, sendo $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Os números racionais (representados pela letra Q) retratam a necessidade da representação de parte de um inteiro; desse modo, esse conjunto se caracteriza pela possibilidade da representação de um número na forma de fração. Os números irracionais, representados pela letra I, não podem ser expressos na forma de fração, não são oriundos da divisão entre dois números inteiros e se constituem num subconjunto dentro dos números reais. Dentre os irracionais, encontram-se as raízes não exatas, o número π e o logaritmo neperiano.

A união de todos esses conjuntos numéricos constitui um novo conjunto, o conjunto dos números reais, representado pela letra maiúscula R. Verifique figura 243:

Figura 243 - Diagrama representando o conjunto dos números reais



Fonte: Blog professorferretto.¹⁵

Nosso interesse reside em tratar dos números racionais, e por definição temos que os racionais são todos os números que podem ser expressos na forma de fração. Em Dante (2013), os números racionais são expressos por $Q = \{x \in Q/ x = \mathbf{a} / \mathbf{b}, \text{ tal que } a \text{ e } b \in Z, b \neq 0\}$, onde **a** é chamado de numerador e **b** de denominador, sendo **b** um número diferente de 0 (zero).

Schastai, Farias e Silva (2017) tratam da fração como parte de uma unidade; representação de frações na reta numérica; fração como parte de um conjunto; e fração unitária como unidade de medida.

A fração como parte de uma unidade é desenvolvida a partir da percepção de que, ao dividirmos dois números naturais, o quociente nem sempre será um número natural. Desse modo, precisamos recorrer à representação de parte de um inteiro.

Para a representação de frações na reta numérica, as autoras chamam a atenção para a dificuldade de se estabelecer relação da representação entre o número fracionário e seu respectivo número decimal, evidenciando o distanciamento entre o conceito de frações e o Sistema Métrico Decimal (SMD).

A ideia de fração como parte de um conjunto explora o conceito de quantidade discreta (unidade inteira), representando na forma de fração a quantidade de subconjuntos presentes em determinado conjunto de elementos. Em referência a essa interpretação, um conjunto com 5 elementos, cada subconjunto com 2 elementos, corresponde a $2/5$ desse conjunto. De modo

¹⁵ Disponível em: <<https://blog.professorferretto.com.br/numeros-irracionais-e-reais/>>. Acesso em: 10 fev. 2019.

análogo, em um conjunto de 10 elementos, um subconjunto de 4 elementos também corresponde a $\frac{2}{5}$ desse conjunto (assim, $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ expressam uma relação de equivalência).

No que diz respeito à fração como unidade de medida, esse significado remete à compreensão de que, quando trabalhamos com fração, não estamos com um símbolo representado por dois números e sim com um número racional. Isso nos possibilita entender que, ao utilizar frações unitárias, o denominador determina o tipo de pedaço que está sendo utilizado.

Atividade 07 – Conhecendo mais sobre frações

Objetivo

- A partir de elementos históricos, ampliar a compreensão em relação ao conceito de fração.

Material necessário

- Livros didáticos;
- Dicionários de português;
- Dicionários de matemática;
- Internet.

Fazendo uso do material supramencionado, escreva um texto a partir das respostas das tarefas a seguir.

Tarefa 01 – O que é fração?

Tarefa 02 – Quais os termos de uma fração?

Tarefa 03 – É possível ter uma fração cujo denominador seja zero? Explique por quê.

Tarefa 04 – Identifique e exemplifique os diferentes tipos de fração.

Tarefa 05 – O que são frações equivalentes?

Equivalência

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam o conceito de equivalência e o utilize na solução de situações que envolvem frações.

Atividade 01 – Construindo o tangram

Objetivo

- Explorar conceitos matemáticos na construção do tangram.

Material necessário

- Régua
- Lápis
- Borracha
- Papel sulfite (02 folhas)
- Tesoura
- Cartolina ou EVA
- Dicionários

Encaminhamento metodológico

O professor dispõe o material aos cursistas e em seguida orienta-os para que respondam na folha sulfite, individualmente e sem a interferência de ninguém, os comandos apresentados no datashow.

Para efeitos didáticos, o professor apresenta, uma a uma, as perguntas. Daí, solicita que, individualmente e sem consulta, cada um execute os comandos indicados. Enquanto isso, o professor observa e acompanha o desenvolvimento das atividades sem interferir. Após um determinado tempo (pode ser 2 minutos), retira a pergunta e apresenta o comando seguinte. O professor procede desse modo até a última pergunta.

Enquanto os cursistas respondem aos comandos, o professor deve, sem interferir, observar os procedimentos utilizados.

Tarefa 01

Desenhe o que se pede:

- a) Sobre o papel sulfite, desenhe um quadrado.
- b) Trace uma diagonal.
- c) Marque o ponto médio de cada um dos lados do quadrado.
- d) Trace uma reta paralela à diagonal, de forma a encontrar o ponto médio de duas laterais do quadrado.
- e) Trace $\frac{3}{4}$ da outra diagonal, de forma que uma das extremidades alcance a reta paralela à primeira diagonal.

- f) Do ponto médio da reta paralela à primeira diagonal traçada, trace uma reta paralela a uma das laterais do quadrado inicial, até alcançar a primeira diagonal.
- g) Do lado oposto da reta paralela à lateral do quadrado, a partir da extremidade da reta paralela à primeira diagonal, trace uma reta paralela à segunda diagonal, até alcançar a primeira diagonal.

Tarefa 02 – Revisitando o desenho da tarefa 01.

- a) Sobre o papel sulfite, desenhe um quadrado.

O que é um quadrado?

- b) Trace uma diagonal.

O que é diagonal?

Que figuras aparecem agora? Defina-as.

- c) Marque o ponto médio de cada um dos lados do quadrado.

Defina ponto médio.

- d) Trace uma reta paralela à diagonal, de forma a encontrar o ponto médio de duas laterais do quadrado.

O que é reta paralela?

- e) Trace $\frac{3}{4}$ da outra diagonal, de forma que uma das extremidades alcance a reta paralela à primeira diagonal.

O que significa $\frac{3}{4}$?

- f) Do ponto médio da reta paralela à primeira diagonal traçada, trace uma reta paralela a uma das laterais do quadrado inicial, até alcançar a primeira diagonal.

- g) Do lado oposto da reta paralela à lateral do quadrado, a partir da extremidade da reta paralela à primeira diagonal, trace uma reta paralela à segunda diagonal, até alcançar a primeira diagonal.

Que desenho vocês acabaram de fazer?

(Sugerir aos cursistas que façam uma busca na internet para conhecer a história do tangram.)

Que figuras temos agora? Defina-as.

Encaminhamento metodológico

O professor solicita que os cursistas tomem uma nova folha de papel sulfite e, agora, sob sua orientação, respondam aos comandos indicados na tela. Ele repete cada um dos comandos, acompanha e orienta os cursistas no desenvolvimento da atividade, promovendo assim discussões no sentido de apontar soluções aos problemas identificados.

Conforme as tarefas vão sendo executadas, o professor deve efetuar perguntas, no sentido de instrumentalizar os cursistas em relação a conteúdos/conceitos matemáticos. O professor deve orientar também para que os cursistas consultem o dicionário para encontrar respostas às perguntas.

Tarefa 03 – Brincando com o tangram

Encaminhamento metodológico

Solicita-se que os cursistas desenhem o tangram na cartolina ou EVA e recortem cada uma das peças

Atividade 02 – Entendendo a equivalência

Encaminhamento metodológico

Utilizando o papel sulfite fornecido pelo professor regente, os cursistas devem responder o que entendem por equivalência. Ademais, devem procurar em diferentes fontes (internet, livro didático, dicionário) o significado de equivalência de frações.

Nas tarefas dois, três, quatro e cinco, os participantes devem utilizar as peças do tangram que foram recortadas na atividade 01 tarefa 03 e seguir os comandos das tarefas sobrepondo as peças e verificando a equivalência.

Tarefa 01 - Percebendo a equivalência.

- a) O que você entende por equivalência?
- b) Procure no dicionário o significado de “equivalência”.
- c) Verifique em livros didáticos de matemática como eles definem equivalência.
- d) Você sabe estabelecer equivalência de frações?

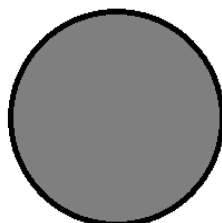
Tarefa 02 - Leia o texto a seguir. Ele o(a) auxiliará a compreender melhor a equivalência de frações.

Quantidades iguais representadas de modos diferentes

Aprendemos que a fração é parte de um inteiro e pode ser representada geometricamente, numericamente, dentre outras. Aprendemos ainda que podemos dividir o inteiro em diversas partes, as quais podem representar quantidades distintas ou a mesma

quantidade (equivalentes). Dito de outra forma, frações diferentes em sua representação numérica podem expressar a mesma quantidade (frações equivalentes) ou ainda representar quantidades diferentes. A única condição de existência de frações equivalentes é que elas pertençam ao mesmo inteiro. Observe o círculo a seguir (figura 244). Ele representa o inteiro:

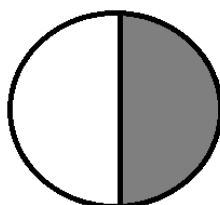
Figura 244 – Círculo



Fonte: Elaboração da equipe formadora.

Ao dividirmos o círculo ao meio (metade) e destacarmos uma das partes, teremos a representação da fração na forma geométrica $\frac{1}{2}$ = um meio = metade (figura 245):

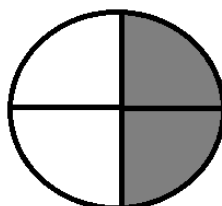
Figura 245 - Círculo dividido em duas partes



Fonte: Elaboração da equipe formadora.

Dividindo esse mesmo inteiro em quatro partes iguais e destacando duas dessas partes, teremos a representação na forma geométrica da fração $\frac{2}{4}$ = dois quartos (figura 246):

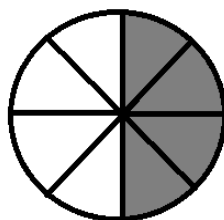
Figura 246 - Círculo dividido em quatro partes



Fonte: Elaboração da equipe formadora.

Caso o inteiro seja dividido em 8 (oito) partes iguais e sejam destacadas 4 (quatro), a fração $\frac{4}{8}$, representará numericamente a seguinte parte geométrica (figura 247):

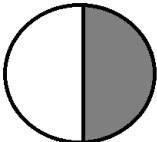
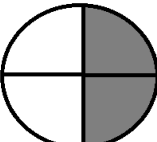
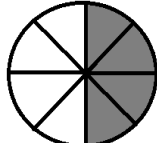
Figura 247 - Círculo dividido em oito partes



Fonte: Elaboração da equipe formadora.

As frações supramencionadas são equivalentes entre si; embora sejam indicadas por números diferentes, representam a mesma quantidade. Ao observar o desenho e as respectivas frações, pode-se perceber que elas representam sempre a mesma quantidade, o que pode melhor ser visto no quadro a seguir.

Quadro 86 – Frações equivalentes

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{2}{4}$
	$\frac{4}{8}$

Fonte: Elaboração da equipe formadora.

A equivalência de frações é um assunto que nos auxilia a entender que existem diferentes maneiras de representarmos uma fração. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) relatam que um mesmo número fracionário pode ser representado de diferentes (e infinitas) maneiras. A noção de equivalência se apoia na ideia de resolver diferentes divisões que resultam na mesma relação parte e todo. Tomemos como exemplo a representação de $\frac{1}{2}$, que pode ser escrita em infinitas representações, tais como $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10} \dots$, que

são denominadas frações equivalentes. Seu estudo é fundamental para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos como, por exemplo, a resolução de problemas que envolvem comparação e operações de números racionais expressos na forma fracionária.

Para se obter uma fração equivalente, faz-se necessário multiplicar e/ou dividir seus “termos” por um mesmo número diferente de zero. Tomemos a fração $\frac{4}{12}$. Ao multiplicarmos os termos por 2 $\left(\frac{4 \times 2}{12 \times 2}\right)$ obteremos $\frac{8}{24}$ que é equivalente a $\frac{4}{12}$. Da mesma forma, se dividirmos seus termos pelo número 2 $\left(\frac{4 \div 2}{12 \div 2}\right)$ teremos a fração $\frac{2}{6}$, que também é equivalente à fração considerada. Assim, $\frac{8}{24} = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Consideremos a fração $\frac{1}{3}$. Para obtermos frações equivalentes a essa, devemos multiplicar o numerador e o denominador por um valor comum a ambos os termos, nesse caso utilizamos o número 03 (três). Assim, teremos: $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$. Desse modo podemos dizer que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$.

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um número comum aos dois números, estamos reduzindo para uma representação numérica mais simples, ou seja, utilizando proporcionalmente menos partes para a representação do todo (denominador) e também da parte (numerador). Essa ideia nos fornece o conceito de simplificação de frações. Podemos dizer que uma fração está totalmente simplificada quando verificamos que seus termos (numerador e denominador) estão totalmente reduzidos a números que não possuam mais divisores entre si, desse modo encontramos uma fração denominada irredutível, uma fração que apresenta a representação mais simples de sua forma numérica, mantendo a mesma quantidade. Vejamos algumas simplificações de frações e suas respectivas frações irredutíveis (quadro 87):

Quadro 87 – Simplificação de frações

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÃO	FRAÇÃO IRREDUTÍVEL
$\frac{18}{26} = \frac{18 : 2}{26 : 2} = \frac{9}{13}$	$\frac{9}{13}$
$\frac{8}{16} = \frac{8 : 2}{16 : 2} = \frac{4}{8} = \frac{4 : 2}{8 : 2} = \frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{25}{100} = \frac{25 : 25}{100 : 25} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{24}{36} = \frac{24 : 6}{36 : 6} = \frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Fonte: Elaboração da equipe formadora.

Tarefa 03 - Verificando equivalência nas peças do tangram. Quantos triângulos pequenos são necessários para formar:

- a) O quadrado pequeno?
- b) O triângulo médio?
- c) O paralelogramo?
- d) Um triângulo grande?
- e) O quadrado inicial?

Tarefa 04 – Responda o que se pede:

- a) Quantos paralelogramos são necessários para compor o quadrado inicial?
- b) Quantos triângulos médios são necessários para formar os dois triângulos grandes?
- c) Quantos quadrados são necessários para formar o quadrado inicial?
- d) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar os dois triângulos grandes?
- e) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio?
- f) Quantos triângulos grandes são necessários para formar o quadrado inicial?
- g) Quantos triângulos pequenos são necessários para formar metade do quadrado inicial?

Tarefa 05 – Trabalhando fração equivalente com o uso das peças do tangram.

- a) O triângulo pequeno representa que fração do quadrado todo?
- b) O quadrado pequeno representa que fração do quadrado todo?
- c) O triângulo médio representa que fração do quadrado todo?
- d) O paralelogramo representa que fração do quadrado todo?
- e) O triângulo grande representa que fração do quadrado todo?
- f) O quadrado inicial representa que fração do quadrado todo?

Atividade 03 – Equivalência fracionária

Objetivo

- Compreender a equivalência fracionária.

Materiais necessários

- Lápis
- Papel Sulfite

- Caneta
- Borracha

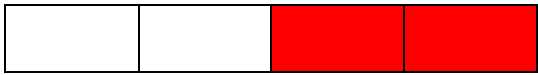
Encaminhamento metodológico

Após a entrega do material (papel sulfite, lápis, caneta e borracha), os participantes resolvem as tarefas seguindo os comandos indicados.

Tarefa 01- Indique a fração correspondente a cada figura.



Resposta: _____



Resposta: _____



Resposta: _____

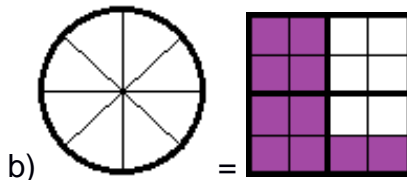
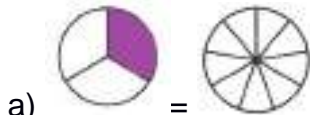


Respostas: _____

b) O que você percebeu? A fração $\frac{8}{16}$ é maior ou menor que a fração $\frac{4}{8}$? Por quê?

c) Represente a fração correspondente a cada figura na forma decimal e percentual.

Tarefa 02 - Pinte a figura, de modo a tornar verdadeira a sentença de equivalência.



Tarefa 03 – Escreva frações equivalentes.

a) $\frac{1}{4} =$

$$b) \frac{2}{3} = \square \square \square$$

$$c) \frac{3}{5} = \square \square \square$$

$$d) \frac{7}{4} = \square \square \square$$

$$e) \square \square \square = \frac{12}{24}$$

$$f) \square \square \square = \frac{14}{42}$$

$$g) \square \square \square = \frac{16}{40}$$

$$h) \square \square \square = \frac{15}{60}$$

Tarefa 04- Agora é com vocês! Elaborem atividades de equivalência de frações, tendo em vista o processo de ensino e aprendizagem de crianças de 4º e/ou 5º Ano do Ensino Fundamental.

5.2 Quarto encontro da formação

Conteúdo: Comparação de fração

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam e efetuem comparação de frações.

Encaminhamento metodológico

A classe será organizada em equipes de até cinco componentes. Daí, será solicitado que resolvam as atividades a seguir.

Tarefa 01 – Percebendo a comparação.

a) O que você entende por comparação?

- b) Procure no dicionário o significado de “comparação”.
- c) Você sabe comparar fração?

Tarefa 02 – Leia o texto a seguir. Ele o(a) auxiliará a compreender melhor a comparação de frações.

Comparação de fração

A comparação de fração comporta a ideia de ordem e se faz necessária à compreensão de equivalência de frações (MONTEIRO; GROENWALD, 2014). Além disso, as concepções de ordenação e de equivalência de frações são fundamentais para o entendimento dos números racionais, bem como para a compreensão da grandeza desse número (BEHR *et al*, 1992).

O fato de o ensino dos números naturais acontecer antes dos números racionais tem gerado obstáculos à aprendizagem de frações, isso porque grande parte dos estudantes tendem a transpor a ordenação dos números naturais para os números racionais. No conjunto dos números naturais, geralmente, os estudantes podem pensar de duas maneiras distintas, valorizando os aspectos cardinal e ordinal. O cardinal indica a quantidade de elementos constituintes de um conjunto, enquanto que o ordinal indica ordem, hierarquia. Por exemplo, o mês de novembro é composto de 30 dias, o número 30 indica o total, a quantidade absoluta de dias desse mês, o que representa um número cardinal. Já o ordinal, se faz representar pelo número do dia do mês, assim, 01, 02, 03 etc.

Em contrapartida, a ordenação dos números racionais não se concebe da mesma forma e, para muitas pessoas, esse processo não é tão simples. Ao se tratar de frações, como por exemplo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, não basta somente estabelecer relação entre os numeradores ou entre os denominadores. É necessário, sim, estabelecer relação entre os numeradores e denominadores de cada uma das frações e entre elas também. Embora o numeral do denominador 2 seja menor que o numeral do denominador 4, o significado na fração indica que um todo foi dividido igualmente em duas partes e outro todo em quatro partes. Isso significa que cada parte do todo dividido em duas partes representa metade ou 0,5, enquanto que, no outro, cada parte representa a quarta parte ou 0,25. No contexto das frações, quando se divide um para duas pessoas por exemplo, caberá metade (0,5) para cada uma, o que é maior do que quando se divide um para quatro, cabendo a quarta parte (0,25) para cada um. Portanto, a fração $\frac{1}{2}$ é maior que a fração $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Em outros termos, a relação entre numerador e denominador é o que concede significado a uma fração e não mais os numerais absolutos, vistos de forma independente (POST; BEHR;

LESH, 1986). Ainda segundo esses autores, os estudantes precisam compreender que os números racionais têm grandezas relativas e absolutas e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto, quanto no relativo.

Um exemplo de grandeza relativa pode ser visto quando se compara a fração $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta com $\frac{1}{3}$ de uma torta grande, em que a terça parte da torta grande seja maior que metade da torta pequena. Nesse exemplo, é preciso considerar que o todo não é o mesmo para as duas frações (tortas distintas e com tamanhos distintos), em que a fração $\frac{1}{2}$ é menor que a fração $\frac{1}{3}$. Mas se ambas as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ se referirem a um mesmo todo, a fração $\frac{1}{2}$ é maior que a fração $\frac{1}{3}$.

Para se ordenar frações há que se considerar: 1) a relação entre numerador e denominador; 2) que quanto mais se divide o todo, menor ficará cada parte dele; 3) que nas frações com mesmo denominador, há uma relação direta entre os números de partes que se tomam e a grandeza da fração, o que permite fazer a análise dos numeradores de forma absoluta; assim, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de um mesmo todo, a fração $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{2}{4}$ (POST *et al*, 1985).

Ao se comparar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, podemos seguir raciocínios distintos, como por exemplo:

- a) Encontrar denominador comum entre as duas frações e em seguida comparar seus numeradores, o que é possível por meio de frações equivalentes, assim:

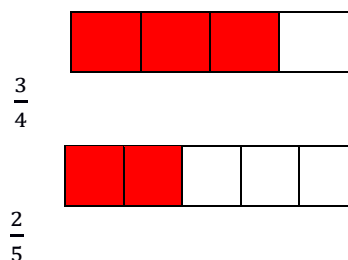
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} \quad \text{e} \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}.$$

Temos agora as respectivas frações equivalentes $\frac{15}{20}$ e $\frac{8}{20}$, o que facilita perceber que $\frac{15}{20} > \frac{8}{20}$, ou seja, $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

- b) Reconhecer a fração como uma divisão entre numerador e denominador, desse modo:

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4 \quad \text{logo, } 0,75 > 0,4, \text{ portanto, } \frac{3}{4} > \frac{2}{5}.$$

- c) Geometricamente podemos representar $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$ da seguinte maneira:



Ao observar as representações, percebe-se que $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

A partir do texto, analise as atividades a seguir e responda o que se pede.

Atividade 02 – Tratando de comparação a partir do tangram

Objetivo

- Comparar frações com o auxílio do tangram.

Tarefa 01 - Retome as peças do tangram e as nomeie como **t** o triângulo pequeno; **tm** o triângulo médio; **tg** o triângulo grande; **q** o quadrado pequeno; e **p** o paralelogramo. Tomando como referência o **t**, represente:

- a) $q =$
- b) $tm =$
- c) $p =$
- d) $tg =$
- e) Todas as peças do tangram =

Tarefa 02 - Suponha que, para construir o tangram, você teve um custo de R\$ 16,00. Qual é o custo:

- a) De um triângulo pequeno?
- b) Do quadrado pequeno?
- c) Do triângulo médio?
- d) Do paralelogramo?
- e) De um triângulo grande?
- f) De todas as peças do tangram?

Tarefa 03 - Retome a tarefa 3 (Trabalhando fração equivalente com uso das peças do tangram), da atividade 03 de Equivalência e responda o que se pede:

- a) Qual(is) peça(s) do tangram representa(m) a maior fração? Qual é a fração?
- b) Qual(is) peça(s) do tangram representa(m) a menor fração? Qual é a fração?

Atividade 03 - Ordenando frações

Objetivos

- Localizar, ordenar e comparar frações;

- Resolver problemas que envolvem comparação de frações.

Material necessário

- Régua
- Lápis
- Caneta
- Papel sulfite

Tarefa 01 – Localize na reta numérica as frações $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$.



Tarefa 02 – Ordene em ordem crescente as quantidades fracionárias representadas a seguir:

- 10%
- 0,25
- $\frac{3}{4}$
- $2\frac{1}{2}$



Tarefa 03- Agora compare a coluna da esquerda com a da direita e faça uso dos símbolos $>$,

$<$ ou $=$:

a) $\frac{3}{6}$ _____ $\frac{2}{6}$

b) $\frac{4}{5}$ _____ $\frac{3}{5}$

c) 0,533 _____ $\frac{1}{15}$

d) 0,2 _____ 0,5

e) _____ $\frac{1}{3}$

f) _____ $\frac{5}{3}$

g) três quintos _____ dois terços.

h) 10% _____ $\frac{1}{5}$

i) 20% _____ 

j) cinco quartos _____ $\frac{8}{3}$

k) $-\frac{3}{2}$ _____ $-\frac{2}{2}$

l) $\frac{10}{3}$ _____ $\frac{9}{4}$

m) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ _____ $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

n) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}}$ _____ $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{5}}$

o) $\frac{6}{4} \cdot \frac{3}{5}$ _____ $\frac{9}{3} \cdot \frac{2}{2}$

Tarefa 04 - A mãe de João e Ana fez um bolo de chocolate. João comeu $\frac{3}{5}$ e Ana 40% do bolo. Quem comeu mais bolo? Represente de forma geométrica a quantidade que cada um comeu.

Tarefa 05 - Tomando por base as figuras a seguir, indique qual fração do todo é maior.



Tarefa 06 - João comeu $\frac{1}{3}$ de uma torta. Camilo comeu $\frac{5}{12}$ da mesma torta.

- a) Quem comeu mais torta? _____
 b) Qual a fração total da torta comida? _____
 c) Que fração da torta sobrou? _____

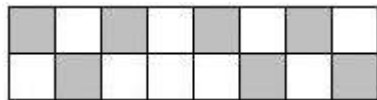
Tarefa 07 - Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações.

- a) () Em duas frações de mesmo denominador, a maior é aquela que possui maior numerador.
 b) () Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui menor denominador.
 c) () Em duas frações de mesmo numerador, a maior é aquela que possui maior denominador.

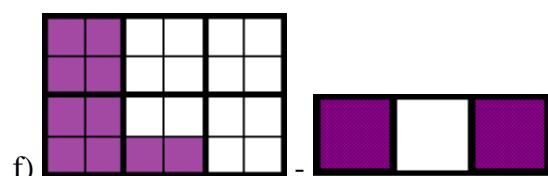
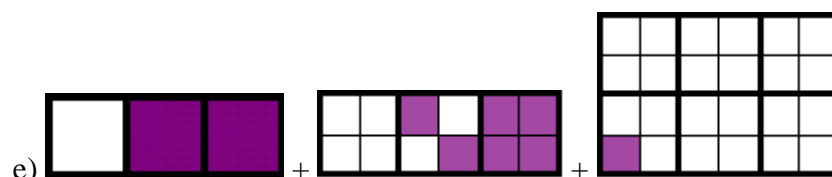
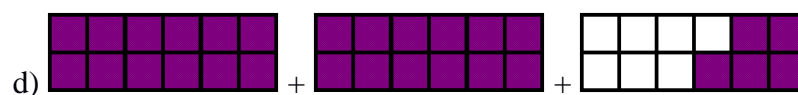
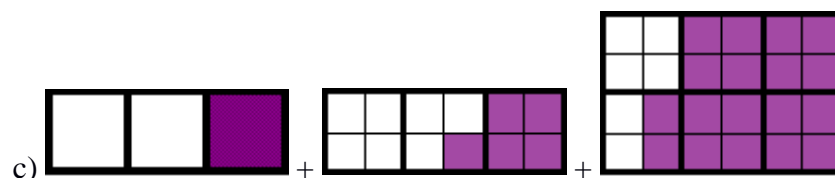
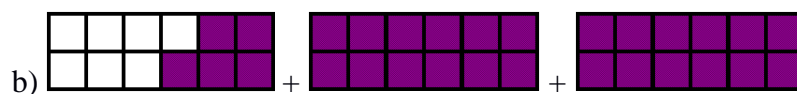
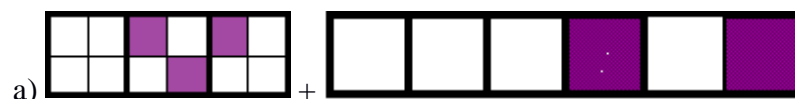
d) () $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

e) () 60% de 200 é igual ao triplo da quinta parte de 200.

f) () Na malha estão pintados $\frac{3}{16} + \frac{1}{4}$ do total de quadradinhos.



Tarefa 08 – Desenhe as frações indicadas nas operações:



Tarefa 09 – Agora é com vocês! Elaborem atividades de comparação de frações, tendo em vista o processo de ensino e aprendizagem de crianças de 4º e/ou 5º Ano do Ensino Fundamental.

Características das quantidades

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam as diferentes características das quantidades: discretas, contínuas; intensivas e extensivas.

Encaminhamento metodológico

A classe será organizada em equipes de até cinco componentes e será solicitado que resolvam as atividades a seguir. Ao concluir as atividades, as respostas serão socializadas com toda a classe.

Atividade 01- Compreendendo as características das quantidades

Materiais necessários

- Lápis
- Caneta;
- Papel Sulfite
- Borracha

Tarefa 01 – Leia o texto a seguir, que o(a) auxiliará a compreender as características das quantidades.

Características das quantidades

Para melhor compreender conceitos matemáticos como o de fração, por exemplo, muitas vezes se faz necessário verificar as características das quantidades, quais sejam: discretas, contínuas; intensivas e extensivas.

Quantidade discreta é um conjunto de objetos de mesma natureza (ou unidades naturais) que, mesmo depois de realizar algum tipo de operação matemática, continuam sendo da mesma natureza inicial, formando novo conjunto ou subconjuntos. As unidades naturais são características que definem uma quantidade discreta, como exemplos podemos citar as quantidades de botões, tijolos, bonés, bolinhas de gude, pessoas, votos, dentre outras. Note que se trata de quantidades cuja finalidade reside em unidades inteiras, embora matematicamente pode-se obter resultados menores que a unidade (NUNES *et al*, 2005).

As quantidades contínuas são unidades convencionais características de medidas. Podemos dizer que, mesmo que as quantidades sejam divididas exaustivamente, elas mantêm as mesmas características iniciais. Em outras palavras, quando se toma um padrão e se compara

esse mesmo padrão, estamos tratando de quantidades contínuas. As unidades convencionais, como o comprimento de uma mesa, o peso de algum objeto e a quantidade de água em uma limonada, são características de quantidades contínuas (NUNES *et al*, 2005).

Se a medida se baseia na comparação entre duas quantidades diferentes, trata-se de quantidades intensivas. Segundo Nunes *et al* (2005, p. 122), “quando a medida de uma quantidade se baseia na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva”. Em outros termos, as quantidades extensivas estão baseadas no princípio aditivo e as quantidades intensivas no princípio multiplicativo (NUNES *et al*, 2005).

Tendo dois recipientes contendo suco de laranja com capacidades de 80ml e 20ml, respectivamente, ao colocarmos esse suco todo em uma jarra, a quantidade de suco continua a mesma, formando um todo maior (100 ml), o que é igual à soma das partes. Esse é um exemplo característico de quantidade contínua e extensiva, na qual o produto final não se altera (NUNES *et al*, 2005). Agora, tendo dois recipientes com 500ml de suco de laranja cada um, sendo um com 80% de concentração e outro com 30% de concentração, ao colocarmos tudo numa única vasilha, a quantidade de suco permanece a mesma (500ml + 500ml), mas a concentração se altera. Essa alteração se deve ao fato de que em um recipiente havia 80 partes de suco concentrado e 20 partes de água, enquanto que no outro havia 30 partes de suco concentrado e 70 partes de água, o que não cabe estabelecer uma relação de adição. Esse é um exemplo característico de quantidade contínua e intensiva, na qual o produto final sofre alteração (NUNES *et al*, 2005).

Analisemos as situações a seguir.

- a) Numa fruteira encontram-se 4 maçãs e 6 laranjas. Qual a fração que representa a quantidade de maçãs da fruteira?
- b) Uma pizza circular foi dividida em oito partes iguais. Uma pessoa comeu três pedaços da pizza. Que fração da pizza ela comeu?

As duas situações estão baseadas na relação parte-todo. Na primeira, tem-se quantidades distintas (4 maçãs e 6 laranjas), totalizando 10 frutas. A pergunta nos remete à quantidade de maçãs em relação às frutas, neste caso tem-se $4/10 = 2/5 = 0,4 = 40\%$. Em outros termos, a parte que resta na fruteira é igual ao todo menos a parte considerada ($6 = 10 - 4$), portanto, trata-se de uma quantidade discreta e extensiva.

No caso da pizza, mesmo que tomemos somente pedaços da pizza, ela permanece sendo pizza, não ocorre mudança na natureza, o que denota quantidade contínua. Ao considerar 3 pedaços da pizza, a comparação se faz em relação ao total de pedaços da pizza, assim, temos

$\frac{3}{8}$ da pizza, restando assim $\frac{5}{8}$. Isso denota que estamos diante de uma situação de quantidade contínua e extensiva.

Tarefa 02 - Retome o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterize quantidades contínuas e quantidades discretas.

Tarefa 03 - Caracterize quantidade intensiva e extensiva.

Atividade 02 - Resolva os problemas a seguir e identifique as características das quantidades.

Objetivo

- Resolver diferentes problemas envolvendo natureza das quantidades.

Materiais necessários

- Lápis
- Caneta
- Papel sulfite
- Borracha

Nessa atividade, constam questões que figuraram na Prova Brasil. Para responder, os professores deverão reconhecer as representações indicadas e, mais que isso, efetuar conversões (DUVAL, 2009) seja da linguagem alfabética para figural seja ainda para representações numéricas (fracionárias, decimais ou percentual), o que pode se configurar em obstáculos para aqueles que não possuem familiaridade com o conteúdo de fração.

Tarefa 01 - (Prova Brasil 2009) Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas? Classifique em discreta, contínua, extensiva e intensiva.

(A) ●●○○○○

(B) ●●●○○○

(C) ●●●●○○

(D) ●●●●●○

Tarefa 02 - (Prova Brasil 2009) Observe as figuras a seguir:



A parte pintada dessas figuras é representada pelas frações:

- (A) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{1}$
 (C) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$
 (D) $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$

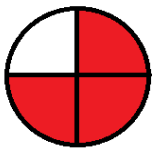
Tarefa 03 - (Prova Brasil 2009) A coleção de CD e DVD de Bruno está em um armário, distribuída conforme representa a figura a seguir:



Que porcentagem da coleção de Bruno correspondem aos jogos?

- (A) 20%
 (B) 25%
 (C) 30%
 (D) 75%

Tarefa 04 - Pinte $\frac{1}{6}$ da seção pintada do disco. Que fração do disco você pintou?



Tarefa 05 - Se a capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é de 39 litros, qual a capacidade do recipiente?

Registros de representação semiótica

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam que o conceito de fração comporta diferentes registros de representação semiótica.

Encaminhamento metodológico

A classe será organizada em equipes de até cinco componentes com o objetivo de resolverem as atividades a seguir. Ao concluir as atividades, deve-se socializar as respostas com toda a classe.

Atividade 01 - Concebendo os diferentes registros de representação semiótica

Materiais necessários

- Lápis
- Caneta
- Papel Sulfite
- Borracha

Possivelmente, na leitura do texto, os participantes encontrarão termos/conceitos com os quais não estão familiarizados, o que certamente demandará que os formadores contribuam para o processo de compreensão a fim de facilitar a resolução das atividades. Os formadores devem dar atenção especial para que os professores compreendam o que significam as representações mentais, computacionais e semióticas; que a conversão implica na passagem de um registro de representação semiótica para outro também semiótico; que o tratamento é uma transformação interna a um registro semiótico; e que é necessária a utilização de diferentes registros de representação semiótica para que ocorra a aprendizagem.

Tendo clareza disso, certamente os professores não apresentarão dificuldades em responder as tarefas demandadas.

Tarefa 01 – Leia o texto a seguir, que o(a) auxiliará a compreender que o conceito de fração comporta diferentes registros de representação semiótica.

Registro de representação semiótica

De acordo com o *Dicionário Aurélio*, o termo *representação* significa “quadro, escultura ou gravura que reproduz uma coisa ou pessoa”; “exposição verbal ou escrita do que temos na mente”. Já para o termo registro, dentre seus vários sentidos destacamos o “ato de registrar” algo em alguma coisa ou lugar.

Duval (2009) destaca três perspectivas para o termo representação: representação mental, representação interna ou computacional e representação semiótica.

As representações **mentais** estão relacionadas à objetivação, que é responsável por formar novas representações. Essas representações correspondem às descobertas da própria pessoa e não se limitam às imagens mentais, mas incluem conceitos, ideias, noções e crenças; portanto, estão relacionadas aos conhecimentos e valores do indivíduo na convivência com seus pares e com a sociedade. Nesse sentido, as representações mentais são também representações conscientes, essenciais, se observarmos pelo ponto de vista cognitivo.

As representações **internas ou computacionais** estão relacionadas ao *tratamento* de informações de forma mecânica por um sistema. “Essas representações traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável e combinável no interior desse sistema” (DUVAL, 2009, p. 47). Segundo o autor, trata-se de uma inteligência artificial, interna e não consciente, em que o sujeito apenas executa mecanicamente essas representações por meio de regras, macetes ou fórmulas.

As representações **semióticas**, por sua vez, estão relacionadas a um sistema de signos, linguagem, gráficos, que podem ser transformados em outros sistemas, também semióticos, de representação equivalentes, com significações diferentes. “A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro” (DUVAL, 2009, p. 32). Em outros termos, isso seria uma mudança de forma de uma representação inicial, da forma de linguagem natural para uma representação gráfica, por exemplo.

Duval (2009) cita três fenômenos que estão estreitamente interligados, relacionados ao desenvolvimento do conhecimento e aos impedimentos quanto à aprendizagem encontrada nas representações. Esses problemas são: diversificação dos registros de representação semiótica (gráficos cartesianos, esquemas, tabelas, cada um exige aprendizagens específicas); diferenciação entre representante e representado (objeto matemática e sua representação semiótica); e coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis.

Na resolução de tarefas, os sujeitos podem usar conversão e/ou transformação, atribuindo o mesmo significado para ambos; no entanto, há uma diferença considerável entre esses termos. O **tratamento** é uma transformação de uma representação em outra que se dá no interior do mesmo sistema semiótico. A **conversão** requer a mudança de sistema semiótico; portanto, há a mobilização de um novo registro.

Tomemos como exemplo a seguinte situação: $0,2 = 2/10 = 1/5 = 20/100 = 20\%$.

Nesse caso, temos três registros de representação semiótica distintos (decimal, fracionário e percentual). Ao passar do registro decimal (0,2) para fracionário ($2/10 = 1/5 = 20/100$), temos uma conversão, assim como na passagem de fracionário ($2/10 = 1/5 = 20/100$) para percentual (20%). Na passagem de uma fração para outra, mantivemos o mesmo registro semiótico, ou seja, representamos frações equivalentes; portanto não houve mudança de sistema semiótico, o que denota o uso do tratamento.

Para Duval (2009), os estudantes não encontram muita dificuldade nas atividades que tratam da transformação por meio do tratamento, mas sim nas atividades de conversão. Isso revela a importância de se trabalhar com os estudantes as diferentes maneiras de representar um mesmo objeto matemático.

Tarefa 02 - Diferencie conversão de tratamento.

Tarefa 03 - Dê exemplos de conversão e de tratamento.

Tarefa 04 - Converta a fração $\frac{25}{100}$ em diferentes registros (decimal, geométrico, percentual).

Tarefa 05 - Encontre frações equivalentes a $\frac{25}{100}$.

Atividade 02 - Atividades envolvendo registros de representação semiótica

Muitas das tarefas integraram a Prova Brasil e se revestem de importância singular no processo de ensino e aprendizagem, especialmente porque tratam e/ou figuram situações implicadas em nosso dia a dia e, normalmente, despertam interesse das crianças. As questões requerem o reconhecimento e a utilização de diferentes registros de representação semiótica, a fim de encontrar respostas ao que está sendo solicitado. Outro aspecto importante é o fato de levar os professores a entender que a porcentagem pode ser vista como uma fração cujo denominador é 100.

Embora aparentemente o conteúdo seja simples, para muitos professores ele se configura em obstáculos. Daí a necessidade de possibilitar o desenvolvimento de atividades que exijam a mobilização de diferentes registros de representação semiótica.

Tarefa 01 – Retome as tarefas 01, 02 e 03 da atividade 02 do texto “natureza das quantidades” e as retrate utilizando os registros de representação semiótica decimal, percentual e linguagem alfabética.

Tarefa 02 - Retome a atividade 02 tarefa 05 do texto “natureza das quantidades”. Agora responda que porcentagem representa $\frac{3}{5}$ da capacidade deste tanque?

Tarefa 03 - (Prova Brasil 2009) Das 15 bolinhas de gude que tinha, Paulo deu 6 para o seu irmão. Considerando-se o total de bolinhas, a fração que representa o número de bolinhas que o irmão de Paulo ganhou é

(A) $\frac{6}{15}$.

(B) $\frac{9}{15}$.

(C) $\frac{15}{9}$.

(D) (D) $\frac{15}{6}$

Tarefa 04 - (Prova Brasil 2009) Aprendemos que fracionar é dividir, desta forma, observe as partes pintadas das figuras, as quais estão representadas na forma de fração, número decimal e porcentagem. Verifique qual delas apresenta todas as igualdades e formas de representações corretas.



$$= \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$



$$= \frac{1}{4} = 0,25 = \frac{40}{100} = 40\%$$



$$= \frac{3}{3} = 0,3 = \frac{30}{100} = 30\%$$



$$= \frac{1}{2} = 0,2 = \frac{20}{100} = 30\%$$

Tarefa 05 - Quantos alunos, de uma classe com 60 alunos, jogam volêi, se sabemos que 10% dos alunos dessa classe praticam esse esporte?

Tarefa 06 - (Prova Brasil 2011) Na quarta série, os 13 meninos correspondem a 50% da turma. Assim, pode-se dizer que nesta 4ª série tem

(A) 13 alunos

- (B) 26 alunos
- (C) 50 alunos
- (D) 63 alunos

Tarefa 08 - (Prova Brasil 2009) João está participando de uma corrida de bicicletas, na qual o percurso total da prova é de 45 km. Ele já percorreu $\frac{1}{3}$ desse percurso. Isso significa que ele já percorreu:

- (A) 9 km
- (B) 10 km
- (C) 12 km
- (D) 15 km

Tarefa 09 - (Prova Brasil 2009) Sônia foi até a panificadora comprar biscoito. Para brincar com o vendedor, pediu $\frac{1}{4}$ de um quilo. Quantos gramas de biscoito Sônia pretendia comprar?

- (A) 200g
- (B) 250g
- (C) 400g
- (D) 500g

Tarefa 10 - (Prova Brasil 2009) Para a estreia de um filme, foram colocados à venda 120 ingressos, que correspondem ao número total de poltronas do cinema. Foram vendidos 50% desses ingressos. Quantas pessoas assistiram ao filme?

- (A) 30
- (B) 40
- (C) 50
- (D) 60

Tarefa 11 - (Prova Brasil 2009) A 4ª série da professora Helena tem 36 alunos. Ela organizou um passeio onde todos os alunos foram. Como em todo passeio deve-se levar lanche, a professora distribuiu da seguinte maneira: 25% dos alunos levaram refrigerantes, 25% levaram doces e 50% levaram salgados. A porcentagem de alunos que levaram refrigerantes e salgados é de:

- (A) 25%

- (B) 50%
 (C) 75%
 (D) 100%

Tarefa 12 - Considerando a figura a seguir, represente a parte pintada utilizando diferentes registros de representação semiótica: linguagem natural, fração, decimal, percentual¹⁶. Em relação à natureza das quantidades, responda se é contínua ou discreta.

Tarefa 13 - Considere a figura a seguir, represente-a na forma decimal, percentual e em linguagem natural. Em relação à natureza das quantidades, responda se é contínua ou discreta.



5.3 Quinto encontro da formação

Conteúdo: Significados de frações

Objetivo

- Proporcionar condições para que os cursistas compreendam que o conceito de fração comporta diferentes significados.

Encaminhamento metodológico

A classe será organizada em equipes de até cinco componentes. Será solicitado que as equipes resolvam as atividades a seguir. Ao concluir essa etapa, as respostas serão socializadas com toda a classe.

Atividade 01 - Compreendendo diferentes significados de fração

Tarefa 01 – O texto a seguir o(a) auxiliará a compreender que o conceito de fração comporta diferentes significados.

¹⁶ Baseado em Santana (2012).

Diferentes significados de frações

Segundo Nunes *et al* (2003) apud Merlini (2005), a classificação teórica do conceito de fração contempla cinco significados, a saber, Número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. “Consideramos que é importante conhecer as diferentes ideias das frações porque essas têm relação com a construção do conceito de números fracionários” (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 87).

Significado parte-todo

Segundo Merlini (2005, p. 28), “a ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais e que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$ ”. Silva (2005, p. 106) define a concepção desse significado como aquela que

emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais, em quantidades de objetos. Usualmente, são manipulados dois tipos de objetos *ostensivos*: o registro da escrita simbólica a/b , associado ao registro figural, em que regiões ou conjuntos de figuras representando elementos discretos aparecem em partes iguais.

Os problemas a seguir são exemplos de situação de fração que comporta o significado parte-todo:

- a) Adílio foi ao supermercado e comprou uma barra de chocolate branco, partiu-o em 5 partes iguais e deu a seu amigo Ademir 2 partes. Qual a fração que representa a parte de chocolate que sobrou para Adílio?
- b) Numa eleição, o candidato A obteve $\frac{4}{10}$ dos votos, o candidato B obteve $\frac{1}{5}$ e o candidato C obteve $\frac{1}{10}$. Os demais foram votos brancos ou nulos. Qual candidato obteve o maior número de votos?

Note que o primeiro enunciado faz referência a uma barra de chocolate (quantidade contínua) que foi partida em cinco partes iguais enquanto que o segundo trata de uma quantidade de votos numa disputa eleitoral. Nesse caso, a comparação se dá entre a quantidade de votos obtidos por um dado candidato e o total de eleitores que votaram. Assim, trata-se de quantidades discretas (unidades inteiras), vez que não se pode ter parte de voto.

Tarefa 02 – Responda os problemas “a” e “b” que tratam da fração com significado parte-todo.

a) Adílio foi ao supermercado e comprou uma barra de chocolate branco, partiu-o em 5 partes iguais e deu a seu amigo Ademir 2 partes. Qual a fração que representa a parte de chocolate que sobrou para Adílio?

b) Numa eleição, o candidato A obteve $\frac{4}{10}$ dos votos, o candidato B obteve $\frac{1}{5}$ e o candidato C obteve $\frac{1}{10}$. Os demais foram votos brancos ou nulos. Qual candidato obteve o maior número de votos?

Tarefa 03 – Retome o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterize quantidades contínuas e quantidades discretas.

Significado número

Esse significado se refere ao fato de que a fração, da mesma maneira que os números inteiros, não precisa necessariamente remeter a uma determinada quantidade (contínua ou discreta). É ao compreender que a fração é um número “existem duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal” (MERLINI, 2005, p. 27). Assim, o sujeito não precisa recorrer a situações particulares no contexto das quantidades contínuas e/ou discretas para compreender e resolver problemas como: “converta o número decimal 1,5 em uma representação fracionária”; ou ainda: indique numa reta numérica os números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Note que aqui se estabelece relação entre a quantidade indicada no numerador e a quantidade indicada pelo denominador.

Tarefa 04 – Converta o número decimal 1,5 para fração.

Tarefa 05 – Localize na reta numérica as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Significado medida

O significado medida está associado à ideia de comparação entre duas quantidades (intensivas e extensivas), sendo que algumas medidas são obtidas por meio da relação entre variáveis. “Para tal se faz necessário o estabelecimento de um referencial de comparação único para grandezas de mesma espécie como, por exemplo, centímetros para metros” (SANTANA, 2012, p. 59); em outros termos, esse significado está ligado à identificação de quantas vezes uma unidade “cabe” em outra e que fração corresponde a essa comparação.

O significado medida pode ser observado em situações que envolvem tanto as quantidades extensivas quanto as intensivas. Veja as situações a seguir.

- a) No preparo de um litro de suco, Dona Maria utiliza 3 medidas de água e 2 medidas de polpa de fruta. Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?
- b) Júlia foi ao supermercado e colocou na cesta de frutas 4 maçãs, 3 bananas e 3 peras. Qual a fração que representa a quantidade de bananas da cesta?

Note que no caso do preparo do suco, as quantidades se misturam e não é mais possível separá-las, formando um todo contínuo. Esse é um exemplo característico de quantidades contínuas e intensivas. Já no caso das frutas, há ampliação da quantidade de frutas, podendo, se for o caso, separá-las em suas unidades. Temos, portanto, um exemplo característico de quantidades discretas e extensivas.

Tarefa 06 – Retome o texto que versa sobre a natureza das quantidades e caracterize quantidades intensivas e extensivas.

Tarefa 07 – Responda os problemas “a” e “b” relativos ao significado fração como medida.

Significado quociente

Segundo Merlini (2005), o significado quociente está presente nas situações em que a operação de divisão se torna uma estratégia eficaz na resolução de uma determinada situação. “Isso significa que conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo” (MERLINI, 2005, p. 30).

Nesse sentido, a operação de divisão consiste na técnica apropriada na resolução de situações de significado quociente, em que o ato de dividir (distribuir) uma quantidade a em partes iguais b está ligado à ideia de relacionar um número fracionário $\frac{a}{b}$ à operação $a \div b$. Ao utilizar essa concepção, a fração $\frac{3}{4}$ pode ser vista como três dividido por quatro, o que nos leva a compreender a fração de outra maneira e associá-la aos números naturais, uma vez que $\frac{3}{4} = 0,75$. Além disso, o número fracionário $\frac{7}{3}$ pode ser representado de maneiras distintas: $\frac{7}{3} = 7:3 = 2,33 \dots$ ou $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$. No primeiro caso, temos a conversão de número fracionário para decimal; e no segundo, mudou-se somente a forma de representar a fração, passando para forma de número misto (PAULA, 2013).

Veja as situações a seguir:

- a) Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
- b) Júlia comprou 35 bolinhas de gude para dividir igualmente a seus 5 filhos. Que fração representa essa divisão?

Tarefa 08 – Responda os problemas “a” e “b” relativos ao significado fração como divisão.

- a) Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
Júlia comprou 35 bolinhas de gude para dividir igualmente a seus 5 filhos. Que fração representa essa divisão?

Significado operador multiplicativo

O significado operador multiplicativo está associado ao papel de transformação, isto é, “a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo” (MERLINI, 2005, p. 31). As situações que mobilizam essa concepção consideram que frações $\frac{a}{b}$ são apresentados como números e compreendidas com operações de multiplicação dos fracionários com as quantidades iniciais que foram consideradas. Ou seja, a ação do operador multiplicativo modifica um estado inicial produzindo um estado final (SILVA, 2005).

Tarefa 09 – Responda os problemas “a” e “b” relativos ao significado fração como operador multiplicativo.

- a) João tomou $\frac{3}{5}$ de um litro de suco. Qual a quantidade de suco que ele tomou?
- b) Marcos tinha uma coleção de 30 figurinhas e deu a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantas figurinhas Marcos ficou?

Atividade 02 – Analise as situações a seguir. Responda ao que se pede e classifique-as em relação ao significado de fração (parte-todo, medida, número, quociente, operador multiplicativo).


Objetivos


- Resolver problemas envolvendo os diferentes significados de fração;
- Classificar cada problema na perspectiva dos significados de fração (parte-todo, medida, número, quociente, operador multiplicativo).


Materiais necessários

- Lápis
- Papel sulfite
- Caneta
- Borracha

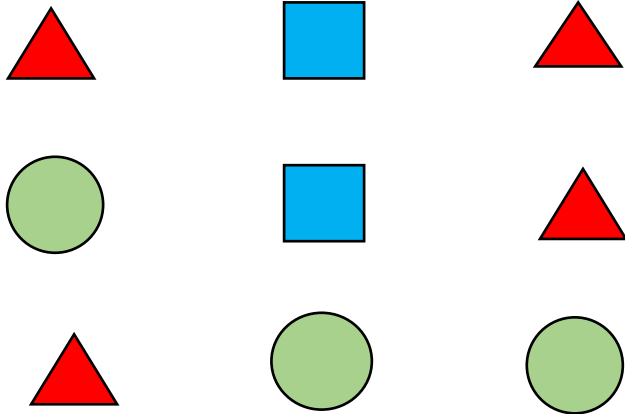
Tarefa 01- Indique a fração da parte da figura que foi pintada.

a)  _____

b)  _____

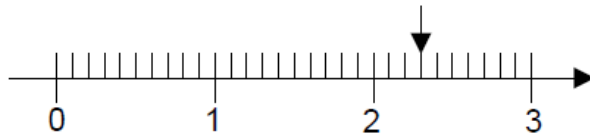
c)  _____

Tarefa 02 – Observe a coleção de figuras e indique a fração que corresponde aos triângulos.



Tarefa 03 - Pedro tem três bolinhas de gude, João tem 04 e Marcos tem 05. Que parte das bolinhas cada um tem?

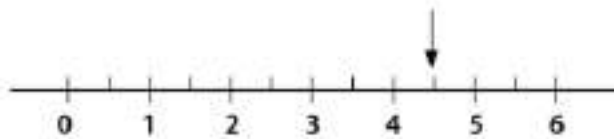
Tarefa 04 - (Prova Brasil 2009) As balanças podem ser utilizadas para medir a massa dos alimentos nos supermercados. A reta numérica na figura seguinte representa os valores, em quilograma, de uma balança.



A partir da figura, tem-se que a seta indica uma massa, em quilogramas, de

- (A) 0,30.
- (B) 0,23.
- (C) 2,30.
- (D) 2,03.

Tarefa 05 - (Prova Brasil 2009) Na reta numérica abaixo, o ponto identificado pela seta representa qual número decimal?



- (A) 0,4
- (B) 0,45
- (C) 4,5
- (D) 5,5

Tarefa 06 - Quanto chocolate cada criança irá receber se distribuirmos igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças?

Tarefa 07 - Quantas bolinhas cada menino receberá se distribuirmos igualmente doze bolinhas entre quatro meninos?

5.4 Estudando sobre Sequência Didática

Atividade 01 – Estudando sequência didática

Objetivo

- Refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem a partir de sequência didática.

Encaminhamento metodológico

Organizar os cursistas em equipe de até cinco componentes e solicitar que desenvolvam as atividades a seguir.

Nos últimos tempos, educadores têm falado muito em trabalhar a partir do desenvolvimento de sequência didática. Contudo, o que tudo indica é que, no fazer de sala de aula, os professores disponibilizam aos estudantes uma dada quantidade de atividades e as chamam de sequência didática, mesmo sem saber exatamente o que isso significa. O texto apresentado a seguir tem a intenção de instrumentalizar os professores no processo de elaboração de atividades encadeadas e articuladas entre si, de modo que eles se tornem organizadores, articuladores e mediadores no processo de ensino e coloquem os estudantes como agentes no processo de aprendizagem. Assim, tanto o professor como os estudantes passam a ser agentes no processo de ensinar e aprender, o que requer uma mudança de postura e concepção em relação ao fazer de sala de aula.

Tarefa 01 – O Curso de Formação Continuada em andamento pautou-se pelo desenvolvimento de sequência didática sobre fração, considerando: registros de representação semiótica, significados de fração, natureza das quantidades, assim como a equivalência e comparação de fração. Diante disso, o que a equipe entende por sequência didática?

Tarefa 02 – Leiam o texto a seguir, que os auxiliará a compreender melhor o trabalho com sequência didática.

Sequência didática

Pesquisas, assim como nossas experiências docentes, nos imputam a responsabilidade de pensar em alternativas para contribuir com a superação da problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem de fração. Nesse sentido, optamos pela proposição de atividades cuja metodologia de ensino coloque os estudantes na centralidade do processo de ensino e aprendizagem, o que nos remete à proposição de sequências didáticas como uma possibilidade para o processo de compreensão do conceito de frações por estudantes de Educação Básica, sem deixar de verificar como estudantes de Ensino Superior resolvem situações que envolvem esse conceito.

De acordo com o *Dicionário Aurélio*, a palavra “sequência” significa “ato ou efeito de seguir; continuação do que foi iniciado; conjunto de coisas seguidas ou ordenadas”. Por sua vez, “didática” é aquilo “que tem por fim instruir”. Logo, o termo *sequência didática* (SD) pode ser entendido como um conjunto de atividades ordenadas passo a passo com o objetivo de ensinar um determinado conteúdo.

Zabala (1998, p. 18), define sequência didática (SD) como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”. Para Artigue (1996 *apud* PAIS, 2001, p. 157), “sequência didática é um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”. Oliveira (2013, p. 39) define o conceito da seguinte maneira:

Sequência didática é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem.

Maroquio, Paiva e Fonseca (2015, p. 1) entendem que SD é uma metodologia para ensinar determinado conteúdo, passo a passo, e as sequências didáticas são organizadas “com os objetivos que o professor quer alcançar, envolvem atividades de aprendizagem e avaliação, permitindo, assim, que o professor possa intervir nas atividades elaboradas”. Para Borges Neto *et al* (2013), SD consiste de uma proposta teórico-metodológica que coloca o estudante em um ambiente de elaboração, significativa, de conceitos matemáticos em que o professor exerce o papel de mediador da aprendizagem; “nesse processo, o docente deve levar em conta as experiências vivenciadas pelos alunos e seus conhecimentos anteriores acerca das atividades desenvolvidas” (2013, p. 18).

Aproximando-nos de Zabala (1998), concebemos SD como um conjunto de atividades organizadas, articuladas, ordenadas e encadeadas entre si, as quais comportam níveis de complexidade cada vez maiores, de modo a conduzir os estudantes a compreender um determinado conceito. Por isso, tanto o professor quanto os estudantes desempenham papéis fundamentais no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Oliveira (2013), a proposição de SD comporta cinco passos básicos, nos quais se deve levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes: escolha do tema a ser trabalhado; problematização do assunto a ser trabalhado por meio de questionamentos;

definição dos conteúdos; definição dos objetivos a serem alcançados no processo de ensino e aprendizagem; e delimitação da sequência de atividades.

Para Zabala (1998), a SD deve ser organizada de modo a considerar as três dimensões do processo de ensino e aprendizagem: conceituais, “*o que se deve saber?*”; procedimentais ou “*o que se deve saber fazer?*”; e atitudinais: “*como se deve ser?*”.

Em relação aos aspectos conceituais, o professor precisa conhecer o espectro de conceitos subjacentes e que influenciam na compreensão do objeto em estudo. Nos procedimentais, o professor necessita perceber e criar condições adequadas às necessidades específicas de cada estudante. Os aspectos atitudinais estão intimamente ligados às ações formativas, não bastando propor debates e reflexões sobre comportamento cooperativo, tolerância, justiça, respeito mútuo, dentre outros, mas sim viver um clima de solidariedade, cooperação, tolerância e cumplicidade. Para Zabala (1998), a SD deve atender a alguns aspectos como: apresentação da situação; problemas ou questões; respostas intuitivas ou suposições; fontes de informação; busca de informação; elaboração de conclusões; generalização; exercícios de memorização; prova ou exame; avaliação.

Para Borges Neto *et al* (2013), a Sequência Fedathi é composta por quatro etapas sequenciais e interdependentes, assim denominadas: tomada de posição, maturação, solução e prova. Sinteticamente, podemos dizer que, na tomada de posição, o professor apresenta o problema aos estudantes; na fase da maturação, devem ocorrer as discussões entre professor e estudantes a fim de compreender o objeto de estudo e identificar as variáveis envolvidas na situação; a solução consiste na elaboração de esquemas ou modelos que possibilitem responder a pergunta do problema; por fim, a prova consiste na validação e generalização do modelo matemático construído.

Ao propor o desenvolvimento de sequência didática (SD) de que trata Zabala (1998), os professores e pesquisadores são instrumentalizados e empoderados para sua atuação no processo de ensino e aprendizagem, especialmente porque a SD remete à análise da prática profissional. O autor disponibilizou um modelo para analisar e interpretar as relações didáticas que se estabelecem entre os envolvidos no processo educativo, mais precisamente entre professor-estudantes-objeto de estudo. Trata-se de uma proposta que se contrapõe ao modelo tradicional em que o professor é tido como único responsável no processo e os estudantes como agentes passivos.

Zabala (1998) ancora-se no pensamento prático do fazer de sala de aula, alicerçado na capacidade reflexiva do professor. Recomenda, portanto, uma constante avaliação do trabalho desenvolvido com os estudantes. Numa perspectiva processual, estabelece fases para o

planejamento, o desenvolvimento e a avaliação do trabalho realizado, a partir das variáveis selecionadas para as intervenções didático-pedagógicas, assim como das condicionantes implicadas no contexto educativo. Entre essas condicionantes, destacam-se as implicações do contexto social amplo e particular, a formação do professor, suas percepções e concepções em relação ao processo educativo, pressões sociais, bem como a trajetória profissional dos professores.

A função social da escola reside na formação integral dos estudantes, o que envolve necessariamente o desenvolvimento de habilidades e competências para além dos aspectos cognitivos e conceituais. A partir das relações constituídas nas experiências vividas nos processos educativos, alicerçam-se os vínculos e as condições que definem as concepções sobre cada um e em relação aos demais, o que conduz a sociedade como um todo, e em especial aos educadores, a uma reflexão profunda e constante sobre as condições de cidadania. Nessa perspectiva, os conteúdos de ensino devem contemplar as distintas dimensões da pessoa, de modo a abarcar as aprendizagens factual e conceitual, relacionadas ao que se deve aprender; procedimental, que dizem respeito ao que se deve fazer e; atitudinal, como se deve fazer (ZABALA, 1998).

Para além de conhecer e vivenciar a cultura dos estudantes, o processo de ensino requer que os professores compreendam o modo como os estudantes aprendem, o que implica em conhecimentos de filosofia, sociologia, psicologia, bem como do conteúdo da ciência a ser ensinada. Segundo Zabala (1998), a ordenação e articulação das atividades se constituem num diferenciador nas metodologias de ensino. Há, portanto, que se considerar os conhecimentos que os estudantes já dispõem sobre o assunto em estudo, e as atividades devem ser elaboradas e dispostas considerando níveis de complexidade cada vez maiores, considerando as variáveis escolhidas.

Assim, as SD consideraram as intenções educacionais na definição dos conteúdos de ensino e dos procedimentos metodológicos adotados no processo de desenvolvimento das atividades pelos estudantes, de modo a contemplar as dimensões conceituais, procedimentais e atitudinais.

Desde a década de 1980, na França passou-se a utilizar as sequências didáticas no processo de ensino e aprendizagem da língua materna. Posteriormente, seu uso foi estendido às demais áreas do conhecimento, o que provocou mudanças no cenário educacional do país. Dados os avanços no processo educacional por parte dos estudantes, o que no início gerou apreensão e resistência, especialmente por parte dos pesquisadores, passou a ser tematizado, transformando-se em objeto de estudos.

A sequência didática é um procedimento para a sistematização do processo ensino-aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial, informando aos alunos o real objetivo da sequência didática no contexto da sala de aula, até o final da sequência, para avaliar e informar os resultados (OLIVEIRA, 2013, p. 40).

De acordo com Zabala (1998), o diferencial, além da organização e encadeamento das atividades na SD, reside no fato de elas atenderem às especificações dos estudantes, colocando-os em cena no processo de aprendizagem. As oportunidades comunicativas estabelecidas a partir das análises e reflexões sobre as atividades, orientam e definem os papéis de cada um dos envolvidos no processo

O que queremos dizer é que mais do que nos movermos pelo apoio acrítico a um ou a outro modo de organizar o ensino, devemos dispor de critérios que nos permitem considerar o que é mais conveniente em um dado momento para determinarmos objetivos a partir da convicção de que nem tudo tem o mesmo valor, nem vale para satisfazer as mesmas finalidades. Utilizar estes critérios para analisar a nossa prática e, se convém, para orientá-la em algum sentido, pode representar, em princípio, um esforço adicional, mas o que é certo é que pode evitar perplexidades e confusões posteriores (ZABALA, 1998, p. 86).

O valor social das relações do professor com os estudantes vai além do que é ensinado em sala de aula e, uma vez que todos devem atuar ativamente no processo de solução das atividades, os diálogos constantes, inclusive sobre assuntos do contexto social em que vivem os estudantes, devem servir para orientá-los em suas atuações na comunidade. Isso estimula o professor a planejar atividades de modo a diversificar as estratégias de ensino, prevendo situações desafiadoras tanto do ponto de vista do conteúdo das ciências tratadas e discutidas na escola, como de situações do contexto social. Os diálogos instigam os estudantes na busca de soluções e respostas criativas às situações em discussão.

A plasticidade das relações interativas entre professor, estudantes e objeto do conhecimento, por meio do desenvolvimento de SD, permite a adaptação das atividades previstas de modo que os estudantes em diferentes níveis de conhecimento possam participar ativamente do processo e expressar suas ideias. Assim, o planejamento das ações deve atender às necessidades dos estudantes, considerar suas experiências, auxiliá-los na compreensão do que estão fazendo, levá-los a enxergar os processos, deixar claros os objetivos a serem alcançados, municiá-los com dados e informações que propiciem condições para que respondam o que lhes é demandado, propiciar um ambiente de estudo/trabalho colaborativo, permitir reflexões e trocas de ideias, avaliar as aprendizagens, dentre outras condições que favoreçam as aprendizagens.

Nessa perspectiva, o ambiente de sala de aula deve ser propício à aprendizagem, o que requer uma organização dos estudantes distinta daquela de “cabeça atrás de cabeça”. Isso não significa que em determinados momentos os estudantes não tenham que trabalhar de forma individual. No entanto, essa forma não pode nem deve ser predominante. Aconselha-se que, especialmente na fase da experimentação, predomine o trabalho colaborativo e em equipe e que as atividades requeiram a realização de registros dos procedimentos adotados para responder as tarefas.

O planejamento das atividades, a metodologia a ser adotada no processo de solução das tarefas, a organização dos estudantes, o estabelecimento de critérios e condutas a serem seguidos no desenvolvimento da SD e a decoração do ambiente de sala de aula inscrevem-se no rol de competências do professor e são importantíssimas ao processo de ensino e aprendizagem porque orientam os papéis dos estudantes e do professor, além de situar o lugar do objeto de estudo.

O exposto denota que existem diferentes possibilidades de se organizar o trabalho de sala de aula a partir da proposição e desenvolvimento de SD. Além disso, a SD se constitui numa importante fonte de pesquisa aos interessados em compreender os meandros do processo de ensino e aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento.

Atividade 02 – Elaboração de atividades

Objetivo

- Elaborar um plano de ensino com atividades, tendo vista o processo de ensino de fração para estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, de modo a contemplar os princípios da sequência didática.