



# A RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ E O E-BOOK INTERATIVO ESTENDIDO NO ENSINO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR NA FÍSICA MECÂNICA

Mateus de Sousa Paula

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Tocantins no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:

Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

Coorientadora:

Dra. Shirlei Nabarrete Dezidério

Araguaína, TO  
Fevereiro de 2020

**A RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ E O E-BOOK  
INTERATIVO ESTENDIDO NO ENSINO DA  
DINÂMICA NÃO-LINEAR NA FÍSICA MECÂNICA**

**Mateus de Sousa Paula**

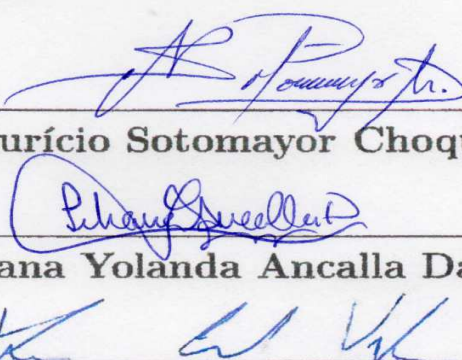
**Orientadores:**

**Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque (Orientador)**

**Dra. Shirlei Nabarrete Dezidério (Coorientadora)**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Tocantins no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

**Aprovada por:**



**Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque (Orientador)**

**Dr<sup>a</sup>. Liliana Yolanda Ancalla Davila (UFT)**

**Dr. Rivelino Cunha Vilela (IFMA)**

**Araguaína, TO  
Fevereiro de 2020**

# Ficha Catalográfica

## **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

P324r Paula, Mateus de souza.

A roda d'água de Malkus-Lorenz e o e-book interativo estendido no ensino da dinâmica não-linear na física mecânica. / Mateus de souza Paula. – Araguaína, TO, 2020.

137 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional Nacional em Ensino de Física, 2020.

Orientador: Nilo Maurício Sotomayor Choque

Coorientadora : Shirlei Nabarrete Dezidério

1. LabView. PLX-DAQ. 2. Arduino, aquisição de dados. 3. Roda d'água de Malkus-Lorenz. E-book aprimorado. 4. Sistemas dinâmicos não lineares. Caos. I. Título

CDD 530

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

*Dedico este trabalho à minha querida Família, em especial à minha esposa Rayla-  
mes Gomes de Paula por ter sido compa-  
nheira em meio a tantas dificuldade, aos  
meus filhos Ana Vitoria Gomes de Paula e  
Micael vitor gomes de Paula, que serviram  
de estímulo para conclusão deste mestrado,  
à toda família de Paula, à meu pai Vicente  
Petrunianos, à minha falecida mãe Luzia  
de Sousa Paula, à meus irmãos, José, Ed-  
valdo, Vicente, Maria Deusa, Domiciano,  
Maura, Edivan, Clemilda, Moisés, Laura  
que de forma direta ou indireta me ajuda-  
ram nos momentos complicados de minha  
vida*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me ajudado em momentos que pensei não conseguir, e por ter me concedido uma família maravilhosa.

Sou grato por meus familiares, em ter me dado apoio emocional e em determinados momentos recursos financeiros. Sou e sempre serei grato em especial a minha querida mãe Luzia de Sousa Paula, que não se encontra mais presente nesse mundo, mas que me apoiou de uma forma incondicional, aconselhando-me sempre que necessário. E deixado muitas saudades.

Ao meu pai Vicente Petruniano de Paula que sempre se dispôs ajudar quando precisei.

À meus irmãos, José, Edvaldo, Vicente, Maria Deusa, Domiciano, Maura, Edivan, Clemilda, Moisés, Laura que de forma direta ou indireta me ajudaram nos momentos complicados de minha vida.

A minha digníssima esposa Raylane, e à meus lindos filhos Ana Vitoria e Micael Vitor que serviram de motivação para que eu desenvolvesse este trabalho, pelas vezes que tiveram de abrir mão de minha companhia, e pelo sacrificio financeira que fizeram, ainda que incnocientemente abriram mão de se divertirem e até comprarem alguns pertences, para que eu pudesse costear minhas viagens para o mestrado.

Ao meu primo Edvair, que por quase dois anos me deu abrigo para dormir em sua casa enquanto estive no na cidade de Araguaína por conta do mestrado.

Aos companheiros e amigos de viagens e mestrados, Chaleilson Geordany e Renato Inácio, que em alguns momentos até me isentaram de pagar despesas de deslocamento de Imperatriz à Araguaína.

Ao professor Nilo Mauricio Sotomayor, orientador e grande mestre, a quem admiramos deste de 2017, e agora tive o privilégio de trabalharmos juntos neste projeto. Pelos valiosos conselhos, direcionamentos, explicações, instigações e incentivo.

À todos os professores do Colegiado de Física da Universidade Federal do Tocantins Campus Araguaína, pelos ensinamentos, dedicação e disposição que imprimem neste curso. Em especial a professora Shirlei Nabarrete Dezidério, nossa coorientador, pelas valiosas ideias e dicas que contribuí para o aperfeiçoamento do trabalho.

À direção e coordenação do Instituto Federal Campus Araguaatins, por serem amigos, por nos darem a oportunidade de trabalhar naquela instituição, que muito nos orgulha; que permitiu aplicar o produto desenvolvido neste trabalho.

À todos os colegas de nossa sala, os quais descrevemos para lembrar: Marina, Thiago, Lenilson, Marcelo, Renato, Humberto, Laércio, Eduardo, e Cláudio. Pelo companheirismo, pelos momentos de difíceis que nos ajudamos e momentos de descontração que tivemos, em especial ao colega Joel que em alguns momentos nos ajudou oferecendo sua casa como ponto de apoio.

Ào programa do MNPEF-SBF que nos permitiu ter esta oportunidade. Aos colegas do LabMade que muitas vezes nos serviram de companhia, em especial a Denizia que muitas vezes se prontificou a ajudar.

À coordenação do LabMade, permitindo o uso da infraestrutura dos laboratórios; e à seus colaboradores que o permite funcionar com o apoio do Instituto Nacional de Eletrônica INEO e também do Cnpq pelo suporte em equipamentos, Hardware e software; pois sem suas parcerias o LabMade não funcionaria.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

## A RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ E O E-BOOK INTERATIVO ESTENDIDO NO ENSINO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR NA FÍSICA MECÂNICA

Mateus de Sousa Paula

Orientadores:

Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque (Orientador)

Dra. Shirlei Nabarrete Dezidério (Coorientadora)

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Tocantins no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Detalha-se a construção experimental de uma Roda d'água de Malkus-Lorenz com sistema de aquisição de dados de posição angular em função do tempo utilizando-se da Plataforma de Prototipagem Eletrônica de acesso aberto Arduino, o Ambiente de desenvolvimento de Sistemas e Linguagem de Programação Gráfica Labview e dispositivos e sensores eletrônicos compatíveis. O sistema experimental é introduzido como ferramenta para equipar laboratórios didáticos de Física em nível de ensino médio e graduação com intuito de motivar, apoiar e consolidar o ensino-aprendizagem dos fenômenos não lineares na Física Mecânica ao nível do ensino médio. O sistema experimental é apresentado como um produto educacional acompanhado de um livro interativo, tecnologia da informação e comunicação de invenção muito recente,

denominado enhanced e-book. O livro apresenta conceitos de física e matemática associados com os fenômenos lineares e não lineares encontrados nos sistemas descritos pela dinâmica da mecânica newtoniana. Salienta-se a importância dos conceitos matemáticos empregados para formalizar os fenômenos físicos o que deve ajudar a compreender melhor a estreita inter-relação entre estas duas áreas do conhecimento. O E-book estendido contém simulações computacionais, arquivos de áudio e vídeos que ajudam a uma melhor compreensão dos fenômenos físicos não lineares envolvidos com o tema de estudo. O conjunto dos produtos educacionais foi utilizado em aulas de ensino médio no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Tocantins (IFTO) - Campos Araguaatins.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos não lineares. Caos. Roda d'água de Malkus-Lorenz. E-book aprimorado. Arduino, aquisição de dados. LabView. PLX-DAQ.



# Abstract

THE MALKUS-LORENZ WATER WHEEL AND THE  
INTERACTIVE E-BOOK EXTENDED IN TEACHING  
NONLINEAR DYNAMICS IN MECHANICAL PHYSICS

Mateus de Sousa Paula

Supervisors:

Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque (Supervisor)

Dra. Shirlei Nabarrete Dezidério (Co-supervisor)

Master's Dissertation submitted to the Graduate Program of the Federal University of Tocantins in the Professional Master's Course in Physics Teaching (MNPEF), as part of the requirements necessary to obtain the Master's Degree in Physics Teaching.

The experimental construction of a Malkus-Lorenz Waterwheel with angular position data acquisition system is described. function of time by employing the Arduino Open Access Electronic Prototyping Platform, the Labview Graphics Programming Systems and Language and compatible electronic devices and sensors. The experimental system is introduced as a tool to equip high-school and undergraduate didactic Physics labs to motivate, support and consolidate the teaching-learning of nonlinear phenomena in mechanical physics at the high school level. The experimental system is presented as an educational product accompanied by an interactive book, information technology and communication invention very recent, called Extended E-book. The book presents concepts of physics and mathematics associated

with phenomena linear and nonlinear found in the systems described by the dynamics of Newtonian mechanics. The importance of mathematical concepts employed to formalize physical phenomena which should help to better understand the close interrelationship between these two areas of knowledge. The extended Ebook contains computer simulations, audio files and videos that help a better understanding of the nonlinear physical phenomena involved with the topic of study. The set of educational products were used in high school classes at the Tocantins Federal Institute of Education, Science and Technology (IFTO) - Campos Araguatins.

**Keywords:** Nonlinear dynamical systems. Chaos. Malkus-Lorenz Water Wheel. Enhanced E-book. Arduino, data acquisition. LabView. PLX-DAQ.

# Lista de Figuras

1.1	<i>modelo da estrutura de um mapa conceitual. . . . .</i>	12
2.1	<i>Posição instantânea de um sistema físico no espaço de configuração. . . . .</i>	22
2.2	<i>Trajatória ou evolução temporal de um sistema físico no espaço de configuração. . . . .</i>	23
2.3	<i>representação das variáveis dinâmicas (estados) relevantes do sistema de arremço de basquete para o plano Cartesiano nos eixos <math>x</math> e <math>y</math>. . . . .</i>	24
2.4	<i>Esquema que representa o espaço de fases <math>\Gamma</math>, para um sistema físico com espaço de configuração tridimensional e com dinâmica descrita pelas Leis de Newton. . . . .</i>	25
2.5	<i>Classificação dos espaços topológicos. . . . .</i>	27
2.6	<i>Espaço de configuração, espaço tangente e espaço cotangente. . . . .</i>	30
2.7	<i>Gráfico de um sistema linear para o plano Cartesiano nos eixos <math>x</math> e <math>y</math>. . . . .</i>	38
2.8	<i>gráfico característico de um comportamento não linear para o plano Cartesiano nos eixos <math>x</math> e <math>y</math>. . . . .</i>	39
3.1	<i>Convecção de uma panela ao fogo [35]. . . . .</i>	47
3.2	<i>Rolos de convecção de um fluido atmosférico. . . . .</i>	49
3.3	<i>Código fortran desenvolvido para o Sistema de Lorenz. . . . .</i>	50
3.4	<i>Seção de uma trajetória numérica obtida com o código fortran para o Sistema de Lorenz. . . . .</i>	51
3.5	<i>Projeção no plano <math>x - y</math> da trajetória numérica da figura 3.4. . . . .</i>	51
3.6	<i>Projeção no plano <math>x - z</math> da trajetória numérica da figura 3.4. . . . .</i>	52
3.7	<i>Projeção no plano <math>y - z</math> da trajetória numérica da figura 3.4. . . . .</i>	52
3.8	<i>Evolução da variável <math>x</math> que representa a velocidade angular em função do tempo para a roda d'água de Malkus-Lorenz. Parâmetros são os mesmos. da figura 3.4. . . . .</i>	53
3.9	<i>Código fortran página 1. . . . .</i>	55
3.10	<i>Código fortran página 2. . . . .</i>	56
3.11	<i>Código fortran página 3. . . . .</i>	57
3.12	<i>Espectro dos expoentes de Lyapunov para o Sistema de Lorenz. . . . .</i>	58

4.1	<i>Conjunto para aquisição de dados.</i>	60
4.2	<i>Transformações sofridas pelos sinais em um SAD [37].</i>	61
4.3	<i>Tratamento de um sinal Analógico/digital [43].</i>	62
4.4	<i>Plataforma Arduino com suas principais funções.</i>	63
4.5	<i>Ambiente de Desenvolvimento Integrado do Arduino.</i>	63
4.6	<i>Painel frontal Virtual do LabView [ref prod7].</i>	65
4.7	<i>Diagrama de blocos no Labview para leitura dos movimentos da roda de Lorenz.</i>	66
4.8	<i>Conjunto de Aquisição com possíveis dados impressos usando LabVIEW.</i>	67
4.9	<i>Dados numéricos colhido pelo sistema gerado no ambiente LabVIEW.</i>	67
4.10	<i>Painel frontal do aplicativo em LabVIEW para aquisição dos dados da placa Arduino e apresentação gráfica dos dados numéricos obtidos.</i>	68
4.11	<i>Programa PLX-DAQ (Data Acquisition for Excel) para Microsoft Excel.</i>	69
4.12	<i>Impressão de dados na planilha Excel do movimento da roda de Lorenz usando PLX-DAQ.</i>	70
5.1	<i>Células de convecção.</i>	71
5.2	<i>Roda d'água Lorenziana.</i>	72
5.3	<i>Esquema da roda de Malkus-Lorenz.</i>	73
5.4	<i>Esquema que mostra a variação do centro de massa CM da roda de Malkus-Lorenz.</i>	74
5.5	<i>Mapa conceitual da construção à aquisição de dados.</i>	76
5.6	<i>Sensor encoder incremental.</i>	77
5.7	<i>a) sistema estático (b) sistema em movimento provocado pela queda da água nos copos</i>	77
5.8	<i>Representação funcional dos sinais das duas saídas A e B defasados em 90° no interior do encoder incremental [44].</i>	78
5.9	<i>Representação funcional dos sinais das duas saídas no interior do encoder absoluto [44].</i>	79
5.10	<i>Aquisição de dados excel com Software PLX-DAQ</i>	80
5.11	<i>Resultados obtidos de uma movimento não linear da roda de Lorenz, obtida na planilha excel pelo program PLX-DAQ</i>	80
5.12	<i>Sistema de aquisição de dados da roda d'água usando o aplicativo em Labview.</i>	81
5.13	<i>Dados obtidos com fluxo de 38,9ml/s.</i>	82
5.14	<i>Dados obtidos com fluxo de 27,7ml/s.</i>	83
5.15	<i>Dados obtidos com fluxo de 35,0ml/s.</i>	84
5.16	<i>Dados obtidos com fluxo de 14,6ml/s.</i>	85

5.17	<i>Dados obtidos com fluxo de 18,4ml/s.</i>	86
6.1	<i>Diferentes equipamentos de tecnologia digital [54]</i>	88
6.2	<i>Mapa conceitual do conteúdo inserido no enhanced e-book.</i>	91
6.3	<i>Interface do Software Modellus versão 4.01.</i>	92
7.1	<i>IFTO - Campus Araguatins.</i>	94
7.2	<i>Aplicativo do enhanced ebook, instalado no PC e celular.</i>	95
7.3	<i>Slide de apresentação do tema sobre sistemas dinâmicos.</i>	95
7.4	<i>Slide de apresentação sobre previsão do tempo relacionada com caos.</i>	96
7.5	<i>Imagem produzida pela queda de uma quantidade de água.</i>	97
7.6	<i>Atmosfera climática.</i>	98
7.7	<i>Abordagem sobre sistemas dinâmicos.</i>	98
7.8	<i>Preparação do software Modellus.</i>	100
7.9	<i> Animações sobre sistemas lineares e não lineares.</i>	100
7.10	<i>Apresentação sobre espaço de fase.</i>	101
7.11	<i>Pontos geométricos no espaço de fases representado estados de um sistema físico.</i>	102
7.12	<i>Estabilidade do pêndulo no espaço de fase.</i>	103
7.13	<i>Atrator ou sovedouro descrito pelo pêndulo amortecido.</i>	104
7.14	<i>Espaço de fases com dois conjuntos de parâmetros diferentes para o pêndulo amortecido forçado com comportamento periódico.</i>	105
7.15	<i>Espaço de fases com dois conjuntos de parâmetros diferentes para o pêndulo amortecido forçado com possível comportamento caótico.</i>	105
7.16	<i>Apresentação dos rolos de convecções e das equações de Lorenz.</i>	106
7.17	<i>Atratores de Lorenz nos planos: xy, xz e yz respectivamente.</i>	107
7.18	<i>Apresentação da roda de Lorenz relacionando-a com os RC.</i>	107
7.19	<i>Explicação da montagem do experimento.</i>	108
7.20	<i>Componentes para aquisição de dados.</i>	108

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>6</b>
<b>1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>9</b>
1.1 Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel . . . . .	10
1.2 O Ensino de Física e o Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física . . . . .	13
<b>2 A MATEMÁTICA DA FÍSICA NEWTONIANA</b>	<b>17</b>
2.1 Evolução temporal dos sistemas físicos . . . . .	18
2.2 Definição conceitual de sistema físico . . . . .	18
2.3 Definição formal de um sistema físico . . . . .	19
2.4 Evolução temporal de um sistema físico . . . . .	20
2.5 Definição Formal de Sistema dinâmico . . . . .	20
2.6 Caracterização de um sistema físico . . . . .	21
2.7 Estado de um sistema físico . . . . .	21
2.8 Espaço de configuração . . . . .	21
2.9 Espaço de fases ou estados . . . . .	25
2.10 Variedade . . . . .	25
2.10.1 Espaço topológico . . . . .	26
2.10.2 Espaço métrico . . . . .	26
2.10.3 Espaço vetorial euclidiano . . . . .	26
2.10.4 Espaço euclidiano . . . . .	27
2.11 Espaço vetorial tangente . . . . .	27
2.12 Fibrado vetorial ou fibrado tangente . . . . .	29
2.13 Espaço cotangente . . . . .	29
2.14 Fibrado cotangente . . . . .	30
2.15 Funcional linear . . . . .	31
2.16 Espaço vetorial simplético . . . . .	32
2.17 Estados físicos na Mecânica de Newton . . . . .	33

2.17.1	Variedades na Mecânica de Newton . . . . .	36
2.18	Sistemas dinâmicos lineares . . . . .	37
2.19	Sistemas dinâmicos não-lineares . . . . .	38
2.20	Caos nos sistemas dinâmicos . . . . .	40
<b>3</b>	<b>O SISTEMA DE LORENZ</b>	<b>41</b>
3.1	Contextualização história . . . . .	42
3.1.1	Sistemas dinâmicos caóticos . . . . .	44
3.1.2	Caracterização do caos . . . . .	45
3.2	O espectro de Lyapunov . . . . .	46
3.3	As equações de Lorenz . . . . .	47
3.4	Cálculo do espectro de Lyapunov para o sistema de Lorenz . . . . .	53
3.5	Código Fortran para o espectro de Lyapunov do sistema de Lorenz . . . . .	54
<b>4</b>	<b>SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS</b>	<b>59</b>
4.1	Composição de um sistema de aquisição de dados . . . . .	59
4.1.1	Sensores ou transdutores . . . . .	60
4.1.2	Conversores de sinais analógicos digitais . . . . .	61
4.1.3	Microcontrolador . . . . .	62
4.1.4	A plataforma de prototipagem eletrônica Arduino . . . . .	62
4.1.5	Aplicativo de aquisição de dados em LabVIEW . . . . .	64
4.1.6	Aplicativo de aquisição de dados em PLX-DAQ . . . . .	69
<b>5</b>	<b>RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ</b>	<b>71</b>
5.1	Sistema dinâmico da roda . . . . .	72
5.2	Dispositivos para aquisição de dados . . . . .	75
5.2.1	Sistema de coletas de dados . . . . .	76
5.2.2	Encoder incremental óptico rotativo . . . . .	76
5.2.3	Análise dos resultados . . . . .	79
<b>6</b>	<b>ENHANCED E-BOOK</b>	<b>87</b>
6.1	Revisão da Literatura . . . . .	87
6.1.1	Conteúdo do enhanced e-book . . . . .	90
<b>7</b>	<b>APLICAÇÃO DO PRODUTO</b>	<b>93</b>
7.1	Planejamento do Material de apoio ao professor . . . . .	93
7.1.1	Primeiro encontro . . . . .	94
7.1.2	Segundo encontro . . . . .	99
7.1.3	Terceiro encontro . . . . .	103
7.1.4	Quarto encontro . . . . .	106

<b>8 RESULTADOS</b>	<b>110</b>
<b>9 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>113</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>116</b>



# INTRODUÇÃO

Ao longo dos tempos tenho percebido enquanto professor no ensino de Física, a existência de muitos problemas em relação ao ensino da física, o aluno não entende o porquê de se estudar esta matéria, e qual relação existe entre a Física e a Matemática. Muitos até chegam a dizer que Física é o mesmo que matemática; esquecendo ou talvez por desconhecimento, que na verdade a matemática é uma ferramenta importantíssima que ajuda a formalizar a explicação de fenômenos físicos, pois muitas vezes o próprio professor não dispõe do conhecimento de conceitos básicos essenciais para o ensino da Física mecânica.

A falta de Laboratórios didáticos de Física, de instrumentos e equipamentos para fomentar o interesse destes alunos, e até mesmo de um livro com maior capacidade instrutiva que seja capaz de aguçar o desejo pelo ensino da física, tem dificultado cada vez mais que os alunos sintam-se atraídos por esta área da ciência.

Segundo E. C. Feix [1], “as aulas de Física experimental têm como objetivo implementar ações que melhorem o interesse dos estudantes pela disciplina e mostrem as possibilidades de utilizar essas aulas como lócus para raciocinar, para compreender as causas e os efeitos que ocorrem no nosso cotidiano”.

Portante este trabalho vai nesse sentido em que é necessário o desenvolver materiais que ajudem a incentivar, a motivar, a melhorar o ensino na física mecânica. tanto na parte experimental como na parte teórica. O uso da experimentação no ensino de Física é importante, assim como o uso de novas tecnologias de informação e comunicação (TICs) para ajudar nas necessidades do ensino da física.

Conforme Nogueira, “o mundo atual é marcado por inúmeras transformações, devido às novas formas de produção e inovação das TICs, essas transformações influenciam também o campo educacional” [2].

Sendo assim, este trabalho tem a proposta de construção de um produto educacional composto de duas partes principais:

- A primeira é a construção de um livro interativo estendido ou **enhanced e-book**, que apresenta conceitos de física e matemática associando-os com os fenômenos lineares e não lineares descritos pela dinâmica da mecânica newtoniana, e até mesmo de eventos que possam apresentar caos.

Além disso este livro interativo, propõe algo inovador, cuja funcionalidade ainda não é muito bem difundida na área da educação, haja vista que nenhum trabalho com a proposta foi encontrado.

Portanto o livro será disponibilizado para uso em sistemas moveis que possuam sistema operacional Android (como tablets e celulares) com funções de textos, áudios, videos, animações e simulações computacionais. Uma vez instalado o livro interativo estendido, todas essas funções poderão ser acionadas sem a necessidade do uso de internet.

- A segunda parte é a construção de um sistema experimental mecânico chamado de **roda d'água de Malkus-Lorenz**, que visa estudar por meio de um sensor de rotação que compõe o sistema de aquisição automática de dados, o movimento de um sistema físico com dinâmica não linear; auxiliado pela placa de prototipagem Arduino-UNO, e a utilização de softwares complementares livres como o PLX-DAQ e também o NI-Labview.

Este sistema experimental comporta-se de forma equivalente aos rolos de convecção climáticos produzidos nas capas superiores da atmosfera, podendo eventualmente evoluir para um sistema dinâmico não linear caótico. Para identificar se este sistema é ou não caótico, necessita-se de um número grande de eventos e a análise dos registros desses dados.

Devido à constante inovação das TICs, nos dias de hoje, existe uma variedade enorme de meios e sistemas tecnológicos usados para tratar a informação e auxiliar na comunicação. Elas precisam e devem ser usadas e aproveitadas nas escolas; em especial nas escolas do interior (região rural) com intuito de melhorar o ensino, pois estas escolas são menos assistidas por investimentos na educação por parte de seus respectivos representantes políticos.

Por isso, a integração da Plataforma de prototipagem eletrônica Arduino, que constitui parte do sistema de aquisição de dados, junto com os ambientes de desenvolvimentos NI-Labview e PLX-DAQ, assim como a disponibilidade de uma grande variedade de sistemas e dispositivos eletrônicos compatíveis com a plataforma Arduino, é possível projetar um vasto número de equipamentos didáticos aplicáveis ao ensino de Física, com um custo relativamente baixo.

Desta forma, há uma grande variedade de sistemas e ferramentas modernas voltados ao melhoramento da informação e comunicação a serviço do professor, as quais podem ser usadas com relativa facilidade, para ensinar diversos conceitos sobre a Física. Muitos projetos com a finalidade de melhorar o ensino de física, foram construídos e estão disponíveis no site no MNPEF, que são as dissertações e os produtos educacionais exigidos pelo do programa do Mestrado.

Muitos experimentos didáticos de física podem ser construídos empregando-se a plataforma Arduino e sistemas eletrônicos compatíveis. Há a vantagem adicional de poder realizar a aquisição automática de dados de qualquer experimento graças ao conversor analógico-digital de 10 bits embutido nos microcontroladores das placas de circuito impresso.

Após a construção dos produtos, os mesmos serão aplicados aos alunos de uma escola pública do ensino médio, observando o contato dos alunos em relação à aceitação dos produtos, bem como os benefícios vinculados à aprendizagem desses alunos.

Portanto este trabalho é um aprofundamento necessário, porque visa melhorar de forma significativa a formação de um educador em Ensino de Física. Trata-se de um complemento, por ser muito comum que os professores diminuam a ênfase em determinados conteúdos, diante da necessidade de instruir os estudantes nos temas mais comuns, presentes nas provas de avaliação interna e externa, próprias da educação básica.

Necessidades diferentes indicam objetivos diferentes, aqui descritos por: (1) Adequar o ensino com foco no estudante, dando a ele condições básicas para acompanhar, compreender e refletir sobre os temas de interesse do nível médio, e (2) Instigar a formação completa, para que diante de novos desafios, os estudantes possam buscar a formação no nível superior. Neste caso, atende-se à necessidade de o ensino médio apresentar conteúdos, mesmo que de forma esporádica, sobre a física moderna e contemporânea, indicando caminhos possíveis para o desenvolvimento na área.

Este é um trabalho que atende ao segundo objetivo e consagra uma atividade complementar a esse nível de ensino, que explica um fenômeno, não de modo a simplificar, mas ao contrário, de modo a apresentar que, em alguns casos, quando a solução algébrica de uma equação não é factível, métodos computacionais e analíticos podem ser utilizados também para fazer previsões e compreender fenômenos mais complexos.

O objetivo desta dissertação está condicionado ao nível de aquisição de conhecimento do aluno. Como o ensino deixa muito a desejar, costuma-se trabalhar visando apenas os alunos que estão com maiores dificuldades em absorver os conhecimentos a eles aplicados, no intuito de lhes promover; no entanto, deixam de lado o público que está em um nível mais avançado.

Este trabalho é uma alternativa ao aluno que está mais desenvolvido ou que tenha mais facilidade na aprendizagem, pois talvez este aluno tenha interesse de transpassar essa barreira do ensino curricular, e trabalhar com sistemas complexos, dando-lhes a opção de vislumbrar algo melhor, dentro do contexto de novas possibilidades da ciência.

Embora o objetivo a ser alcançado esteja dentro do conteúdo que permeiam a física moderna, todavia, não foge das orientações do Ministério da Educação (MEC),

pois alguns manuais didáticos de física em nível médio ofertam conteúdos de física moderna e contemporânea em seu escopo curricular. É fácil identificar esses temas em obras que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático divulgado pelo MEC [3], o que deixa claro a existência de uma tentativa em adequar os livros didáticos às orientações educacionais vigentes.

Para tanto, este trabalho foi disposto em 9 capítulos.

No primeiro, serão apresentados os referenciais teóricos do trabalho e a proposta pedagógica.

No segundo, aborda-se o conteúdo sobre sistemas dinâmicos na Física, decorendo as partes principais de formas conceituais e formais; e mostrando a correlação entre a Matemática e a Física, bem como avaliar os tipos de sistemas dinâmicos como lineares e não lineares que são decodificáveis pela segunda Lei de Newton. O capítulo aborda com maior ênfase a temática principal que são os **sistemas dinâmicos não lineares**; estes sistemas não lineares podem evoluir para um sistema caótico apresentando uma conjuntura bem complexa, porém passível de interpretação por seus estados no espaço de fases.

No terceiro, será realizada uma breve descrição sobre essa nova ciência que está contida na **dinâmica dos sistemas não lineares**, que é a teoria do caos, seguida de um rápido complemento histórico do surgimento da mesma e do sistema de equações acopladas que descrevem um sistema caótico, e uso de código fortran para rodar o sistema de lorenz.

A metodologia sobre a sequência de transposição didática, ferramentas usadas, como por exemplo, “arduino”, “PLX-DAQ” e também o “NI-Labview” na aquisição de dados que possibilitando o aluno compreender sobre conceitos, antecedendo a aplicação do produto experimental, estão contidas no capítulo quatro.

O capítulo cinco fala sobre o sistema da **roda d’água de Malkus-Lorenz**, Um modelo mecânico bem simples, cuja dinâmica coincide com aquela descrita pelas equações de Lorenz; também são mostrado alguns resultados experimentais, obtidos com sistema de aquisição de dados no qual inclui um sensor de deslocamento angular chamado de encoder óptico incremental.

Para o capítulo seis está reservada a ideia e construção do **enhanced e-book**, sequenciando conhecimentos sobre previsão do tempo, sistemas lineares e não lineares, tomando como base o uso do pêndulo, até chegar a sistemas caóticos; bem como a ferramenta software **modellus** usada nas modelagens dos sistemas dinâmicos mencionados neste trabalho.

No capítulo sete estão os relatos da aplicação do produto em sala de aula e; no oitavo capítulo são apresentados os resultados da aplicação do produto, e por último no capítulo nove estão as considerações finais.

Assim, o presente trabalho se constitui da construção de um experimento (**roda**

d'água de Malkus-Lorenz), que mostra, de forma simples e didática, o desenvolvimento de um **sistema dinâmico não linear na física** e que dependendo de suas condições pode evoluir para o caos; e por um **enhanced ebook** que mostra com base em vídeos e simulações os fenômenos físicos relacionados com o sistema experimental.

# JUSTIFICATIVA

Muito do que se ensina das ciências, hoje, nas escolas, advêm de imposições curriculares, simplificações e modelos que nem sempre denunciam essas simplificações de modo claro e compreensível para os estudantes, assim, é previsível a existência de uma quebra inicial entre os sistemas apresentados a eles e o que esses sistemas representam de fato.

Mais do que isso, existe um forte apelo pelo ensino por meio de metodologias ativas o que exige que as explicações de conteúdo, em física, iniciem por aproximar os estudantes da compreensão do que são os ditos “sistemas físicos” e seus respectivos “estados” significam.

É necessário ser rigoroso em enfatizar que os estudos em sala de aula são, quase sempre, aproximações mais simples de sistemas complexos, mas que mesmo assim são capazes de levar quem os estudam à graus maiores de cognição, de pensamento abstrato e de reconstrução e compreensões mais reais daquilo que acontece no mundo.

Para contextualizar o presente estudo, na realidade escolar brasileira, foi preciso compreender, anteriormente, algumas relações entre a formação dos estudantes do ensino médio, público alvo dessa investigação, e a de seus professores, além de outras informações que complementam uma visão mais abrangente do problema a ser investigado.

O número de professores de física, atuando na área do ensino ainda está longe de ser suficiente para garantir uma educação de qualidade para os jovens brasileiros, mesmo diante dos esforços realizados no país para incentivar à formação de professores, com o oferecimento ininterrupto de vagas em cursos de licenciatura, nas universidades públicas.

Por volta da década de 2000-2010, as matrículas em cursos de licenciaturas presenciais tiveram um aumento expressivo entre os anos de 2003 e 2008, quando passaram da casa de um milhão de ingressos, de acordo com dados do censo da educação superior coletados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep). Em 2010, um quinto das matrículas totais da graduação, tanto cursos presenciais como a distância, estão nas licenciaturas. Elas representam 21,1% do total de matrículas [4].

Se por um lado existe o desafio de complementar as lacunas de formação que os

egressos da educação básica têm, o que dificulta a aprendizagem de física, por sua complexidade, por outro, a teoria de Ausubel apresenta uma compreensão que pode auxiliar muito os empreendimentos educacionais no que se refere à criação de novos materiais didático-pedagógicos para dar suporte à aprendizagem, que ele mesmo denomina, significativa.

O processo de ensino-aprendizagem se divide em duas principais vertentes nas escolas. Em uma delas, o percurso de aprendizagem se resume em oferecer aos educandos conteúdos para serem memorizados, conhecido como “ensino aprendizagem mecânica” que é o ensino tradicional. Na outra, há uma preocupação de que os conteúdos, pesquisados e estudados a partir de conteúdos horizontais, tenham sentido para o aluno. Há, portanto, a preocupação em propiciar uma aprendizagem que seja “significativa” [5].

Marco Antônio Moreira é um dos autores brasileiros que mais frequentemente escreve sobre a teoria de Ausubel. Para ele, aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-litera e não-arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva.

Para mediar a aprendizagem dos estudantes, no ensino formal, “o docente cumpre papéis diversos para fomentar e incentivar o aluno para aprendizagem, como os de: provocador; desassossegador; inspirador; orientador; facilitador” [6]. Para tanto é de extrema importância a adoção de “metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes [7]”.

É nessa perspectiva, que se adotou como fundamentação teórica metodológica principal a teoria de aprendizagem significativa de David Paul Ausubel.

Esta teoria ajuda a criar elos entre os assuntos abordados e o produto a ser desenvolvido, como modelo de ensino facilitador da aprendizagem, a fim de chegar aos objetivos propostos.

A docência em mestrado profissional apresenta alguns desafios expressivos para os professores da modalidade *stricto sensu*. Merece destaque a produtividade científica de forma quantitativa e qualitativa, a relação ensino e pesquisa, uma vez que o trabalho de conclusão dos discentes do mestrado profissional deve ser uma intervenção na sua prática pedagógica, alterando a lógica acadêmica predominante para os programas de pós-graduação, em especial aqueles voltados à formação de professores [8].

Desta forma o Programa Nacional de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF), com 63 polos pelo país, capacita em nível de mestrado um número grande de professores da educação básica, para que saibam empregar os conteúdos de física utilizando de técnicas novas e atuais de ensino, como: métodos de ensino, estratégias

que utilizam recursos de mídia eletrônica, tecnológicos e/ou computacionais para motivação, informação, experimentação e demonstrações de diferentes fenômenos físicos.



# Capítulo 1

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os principais pontos da teoria, descritos na fundamentação teórica são: 1. a necessidade de conceitos preexistentes na estrutura cognitiva dos estudantes - sobre os quais serão ancorados novos, para que possa durar tempo suficiente para desenhar uma estrutura mais estável, organizada e completa, usada na construção da aprendizagem futura, à disposição do estudante e 2. o comprometimento dele no próprio processo de aprendizagem - o que inclui disciplina e motivação para o autoestudo e, a disponibilidade de materiais potencialmente significativos.

Quando Ausubel discute a responsabilidade sobre o currículo dos cursos, ele reforça a escola como principal meio de os estudantes entrarem em contato com materiais que, sozinhos, dificilmente o fariam.

Uma das funções primárias da educação, na verdade, deveria ser estimular o desenvolvimento de motivações e interesses que atualmente são inexistentes. É verdade que o desempenho acadêmico é maior quando os alunos manifestam necessidade de adquirir conhecimento como um fim em si mesmo. Tais necessidades, no entanto, não são endógenas, mas adquiridas - e, em grande parte, através da exposição a instruções provocativas, significativas e adequadas ao desenvolvimento [9].

Partindo do pressuposto antes citado, sabe-se que no mercado de trabalho, existem muitas pessoas sem emprego, e também muitos empregos sem pessoas qualificadas para o trabalho. E a meteorologia é uma profissão de que vem se destacando cada vez mais diante das adversidades do clima e a necessidade de compreender e antecipar, o máximo possível, as mudanças climáticas. A profissão é regulamentada por lei federal e é necessário cursar a faculdade de meteorologia. “A pessoa que deseja tornar-se meteorologista deve ter prazer em estudar Física e matemática, que são as bases iniciais do curso [10]”. A meteorologia é essencial para o gerenciamento e planejamento de vários seguimentos da economia e infraestrutura, como a agricultura e a disponibilidade de água em grandes reservatórios. “A previsão meteorológica

a curto prazo é utilizada para alertas de inundações, alagamentos e escorregamentos de encostas, entre outras coisas que envolvam as condições do tempo [10]”.

Um meteorologista pode optar pela carreira acadêmica para o avanço do conhecimento dos métodos atmosféricos, estudo de impactos ambientais, trabalhar com a extensão de novos modelos meteorológicos, trabalhar na análise química de poluição atmosférica e outros seguimentos envolvem os processos atmosféricos [10].

É nesse contexto de perspectivas de novas opções no mercado de trabalho, que está dissertação foi desenvolvida, com estudos que permeiam o campo da meteorologia. Um problema importante de meteorologia e em outras aplicações de dinâmica dos fluidos abordado neste trabalho corresponde ao movimento de uma camada de fluído, como a atmosfera da Terra, que é mais quente em baixo do que em cima. Foi o estudo deste fenômeno, que levou o cientista Edward Norton Lorenz à sistemas de equações autônomo de terceira ordem, que em sua homenagem ficou conhecidas como as famosas “equações de Lorenz” [11] que descreve a evolução de um sistema caótico, um dos temas chave desta dissertação.

## 1.1 Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel

A teoria da aprendizagem de Ausubel sugere que os conhecimentos prévio dos alunos sejam valorizados, podendo assim construir estruturas mentais disponíveis e utilizando, como meio, mapas conceituais que possibilitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem prazerosa e eficaz [12].

O conceito central da teoria de Ausubel de aprendizagem significativa (TAS) é:

Um processo através do qual uma nova informação se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, esse processo envolve a interação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo [13].

Para Ausubel, cognição é o processo pelo qual o mundo dos significados tem origem. Ao passo que o ser se posiciona no mundo, mantém relações de significados com ele, ou seja, atribui significados à realidade em que se encontra.

Esses significados não são pontos estagnados, mas objetos de partida para atribuição de outros significados que dão origem à estrutura cognitiva (os primeiros significados, formando-se nos pontos elementares de ancoragem dos quais derivam outros significados [14].

O “subsunçor” é um conceito, uma ideia, uma proposição, já existente na estrutura cognitiva, servindo de “ancoradouro” a uma informação nova de modo que ela adquira, assim, significado para o indivíduo: a aprendizagem significativa acontece no momento em que a nova informação “ancora-se” em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva [16].

Ao conhecimento, notadamente importante à nova aprendizagem, à qual pode ser, por exemplo, um símbolo já significativo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma imagem, David Ausubel (1918-2008) chamava de subsunçor ou ideia-âncora.

A aprendizagem significativa está intimamente relacionada com os pontos de ancoragem, que são formados com a incorporação, à nossa estrutura cognitiva, de conceitos, ideias ou informações relevantes para aquisição de conhecimentos novos [14]. Ausubel compreende que o armazenamento de informações pelo cérebro humano, é altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual, elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos.

Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo [15].

Moreira [13] cita como exemplo de subsunçores, os conceitos de força e campo, de maneira já existem na estrutura cognitiva do aluno, “Eles servirão de subsunçores” para novas informações referentes a certos tipos de força e campo como, por exemplo, a força e o campo eletromagnéticos.

Entretanto, este processo de “ancoragem” da nova informação resulta em crescimento e modificação do conceito subsunçor. Isso significa que os subsunçores existentes na estrutura cognitiva podem ser abrangentes e bem desenvolvidos, ou limitados e pouco desenvolvidos, dependendo da frequência com que ocorre aprendizagem significativa em conjunção com um dado subsunçor. No exemplo dado, uma ideia intuitiva de força e campo serviria como subsunçor para novas informações referentes à forças e campos gravitacional, eletromagnético e nuclear, porém na medida em que esses novos conceitos fossem aprendidos de maneira significativa isso resultaria num crescimento e elaboração dos conceitos subsunçores iniciais, isto é, os conceitos de força e campo ficariam mais elaborados, mais exclusivos e mais capazes de servir de subsunçores para novas informações relativas a forças e campos ou correlatas.

“No sentido de se tornarem evidentes as relações hierárquicas existentes entre os diversos conceitos relativos a um determinado conteúdo, podem ser úteis a utilização de mapas conceituais” [17]. Para Ausubel, esses mapas “podem ser vistos como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de uma disciplina ou parte de uma disciplina” [18]. Moreira e Mazine [18] apresenta na figura

## 1.1 um modelo para mapeamento conceitual:

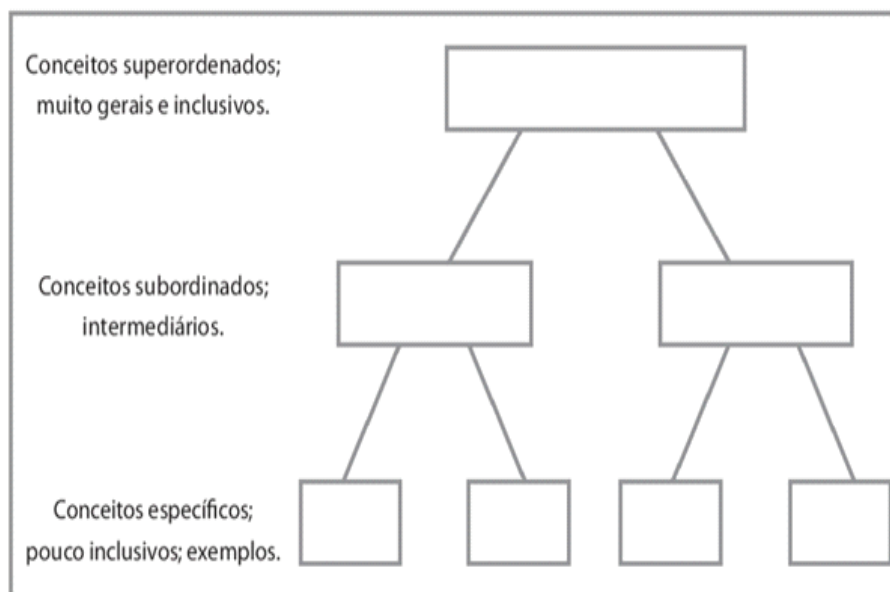


Figura 1.1: *modelo da estrutura de um mapa conceitual.*

A medida que ocorre a aprendizagem significativa além de ser elaborado os conceitos subordinados é também possível a associações entre esses conceitos.

Moreira [15] usa como exemplo o conhecimento que uma criança desenvolve com os conceitos de cão, gato, leão, etc., ela pode mais tarde aprender que todos esses são subordinados aos conceitos de mamífero. A medida que o conceito de mamífero é desenvolvido, os conceitos previamente aprendidos assumem a condição de subordinados com seus subgrupos específicos (habitat, espécies e etc.), e o conceito de mamífero representa uma aprendizagem superordenada.

Assim, os conceitos tornam-se significativos à medida que os alunos conseguem progressivamente dominar situações e resolver problemas. A relação de ensino-aprendizagem pode ser então, construída a partir de situações-problemas, utilizadas como organizadores prévios e fator motivante. O conhecimento prévio do aluno é moldado progressivamente, ancorando-se novos conceitos em conceitos anteriores, não bastando, então, para a aprendizagem, a exposição clara e concisa dos conteúdos.

O ensino através de situações problemas visa aproximar o conhecimento formal da realidade do educando, mudando sua visão e permitindo a ele recriar sua interpretação do problema estudado. "São as situações-problema que dão sentido a novos conhecimentos; elas devem ser criadas para despertar a intencionalidade do aluno para a aprendizagem significativa" Vergnaud [19], defende ainda que, "a aquisição de conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e, portanto, o conhecimento do sujeito tem muitos aspectos locais". "Os conceitos se desenvolvem através da resolução de problemas, e esse desenvolvimento é lento [19]".

É bom lembrar que, se não houver o cumprimento de duas condições elementares, será impossível acontecer uma aprendizagem significativa. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrariamente e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógico e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio [12].

É importante apontar que a aprendizagem significativa não é sinônima de aprendizagem correta [20], e que cabe ao professor a importante mediação no longo processo que caracteriza o progressivo domínio de um campo conceitual pelo aluno [19].

## **1.2 O Ensino de Física e o Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física**

Atualmente a comunidade de Ensino de física conta com várias oportunidades de congregar estudantes, professores e educadores para trocas de experiências. Desde encontros internacionais em Aprendizagem Significativa (EIAS), até as escolas brasileiras em ensino de Física, EBEP, os objetivos permitem apresentar e discutir pesquisas e estudos fundamentados nas Teorias da Aprendizagem para, sob diferentes perspectivas, criar potencialidades para melhorar o ensino em diferentes contextos educacionais.

Desde o primeiro EIAS, em 1992 na Universidade de Cornell nos Estados Unidos, a aprendizagem significativa vem ganhando notoriedade pelo aumento de interesse em facilitar a aprendizagem significativa, principalmente em cursos de exatas, cuja complexidade requer uma abrangência cognitiva para além de repetições e ajustes, mas que partem da deliberação própria de estudantes e professores em aumentar a autonomia do raciocínio lógico e encadeado.

A importância da TAS para o ensino e para a pesquisa em ensino está relacionada com os processos de ensino, em si, gerenciados pela investigação científica e práticas pedagógicas sobre o tema. Demandam revisões críticas e adequações que visam elevar os processos educativos ao nível de excelência, de modo que as publicações são pontos de partida para estudos e devolvem, para os interessados em ensino e educação novas visões sobre o tema e impactos importantes em processos educativos.

Mais recentemente no país, também se configuram novas formas de abrangência da TAS, em segmentos das EBEPs, que também orientam docentes de cursos de Mestrados profissionais em alterações importantes dos paradigmas em Ensino de

Física, que visam tirar o foco da narrativa, redirecionando-o para as metodologias ativas nas quais os estudantes são os protagonistas do processo de ensino. Para isso, os estudantes do mestrado, também em processos de formação, orientam e são orientados para a confecção de produtos cujo principal objetivo é melhorar a formação, tanto dos profissionais da educação quanto, e principalmente, dos estudantes de Física do Ensino médio.

Assim, estudantes da pós-graduação vêm ganhando espaço para alterar o cenário educacional, contribuindo com a formação de seus alunos, o que, em primeiro lugar exige, deles próprios, dedicação e esforço no sentido de compreender as teorias de ensino para modelar e construir conhecimentos específicos para a área da educação, no nível médio e fundamental.

Isso é diferente do que se entende como formação continuada no Brasil, pois é importante observar que, mesmo diante dos problemas que a formação docente enfrenta no país, em cursos regulares de graduação (licenciaturas), formar licenciados e investir na qualificação desses cursos é prioridade.

A formação inicial, para todos os níveis e modalidades seria uma política mais condizente para a melhor qualificação dos trabalhadores nas redes de ensino, e para propiciar aos alunos dessas redes os conhecimentos importantes para sua realização pessoal e no trabalho e sua contribuição para uma coletividade mais integrada [21]

No entanto, as contribuições no processo de ensino de professores não podem, sob qualquer pretexto, ser desconsiderada. A formação continuada de professores de física em exercício adiciona, à formação básica deles, uma qualificação indiscutível, pois a aprendizagem resultante da intenção de alterar a prática docente, idealizando e construindo produtos educacionais, requisitos de formação nos mestrados profissionais, acabam por intervir não só na formação dos estudantes dos níveis fundamental e médio, mas na dos próprios professores.

Assim, com o principal objetivo de estudar teoricamente, computacional e experimentalmente, sistemas físicos não lineares (que podem apresentar caos), será incentivada a aprendizagem significativa de conceitos em estudantes do nível médio.

Construir um sistema mecânico simples, com dinâmica não linear, adquirir dados para caracterizá-lo experimentalmente, analisar teoricamente esses dados e simular computacionalmente a dinâmica dos sistemas não lineares, são objetivos específicos do estudo.

No que se refere à pesquisa translacional no Ensino, a compreensão da proposta das pesquisas, que é, atualmente, uma tendência mundial, mostra que a educação tem muito a ganhar com a reprodução de boas práticas de ensino desenvolvida nas pesquisas que acompanham o MNPEF. Daí, o interesse do presente estudo em incentivar, disponibilizar e fazer conexões entre as práticas no campo da educação por meio de materiais que possam orientar e colaborar com professores em serviço na

Educação básica, o que já está sendo dito por pesquisadores com muita experiência, no Brasil, em aprendizagem significativa [22].

Outra inserção importante para refletir sobre os resultados é uma contribuição da Teoria da ação, escrita por Pierre Bourdieu.

O fato referente a essa teoria, que deve ser observado nas pesquisas que geram produtos educacionais, é a distinção entre as posições sociais, ou “habitus” e as tomadas de posição, que subsidiam as escolhas dos professores, dentro da sua realidade de sala de aula.

O habitus e a posição social, como afirma Pierre Bourdieu (1996)[23] , são diferenciais importantes no arbítrio no âmbito educacional. Nas palavras do autor:

Os habitus são princípios geradores de práticas distintas e distintivas, ..., mas são também, esquemas classificatórios, princípios de classificação, princípios de visão e de divisão e gostos diferentes. Eles estabelecem as diferenças entre o que é bom e mau, entre o bem e o mal, entre o que é distinto e o que é vulgar, etc., mas elas não são as mesmas. Assim, por exemplo, o mesmo comportamento ou o mesmo bem pode parecer distinto para um, pretensioso ou ostentatório para outro e vulgar para um terceiro [23].

Daí que a tomada de decisões deve partir dos dados reais e mobilizar a comunidade do Ensino para compreender e talvez, “em primeiro lugar, romper com a propensão ao pensamento substancialista e ingenuamente realista que, as invés de preocupar-se com as relações, preocupam-se com realidades fenomênicas nas quais elas se manifestam” que impedem o reconhecimento de empecilhos educacionais dentro do sistema educacional.

A falta de pesquisas sobre um produto mais interativo que possibilite o professor junto ao aluno moldar ou visualizar um experimento física estudado, influencia na falta de conectivo para com o conteúdo ensinado. Os e-books “normais” são essencialmente versões digitais de livros comuns que geralmente são lidos em dispositivos como Kindle, iPad e Nook.

Durante a maior parte de sua história, os e-books foram bastante parecidos com os correspondentes em papel em termos de conteúdo. Mas isso está começando a mudar e, pela primeira vez, começar-se a ver os “enhanced e-books” (Livros digitais aprimorados). Esta falta de opção de livros digitais com maior capacidade de interação, foi quem culminou com a construção, tanto do experimento como do enhanced e-book, visando uma possibilidade a mais na tentativa de melhorar o ensino de física.

Quanto à natureza, a presente pesquisa é aplicada ao Ensino de física e gera conhecimentos dirigidos ao nível médio e superior e, quanto aos objetivos, é expli-

cativa, pois utiliza o método experimental para identificar a adesão voluntária, de estudantes e professores do nível médio, em investir tempo no aprofundamento de conceitos da física, raramente trabalhados na educação básica.

A necessidade de mostrar que eventos catastróficos podem ocorrer a partir de pequenos desvios de rotas, como no caso dos sistemas caóticos, assim como a necessidade de alterar a perspectiva determinística dos modelos, apresentados na Física de forma recorrente, imprime à ciência o dever de descrever sistemas por meio de aproximações, ainda que as previsões teóricas nem sempre sejam possíveis.

A própria visão da vulnerabilidade de resultados, assim como a dos avanços que a realidade incorpora, por meio de novos conhecimentos e novas tecnologias, é imprescindível de serem discutidas no ambiente escolar.

Quanto aos procedimentos técnicos, trata-se de um estudo experimental, com abordagem qualitativa que traz, à luz das observações por meio de dados obtidos do experimento, as impressões de um grupo de estudantes do primeiro ano do nível médio, para posterior comparação com as de professores que atuam no mesmo nível.

A dinâmica das relações entre os sujeitos envolvidos, professores e estudantes do ensino médio, alteram o mundo real de forma indeterminada, no entanto, um acréscimo de eficiência e eficácia do processo escolar pode ser determinado por ações que complementem a formação ou o acesso a informações relevantes para o público da educação básica. Nesse sentido, a abordagem qualitativa e a interpretação dos significados, de inserções dos participantes na pesquisa, enriquecem a coleta de dados e auxilia na descrição de processos de ensino aprendizagem, margeados por novas técnicas e abordagens no ensino que permite induzir alterações futuras aos processos escolares já estabelecidos.

Para a coleta de dados da aplicação do experimento com os estudantes, foram solicitados a produção de um relatório de livre elaboração, e na sequência de cada aula, para ser entregue ao fim da confecção do enhanced e-book, este deve ser submetido à apreciação dos professores que, voluntariamente participem da aplicação.

Os resultados são descritos no último capítulo e discutidos em seguida, à luz do referencial teórico da aprendizagem significativa.



## Capítulo 2

# A MATEMÁTICA DA FÍSICA NEWTONIANA

Um dos principais problemas de se ensinar os fundamentos da física, em relação à mecânica, ao nível do ensino médio está em tentar correlacionar de forma precisa a importância e o uso da ferramenta matemática para a descrição formal dos fenômenos naturais.

A mecânica trata, em essência, da descrição do movimento dos sistemas físicos. Deve-se considerar a importância de se definir corretamente conceitos como **sistema físico**, **estado** de um sistema físico, **evolução temporal** de um sistema físico, **dinâmica** de um sistema físico, entre outros, tanto do ponto de vista intuitivo e conceitual quanto do ponto de vista formal.

O uso de objetos matemáticos diversos para a descrição formal do movimento dos sistemas físicos, sem uma definição e apresentação correta pode se apresentar como uma dificuldade muito grande para o ensino/aprendizagem dos conceitos fundamentais da mecânica.

Por exemplo, o estudo do movimento de um corpo material genérico representado por um ponto geométrico adimensional em um espaço de configuração tridimensional onde o conceito de estado instantâneo do sistema é descrito em um espaço topológico de dimensão 6 pode inicialmente não ser muito bem compreendido por um estudante se não explicado o formalismo pertinente e a associação entre a fundamentação física e matemática. Isto pode prejudicar toda a compreensão dos fenômenos físicos decorrentes e por conseguinte a formação.

A seguir é apresentado um breve resumo dos principais conceitos relacionados com os fundamentos da descrição formal do movimento dos corpos materiais e a sua relação com a matemática.

## 2.1 Evolução temporal dos sistemas físicos

O universo, na atual concepção de Stephen Hawking [24], aparentemente não é estático isto é a maioria dos **sistemas físicos** evoluem no tempo. Esta evolução temporal pode ser provocada por inúmeros agentes que modificam o **estado** desses sistemas. Na medida em que o sistema evolui no tempo os valores das variáveis dinâmicas que definem o estado do sistema também mudam.

Na Física a descrição da evolução temporal de um sistema, composto de um ou mais elementos, é expressa por funções matemáticas que estão geralmente codificadas em equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais envolvendo derivadas em relação ao tempo. Este é o caso das Leis de Newton da Mecânica Clássica.

Para poder descrever o comportamento do sistema, uma solução analítica de tais equações ou sua integração ao longo do tempo através de simulações computacionais deve ser realizada.

A representação gráfica do conjunto de todos os estados possíveis de um sistema físico que evolui no tempo é denominada **espaço de fases** ou **espaço de estados**, denotado por  $\Gamma$ , onde cada estado possível é representado por um único ponto cujas coordenadas são os graus de liberdade do sistema físico [25].

A estes sistemas físicos compostos de um espaço de fases juntamente com as regras matemáticas que governam a evolução das variáveis que representam esses estados denomina-se **sistemas dinâmicos**. O estudo formal de qualquer tipo de sistema que evolui no tempo corresponde à área da Matemática denominada Sistemas Dinâmicos.

Os campos vetoriais estão intimamente conectados a equações diferenciais (sistemas dinâmicos). Portanto vetores tangentes devem fornecer um meio para descrever sistemas dinâmicos em variedades, bem como, de maneira mais geral, equações diferenciais parciais em variedades. Isso inclui o caso especial de campos vetoriais gradientes, que são os derivados de alguma função potencial (Isso levará ao fibrado cotangente e aos fibrados de ordem superior).

## 2.2 Definição conceitual de sistema físico

Conceitualmente um sistema físico pode ser definido como uma parte do universo escolhida para análise, todo o que não faz parte do sistema físico é denominado ambiente ou entorno e pode ou não ser considerado dependendo dos seus efeitos sobre o sistema.

Um sistema físico material em geral, pode apresentar propriedades físicas como massa, volume, densidade, forma geométrica, carga elétrica, energia interna, etc.

No estudo da mecânica dos sistemas físicos estas propriedades podem influenciar as propriedades de movimento quando levadas em conta as interações com o entorno ou meio [25].

## 2.3 Definição formal de um sistema físico

Tem sido considerada norma entre físicos teóricos e matemáticos definir, determinar ou caracterizar um sistema físico genérico recorrendo a alguma classe específica de objetos matemáticos [28]. Esta forma de pensamento possibilita uma base para análise da ontologia dos sistemas físicos em termos do formalismo abstrato da matemática.

Para qualquer sistema físico  $S$  de um tipo particular  $T_{fis}$  (por exemplo, não relativístico, clássico, holonómico, com um número finito de graus de liberdade), é associado um objeto matemático  $D(S)$  do tipo  $T_{mat}$ .

Em geral, o objeto  $D(S)$  deve descrever o sistema físico em alguma forma e o mapeamento  $D : T_{fis} \rightarrow T_{mat}$  é denominado conseqüentemente, a descrição matemática de um sistema físico genérico (do tipo  $T_{fis}$ ) [25].

### Definição

Um sistema físico  $S$  sendo descrito como  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , de tal forma que se escreva  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , é um conjunto de objetos matemáticos que verificam algumas condições particulares.

Para exemplificar, no ensino dos fenômenos de movimento de um sistema físico representado por um corpo ou objeto material (com alguma forma, volume, densidade, massa, etc.), na mecânica newtoniana, escolhe-se frequentemente representar o corpo material por uma partícula pontual, por questões didáticas de simplicidade. A partícula pontual é associada com um objeto matemático denominado ponto geométrico.

Na matemática moderna, um ponto refere-se geralmente a um elemento de um conjunto chamado espaço. Mais especificamente, na geometria euclidiana, um ponto é uma noção primitiva sobre a qual a geometria é construída, o que significa que um ponto não pode ser definido em termos de objetos definidos anteriormente. Ou seja, um ponto é definido apenas por algumas propriedades, chamadas axiomas, que devem ser satisfeitas. Em particular, os pontos geométricos não possuem comprimento, área, volume ou qualquer outro atributo dimensional. Uma interpretação comum é que o conceito de um ponto se destina a capturar a noção de um local único no espaço euclidiano [25].

Embora do ponto de vista matemático o ponto geométrico carece de atributos,

ao fazer a associação de partícula pontual com a definição abstrata, as propriedades físicas da partícula como massa, carga elétrica e outras são implicitamente associadas com o ente matemático.

O ponto geométrico  $P$  é associado a um espaço euclidiano (outro objeto matemático), e cada ponto nesse espaço é definido por uma tripla ordenada  $(x, y, z)$  que representam as coordenadas do ente em três eixos mutuamente perpendiculares. Isto significa que para localizar o ponto no espaço euclidiano é necessário um sistema de coordenadas (mais um objeto matemático).

As ideias básicas deste exemplo podem ser generalizadas e expandidas quando a partícula associada ao ponto geométrico pode evoluir no tempo em acordo a alguma regra específica.

## 2.4 Evolução temporal de um sistema físico

De forma geral, um sistema físico evolui no tempo, a especificação da evolução temporal, ou dinâmica, do sistema físico, na mecânica de Newtoniana, está codificada na equação diferencial da Segunda Lei de Newton. As soluções desta equação diferencial de segunda ordem são funções de coordenadas de posição e velocidade, ambas dependentes do tempo, que descrevem de forma determinística quais os estados futuros que seguem ao estado atual.

## 2.5 Definição Formal de Sistema dinâmico

Um sistema dinâmico é formalmente definido como uma tripla ordenada  $(\Gamma, T, F)$  formada por um espaço de estados (ou espaço de fases)  $\Gamma = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_N)$  (que é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema sendo função dos graus de liberdade), um conjunto  $T$  de todos os tempos  $t$ , com  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ , e uma regra  $F$  que especifica a evolução temporal dos estados. A regra  $F$  é uma função cujo domínio é  $\Gamma \times T$  e cujo co-domínio é  $\Gamma$ , isto é:

$$F : \Gamma \times T \rightarrow \Gamma. \quad (2.1)$$

A regra funcional significa que  $F$  toma duas entradas  $F = F(\gamma, t)$ , onde  $\gamma \in \Gamma$  é o estado inicial (em  $t = 0$  por exemplo),  $\gamma = \Gamma[x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)]$  e  $t \in T$  é um tempo futuro. Em outras palavras,  $F(\gamma, t)$  fornece o estado no tempo  $t$ , isto é,  $\Gamma[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]$ , dado que o estado inicial foi  $\gamma$  [25].

Um sistema dinâmico é então considerado como um modelo que descreve a evolução temporal de um sistema, em nosso caso um sistema físico.

## 2.6 Caracterização de um sistema físico

No estudo da mecânica newtoniana para caracterizar o sistema físico é necessário um conjunto de parâmetros independentes para descrever a configuração do sistema relativa a alguma configuração de referência. Esse conjunto de parâmetros são conhecidos como as **coordenadas generalizadas** ou **graus de liberdade** do sistema, e devem especificar de forma única a configuração do sistema em um instante particular de tempo.

O conhecimento das coordenadas generalizadas de um sistema em um instante de tempo dado permite a determinação da localização, orientação e movimento do sistema, nesse instante. Assim, a localização, orientação e movimento do sistema em um dado instante de tempo especificam completamente o **Estado do Sistema** físico em esse instante [25].

## 2.7 Estado de um sistema físico

Na teoria de sistemas dinâmicos todo grau de liberdade ou parâmetro de um sistema é representado como um eixo de um espaço multidimensional denominado **espaço de fases ou espaço de estados**  $\Gamma$ . Para cada estado possível do sistema ou combinação permitida de valores dos parâmetros do sistema, um ponto é incluído no espaço de fases.

A evolução temporal de um estado no espaço de fases produz um **caminho** ou **trajetória** nesse espaço multidimensional. A trajetória no espaço de fases representa o conjunto de estados compatíveis com o início em uma condição inicial específica. Como um todo, o espaço de fases representa tudo o que o sistema pode ser e a análise da sua forma pode elucidar qualidades do sistema que, de outra forma, não seriam óbvias [27].

## 2.8 Espaço de configuração

Na mecânica clássica, os parâmetros que definem a configuração de um sistema são chamados de coordenadas generalizadas, essas coordenadas generalizadas definem um espaço vetorial denominado **espaço de configuração** que é o espaço de **todas as posições instantâneas possíveis** de um sistema físico.

O espaço de configuração de um sistema mecânico possui uma estrutura de variedade diferenciável, de dimensão  $n$ , onde  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema físico. Por esse motivo, esse espaço também é conhecido como uma **variedade de configuração**.

Por exemplo:

- A posição de uma única partícula (figura 2.1) se movendo no espaço euclidiano tridimensional (figura 2.2) comum é definida pelo vetor  $\vec{r} = (x, y, z)$  e, portanto, seu espaço de configuração é  $\mathbb{R}^3$ .
- Para  $n$  partículas é  $\mathbb{R}^{3n}$ .
- Para um pêndulo que se move no mesmo plano  $\vec{s} = l\theta \vec{e}_\theta$ , o espaço de configuração é  $\mathbb{S}^1$ , pois sua posição é dada por um único ângulo (por exemplo, o ângulo em relação à vertical).
- Para um corpo rígido assimétrico o espaço de configuração apropriado é  $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ , três coordenadas para localizar o centro de massa do sistema físico, e três coordenadas angulares para fornecer a orientação do corpo no espaço.

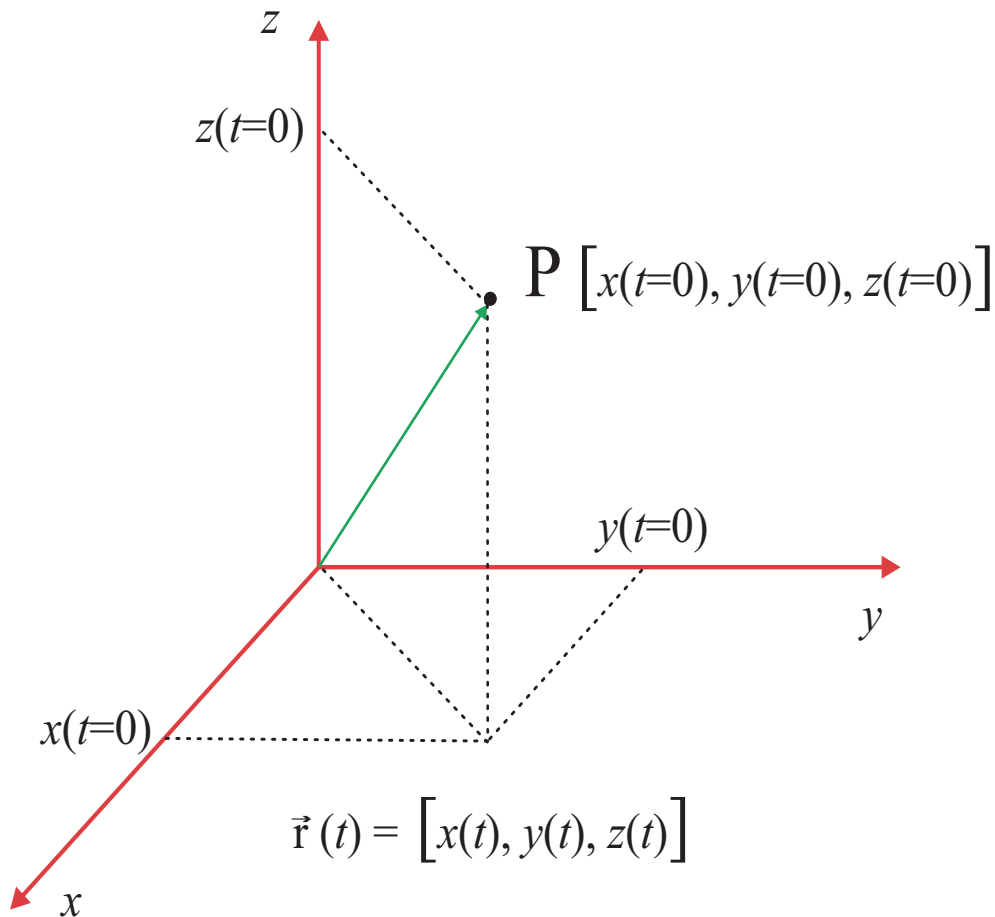


Figura 2.1: Posição instantânea de um sistema físico no espaço de configuração.

O espaço de configuração é também denominado **espaço de posição, espaço real ou espaço de coordenadas** é o conjunto de todos os vetores de posição no espaço. Um vetor de posição define um ponto no espaço.

Se o vetor de posição de uma partícula pontual variar com o tempo, traçará um caminho, a trajetória de uma partícula. Este espaço é a extensão tridimensional sem limites em que objetos e eventos físicos têm posição, direção, sentido e velocidades relativas.

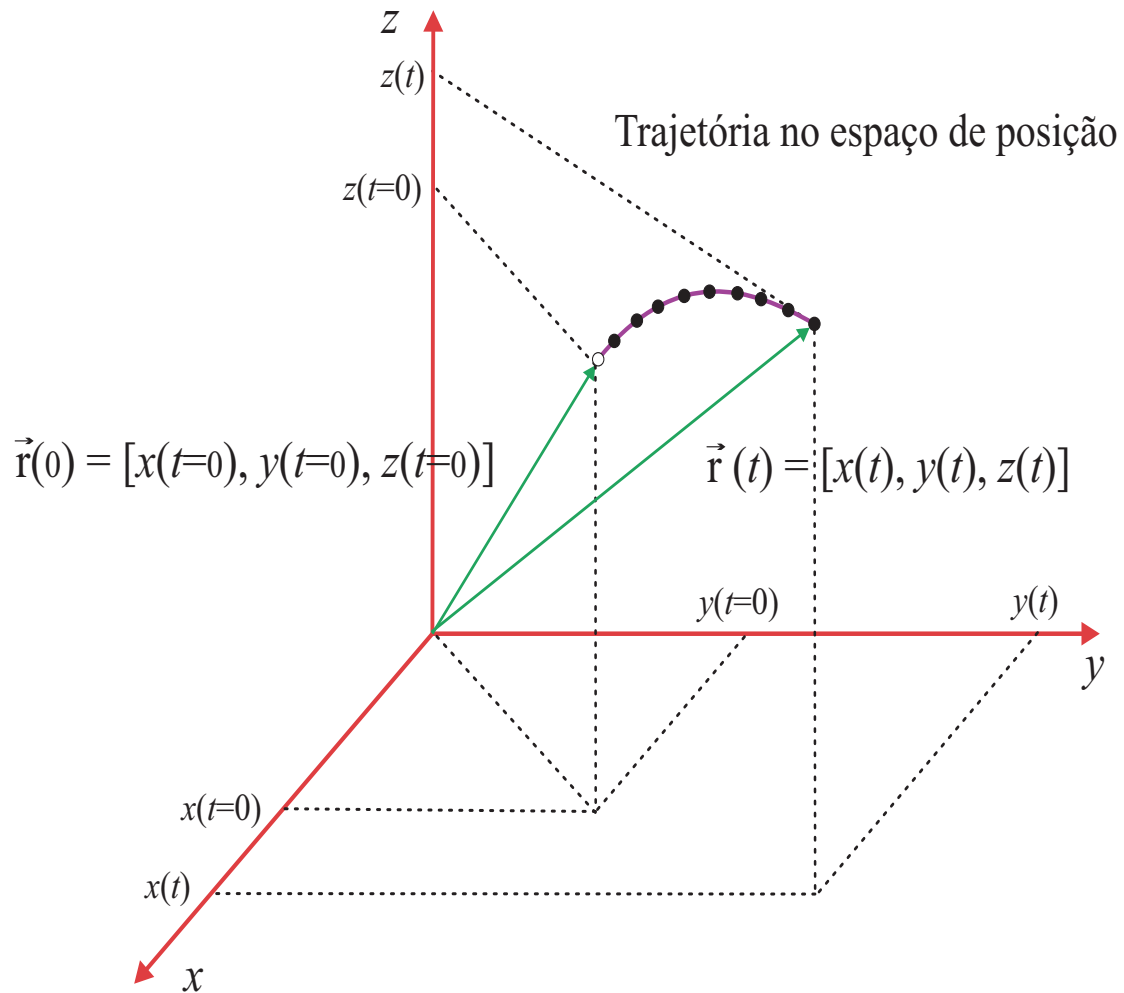


Figura 2.2: Trajetória ou evolução temporal de um sistema físico no espaço de configuração.

Portanto, dado um sistema dinâmico, composto por uma partícula pontual se movendo em um espaço tridimensional ( $n = 3$ ), possui um espaço de configuração de dimensão 6 ( $2n$ ) associado com seu espaço de fases.

O espaço de configuração é um objeto matemático que possui um número grande e finito de graus de liberdades; o caso mais simples de sistemas de coordenada no EC; é o sistema de coordenadas cartesianas, que possui coordenadas tridimensionais ( $x; y; z$ ) ou até mesmo bidimensional ( $x; y$ ) (figura 2.3).

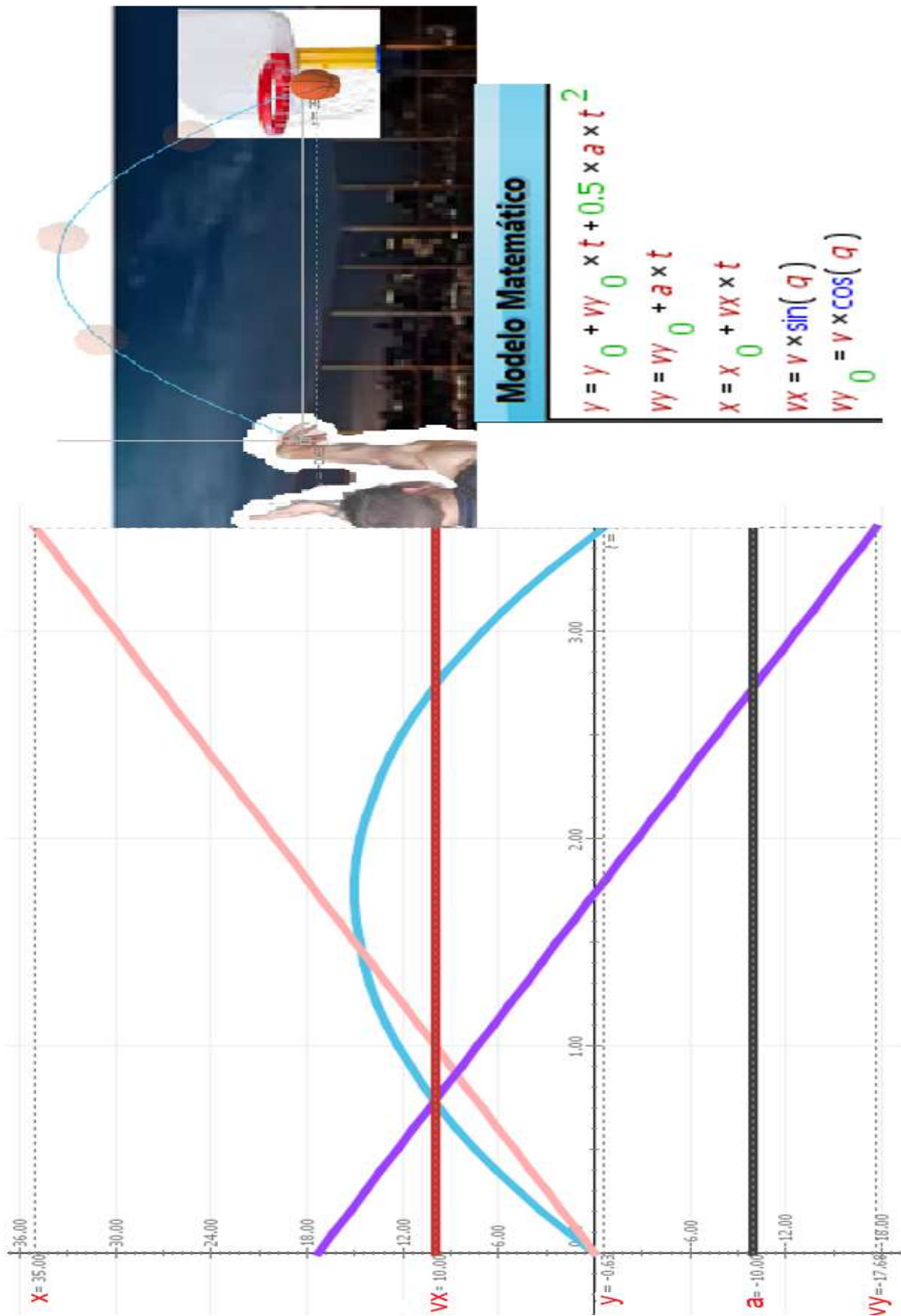


Figura 2.3: representação das variáveis dinâmicas (estados) relevantes do sistema de arremço de basquete para o plano Cartesiano nos eixos  $x$  e  $y$ .



## 2.9 Espaço de fases ou estados

O espaço de configuração é insuficiente para descrever completamente um sistema físico, assim, define-se um **espaço de configuração estendido**, **espaço de estados** ou **espaço de fases**  $\Gamma$  no qual todos os estados possíveis de um sistema são representados, com cada estado possível correspondendo a um ponto único no espaço de fases. Para um sistema físico simples sem vínculos, o espaço de fases geralmente pode consistir de todos os valores possíveis das variáveis de posição e velocidade (figura 2.4).

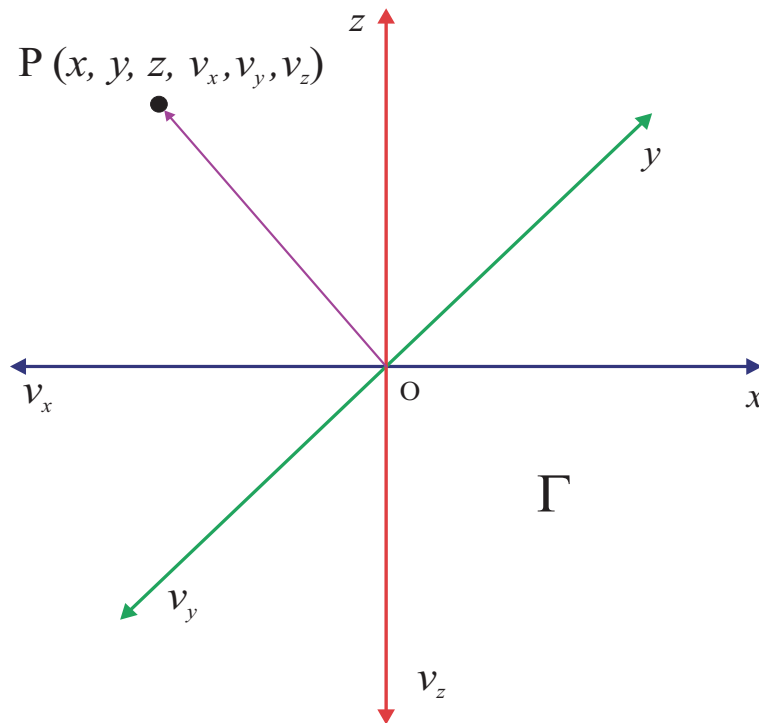


Figura 2.4: Esquema que representa o espaço de fases  $\Gamma$ , para um sistema físico com espaço de configuração tridimensional e com dinâmica descrita pelas Leis de Newton.

O emprego do espaço de fases tem origem nos conceitos matemáticos de **variedades diferenciais**, **espaços vetoriais**, e **fibrados vetoriais** os quais serão detalhado nas seções seguintes.

## 2.10 Variedade

Em matemática, uma **variedade**, é um **espaço topológico** que se assemelha localmente ao **espaço euclidiano** nas proximidades de cada ponto. Mais precisamente, cada ponto de uma variedade  $n$ -dimensional tem uma vizinhança que é homeomórfica ao espaço euclidiano da dimensão  $n$ . Nesta terminologia mais precisa,

uma variedade é referida como uma variedade  $n$ . De forma simples, uma variedade é um espaço “modelado” no espaço euclidiano.

### 2.10.1 Espaço topológico

Na matemática, um espaço topológico pode ser definido como um conjunto de pontos, juntamente com um conjunto de vizinhanças para cada ponto, satisfazendo um conjunto de axiomas relacionados a pontos e vizinhanças.

### 2.10.2 Espaço métrico

Na matemática, um espaço métrico é um conjunto de pontos juntamente com a métrica do conjunto. A métrica é uma função que define o conceito de distância entre dois membros quaisquer do conjunto. A métrica satisfaz algumas propriedades simples

- a distância de um ponto para si é zero,
- a distância entre dois pontos distintos é positiva,
- a distância de  $A$  a  $B$  é igual à distância de  $B$  a  $A$ , e
- a distância a partir de  $A$  para  $B$  é inferior ou igual à distância a partir de  $A$  para  $B$  através de um terceiro ponto  $C$ .

Uma métrica em um espaço induz propriedades topológicas, como conjuntos abertos e fechados, que levam ao estudo de espaços topológicos mais abstratos. O espaço métrico mais familiar é o espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.10.3 Espaço vetorial euclidiano

Um espaço vetorial euclidiano é um espaço de produto interno de dimensão finita sobre o campo dos números reais, que carrega uma estrutura de espaço métrico. Seja  $\mathbb{R}$  o campo dos números reais. O produto cartesiano é definido pelo produto  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , de números reais ( $n$  fatores). A notação empregada para  $P \in \mathbb{R}^n$  é

$$P = \vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

Aqui  $P$  é denominado um ponto ou um vetor e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as coordenadas de  $P$ . O número natural  $n$  é denominado a dimensão do espaço. Quando se faz

referência ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  e a seus vetores, os números reais são denominados escalares.

#### 2.10.4 Espaço euclidiano

Um espaço euclidiano é um espaço afim sobre o campo dos números reais, de modo que o espaço vetorial associado seja um espaço vetorial euclidiano. Os espaços euclidianos são chamados de espaços euclidianos para distingui-los dos espaços vetoriais euclidianos. A dimensão de um espaço euclidiano é a dimensão do seu espaço vetorial associado.



Figura 2.5: *Classificação dos espaços topológicos.*

### 2.11 Espaço vetorial tangente

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferencial, e seja  $P$  um ponto de  $M$ . O espaço tangente a  $M$  no ponto  $P$  é o conjunto

$$T_P M, \tag{2.3}$$

formado por todos os vetores tangentes a  $M$  no ponto  $P$ , assim é um espaço vetorial.

Em termos simples, um vetor tangente é um deslocamento infinitesimal em um ponto específico de uma variedade  $\mathbb{M}$ . O conjunto de vetores tangentes em um ponto  $P$  forma um **espaço vetorial** chamado **espaço tangente** em  $P$ , e a coleção de espaços tangentes em uma variedade forma um fibrado vetorial chamado **fibrado tangente**.

### Definição

Dada uma variedade diferenciável  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ , uma curva suave ou diferenciável ( $\mathcal{C} \in C^m(\Lambda)$ ), em  $\mathbb{M}$ , é um mapeamento

$$\mathcal{C} : (-\lambda, \lambda) \rightarrow \mathbb{M}, \quad (2.4)$$

onde  $I_\Lambda = (-\lambda, \lambda)$  é um intervalo do domínio  $\Lambda$  da função que descreve a curva. Pode-se imaginar o vetor velocidade  $\dot{\mathcal{C}}(0)$  como sendo localizado no ponto  $P = \mathcal{C}(0)$ . Frequentemente é desejável formar explicitamente um espaço vetorial  $n$ -dimensional específico para cada ponto  $P$ . Uma forma de fazer isto é usar  $\{P\} \times \mathbb{M}$ , de forma que um vetor tangente com base no ponto  $P$  pode ser tomado como um par ordenado  $(P, v)$  onde  $v \in \mathbb{M}$ . O conjunto  $\{P\} \times \mathbb{M}$  recebe uma estrutura de espaço vetorial de  $\mathbb{M}$ , desta forma, denota-se  $\{P\} \times \mathbb{M}$  por  $T_P\mathbb{M}$  e denomina-se o espaço tangente em  $P$ .

Se  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ , e escreve-se  $\mathcal{C}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , logo o vetor velocidade da curva  $\mathcal{C}$  no tempo  $t = 0$ , é

$$\left( P, \frac{dx_1(0)}{dt}, \frac{dx_2(0)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(0)}{dt} \right),$$

o qual está fixado no ponto  $P = \mathcal{C}(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ .

De forma ambígua, ambos:

$$\left( x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0), \frac{dx_1(0)}{dt}, \frac{dx_2(0)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(0)}{dt} \right), \quad (2.5)$$

e,

$$\left( \frac{dx_1(0)}{dt}, \frac{dx_2(0)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(0)}{dt} \right),$$

são frequentemente denotados por  $\dot{\mathcal{C}}(0)$  ou  $\mathcal{C}'(0)$ .

Finalmente, se  $\mathbf{V}$  é um espaço vetorial de dimensão finita, logo  $\mathbf{V}$  é uma variedade suave e o espaço tangente em  $P \in \mathbf{V}$  pode ser tomado como o conjunto  $\{P\} \times \mathbf{V}$  e emprega-se a notação  $\vec{v}_P = (P, v)$ .

## 2.12 Fibrado vetorial ou fibrado tangente

O **fibrado tangente** de uma variedade diferenciável  $\mathbb{M}$  é o espaço  $T\mathbb{M}$  que reúne todos os vetores tangentes em  $\mathbb{M}$ . Como um conjunto, é dado pela união disjunta dos **espaços tangentes** de  $\mathbb{M}$ , isto é

$$T\mathbb{M} = \bigsqcup_{P \in \mathbb{M}} T_P\mathbb{M},$$

$$T\mathbb{M} = \bigcup_{P \in \mathbb{M}} \{P\} \times T_P\mathbb{M},$$

$$T\mathbb{M} = \bigcup_{P \in \mathbb{M}} \{(P, \vec{v}) / \vec{v} \in T_P\mathbb{M}\}, \quad (2.6)$$

$$T\mathbb{M} = \{(P, \vec{v}) / P \in \mathbb{M}, \vec{v} \in T_P\mathbb{M}\},$$

onde  $T_P\mathbb{M}$  denota o espaço tangente a  $\mathbb{M}$  no ponto  $P$ .

**Assim, um elemento de  $T\mathbb{M}$  pode ser imaginado como um par ordenado  $(\vec{r}, \vec{v})$  onde  $\vec{r}$  identifica um ponto de  $\mathbb{M}$ , e  $\vec{v}$  é um vetor tangente a  $\mathbb{M}$  no ponto  $P$  localizado pelo vetor  $\vec{r}$ .** A dimensão do fibrado  $T\mathbb{M}$  é duas vezes a dimensão da variedade  $\mathbb{M}$ .

Em resumo o fibrado tangente é o espaço que reúne todos os vetores posição e velocidade de  $\mathbb{M}$ . Por exemplo se  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3 = (x, y, z)$ , então  $T\mathbb{M}$  pode ser imaginado como o espaço  $\mathbb{R}^6 = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ .

## 2.13 Espaço cotangente

Seja  $\mathbb{M}$  uma variedade suave, e seja  $P$  um ponto de  $\mathbb{M}$ . Seja também  $T_P\mathbb{M}$  o espaço tangente de  $\mathbb{M}$  no ponto  $P$ . Logo o **espaço cotangente** no ponto  $P$  é definido como o espaço dual de  $T_P\mathbb{M}$ :

$$T_P^*\mathbb{M} = (T_P\mathbb{M})^*. \quad (2.7)$$

Concretamente, os elementos do espaço cotangente são funcionais lineares sobre  $T_P\mathbb{M}$ . Isto é, cada elemento  $v^* \in T_P^*\mathbb{M}$  é um mapeamento linear

$$v^* : T_P\mathbb{M} \rightarrow F. \quad (2.8)$$

onde  $F$  é o campo correspondente ao espaço vetorial sendo considerado, por exem-

plo o campo dos números reais. Os elementos de  $T_P^*\mathbb{M}$  são denominados vetores cotangente.

## 2.14 Fibrado cotangente

O fibrado cotangente  $T^*\mathbb{M}$  de uma variedade diferenciável  $\mathbb{M}$  é o fibrado vetorial de todos os espaços cotangentes  $T_P^*\mathbb{M}$  em cada ponto do espaço. Pode também ser descrito como o fibrado dual do fibrado tangente [28].

Seja  $\mathbb{R}^3$  um espaço diferenciável e denote-se por  $P$  um ponto em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $T_P\mathbb{R}^3$  o espaço tangente a  $\mathbb{M}$  no ponto  $P$ . O espaço cotangente em  $P$  é definido como o espaço dual de  $T_P\mathbb{R}^3$ , ou seja  $T_P^*\mathbb{R}^3$ , onde

$$T_P^*\mathbb{R}^3 = (T_P\mathbb{R}^3)^*, \quad (2.9)$$

Os elementos do espaço cotangente são funcionais lineares sobre o espaço tangente  $T_P\mathbb{R}^3$ . Isto é, cada elemento  $\alpha \in T_P^*\mathbb{R}^3$  é um mapeamento linear

$$\alpha : T_P\mathbb{R}^3 \rightarrow F, \quad (2.10)$$

onde  $F$  é o campo correspondente do espaço vetorial sendo considerado, por exemplo o campo dos números reais  $\mathbb{R}$ . Os elementos de  $T_P^*\mathbb{R}^3$  são denominados co-vetores ou vetores cotangente.

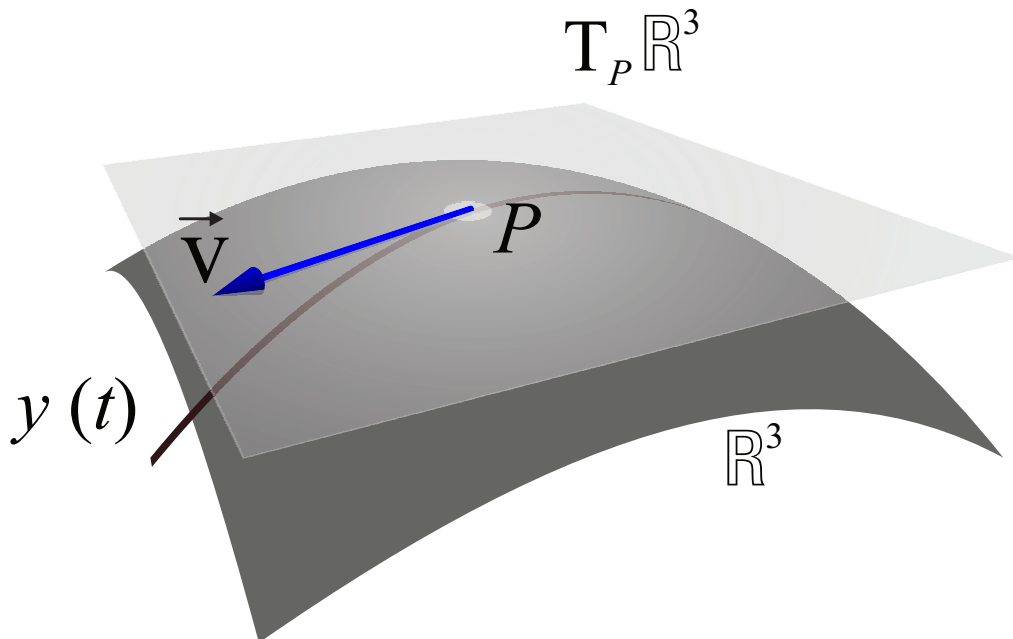


Figura 2.6: Espaço de configuração, espaço tangente e espaço cotangente.

O conjunto de posições e velocidades de um sistema físico formam o espaço cotangente  $T_P^*\mathbb{R}^3$  do espaço de configuração  $\mathbb{R}^3$ . Na formulação da mecânica clássica de Hamilton, este espaço topológico maior é denominado de Espaço de Fases do sistema.

Exemplo, o fibrado tangente do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  é  $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ , o fibrado cotangente é  $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^*$ , onde  $(\mathbb{R}^3)^*$  denota o espaço dual de co-vetores, funcionais lineares  $v^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

No esquema mostrado na figura 2.6, um vetor tangente no ponto  $P$  pode ser interpretado como a velocidade da curva que passa pelo ponto  $P$ .

## 2.15 Funcional linear

Na álgebra linear, um **funcional linear** ou **forma linear** (também chamada de **forma única -one form- ou covector**), é um mapeamento linear de um espaço vetorial para seu campo de escalares,

$$f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2.11)$$

Em  $\mathbb{R}^n$ , se os vetores são representados como vetores de coluna, os funcionais lineares são representados como vetores linha, e sua ação nos vetores coluna é dada pelo produto matricial com o vetor linha à esquerda e o vetor coluna à direita. Em geral, se  $\mathbf{V}$  é um espaço vetorial sobre um campo  $\mathbb{C}$ , então um funcional linear  $f$  é uma função de  $\mathbf{V}$  a  $\mathbb{C}$  que é linear:

$$f(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = f(|\alpha\rangle) + f(|\beta\rangle) \quad \forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbf{V} \quad (2.12)$$

$$f(a|\alpha\rangle) = af(|\alpha\rangle) \quad \forall |\alpha\rangle \in \mathbf{V}, a \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

O conjunto compostos por todos os funcionais lineares de  $\mathbf{V}$  para  $\mathbb{C}$ , denotados por  $Hom_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$ , forma um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pointwise. Esse espaço é denominado espaço dual de  $\mathbf{V}$  e denotado  $\mathbf{V}^*$ .

Em geometria diferencial uma forma única sobre uma variedade diferenciável é uma seção suave do fibrado cotangente. Equivalentemente, uma forma única sobre uma variedade  $\mathbb{M}$  é um mapeamento suave do espaço total do fibrado tangente de  $\mathbb{M}$  para  $\mathbb{R}$  cuja restrição para cada fibra é um funcional linear do espaço tangente. Em símbolos:

$$f : T\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

$$f_P = f|_{T_P\mathbb{M}} : T_P\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

onde  $f_P$  é linear.

Frequentemente as formas únicas são descritas localmente, particularmente em coordenadas locais. Em um sistema de coordenadas locais, uma forma única é uma combinação linear das diferenciais (diferenciais externas) das coordenadas:

$$f_P = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_n} dx_n, \quad (2.16)$$

onde,

$$f(\vec{r}) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e os  $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i}$  são funções suaves.

Desta perspectiva, uma forma única possui uma lei de transformação covariante ao passar de um sistema de coordenadas para outro. De forma que uma forma única é um campo tensorial covariante de ordem 1.

## 2.16 Espaço vetorial simplético

Um espaço vetorial simplético é um espaço vetorial  $\mathbf{V}$  sobre um campo, por exemplo  $\mathbb{R}$  equipado com uma forma bi-linear simplética.

Uma forma bi-linear simplética é um mapeamento

$$f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow F, \quad (2.17)$$

que é:

- bi-linear, linear em cada argumento separadamente;
- alternado,  $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , e
- não degenerado,  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$  implica que  $\mathbf{u} = 0$ .



## 2.17 Estados físicos na Mecânica de Newton

Na mecânica Newtoniana, a Segunda Lei de Newton relaciona o estado de um sistema físico com a força resultante que atua sobre o sistema.

Considere-se um conjunto de forças  $\vec{F}_i(\vec{r}, t)$  atuando sobre um sistema físico, se há uma força resultante não nula então o sistema deverá sofrer aceleração

$$\sum_i \vec{F}_i(\vec{r}, t) = m \vec{a}. \quad (2.18)$$

Este é o enunciado da Segunda Lei de Newton, que pode ser expresso na forma das duas equações seguintes:

$$\vec{F}_R(\vec{r}, t) = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.19)$$

$$\vec{F}_R(\vec{r}, t) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.20)$$

A resolução de qualquer umas das formas da equação diferencial da segunda lei de Newton, 2.19 ou 2.20, deve fornecer o **estado do sistema** físico em qualquer tempo, uma vez conhecido o **estado inicial**. A teoria é determinística e as suas previsões podem ser testadas por subsequentes observações do estado do sistema. A equação da segunda lei de Newton incorpora todos os conceitos fundamentais que são usados para a descrição de qualquer sistema físico:

- O estado do sistema é descrito por um objeto matemático,
- A dinâmica está especificada em uma equação diferencial (denominada equação de movimento).

Considere-se por exemplo o caso do movimento de uma partícula pontual de massa  $m$  que experimenta uma força constante  $\vec{F}_R$ , usando a equação 2.19 pode-se escrever

$$\vec{F}_R = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \quad (2.21)$$

A solução da equação deverá fornecer um conjunto infinito de funções para a velocidade da partícula. Assim,

$$d\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} dt, \quad (2.22)$$

$$\int d\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} \int dt, \quad (2.23)$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0), \quad (2.24)$$

A especificação das condições iniciais do sistema deverão permitir a escolha de uma única função para o vetor velocidade. Se assume-se que no tempo  $t = t_0$ , instante inicial, a velocidade é  $\vec{v}(t_0)$ , então a velocidade da partícula em qualquer instante de tempo posterior é dada pela equação,

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0) + \vec{v}(t_0). \quad (2.25)$$

Particularmente se  $\vec{v}(t_0) = 0$ , em  $t_0 = 0$  então obtem-se a forma familiar da equação encontrada nos livros didáticos,

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} t, \quad (2.26)$$

ou,

$$\vec{v}(t) = \vec{a} t. \quad (2.27)$$

A partir desta equação 2.25, pode-se obter também o vetor posição

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0) + \vec{v}(t_0),$$

$$d\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0) dt + \vec{v}(t_0) dt,$$

$$\int d\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_R}{m} \int (t - t_0) dt + \int \vec{v}(t_0) dt,$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0)^2 + \vec{v}(t_0)(t - t_0),$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_R}{m} (t - t_0)^2 + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{r}(t_0).} \quad (2.28)$$

Novamente se considera-se o caso particular  $\vec{v}(t_0) = 0$ , em  $t_0 = 0$ , obtem-se a equação familiar

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}_R}{m} (t)^2,} \quad (2.29)$$

ou,

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t)^2,} \quad (2.30)$$

O **estado físico** da partícula pontual, em qualquer instante de tempo, é especificado simultaneamente pela suas coordenadas de posição

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad (2.31)$$

e pelas suas coordenadas de velocidade

$$\vec{r}'(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)], \quad (2.32)$$

como funções do tempo.

As três coordenadas de posição juntamente com as três coordenadas de velocidade especificam a posição de um ponto no espaço de fases  $\Gamma$ , esse ponto corresponde a um estado particular do sistema físico em um instante de tempo determinado.

Assim, cada ponto ou estado do espaço de fases é representado pela 6-upla ordenada,

$$\Gamma = [ x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) ], \quad (2.33)$$

ou,

$$\Gamma = [ x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t) ], \quad (2.34)$$

em um instante particular de tempo  $t$ .

### 2.17.1 Variedades na Mecânica de Newton

Seja a variedade  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3$ . Considere um sistema físico consistente de uma partícula pontual se movendo em  $\mathbb{M}$ . O espaço de configuração deste sistema são os pontos de  $\mathbb{M}$ .

Tipicamente  $\mathbb{M}$  é uma variedade de Riemann, e é adicionada uma função energia potencial  $U$  a  $\mathbb{M}$  para definir a dinâmica. Como exemplo simples considere-se uma partícula de massa  $m$  se movendo em  $\mathbb{R}^3$  sob a influência de um campo escalar conservativo descrito pela função energia potencial do tipo central

$$U(r) = -\frac{k}{r}, \quad (2.35)$$

onde  $r = |\vec{r}|$  é a distância corrente da partícula medida a partir da origem.

Apontado no início da seção, o espaço de configuração é  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3$ . A trajetórias clássicas  $\vec{r}(t)$  são curvas em  $\mathbb{M}$  cuja dinâmica satisfaz a forma quadrática da segunda lei de Newton

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t), \quad (2.36)$$

ou,

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = -\frac{k}{mr^2}. \quad (2.37)$$

Pode-se definir a forma linear da equação da segunda lei de Newton,

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = -\frac{k}{mr^2}, \quad (2.38)$$

geometricamente,  $\vec{v}$ , denominado o vetor velocidade, pertence a um **campo vetorial** que é o espaço tangente  $T_P\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$  em um ponto particular  $P$ . Esse campo vetorial de velocidades é uma seção do fibrado tangente  $T\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ .

É nesse fibrado tangente  $T\mathbb{R}^3$ , que pode ser entendido como um espaço topológico ou variedade, que a trajetória clássica da partícula  $[\vec{r}(t), \vec{v}(t)]$  define uma curva que satisfaz a equação diferencial de primeira ordem,

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}(t), \vec{v}(t)] = \left[ \vec{v}(t), -\frac{k}{mr^2} \right], \quad (2.39)$$

ou,

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}(t), \vec{v}(t)] = [\vec{v}(t), \vec{a}(t)]. \quad (2.40)$$

A energia total do sistema  $E(\vec{r}, \vec{v}; t)$  (considerando um sistema físico conservativo), não depende apenas das coordenadas de posição mas também das coordenadas de velocidade. Assim a energia total é uma variedade do fibrado tangente  $T\mathbb{M}$ . Se  $t$  o tempo é considerado como um parâmetro e não como mais outra variável, o número de coordenadas de  $T\mathbb{M}$  é  $2n$ , os  $x, y, z$  mais os  $v_x, v_y, v_z$ . Devido a que o fibrado tangente envolve todas as coordenadas de posição e velocidade ele é considerado um espaço de fases. Ele não é um espaço vetorial e é denominado a variedade de fases. Em geral, é denominado o fibrado tangente, fibrado vetorial ou a variedade tangente de  $\mathbb{M}$  e assim a Energia total é uma função do fibrado tangente  $T\mathbb{M}$ .

## 2.18 Sistemas dinâmicos lineares

São sistemas dinâmicos cujas funções de avaliação são lineares. Sistemas dinâmicos lineares podem ser resolvidos com exatidão, e eles têm um vasto conjunto de propriedades matemáticas. Em particular, uma equação diferencial que descreve um determinado sistema físico é linear se for linear em termos da função desconhecida e suas derivadas, mesmo se não linear em termos das outras variáveis que aparecem nela.

A representação geométrica que caracteriza um sistema linear entre duas quantidades implica que, se um gráfico for construído com os valores de duas variáveis no plano por exemplo, a relação dessa expressão se traduz em uma linha reta. O gráfico da Eq.2.27 (figura 2.7) correspondente a um sistema linear, mostra bem a representação geométrica, onde o eixo vertical corresponde a velocidade ( $v$ ), e na horizontal, o eixo do tempo ( $t$ ).

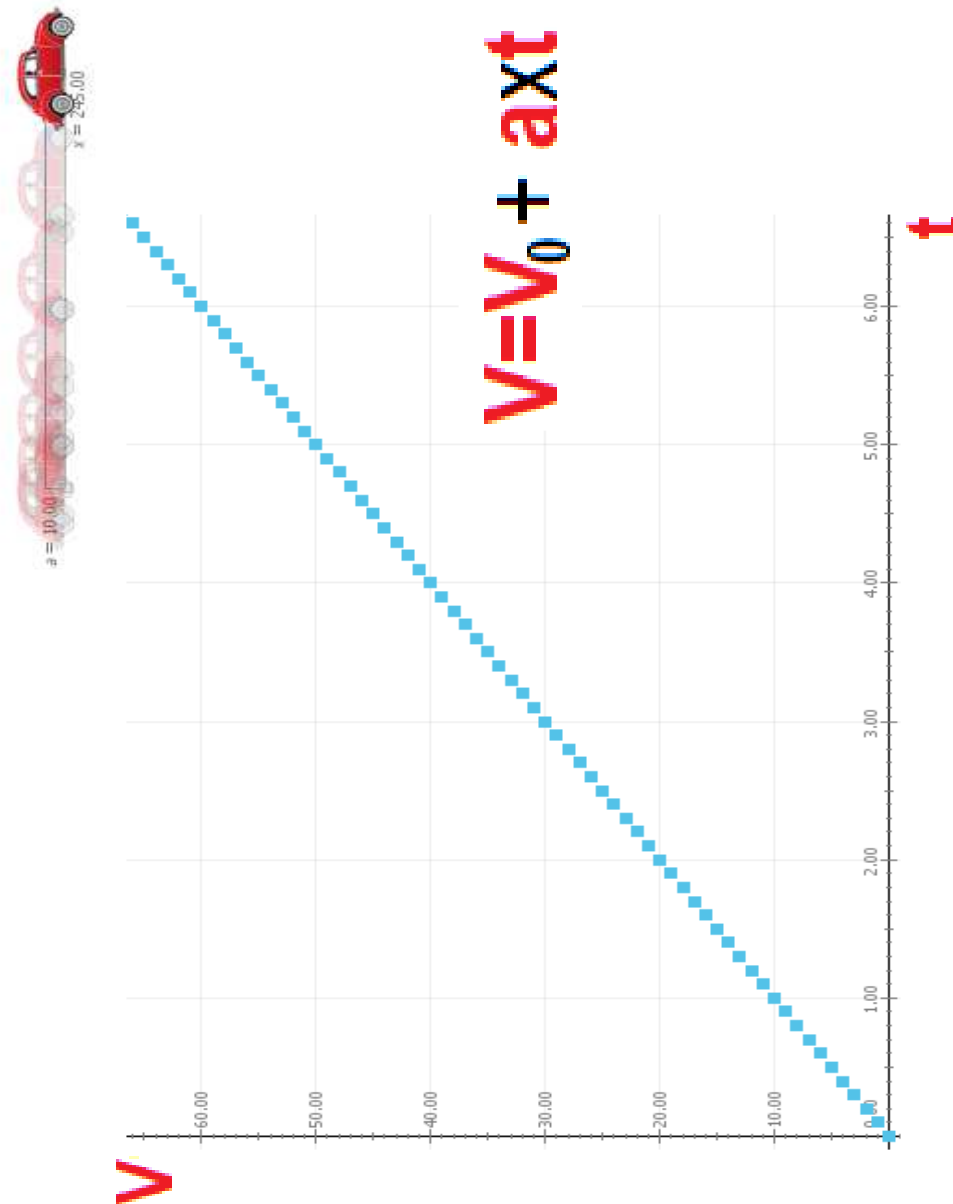


Figura 2.7: Gráfico de um sistema linear para o plano Cartesiano nos eixos  $x$  e  $y$ .

## 2.19 Sistemas dinâmicos não-lineares

Sistemas dinâmicos que não são lineares são denominados não lineares. Em contraste com a possível dinâmica de sistemas lineares a qual é bem determinada,

mesmo os mais simples sistemas não lineares podem ter comportamentos dinâmicos muito complexos. Os sistemas dinâmicos não lineares podem apresentar comportamentos imprevisíveis ou contra intuitivos incluindo o desenvolvimento de **caos** no espaço de fases. A não linearidade é estreitamente associada com comportamento caótico, mesmo que nem todos os sistemas não lineares gerem uma dinâmica caótica. O caos refere-se ao comportamento aparentemente aleatório que pode ocorrer em sistemas dinâmicos não lineares determinísticos.

Diz-se não linear, quando a representação gráfica de  $f(t)$  difere de uma reta, o que significa que a reta atua de uma maneira não uniforme de ponto para ponto conforme ilustrado a seguir com o gráfico da Eq.2.30 (figura 2.8), onde o eixo vertical corresponde ao deslocamento ( $x$ ), e na horizontal, o eixo do tempo ( $t$ ).

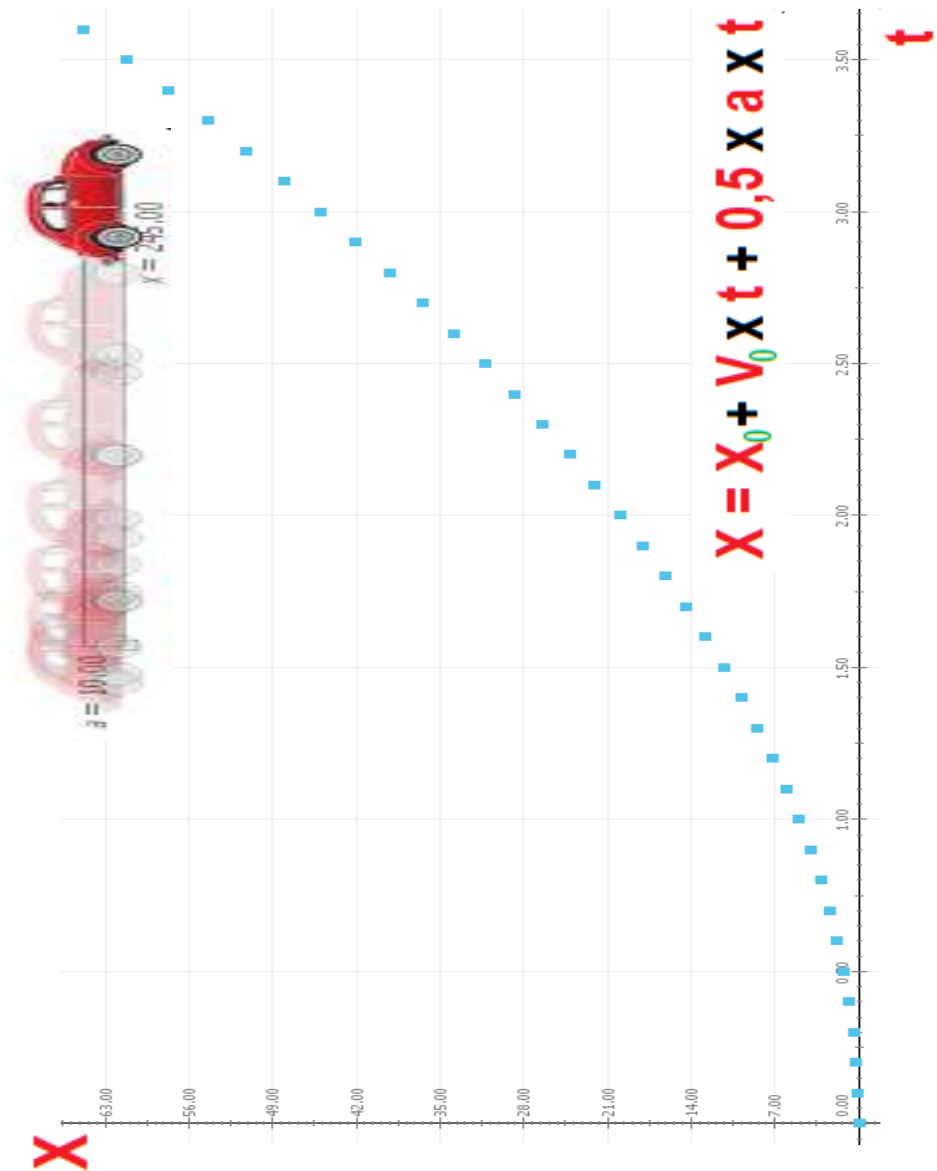


Figura 2.8: gráfico característico de um comportamento não linear para o plano Cartesiano nos eixos  $x$  e  $y$ .

Alguns desses sistemas, apresentam comportamentos onde, as equações diferenciais que os representam, não são solucionadas algebricamente. Dentre estes, alguns podem apresentar comportamento caótico. No entanto, é possível simular o comportamento do sistema conferindo valores numéricos aos parâmetros envolvidos, modelando-os no espaço de fase [29].

## 2.20 Caos nos sistemas dinâmicos

A ciência não linear compreende o estudo de sistemas físicos e matemáticos que apresentam comportamento não-linear. Os sistemas físicos lineares apresentam, de modo geral, movimentos com caráter regular na dimensão do espaço-tempo. Tais movimentos podem ser descritos totalmente através de funções bem comportadas, no entanto, os sistemas físicos não lineares frequentemente apresentam transições que vão de movimentos muito regulares a comportamentos altamente complexos ou de caráter aleatório. Se um sistema não linear é caótico, então pequenas mudanças nas condições iniciais podem conduzir a severas alterações do seu comportamento posterior [25].



## Capítulo 3

# O SISTEMA DE LORENZ

Ainda no século XX, para um físico criar a fusão a laser era válido; descobrir a rotação, a cor e o sabor de pequenas partículas era um problema relevante mediante as técnicas disponíveis para estudo. Compreender as nuvens era um problema para a meteorologia; os meteorologistas não só desprezavam a previsão, como também, na década de 1960, praticamente todos os cientistas desconfiavam dos computadores, os quais eram usados como ferramenta que ajudavam na previsão do tempo. Edward Norton Lorenz possibilitou aos meteorologistas, conforme afirma Gleick [30], fazerem “aquilo que os astrônomos vinham fazendo com lápis e régua de cálculo: prever o futuro do universo a partir de suas condições iniciais, e as leis físicas que guiam sua evolução”. Usando cálculos, com a ajuda de um computador, nas previsões de um modelo matemático simplificado de correntes de convecções da atmosfera, Lorenz encontrou, em 1963, o efeito de amplificação considerável que Poincaré<sup>1</sup> tinha indicado.

Pequenas causas, como tempestades localizadas podem ter grandes efeitos sobre o tempo do hemisfério ou mesmo do planeta inteiro [31]. O estudo do caos e a teoria do caos foram trabalhos elaborados para tentarem descrever a complexa realidade na qual estamos inseridos. Onde começa a teoria do caos a ciência clássica abrange suas teorias aplicáveis, e as fronteiras que antes separavam as disciplinas científicas, mediante as técnicas de estudos existentes na época, são rompidas com a teoria do caos, que retoma problemas que desafiavam o modo de trabalho aceito na ciência. Gleick [30] comenta sobre a magnitude da descoberta desta teoria.

Os mais ardentes defensores da nova ciência chegam ao ponto de dizer que a ciência do século xx será lembrada apenas por três coisas: a relatividade, a mecânica quântica e o caos. O caos dizem eles, tornou-se a terceira grande revolução do século nas ciências físicas. Como as duas

---

<sup>1</sup>Jules Henri Poincaré (1854-1912) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês. Ingressou na Escola Politécnica em 1873, continuou seus estudos na Escola de Minas sob a tutela de Charles Hermite, e se doutorou em matemática em 1879.

primeiras revoluções, o caos modifica muitos dos postulados da física de Newton. Como disse um físico: “a relatividade eliminou a ilusão newtoniana sobre o espaço e o tempo absoluto; a teoria quântica eliminou o sonho newtoniano de um processo controlável de mensuração; e o caos elimina a fantasia laplaciana de previsibilidade determinista”. A revolução do caos aplica-se ao universo que vemos e tocamos, aos objetos em escala humana [30].

### 3.1 Contextualização história

No inverno de 1961, Lorenz estava examinando detalhadamente uma sequência temporal sobre rolos atmosféricos, em vez de refazer toda a sequência, encurtou seu trabalho começando pelo meio, usando números da série anterior como ponto de partida inserindo esses dados no simulador. Saiu durante algumas horas e quando retornou, quando voltou percebeu algo diferente na sequência, o que planteou ser uma nova ciência [32].

A nova sequência deveria retornar a mesma situação anterior, porém os resultados divergiram, Lorenz imaginou que poderia ser defeito no computador, mas ao verificar a sequência numérica, olhou para uma depois para outra e observou o problema, seis casas decimais estavam armazenadas: 0,506127. Na impressão para ganhar tempo só apareciam três: 0.506. Lorenz tinha feito uma suposição sensata, pois para época se um computador conseguisse prever a temperatura dos mares com uma variação de um pra mil, seus operadores se consideravam satisfeitos, o erro por Lorenz cometido foi da ordem dos décimo-milésimos [30]. Esse pequeno erro foi suficiente para mudar completamente a evolução do sistema.

Observando detalhadamente a maneira como duas sequências de tempo quase idênticas se distinguiam; copiou numa transparência uma das linhas onduladas e pôs sobre a outra para ver o quanto divergiam. No início as curvas eram equivalentes, mas à medida que se passava o tempo, uma linha ficava ligeiramente para traz, a ponto de em certo período elas estarem completamente defasadas desaparecendo assim toda semelhança que tinha entre elas. Assim como a evolução do sistema divergia exageradamente Lorenz também teve um sobressalto, ele desenhara um modelo simples de condições meteorológicas consistindo em três equações não lineares acopladas.

Ele constatou que as soluções eram extremamente sensíveis às condições iniciais; a partir de dois pontos de partida praticamente idênticos, desenvolver-se-iam duas trajetórias por caminhos totalmente diferentes, o que tornava impossível qualquer previsão a longo prazo. Lorenz tinha certeza que chegava ao fim a essência da atmosfera real. Gleick [30] relata que, para Lorenz a previsão do tempo a longo

prazo estava condenada a partir daquele dia.

Certamente de qualquer modo não vínhamos tendo muito sucesso nisso, e agora tínhamos a desculpa, disse ele creio que uma das razões pelas quais as pessoas achavam ser possível prever o tempo com tanta antecedência é a existência dos fenômenos físicos reais para os quais pode se fazer excelentes previsões, como os eclipses (nos quais as dinâmicas do sol, da lua e da terra são bastante complicadas) e como as marés oceânicas. Nunca pensei como tábuas das marés como previsão - para mim, eram fatos consumados -, mas é claro que são previsões. As marés são na realidade tão complicadas quanto a atmosfera. Ambos têm componentes periódicos - pode se prever que o próximo verão vai ser mais quente que esse inverno. Com o tempo, porém, tomamos atitude de que já sabemos disso. Com as marés, o que nos interessa é a parte previsível, e a parte imprevisível é pequena, a menos que haja uma tempestade.

As pessoas comuns, vendo que podemos prever as marés com alguns meses de antecedência, perguntam porque não podemos fazer o mesmo com a atmosfera, trata-se apenas de um sistema de fluidos diferentes, as leis são quase igualmente complicadas. Mas percebi que qualquer sistema físico que se comportasse de maneira não-periódica seria imprevisível [30].

Em 1963, com o início da teoria do caos, o modelo de atrator conhecido na época como atrator de Lorenz, tornou-se o mais célebre e o mais estudado dos atratores estranhos. O atrator de Lorenz é graficamente tridimensional, o ponto no espaço de fase move-se aleatoriamente com algumas oscilações de amplitude crescente ao redor de um ponto e, então, volta a oscilar ao redor do primeiro ponto. Para Ferrari [33], o uso dos computadores como ferramenta de pesquisa científica, impulsionou essa teoria a torna-se uma ciência revolucionária.

O estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos não lineares foi modificado radicalmente entre as décadas de 1960 e 1970, com o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas e a utilização dos computadores, não mais como máquinas de fazer cálculos, mas como um ambiente de pesquisa científica. Essa modificação foi tão radical que se pode considerar ter havido uma verdadeira “revolução” no estudo dos sistemas dinâmicos. Uma enorme comunidade aderiu a essa “nova ciência” em um intervalo de tempo muito curto, chegando a ser tema de cerca de 4000 publicações em 15 anos, nas mais diversas áreas do conhecimento. No entanto, as principais características do comportamento caótico começaram a ser percebidas desde o final do século XIX, quando surgiram as primeiras contestações a respeito da capacidade de previsão da Ciência [33].

As ideias de Lorenz trouxeram para a ciência o determinismo do caos. Um sistema caótico não é aleatório e nem desordenado, nesse sentido, existe uma ordem, e um padrão no sistema como um todo. É o conhecido caos determinístico, que fornece uma expressão matemática que determina o seu desfecho. A Teoria do Caos possibilita enxergar ordem e padrão onde antes, por conta de uma visão reducionista de mundo, só se observava a aleatoriedade, a irregularidade e a imprevisibilidade. Pode se dizer que olhando o mundo de uma forma complexa, os sistemas concretos, tem uma irregularidade regular, uma imprevisibilidade previsível e uma desordem ordenada [34].

Os comportamentos destes sistemas podem ser perfeitamente quantificáveis e previsíveis usando de modelos matemáticos, analíticos ou numéricos que caracterizem o processo utilizando equações não lineares e também de equações lineares. Além de estudos sobre a previsão do tempo a termodinâmica contribui e muito para impulsionar a teoria do caos. A segunda lei da Termodinâmica afirma que os sistemas tendem à desordem; uma valiosa descoberta da ciência da complexidade foi revelar que alguns processos tendem à ordem, graças aos atratores caóticos [34].

### 3.1.1 Sistemas dinâmicos caóticos

Do ponto de vista da matemática, o termo caos refere-se ao estudo qualitativo do comportamento instável e aperiódico mostrado por diferentes tipos de sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares. O caos é definido como qualitativo no sentido de que ele procura pelo caráter geral dos sistemas de comportamento a longo prazo, ao invés de procurar por previsões numéricas sobre um estado futuro. Os sistemas caóticos são instáveis ao ponto que eles tendem a não resistir a qualquer perturbação externa, no entanto, eles reagem em modos muito significativos. Esses tipos de sistemas são determinísticos por que estão compostos de umas poucas equações diferenciais e não fazem referência a mecanismos implícitos de aleatoriedade [25].

Um sistema dinâmico é aquele que possui uma evolução determinística, no sentido em que seu movimento futuro é determinado pelo seu estado atual e a sua história. Um sistema dinâmico que exhibe comportamento caótico é caracterizado principalmente por uma alta sensibilidade a pequenas diferenças nas condições iniciais. De modo conceitual, pode-se dizer que as manifestações de caos nos sistemas físicos compreendem a sobreposição de um número muito grande de movimentos periódicos. Isso quer dizer que um sistema caótico pode passar um período de tempo muito curto num movimento quase-periódico e logo pode evoluir a um outro movimento periódico com período diferente do anterior, e assim por diante. Essa transição entre movimentos periódicos instáveis produz a sensação de aleatoriedade total, porém existe ordem, já que o caos na natureza é determinístico e não aleatório

[25].

### 3.1.2 Caracterização do caos

Dentro dos sistemas dinâmicos é possível obter uma medida da sensibilidade a mudanças nas condições iniciais através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. O expoente fornece uma medida quantitativa da razão de divergência (ou convergência) de duas trajetórias vizinhas ou estados iniciais após um intervalo de tempo.

Quantitativamente duas trajetórias no espaço de estados com separação inicial  $\Delta \vec{r}(t_0)$  divergem a uma razão dada pela seguinte equação em aproximação linear.

$$|\Delta \vec{r}(t_n)| = |\Delta \vec{r}(t_0)| e^{\lambda t}. \quad (3.1)$$

Se o coeficiente de Lyapunov ( $\lambda$ ) é:

- **Positivo**, então as duas trajetórias divergem exponencialmente;
- **Zero**, não haverá divergência nenhuma entre as trajetórias;
- **Negativo**, pode indicar ponto fixo estável ou atrator.

O comportamento caótico apresentado por sistemas dinâmicos é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias inicialmente muito próximas.

A taxa de separação das trajetórias pode ser diferente para diferentes orientações do vetor de separação inicial. **Assim, há um espectro de expoentes de Lyapunov (iguais em número à dimensionalidade do espaço de fase)**. É comum referir-se ao maior como expoente máximo de Lyapunov (MLE), pois determina uma noção de previsibilidade para um sistema dinâmico.

O expoente máximo de Lyapunov pode ser definido da seguinte maneira:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\Delta \vec{r}(t_0)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta \vec{r}(t)|}{|\Delta \vec{r}(t_0)|}. \quad (3.2)$$

**Um MLE positivo é geralmente tomado como uma indicação de que o sistema é caótico.** Observe que um vetor de separação inicial arbitrário normalmente contém alguma componente na direção associada ao MLE e, devido à taxa de crescimento exponencial, o efeito dos outros expoentes será eliminado ao longo do tempo.

Uma forma intuitiva de medir o expoente de Lyapunov consiste em rodar o sistema de equações que descreve um sistema dinâmico particular duas vezes com

condições iniciais ligeiramente diferentes e medir a distância entre as trajetórias como função do tempo. Como o resultado pode depender da escolha do ponto inicial o melhor é calcular a taxa de separação para muitos pontos iniciais. Este procedimento pode ser demorado de forma que uma escolha que simplifica o cálculo consiste em tomar logaritmos da equação 3.1,

$$\ln \left| \frac{\Delta \vec{r}(t_n)}{\Delta \vec{r}(t_0)} \right| = \ln (e^{\lambda t}), \quad (3.3)$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta \vec{r}(t_n)}{\Delta \vec{r}(t_0)} \right|. \quad (3.4)$$

Faz-se necessário usar os dados da trajetória completa, pode-se usar o fato de que,

$$\frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta \vec{r}(t_0)} = \frac{\Delta \vec{r}(t_1)}{\Delta \vec{r}(t_0)} \frac{\Delta \vec{r}(t_2)}{\Delta \vec{r}(t_1)} \cdots \frac{\Delta \vec{r}(t_n)}{\Delta \vec{r}(t_{n-1})}, \quad (3.5)$$

Assim,

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta \vec{r}(t_1)}{\Delta \vec{r}(t_0)} \frac{\Delta \vec{r}(t_2)}{\Delta \vec{r}(t_1)} \cdots \frac{\Delta \vec{r}(t_n)}{\Delta \vec{r}(t_{n-1})} \right|. \quad (3.6)$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\Delta \vec{r}(t_{i+1})}{\Delta \vec{r}(t_i)} \right|. \quad (3.7)$$

Cálculo de  $\lambda$  consiste agora no cálculo das razões  $\Delta \vec{r}(t_{i+1})/\Delta \vec{r}(t_i)$  no limite em que  $\Delta \vec{r}(t_i) \rightarrow 0$ .

## 3.2 O espectro de Lyapunov

Para um sistema dinâmico com equação de evolução

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad (3.8)$$

em um espaço de fase n-dimensional, existe um conjunto de expoentes de Lyapunov  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , denominado espectro de Lyapunov, que caracteriza a divergência das trajetórias e que em geral depende do ponto de partida  $x_0$ .

Os expoentes de Lyapunov descrevem o comportamento de vetores no espaço tangente do espaço de fase e são definidos a partir da matriz jacobiana,

$$J_{ij}(t) = \left. \frac{f_i(x)}{dx_j} \right|_{x(t)}, \quad (3.9)$$

este jacobiano define a evolução dos vetores tangentes, dados pela matriz  $Y$ , através da equação,

$$\dot{Y} = J Y \quad (3.10)$$

com a condição inicial  $Y_{ij}(0) = \delta_{ij}$ .

A matriz  $Y$  descreve como uma pequena mudança no ponto  $x(0)$  propaga para o ponto final  $x(t)$ . O limite,

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left[ Y(t) Y^\dagger(t) \right], \quad (3.11)$$

define uma matriz  $\Lambda$ , os expoentes de Lyapunov  $\lambda_i$  são definidos pelos vetores próprios de  $\Lambda$ .

### 3.3 As equações de Lorenz

Um problema importante em meteorologia e em outras aplicações da dinâmica dos fluidos corresponde ao movimento de uma camada de fluido, conhecido como rolos de convecções, como é o caso da atmosfera da Terra, que é mais quente em baixo do que em cima; este sistema compara-se com o processo de fervura de uma panela com água (ver Fig.3.1).



Figura 3.1: *Convecção de uma panela ao fogo [35].*

Gleick descreve em detalhes um modelo de convecção que ocorre na rolagem numa célula de fluido; processo este representado na figura 3.2 apresenta o recorte

de um bloco de rolagem de fluido atmosférico:

O tipo mais simples de convecção mostrados nos manuais ocorre numa célula de fluido, uma caixa com o fundo liso que pode ser aquecido e uma tampa lisa que pode ser esfriada. A diferença de temperatura entre o fundo quente e a tampa fria controla o fluxo. Se a diferença é pequena, o sistema permanece estável. O calor se movimenta para o alto pela condução, como acontece numa barra de metal, sem superar a tendência natural do fluido a permanecer em repouso. Além disso, o sistema é estável. Quaisquer movimentos furtivos que possam ocorrer quando, digamos, um aluno esbarra no aparelho tendem a desaparecer, voltando o sistema a um regime estável.

Aumente-se, porém, o calor, e um novo comportamento se manifestam. Quando esquenta, o fluido do fundo se expande. Ao se expandir, torna-se menos denso. Ao torna-se menos denso, torna-se mais leve, o suficiente para superar o atrito, e sobe para a superfície. Numa caixa cuidadosamente projetada, desenvolve-se uma rotação cilíndrica, com o fluido quente subindo de um lado e o fluido frio descendo do outro. Visto de lado, o movimento faz um círculo contínuo. Fora do laboratório, também a natureza faz, com frequência, suas células de convecção. Quando o chão esquenta no sol do deserto, por exemplo, o ar que ondula pode provocar formas sombreadas nas nuvens, lá no alto, ou na areia em baixo [30].

Estudando este fenômeno Lorenz foi levado aos sistemas de 3 equações diferenciais não lineares; que passaram a ser chamadas como as **equações de Lorenz** em homenagem ao cientista Edward Norton Lorenz [11].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= -x z + \rho x - y \\ \frac{dz}{dt} &= x y - \beta z\end{aligned}\tag{3.12}$$

Onde:

( $x$ ) = relação da rotação do sistema, é proporcional à taxa de convecção;

( $y$ ) = gradiente da temperatura, variação horizontal da temperatura;

( $z$ ) = desvio da variação vertical temperatura;

( $\sigma$ ) = número de Prandtl: [viscosidade] / [condutividade térmico]



$(\rho)$  = diferença de temperatura entre a base e o alto do sistema

$(\beta)$  = relação entre o comprimento e a altura do sistema.

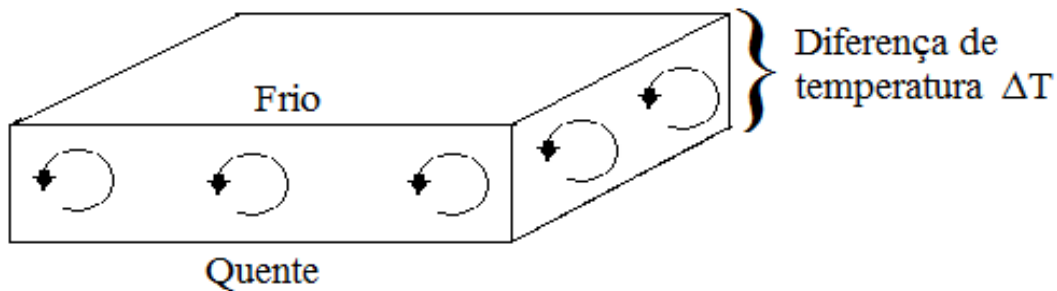


Figura 3.2: *Rolos de convecção de um fluido atmosférico.*

Aqui  $\delta$  se chama o número de Prandtl<sup>2</sup> e  $\rho$  chama-se o número de Rayleigh<sup>3</sup>. Com todos os  $\sigma, \rho, \beta > 0$  (STROGATZ, 1994). Os parâmetros  $\sigma$  e  $\beta$  dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido. Para a atmosfera da Terra, valores razoáveis para esses parâmetros são  $\sigma = 10$  e  $\beta = 8/3$  enquanto  $\rho$  varia. O sistema exibe comportamento caótico para  $\rho = 28$  mas tem órbitas periódicas para outros valores de  $\rho$ .

As soluções das equações de Lorenz por meio de interações numéricas com Código fortran (ver figura 3.3), levam a criação de gráficos que caracterizam o tipo de atrator que dependem dos valores de  $\rho$ , o menor desvio desses caminhos  $(x, y, z)$  faz com que a trajetória se afaste do ponto.

A figura 3.4, mostra as trajetórias que dão surgimento a um atrator estranho com aspecto semelhante a uma borboleta; este aspecto da origem ao termo **efeito borboleta** para um sistema caótico.

Como não existe ponto estável, poderia se esperar que a maioria das trajetórias tendesse a infinito para  $t$  muito grande. Entretanto, as soluções permanecem limitadas a uma região quando  $t \rightarrow \infty$ . (ver figura 3.5) [36].

A figura 3.6 mostra a projeção no plano  $x - z$  obtida do mesmo código fortran da figura 3.3.

O sistema representado pela figura 3.7 apresenta o comportamento caótico transiente mais duradouro à medida que  $\rho$  aumenta no plano  $y - z$ .

Para estabelecer como o atrator estranho é criado, favorece à análise de  $\rho$  menores; a figura 3.8 mostra a evolução deste atrator para velocidade angular da roda.

<sup>2</sup>Ludwig Prandtl (1875-1953) foi um físico alemão. Foi um dos pioneiros da aerodinâmica, tendo desenvolvido a base matemática para os princípios fundamentais da aerodinâmica subsônica na década de 1920. Entre seus estudos mais importantes estão a camada limite, os aerofólios finos e a teoria da linha de sustentação.

<sup>3</sup>John Wiliam Strutt (1842-1919), o terceiro Lord Rayleigh, fez contribuições notáveis em diversas áreas da física ma-temática. Fora cinco anos Professor de Física da Catedral de Cavendish em Cambridge. Ganhou prêmio Nobel em 1904 pela descoberta do argônio.

```

1 C*****
2 C    CÓDIGO FORTRAN 77 PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SO SISTEMA DE E. N. LORENZ
3 C    N. M. SOTOMAYOR 28/02/2018    RUNGE-KUTTA-VERNER 5-6 ORDER METHOD
4 C*****
5     INTEGER N,NW,IND,IER,COUNTER
6     PARAMETER (N=3)
7     DOUBLE PRECISION C(24),W(6,10),Y(3),h
8     DOUBLE PRECISION TRAYX,TRAYY,TRAYZ
9     DOUBLE PRECISION X,XEND,TOL,XMAX
10    EXTERNAL DVERR,FCN
11    OPEN(UNIT = 10,FILE = 'tray.dat',STATUS = 'UNKNOWN')
12    NW=6
13    h=0.005D0
14    IND = 1
15    X = 0.0D0
16    XMAX = 1.0D1 !    XMAX = 1.0D3
17    XEND = X+h
18    TOL = 1.0D-6
19    Y(1)=1.0D0
20    Y(2)=1.0D0
21    Y(3)=20.0D0
22    COUNTER = 0
23 C*****
24 C*****
25    DO 200 WHILE (XEND .LE. XMAX)
26    IND = 1
27    NW = 6
28    TOL = 1.0D-6
29    CALL DVERR(N,FCN,X,Y,XEND,TOL,IND,C,NW,W,IER)
30    TRAYX = Y(1)
31    TRAYY = Y(2)
32    TRAYZ = Y(3)
33    IF(COUNTER .EQ. 1) THEN
34    call system( 'sleep 0.01' )
35    WRITE(10,*)Y(1),Y(2),Y(3)
36    COUNTER = 0
37    ELSE
38    COUNTER=COUNTER + 1
39    ENDIF
40 750 XEND = XEND + h
41 200 CONTINUE
42    CLOSE(UNIT=10)
43    STOP
44    END
45 C*****
46    SUBROUTINE FCN(N,X,Y,YPRIME)
47    DOUBLE PRECISION Y(N),YPRIME(N)
48    DOUBLE PRECISION SIGMA,RHO,BETA
49    SIGMA = 10.0D0
50    RHO = 28.0D0
51    BETA = (8.0D0/3.0D0)
52    YPRIME(1) = -SIGMA*Y(1)+SIGMA*Y(2)
53    YPRIME(2) = -Y(1)*Y(3)+RHO*Y(1)-Y(2)
54    YPRIME(3) = Y(1)*Y(2)-BETA*Y(3)
55    RETURN
56    END

```

Figura 3.3: Código fortran desenvolvido para o Sistema de Lorenz.

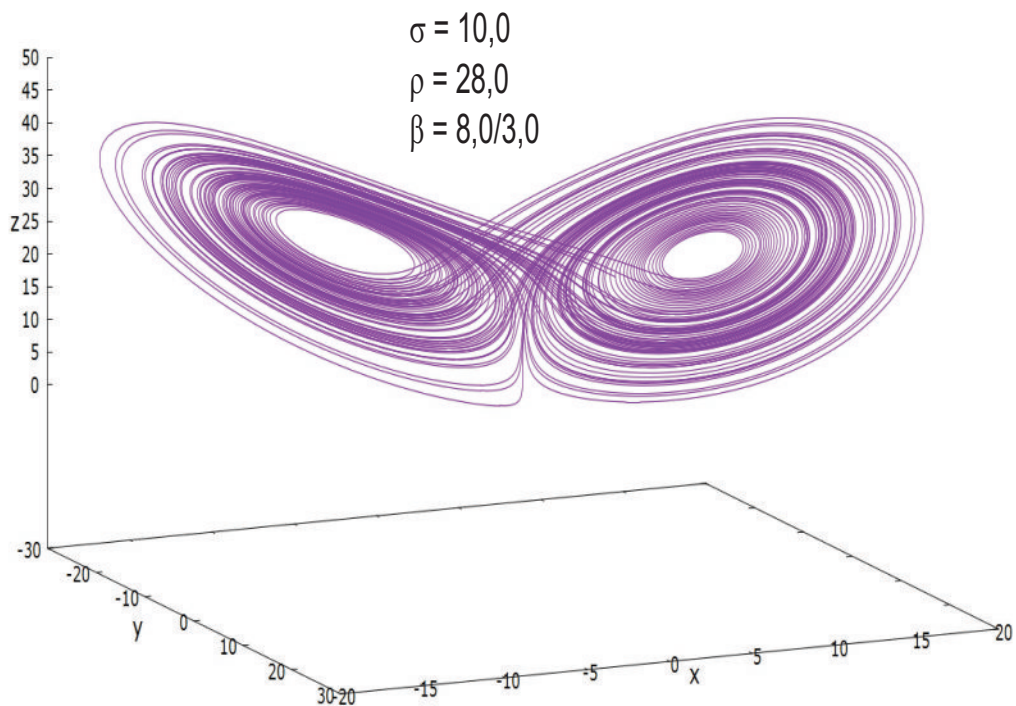


Figura 3.4: Seção de uma trajetória numérica obtida com o código fortran para o Sistema de Lorenz.

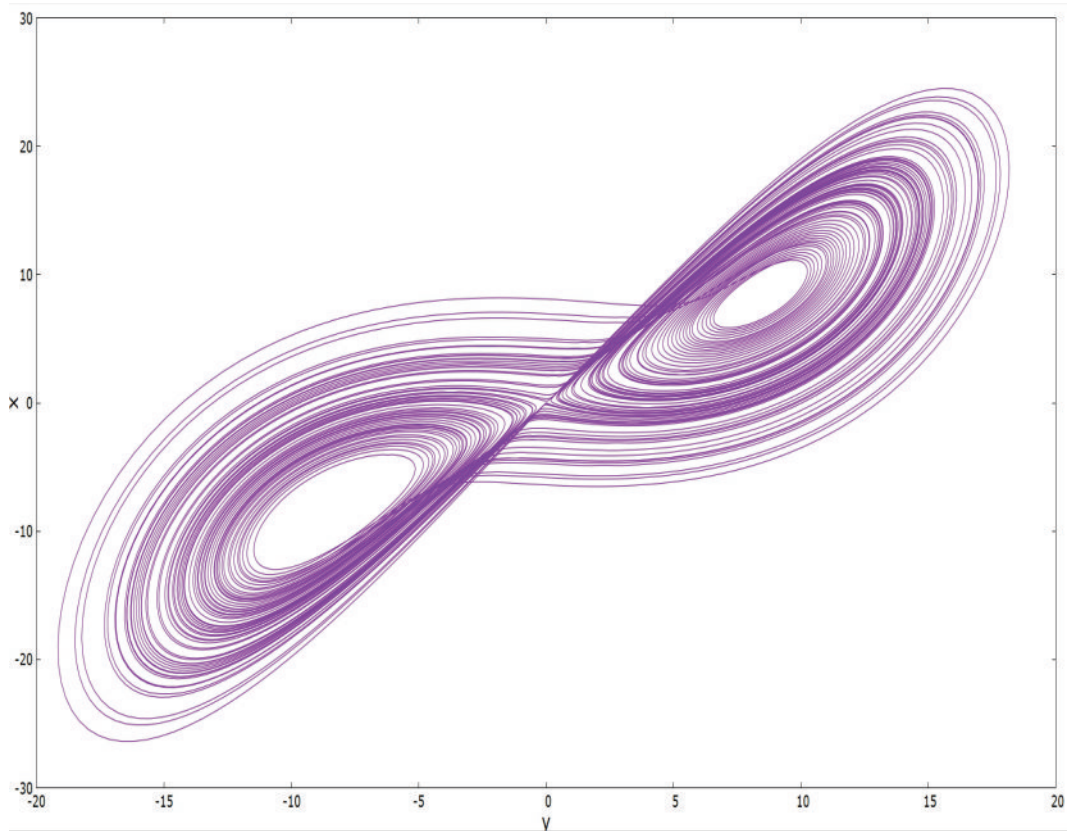


Figura 3.5: Projeção no plano  $x - y$  da trajetória numérica da figura 3.4.

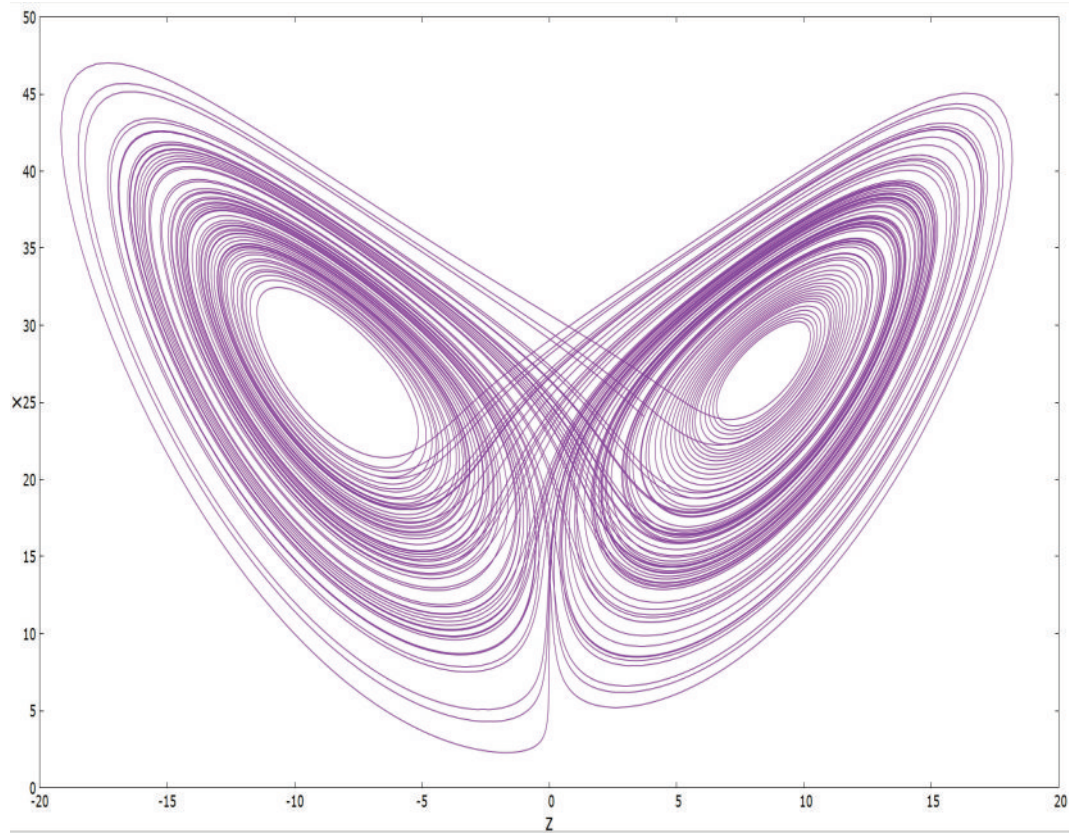


Figura 3.6: *Projeção no plano  $x - z$  da trajetória numérica da figura 3.4.*

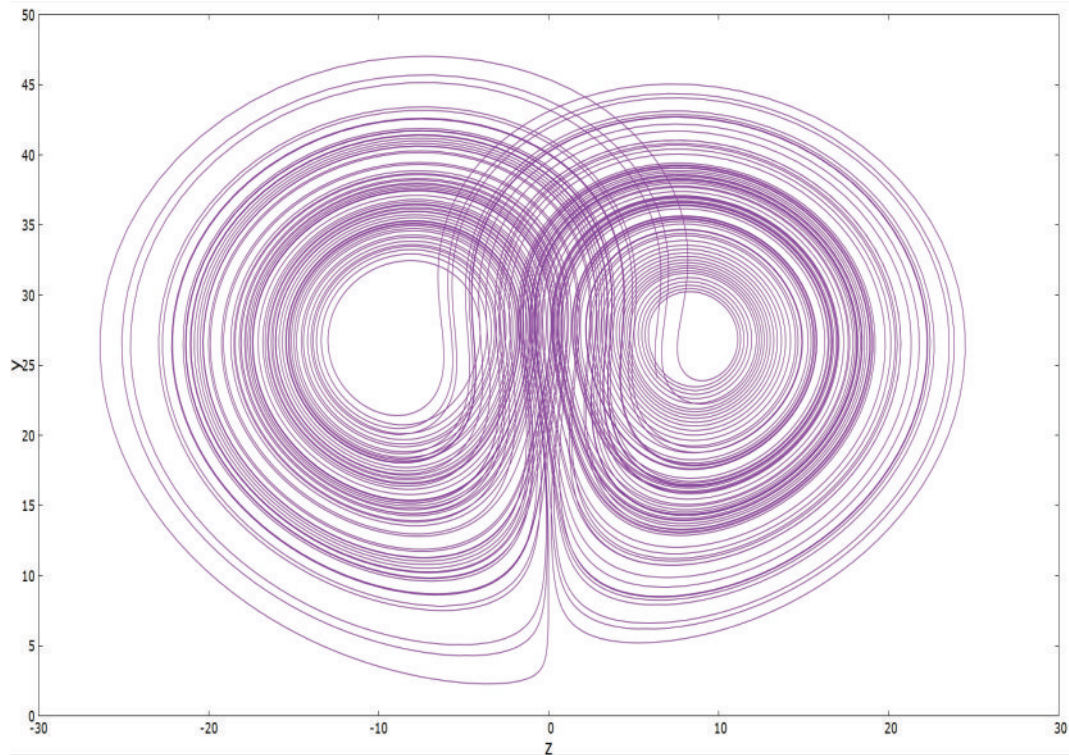


Figura 3.7: *Projeção no plano  $y - z$  da trajetória numérica da figura 3.4.*

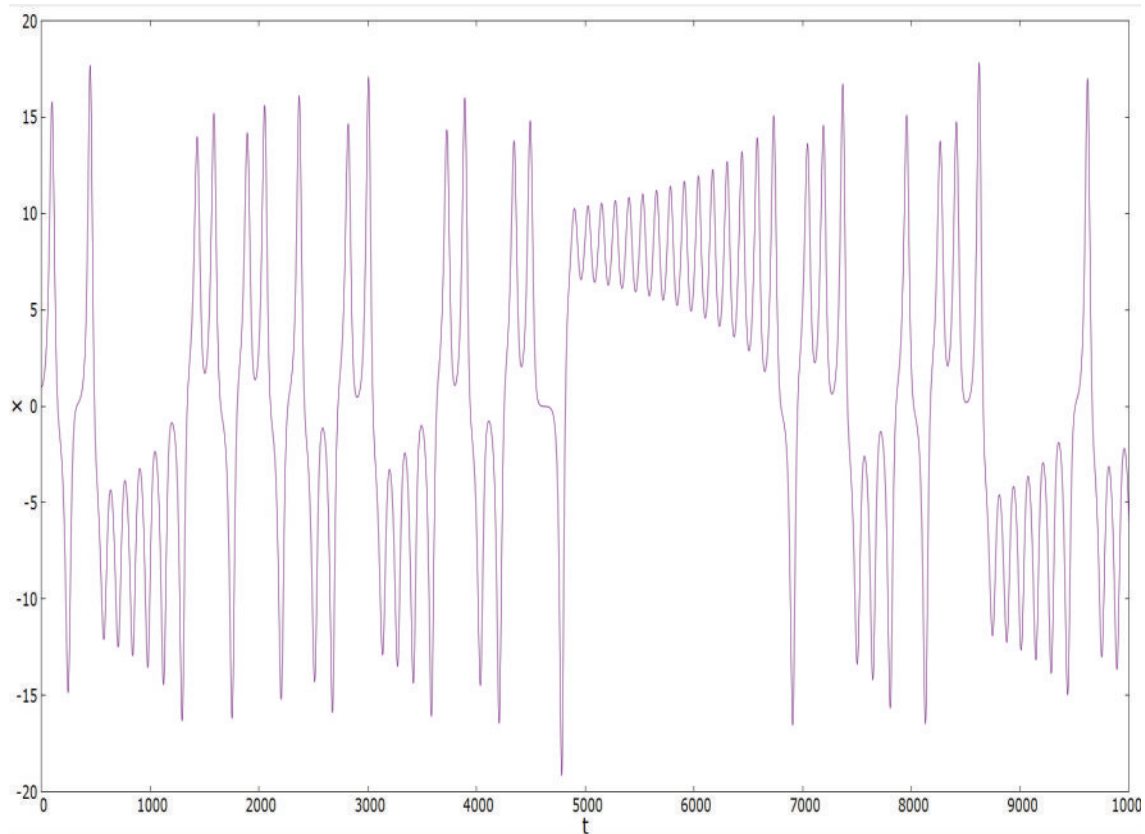


Figura 3.8: *Evolução da variável  $x$  que representa a velocidade angular em função do tempo para a roda d'água de Malkus-Lorenz. Parâmetros são os mesmos. da figura 3.4.*

Com o mesmo sistema de equações diferenciais, é possível demonstrar a evolução de um sistema aparentemente bastante diferente, porém bem mais fácil de imaginar, este sistema conhecido como a roda d'água de Lorenz, é um sistema mecânico onde se aplica equações acopladas semelhantes as dos rolos de convecções climáticas.

### 3.4 Cálculo do espectro de Lyapunov para o sistema de Lorenz

Para calcular o espectro de Lyapunov do sistema de Lorenz é empregado o seguinte algoritmo:

- Primeiramente é necessário linearizar as equações que descrevem a dinâmica do sistema 3.12,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta x}{dt} &= -\sigma \Delta x + \sigma \Delta y & (3.13) \\
\frac{d\Delta y}{dt} &= -x \Delta z - z \Delta x + \rho \Delta x - \Delta y \\
\frac{d\Delta z}{dt} &= x \Delta y + y \Delta z - \beta \Delta z
\end{aligned}$$

- Em seguida define-se  $f$  valores iniciais ortonormais para  $\Delta\vec{r}$ , exemplo:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r}_1(0) &= (1, 0, 0) \\
\Delta\vec{r}_2(0) &= (0, 1, 0) \\
\Delta\vec{r}_3(0) &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

- Logo é realizado o processo de iteração das equações originais e das linearizadas. Cada iteração fornece um novo vetor a partir das equações de movimento originais e  $f$  novos vetores  $\Delta\vec{r}_\alpha$  das equações linearizadas.
- Após são encontrados os vetores ortonormais  $\Delta\vec{r}'_\alpha$  a partir dos  $\Delta\vec{r}_\alpha$ , usando o procedimento de Gram-Schmidt.
- Igualar o conjunto  $\Delta\vec{r}_\alpha(t)$  com o conjunto ortonormal  $\Delta\vec{r}'_\alpha(t)$ .
- Acumular a somatoria  $S_\alpha$  como  $S_\alpha \rightarrow S_\alpha + \lg |\Delta\vec{r}_\alpha(t)|$ .
- Repete-se os passos anteriores a partir da iteração das equações e periodicamente calcula-se a estimativa dos expoentes de Lyapunov  $\lambda_\alpha = (1/n)S_\alpha$ , onde  $n$  é o número de iterações.

### 3.5 Código Fortran para o espectro de Lyapunov do sistema de Lorenz

As figuras 3.9 à 3.11 mostram o código fortran que realizando uma iteração numérica computacional, vai revelar mediante o valor deste expoente, se dado sistema poderá ou não apresentar caótico.

Na figura 3.12 revela resultados do espectro de Lyapunov para o sistema de Lorenz, este espectro revela que, quando o valor do espectro for positivo, o sistema tenderá ao caos (trajetoria em vermelho), devido a divergência das trajetórias;

```

1 C*****
2 C      CODE FOR LYAPUNOV SPECTRUM OF THE LORENZ SYSTEM 12/01/2019
3 C      X'=-sigma*X + sigma*Y
4 C      Y'=-X*Z + r*X -Y
5 C      Z'=X*Y-b*Z
6 C      sigma=16.0   ,   r=45.92   ,   b=4.0
7 C*****
8      PROGRAM LYALOR
9 C      N = NUMERO DE EQS NÃO LINEARES, NN = NUMERO TOTAL DE EQS.
10     PARAMETER (N=3)
11     PARAMETER (NN=12)
12     EXTERNAL FCN
13     DOUBLE PRECISION Y (NN) , ZNORM (N) , GSC (N) , CUM (N) , C (24) , W (NN, 9)
14     INTEGER I , NSTEP , IO , IND , NEQ , R , L , J
15     DOUBLE PRECISION X , XEND , STPSZE , TOL
16     OPEN (UNIT = 10 , FILE='tray.dat' , STATUS = 'UNKNOWN')
17     OPEN (UNIT = 20 , FILE='iter.dat' , STATUS = 'UNKNOWN')
18 C*****
19 C      CONDIÇÕES INICIAIS
20 C*****
21     Y (1) = 10.0D0
22     Y (2) = 1.0D0
23     Y (3) = 0.0D0
24     DO 10 I = N+1 , NN
25     Y (I) = 0.0D0      !Y(4)=0, Y(5)=0, ..., Y(12)=0
26 10 CONTINUE
27     DO 20 I = 1 , N
28     Y ((N+1)*I) = 1.0D0  !Y(4)=1, Y(8)=1, Y(12)=1
29     CUM (I) = 0.0D0     !CUM(1)=0, CUM(2)=0, CUM(3)=0
30 20 CONTINUE
31 C*****
32 C      INTEGRATION TOLERANCE, # OF INTEGRATION STEPS,
33 C      TIME PER STEP, AND I/O RATE
34 C*****
35     TOL = 1.0D-6
36     NSTEP = 600000
37     STPSZE = 1.0D-4   !1.0D-3 PASSO NO TEMPO
38     IO = 1
39     NEQ = NN
40     X = 0.0D0        !TEMPO=t
41     IND = 1
42     WRITE (10 , *) Y (1) , Y (2) , Y (3)
43 C*****
44 C***** DO PRINCIPAL TODO E CALCULADO PARA CADA PASSO *****
45 C*****
46     DO 100 I = 1 , NSTEP
47     XEND = STPSZE*DBLE (I)  !VALOR DE t APOS I*PASSO
48     CALL DVERR (NEQ , FCN , X , Y , XEND , TOL , IND , C , NEQ , W , IER) !INTEGRA UM PASSO
49     WRITE (10 , *) Y (1) , Y (2) , Y (3)
50 C*****
51 C      CONSTRUCT A NEW ORTHONORMAL BASIS BY GRAM-SCHMIDT METHOD
52 C      NORMALIZE FIRST VECTOR
53 C*****

```

Figura 3.9: Código fortran página 1.

```

49 WRITE (10,*) Y(1),Y(2),Y(3)
50 C*****
51 C      CONSTRUCT A NEW ORTHONORMAL BASIS BY GRAM-SCHMIDT METHOD
52 C      NORMALIZE FIRST VECTOR
53 C*****
54 ZNORM(1) = 0.0D0
55 DO 30 J = 1,N
56 ZNORM(1) = ZNORM(1)+Y(N*J+1)**2
57 30 CONTINUE
58 ZNORM(1) = DSQRT(ZNORM(1))
59 DO 40 J = 1,N
60 Y(N*J+1) = Y(N*J+1)/ZNORM(1)
61 40 CONTINUE          !ATE AQUI OK
62 C*****
63 C      GENERATE THE NEW ORTHONORMAL SET OF VECTORS.
64 C      GENERATE J-1 GSR COEFFICIENTS.
65 C*****
66 DO 80 J = 2,N
67 DO 50 K = 1,(J-1)
68 GSC(K) = 0.0D0
69 DO 50 L = 1,N
70 GSC(K) = GSC(K)+Y(N*L+J)*Y(N*L+K)
71 50 CONTINUE
72 C      CONSTRUCT A NEW VECTOR.
73 DO 60 K = 1,N
74 DO 60 L = 1,(J-1)
75 Y(N*K+J) = Y(N*K+J)-GSC(L)*Y(N*K+L)
76 60 CONTINUE
77 C      CALCULATE THE VECTOR'S NORM
78 ZNORM(J) = 0.0D0
79 DO 70 K = 1,N
80 ZNORM(J) = ZNORM(J)+Y(N*K+J)**2
81 70 CONTINUE
82 ZNORM(J) = DSQRT(ZNORM(J))
83 C      NORMALIZE THE NEW VECTOR.
84 DO 80 K = 1,N
85 Y(N*K+J) = Y(N*K+J)/ZNORM(J)
86 80 CONTINUE          !APARENTEMENTE OK
87 C*****
88 C      UPDATE RUNNING VECTOR MAGNITUDES
89 C*****

```

Figura 3.10: Código fortran página 2.



```

85      Y(N*K+J) = Y(N*K+J)/ZNORM(J)
86      80 CONTINUE                                !APARENTEMENTE OK
87 C*****
88 C          UPDATE RUNNING VECTOR MAGNITUDES
89 C*****
90      DO 90 K = 1,N
91      CUM(R) = CUM(R) + (DLOG(ZNORM(R))/DLOG(2.0D0))
92      90 CONTINUE
93 C      NORMALIZE EXPONENT AND PRINT EVERY IO ITERATIONS
94      DO 99 K = 1,N
95      WRITE(20,*)X,CUM(R)/X !t E LYAPUNOV 1, 2 E 3
96      99 CONTINUE
97      100 CONTINUE
98      WRITE(*,*)"LYAPUNOV EXPONENTS",CUM(1)/X,CUM(2)/X,CUM(3)/X
99      CLOSE (UNIT=10)
100     CLOSE (UNIT=20)
101     READ(*,*)
102     STOP
103     END
104 C
105     SUBROUTINE FCN(N,X,Y,YPRIME)
106 C      USER DEFINED ROUTINE CALLED BY IMSL INTEGRATOR.
107     DOUBLE PRECISION Y(12),YPRIME(12)
108 C      LORENZ EQUATIONS OF MOTION
109     YPRIME(1) = 16.0D0*(Y(2)-Y(1))
110     YPRIME(2) = -Y(1)*Y(3)+45.92D0*Y(1)-Y(2)
111     YPRIME(3) = Y(1)*Y(2)-4.0D0*Y(3)
112 C      3 COPIES OF LINEARIZED EQUATIONS OF MOTION.
113     DO 10 I = 0,2
114     YPRIME(4+I) = 16.0D0*(Y(7+I)-Y(4+I))
115     YPRIME(7+I) = (45.92D0-Y(3))*Y(4+I)-Y(7+I)-Y(1)*Y(10+I)
116     YPRIME(10+I) = Y(2)*Y(4+I)+Y(1)*Y(7+I)-4.0D0*Y(10+I)
117     10 CONTINUE
118     RETURN
119     END
120
121 CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
122 CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
123 CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
124 CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
125 C
126 C      IMSL ROUTINE NAME      - DVERK                                DVEK0010
127 C                                                                    DVEK0020
128 C-----DVEK0030
129 C                                                                    DVEK0040
130 C      COMPUTER              - VAX/DOUBLE                            DVEK0050
131 C                                                                    DVEK0060
132 C      LATEST REVISION       - JUNE 1, 1982                          DVEK0070
133 C                                                                    DVEK0080
134 C      PURPOSE                - DIFFERENTIAL EQUATION SOLVER - RUNGE DVEK0090
135 C                            KUTTA-VERNER FIFTH AND SIXTH ORDER METHOD DVEK0100

```

Figura 3.11: Código fortran página 3.

quando o valor espectral for zero, significa que o sistema é estável (trajetoria em verde); e quando o valor for negativo, o sistema é dito instável (trajetoria em azul), também conhecido como atrator ou sovedouro, o sistema não apresentará caos, pois as trajetórias convergirão.

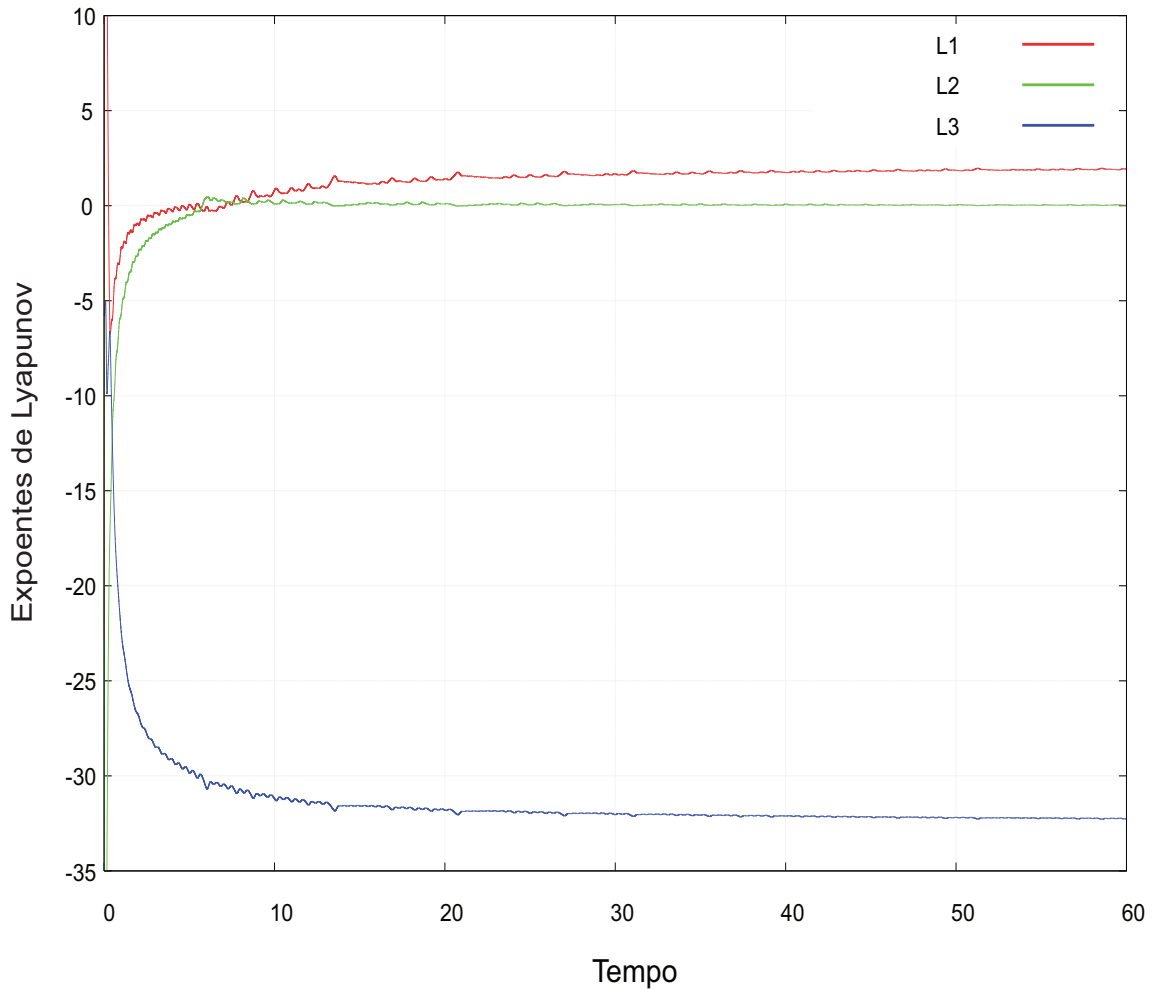


Figura 3.12: *Espectro dos expoentes de Lyapunov para o Sistema de Lorenz.*

A obtenção do expoente de Lyapunov positivo para um dado sistema, é quem vai informar, se um dado sistema de fato apresenta caos, em sua evolução temporal.

# Capítulo 4

## SISTEMAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

Sistemas de aquisição de dados (SAD) são dispositivos de hardware/software de precisão, que frequentemente são empregados em instrumentação científica para a coleta de sinais que medem condições físicas do mundo real com intuito de converter essa informação, primeiramente em sinais elétricos analógicos e em seguida em valores numéricos digitais para armazenamento em um computador, objetivando a sua análise e tratamento posterior. Portanto, o SAD deve fornecer informações do mundo real ao usuário, que não é necessariamente um ser humano. Podendo ser um dispositivo de armazenamento, análise ou controle que, de maneira automática, pode interagir com algum dispositivo e modificar as condições do local da leitura [37].

Um sistema de aquisição de dados (SAD) é o processo de medição de um fenômeno físico com o uso de um computador. Um sistema é formado por sensores, hardware de aquisição e medição de dados e um computador com software programável. Em comparação com os sistemas tradicionais de medição, os SADs exploram a capacidade de processamento, produtividade, sistemas de visualização e recursos de conectividades dos computadores padrão. Com isso, tem-se uma solução de medição mais poderosa, flexível e de melhor custo-benefício [38].

### 4.1 Composição de um sistema de aquisição de dados

Adquirir dados pode significar como medir informações do mundo real. Grande parte dos acontecimentos do mundo real e suas medições são de natureza analógica. Isto é, a medição pode conduzir a um grande número de valores contínuos. As quantidades físicas de interesse podem variar:

- Deslocamento
- Força
- Luz
- Pressão
- Temperatura

Todas essas grandezas possuem energia. Sendo assim, torna-se necessário para sua medição a utilização de dispositivos capazes de receber esta energia, relativa a uma determinada quantidade física da grandeza desejada e converte-la numa forma de energia manipulável pelos circuitos eletrônicos (figura 4.1). Estes dispositivos são os sensores e/os transdutores [42].

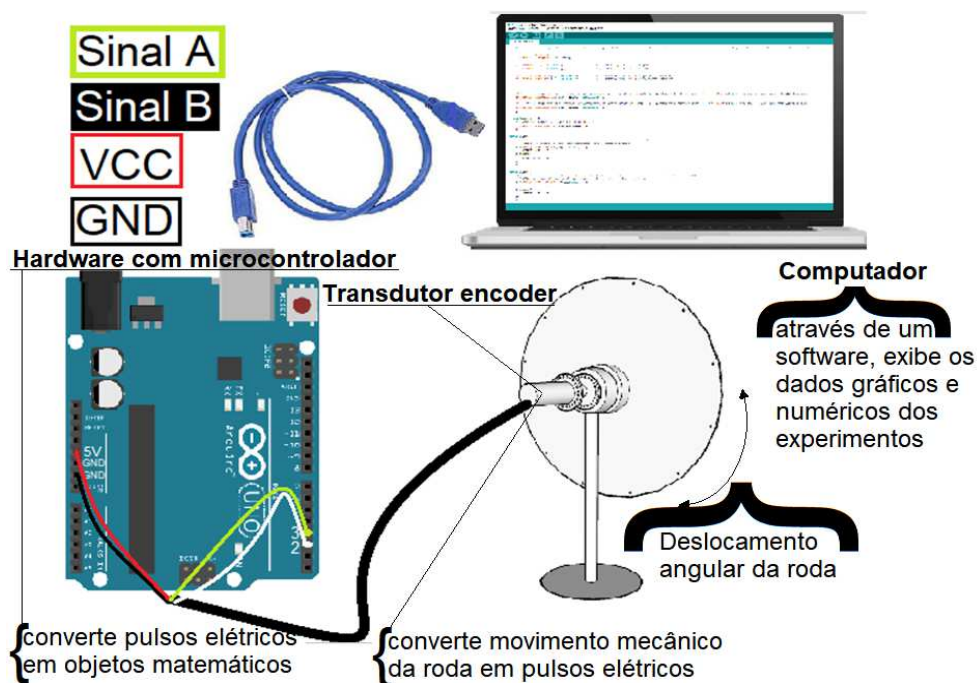


Figura 4.1: *Conjunto para aquisição de dados.*

O Procedimento geral de instrumentação para amostragem de sinais elétricos analógicos, resultantes de sistemas de sensores ou **transdutores**, para testar fenômenos físicos do mundo real e converter (**conversores**) os sinais em valores numéricos digitais que podem ser exibidos (**controladores**) e armazenados por um computador.

#### 4.1.1 Sensores ou transdutores

No mundo real as variações das grandezas físicas, que precisam ser coletadas e mensuradas pelo SAD, dificilmente estão em um formato adequado para leitura

direta, portanto são os sensores ou transdutores que convertem as variações dessas grandezas em sinais elétricos antes de encaminharem para o próximo componente do sistema de aquisição de dados. Dependendo do tipo de sensor, sua saída elétrica pode ser uma característica de tensão, corrente, resistência ou outro atributo elétrico que varie com o tempo[37].

Sensor	Fenômeno
Termopar, RTD, termistor	Temperatura
Fotossensor	Luz
Microfone	Som
Strain gage, transdutor piezoelétrico	Força e pressão
Potenciômetro, LVDT, encoder óptico	Posição e deslocamento
Acelerômetro	Aceleração

Tabela 4.1: Tabela com sensores e respectivos fenômeno físico a ser detectados [37].

Portanto, como pode ser visto na figura 4.2, os transdutores coletam alguma característica do fenômeno físico e o transforma em um sinal elétrico que é enviado para o condicionador de sinais.

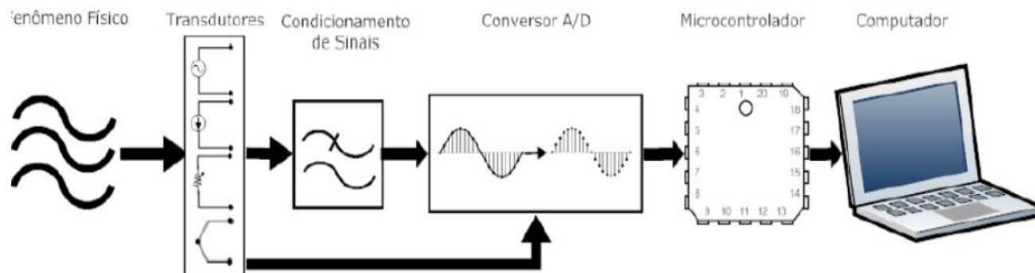


Figura 4.2: Transformações sofridas pelos sinais em um SAD [37].

#### 4.1.2 Conversores de sinais analógicos digitais

A conversão de sinais à forma digital permite, não só a utilização de ferramentas muito mais elaboradas (por software), como também permite uma simplificação dos circuitos eletrônicos.

Na figura 4.3 mostra um esquema simplificado deste processo. A primeira etapa do módulo de aquisição consiste em transformar o sinal analógico original, gerado pelo transdutor, em sinal digital, em formato adequado, a ser processado pela eletrônica. Esta etapa é realizada no conversor A/D (analógico/digital) [43]. Uma vez digitalizado, o sinal pode ser processado da melhor forma possível para atender às necessidades demandadas. Pode também ser armazenado em formato digital.

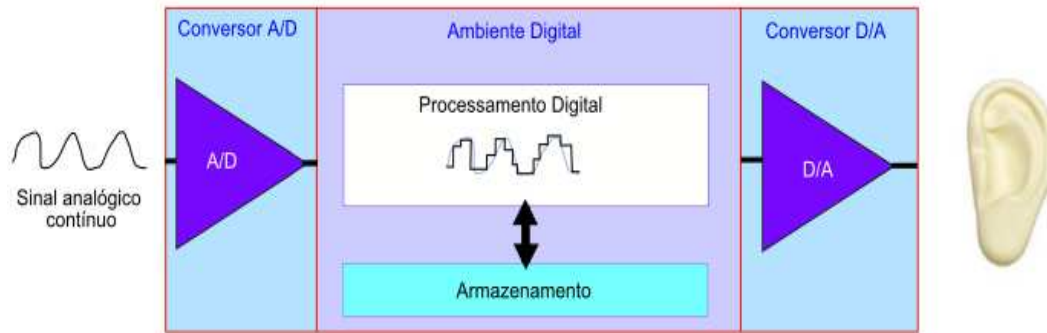


Figura 4.3: *Tratamento de um sinal Analógico/digital [43].*

Uma vez processada, a informação deverá novamente ser devolvida ao meio físico real (por software no computador), para que possa se verificar o resultado

### 4.1.3 Microcontrolador

O microcontrolador é o cérebro de um sistema de aquisição de dados, segundo as referências 36 e 38, consegue:

Com software programável controlar toda a operação do dispositivo no SAD, sendo usado para o processamento, visualização e armazenamento de dados de medição. Diferentes tipos de computadores são usados em diferentes tipos de aplicações. Um desktop pode ser usado em um laboratório, por sua capacidade de processamento, um laptop pode ser usado em campo, por sua portabilidade, ou um controlador lógico programável (PLC) para aplicações de alta potência [39][37].

### 4.1.4 A plataforma de prototipagem eletrônica Arduino

O Arduino (fig.4.4) é uma placa de software e hardware de acesso aberto (tanto hardware quanto software). Constitue uma comunidade de usuários que projeta e fabrica kits baseados em microcontroladores para a construção de dispositivos digitais e objetos interativos que podem detectar e controlar objetos no mundo físico.

Esta placa Arduino Uno Revisão-3 baseada em um microcontrolador Atmega328. Dispõe de 14 pinos digitais de entrada/saída (dos quais 6 podem ser usados como saídas PWM), 6 entradas analógicas, um cristal oscilador 16 MHz, uma conexão USB, um CI Atmega16U2 responsável pela conexão serial, um conector Jack, um cabeçalho ICSP, e um botão de reset. Ele contém os componentes necessários para apoiar o microcontrolador. A placa Arduino UNO, pode ser alimentado através da ligação USB ou com uma fonte de alimentação externa. O intervalo recomendado



Figura 4.4: *Plataforma Arduino com suas principais funções.*

é de 1.1 a 5 volts. A programação é feita no sketch do Arduino. O software IDE (Ambiente de Desenvolvimento Integrado ver figura 4.5) é escrito em java/C+ e é encontrado na página oficial do Arduino [46].

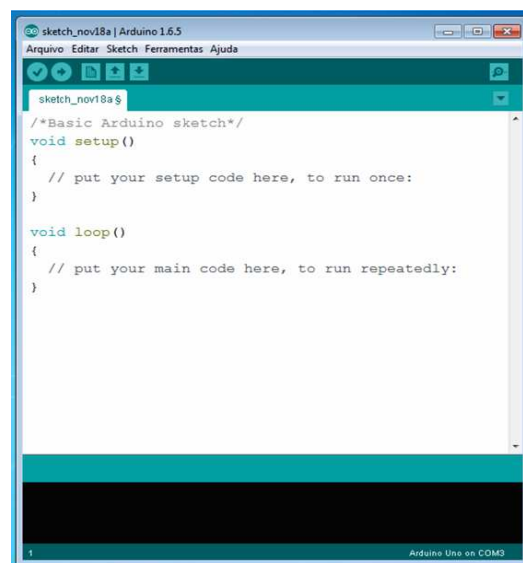


Figura 4.5: *Ambiente de Desenvolvimento Integrado do Arduino.*

A comunicação serial possibilita o Arduino se comunicar com um computador ou com outros dispositivos. Todas as placas Arduino possuem pelo menos uma porta serial (também conhecida como UART ou USART). A comunicação ocorre através dos pinos digitais 0 (*RX*) e 1 (*TX*), assim como uma conexão USB. Se for utilizar a USB, os pinos 0 e 1 não poderão ser utilizados como entrada ou saída digital.

Na IDE (figura 4.5) do Arduino existem uma ferramenta onde você pode mo-

monitorar a comunicação Serial entre a placa do Arduino e o computador. O serial monitor onde você define a taxa de transmissão conforme o baud rate definida na função `begin()`. Outras versões do Arduino, como o Arduino Mega possui três portas seriais adicionais.

O uso de uma comunicação serial permite também o controle ou monitoramento de sistemas utilizando o computador ou mesmo outra placa eletrônica. A comunicação serial na plataforma arduino aliada ao terminal da IDE, se torna uma ótima ferramenta para visualização de dados e Debug durante o processo de desenvolvimento, já que a plataforma não possui tais ferramentas de depuração. A porta serial é uma alternativa para troca de dados com outros equipamentos usando LabView ou PLX-DAQ para oferecer uma melhor impressão de dados adquirida do sistema em estudo.

#### 4.1.5 Aplicativo de aquisição de dados em LabVIEW

LabView é uma plataforma de design do sistema e ambiente de desenvolvimento para uma linguagem de programação visual da National Instruments.

Comumente usado para aquisição de dados, controle de instrumentos e automação industrial em uma variedade de plataformas, incluindo Microsoft Windows, várias versões do UNIX, Linux e *OSX*.

O software possibilita a elaboração de códigos de automação e controle com base em sub-rotinas denominadas instrumentos virtuais (VI Virtual Instruments). Os VIs contêm três componentes principais: o painel frontal, o diagrama de bloco e o painel de ícones e conectores [ref produto7] O painel frontal é a interface com o usuário, a figura 4.6 a seguir exibe um painel frontal.

O painel frontal com controles e indicadores, que são os terminais interativos de entrada e saída do VI, respectivamente. Controles são botões, botões de pressão, dials e outros dispositivos de entrada. Indicadores são gráficos, LEDs e outros displays. Os controles simulam dispositivos de entrada de instrumentos e fornecem dados para o diagrama de bloco do VI. Os indicadores simulam dispositivos de saída de instrumentos e exibem os dados que o diagrama de bloco adquire ou gera [47].

Para a apresentação gráfica e armazenamento dos dados numéricos, de deslocamento angular em função do tempo, detectados e codificados através da placa Arduino Uno foi realizado um aplicativo em Labview. A figura 4.7 mostra o programa na linguagem G que realiza este processo. O ambiente é denominado diagrama de blocos, o fluxo do programa inicia na parte esquerda e vai em sequência para a parte direita. Primeiramente emprega-se a ferramenta VISA (Virtual Instrument Software Architecture) do Labview para estabelecer comunicação com a interface universal serial bus (USB) na qual está conectada a placa Arduino. A placa arduino



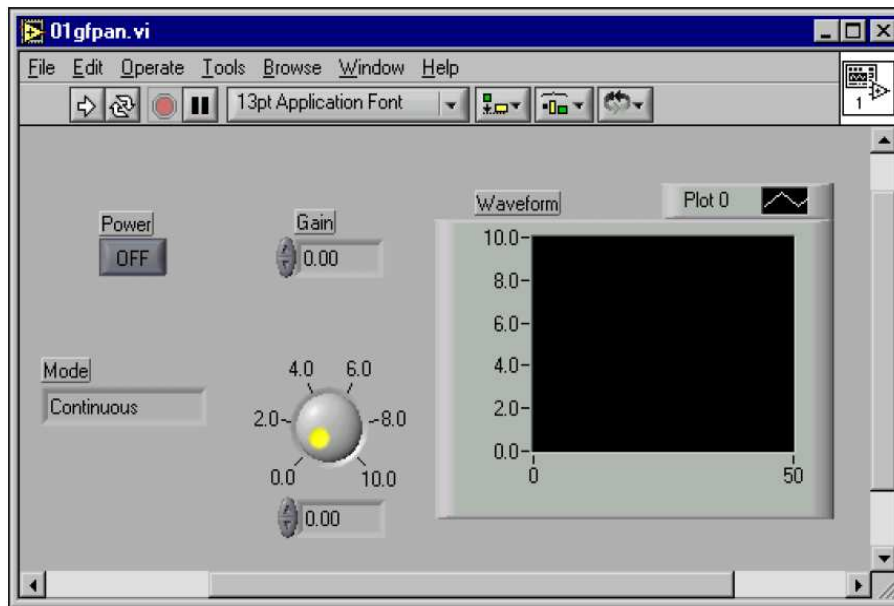


Figura 4.6: Painel frontal Virtual do LabView [ref prod?].

transmite de forma serial os dados de posição angular do eixo de rotação do encoder incremental. Para estabelecer a comunicação entre o aplicativo em Labview e a placa Arduino é necessário especificar os parâmetros da comunicação serial tais como:

- Bits-per-character
- Bits-per-second
- Baud rate
- Parity bits
- Start, stop, and mark bits

O número de bits por caractere indica o número de bits usados para representar um único caractere durante a comunicação serial. O número de bits de dados em cada caractere pode ser 5 (para código Baudot), 6, 7 (para ASCII), 8 (para a maioria dos tipos de dados pois esse tamanho corresponde a um byte), ou 9. O bps fornece uma descrição da estatística de bits por segundo.

A taxa de transmissão é o número de vezes por segundo que um sinal de comunicação serial muda de estado; um estado sendo um nível de voltagem, uma frequência ou um ângulo de fase de frequência.

O bit de paridade, diferentemente dos bits de início e parada, é um parâmetro opcional, usado em comunicações seriais para determinar se o caractere de dados

sendo transmitido é recebido corretamente pelo dispositivo remoto. Os bits de início ao fim são usados na comunicação assíncrona como um meio de sincronizar os caracteres de dados que estão sendo transmitidos.

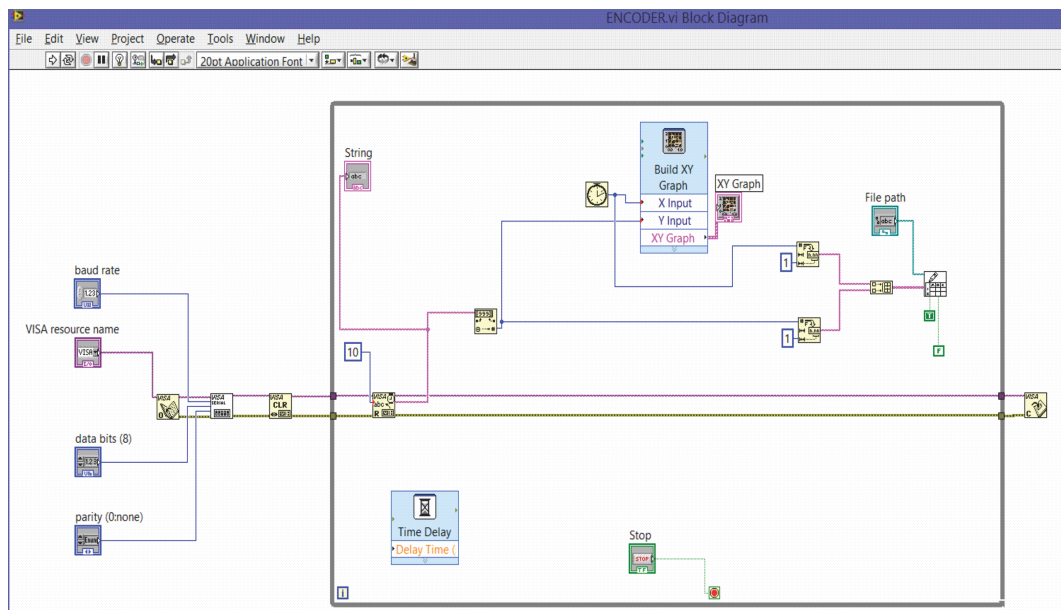


Figura 4.7: Diagrama de blocos no Labview para leitura dos movimentos da roda de Lorenz.

Os parâmetros de comunicação do computador, da placa arduino e do aplicativo em Labview devem ser os mesmos para evitar problemas de comunicação entre esses sistemas.

Foi usado um baud-rate de 9600 bits por segundo, sem bit de paridade, 8 bits por caractere. Uma vez estabelecida a comunicação serial emprega-se o instrumento virtual VISA CLEAR para limpar o buffer ou memória temporária do Labview e apagar dados espúrios. Em seguida é iniciado um processo de loop ou laço que será repetido até ser enviado um comando de parada do programa.

O processo interativo inicia com a leitura dos dados da porta serial através do instrumento virtual VISA READ, simultaneamente é iniciada a contagem do tempo através do instrumento virtual Tick Count. Para a leitura dos dados da porta serial foi especificada a quantidade de 10 bytes por interação.

Após a leitura os dados numéricos são enviados para apresentação gráfica no display do computador através da ferramenta Build XY-Graph, simultaneamente esses dados são enviados para armazenamento em um arquivo de texto cuja localização deverá ser especificada no painel frontal.

O esquema elétrico do sistema de aquisição de dados é apresentado na figura 4.8 com o possível resultado impresso na tela do computador.

Este sistema evita que o sinal VCC fique conectado diretamente ao GND o que é uma situação muito ruim; desta forma isso possibilita a geração dos gráficos com

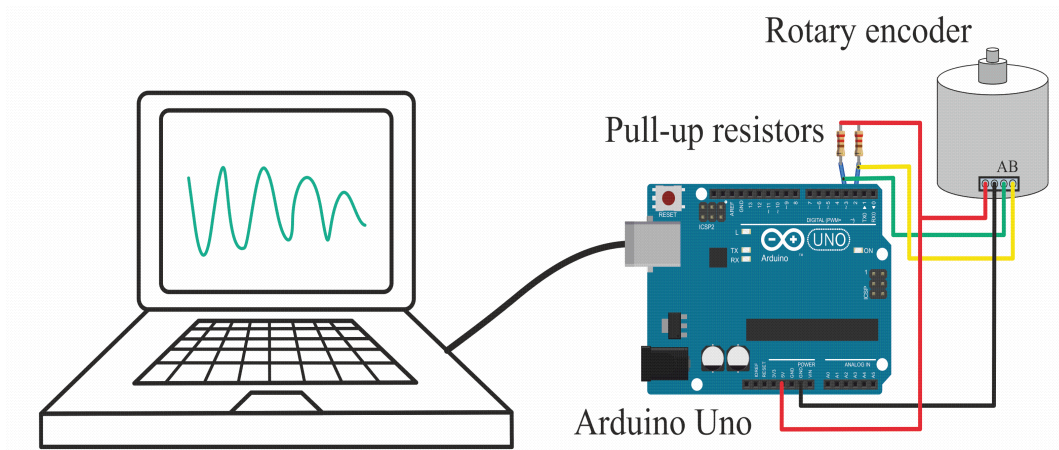


Figura 4.8: *Conjunto de Aquisição com possíveis dados impressos usando LabVIEW.*

pouca interferência. Isso permite que os dados possam ser captados com maior precisão uma vez que apresente poucas interferências no sistema de coleta de dados.

Desta forma o sistema permite imprimir dados numéricos (figura 4.9) gerados pelo movimento mecânico do sistema da roda de Lorenz, e que é convertido em pulsos elétricos pelo encoder, que por sua vez envia estes pulsos para placa arduino, onde em comunicação com o sistema Labview, são apresentados em forma de gráficos na tela do computador [47].

TIME	DESLOCAMENTO
770286,0	-732,0
770295,0	-740,0
770299,0	-748,0
770307,0	-757,0
770311,0	-769,0
770319,0	-783,0
770327,0	-801,0
770332,0	-822,0
770340,0	-847,0
770344,0	-871,0
770352,0	-895,0
770356,0	-918,0
770365,0	-939,0
770368,0	-957,0
770377,0	-972,0
770381,0	-985,0
770389,0	-996,0
770393,0	-1005,0
770401,0	-1014,0
770409,0	-1019,0
770417,0	-1022,0
770422,0	-1024,0
770430,0	-1025,0
770438,0	-1029,0
770446,0	-1035,0
770454,0	-1042,0
770458,0	-1048,0

Figura 4.9: *Dados numéricos colhido pelo sistema gerado no ambiente LabVIEW.*

Desta forma os dados numéricos são transformados em informações gráficas que podem ser visualizadas no ambiente LabVIEW como mostra figura 4.10 que é resultado de uma aquisição sobre o sistema da roda de Lorenz.

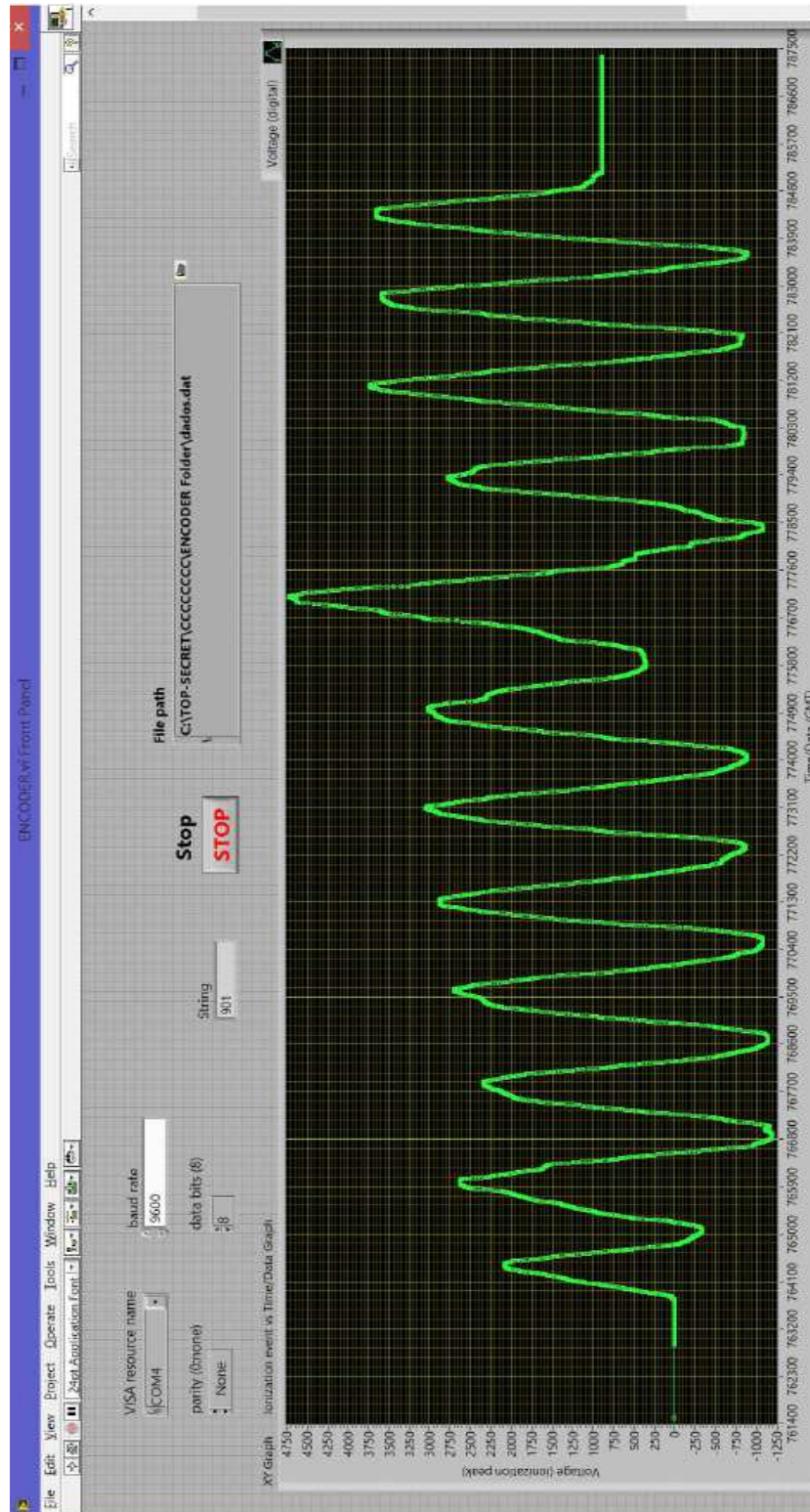


Figura 4.10: Painei frontal do aplicativo em LabVIEW para aquisição dos dados da placa Arduino e apresentação gráfica dos dados numéricos obtidos.

Os resultados obtidos pelos gráficos gerados, fornecem dados importantíssimos para que se possa verificar a tendência do sistema, em sua evolução temporal, mediante repetidas realizações no procedimento experimental, principalmente para dados muito próximos, é a partir destes dados fornecidos que é possível definir as características do sistema.

Uma das desvantagens deste programa aqui identificadas é em relação a não gratuidade do mesmo, mas que existe programas alternativos e gratuitos, porém com menos recursos, mas que podem ser usados para impressão destes dados, o programa alternativo usado neste trabalho, foi o PLX-DAQ.

#### 4.1.6 Aplicativo de aquisição de dados em PLX-DAQ

Parallax data acquisition tool (PLX-DAQ figura 4.11) é uma ferramenta de software add-in gratuita para a Microsoft Excel. Adquire até 26 canais de dados recolhidos por microcontroladores e organiza os números em colunas dentro de uma planilha em tempo real. Assim ocorre a possibilidade de montagem de gráficos, cálculos e outras análises de acordo com o usuário, bastando apenas programar algumas linhas de código dentro do Arduino [48], esta informação está detalhada na descrição do produto no **PRODUTO EDUCACIONAL**.

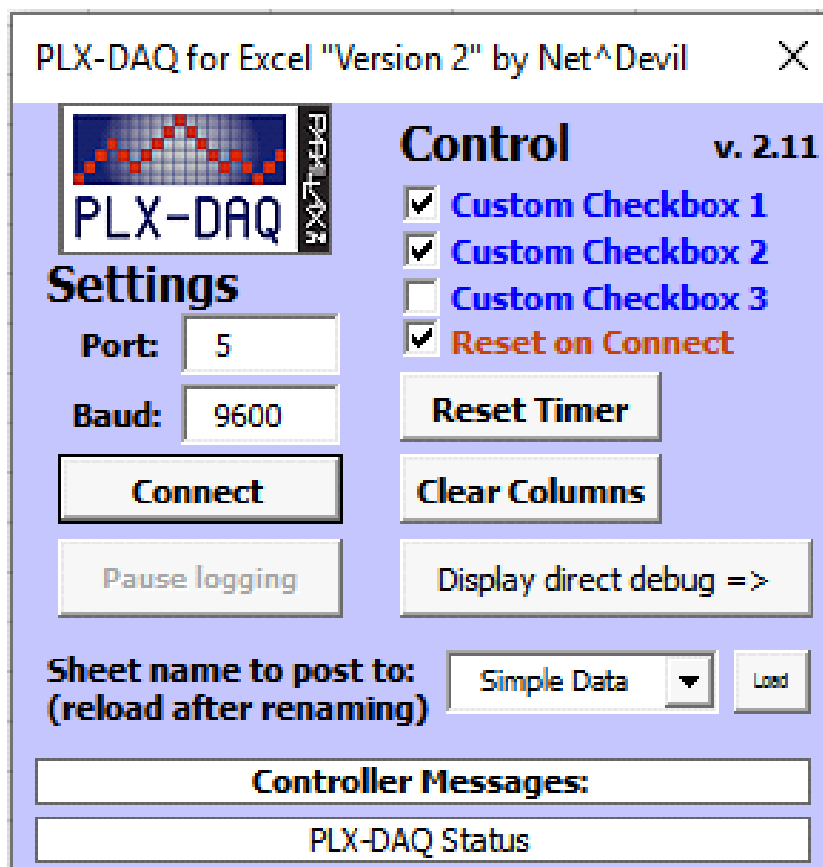


Figura 4.11: Programa PLX-DAQ (Data Acquisition for Excel) para Microsoft Excel.

Tais comandos permitem a comunicação entra a porta serial do Arduino e a planilha no excel gerada por meio do programa PLX-DAQ como se ver logo abaixo na figura 4.12.

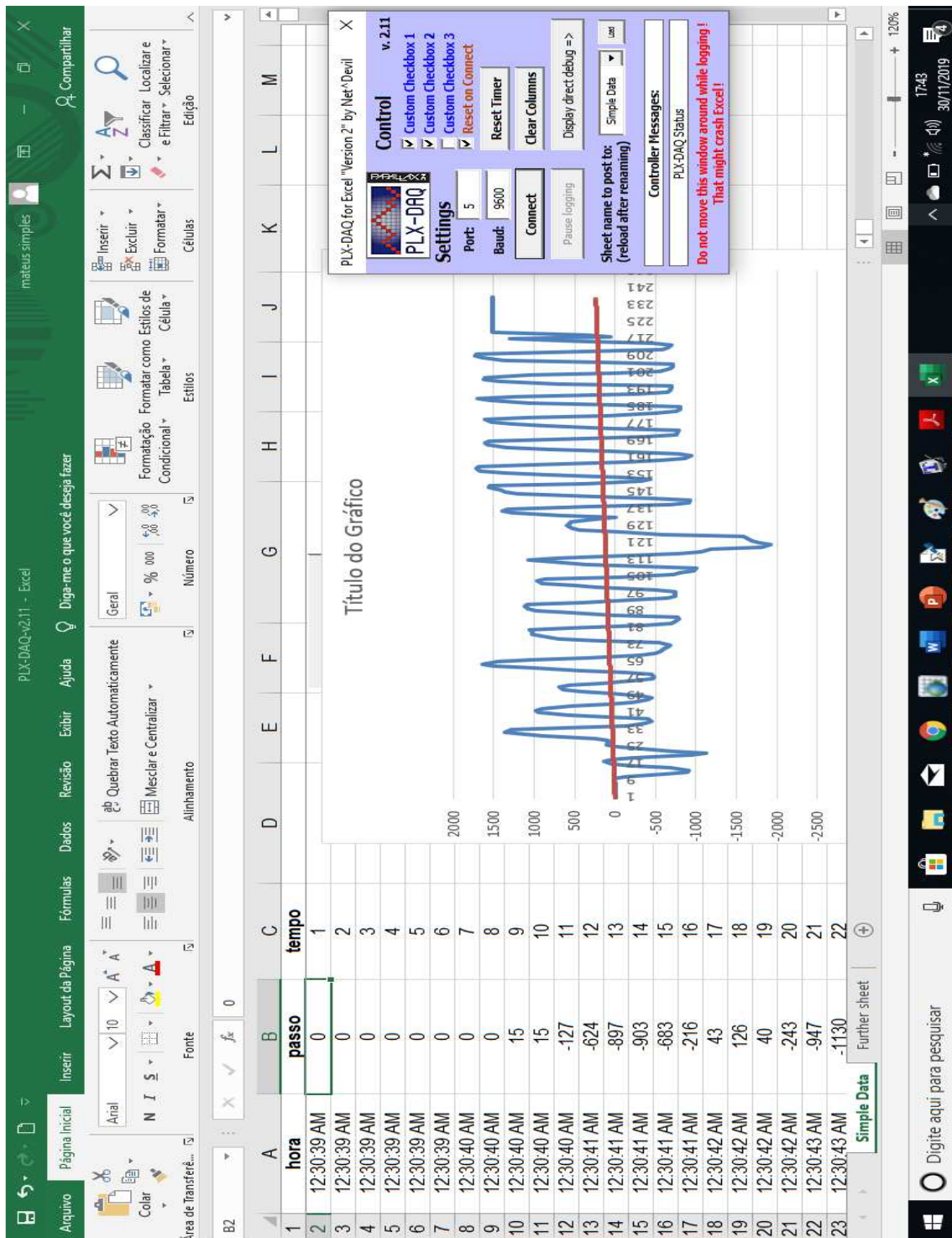


Figura 4.12: Impressão de dados na planilha Excel do movimento da roda de Lorenz usando PLX-DAQ.

Nesta imagem acima, é possível observa na mesma planilha, tanto os dados numéricos, como os resultados gravados destes dados; como mostra a figura 4.12.

## Capítulo 5

# RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ

A roda d'água de Malkus-Lorenz é um modelo mecânico elegante, cuja dinâmica coincidia com aquela descrita pelas equações de Lorenz. Foi inventada por Willem Malkus e Lou Howard, ambos do Massachusetts Institute of Technology (MIT), e com a participação de Ruby Krishnamurti da Florida State University na década de 1970 [41].

Esse foi o experimento escolhido para estudo sobre sistemas dinâmicos não lineares, que de acordo com as literaturas pesquisadas, o modelo mecânico mencionado pode apresentar caos dependendo dos parâmetros e dados iniciais inseridos no sistema. A aquisição de dados desse experimento, ocorrerá de acordo com o que foi descrito no capítulo quatro.

Na intenção de mostrar a dependência sensível das condições iniciais de uma forma tão convincente quanto possível, Lorenz resolveu fazer de forma bem simples o seu sistema de equações e dedicou-se especialmente no movimento de convecção do ar na atmosfera. O seu modelo representa o movimento do ar entre duas placas paralelas, onde a placa de baixo está mais quente que a de cima, conforme esquematizado na figura 5.1 [40].

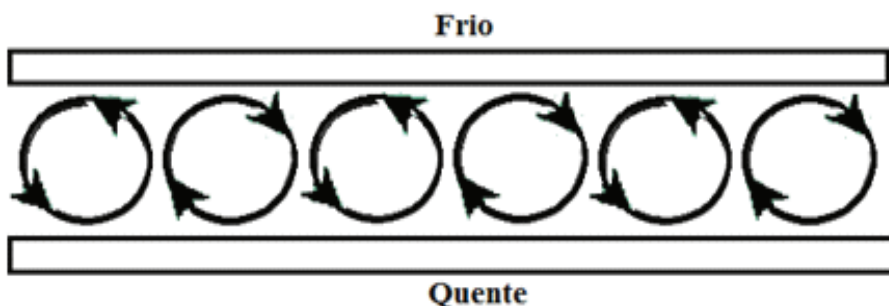


Figura 5.1: *Células de convecção.*

A roda d'água de Malkus-Lorenz tem uma relação com os movimentos de convecção do ar na atmosférico estudados por Lorenz. É a semelhança desses diferentes sistemas que serão estudados nas seções e subseções deste capítulo.

## 5.1 Sistema dinâmico da roda

A versão mais simples é uma roda d'água com copos de material leve perfurados na parte inferior de forma a produzir vazamentos suspensos através dos furos e também pelas suas bordas.



Figura 5.2: *Roda d'água Lorenziana.*

A água é derramada constantemente a partir de uma fonte localizada no topo acima da roda. Se a vazão for muito lenta, os copos superiores nunca se enchem o suficiente para superar o atrito, de modo que a roda permanece imóvel. Para um fluxo maior, o copo superior fica pesado o suficiente para iniciar o giro da roda. Eventualmente, a roda se estabelece em uma rotação constante em uma direção ou outra. Por simetria, a rotação em qualquer direção é igualmente possível; o resultado depende das condições iniciais.

Ao aumentar ainda mais a vazão, pode-se desestabilizar a rotação constante. Então o movimento torna-se complexo, a roda pode girar em uma direção por algumas voltas, então quando alguns copos ficam muito cheios e a roda não tem inércia suficiente para carregá-las por cima, de modo que a roda diminui a velocidade e pode até reverter sua direção de rotação. Então ele gira para o outro lado por um tempo. A roda continua mudando de direção de maneira irregular.

As características ideais de uma roda da água de Malkus-Lorenz são [51]:

- Sem vazamento pelas bordas dos copos;



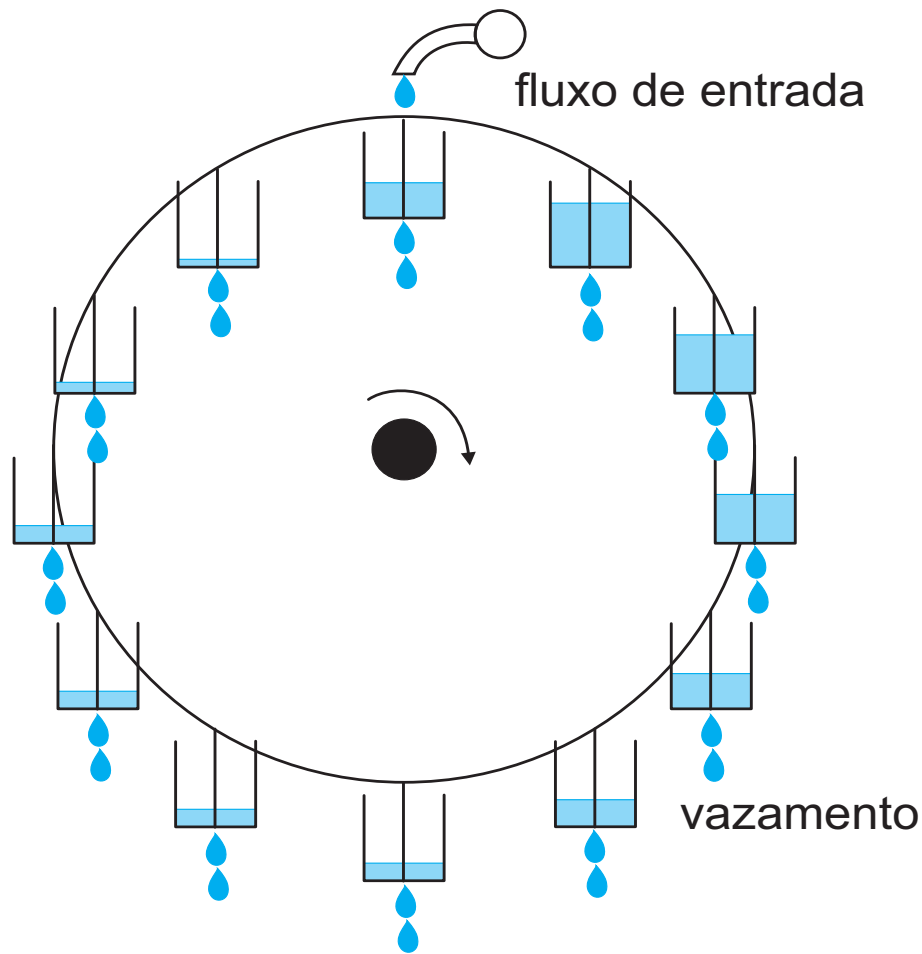


Figura 5.3: *Esquema da roda de Malkus-Lorenz.*

- Vazamento inferior proporcional à massa da água no interior do copo;
- Torque de atrito do eixo proporcional à velocidade de rotação da roda.

Segundo a referência [51] os parâmetros principais da roda de Malkus-Lorenz são:

- $\lambda$ : constante de vazamento,
- $M_k$ : massa da água presente no  $k$ -ésimo copo,
- $M = \sum_k M_k$ : massa total da água na roda,
- $Q$ : taxa de variação de massa da água através da torneira,
- $(y, z)$ : coordenadas do centro de massa dos copos da água localizados no plano da roda,
- $R$ : distância do centro da roda a cada um dos eixos sobre os quais os copos giram,

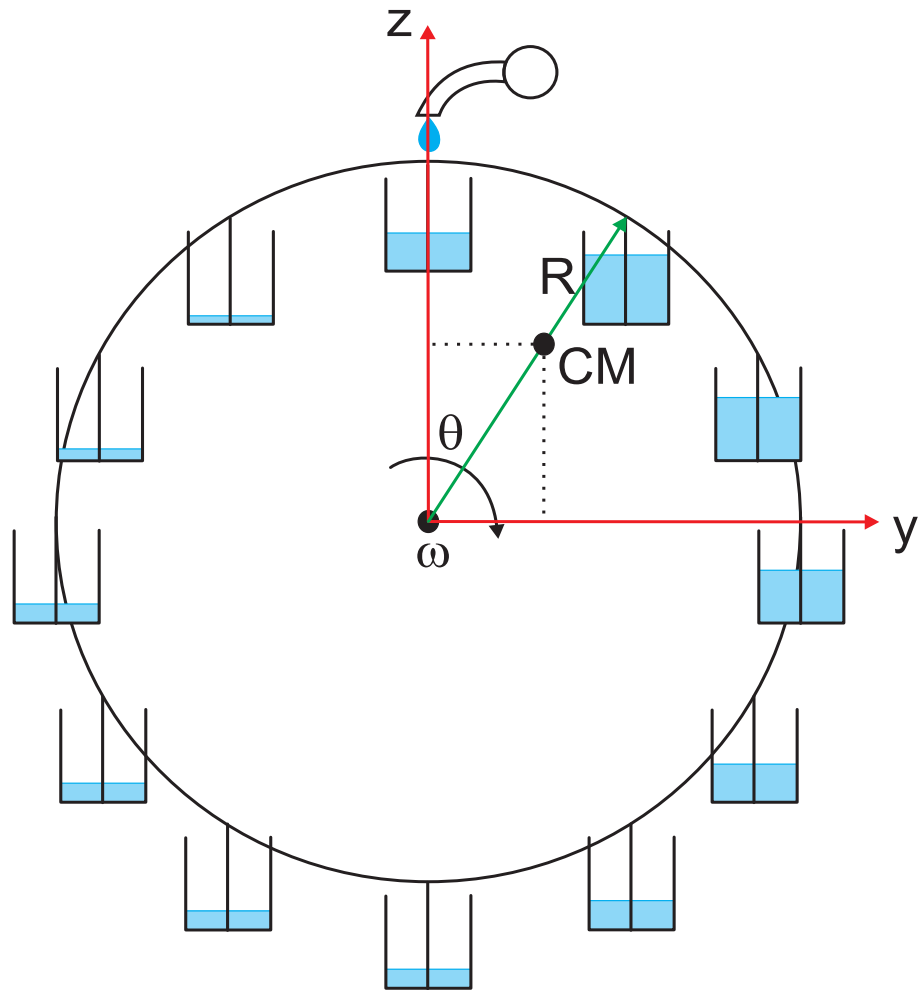


Figura 5.4: Esquema que mostra a variação do centro de massa  $CM$  da roda de Malkus-Lorenz.

- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  velocidade angular da roda da água,
- $I_0$ : momento de inercia da roda vazia,
- $\alpha$ : parâmetro de atrito do eixo da roda,
- $I_W = MR^2$ : momento de inercia da água,
- $I = I_0 + I_w$ : momento de inercia total da roda.

A equações para a roda da água de Malkus-Lorenz são:

$$\frac{d\omega}{dt} = a y - f \omega \quad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega z - \lambda y$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega y + \lambda (R - z)$$

Se nas equações de Lorenz são realizadas as substituições:

$$z \rightarrow R - z, x \rightarrow \omega. \quad (5.2)$$

Obtém-se:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma y - \sigma \omega \quad (5.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega z - y$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega y + \beta (\rho - z)$$

Este sistema é equivalente ao sistema de Malkus-Lorenz. Em ambos os casos, o comportamento do sistema depende da quantidade de energia fornecida [30].

Neste caso, as variáveis  $y$  e  $z$  representam a distribuição de água nos copos (em vez da distribuição de temperaturas no ar), que dá origem ao movimento, e a variável  $x$  representa a velocidade de rotação da Roda (em vez da velocidade de escoamento do ar).

Ambos os sistemas são forçados (pela diferença de temperatura que é mantida entre as placas, num caso, e pelo fluxo de água que alimenta a roda, no outro), e ambos dissipam energia (o ar perde calor no sistema dos rolos de convecções, os copos da roda perdem água).

## 5.2 Dispositivos para aquisição de dados

Para aquisição dos dados obtidos foram utilizados alguns softwares/hardwares e dispositivos eletrônicos. Abaixo estão relacionados os principais componentes que incorporam este tipo de sistema, e também os softwares que foram utilizados no

desenvolvimento do SAD.

- Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench (LabView). Versão profissional 2010;
- Ambiente de Desenvolvimento Integrado – IDE Arduino. Versão 1.8.4
- Software(alternativo) Parallax Data Acquisition tool (PLX-DAQ. versão 2.11;
- Encoder incremental óptico rotativo.

### 5.2.1 Sistema de coletas de dados

A construção do sistema de aquisição de dados de movimento para a “roda d’água de Lorenz” foram utilizados um sensor/transdutor e softwares/hardwares, bem como o computador para impressão dos dados adquiridos no processo experimental. O processo de construção da roda de Lorenz, bem como os programas que permitem a aquisição de dados, são detalhados no apêndice que descreve o produto educacional e que acompanha a esta dissertação. A descrição da sequência que correlaciona a construção da roda à aquisição de dados descrita no **Roda d’água**, está expresso no mapa conceitual da figura abaixo.

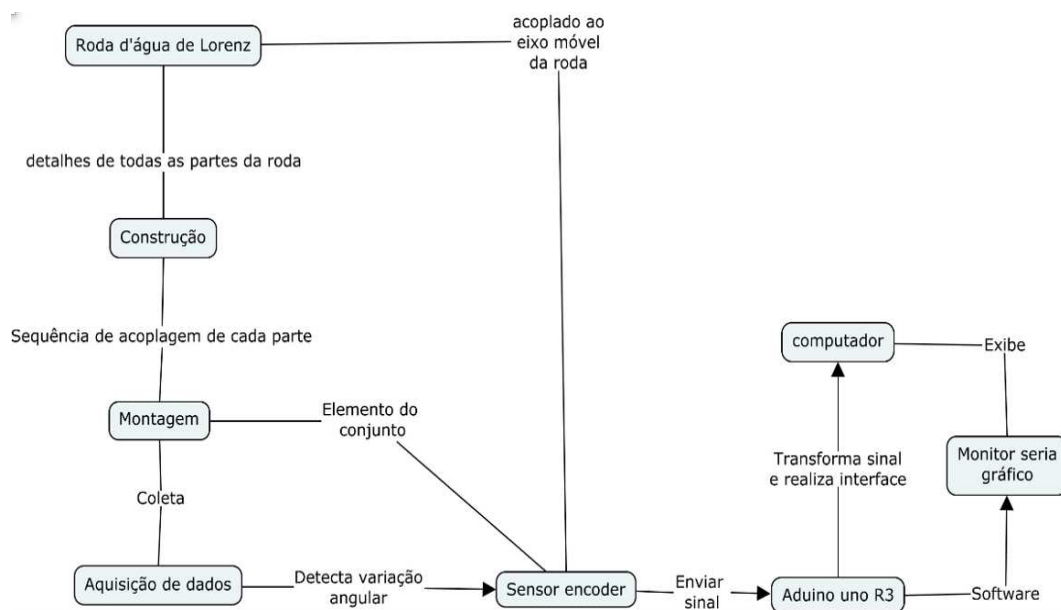


Figura 5.5: Mapa conceitual da construção à aquisição de dados.

### 5.2.2 Encoder incremental óptico rotativo

Encoder (figura 5.6) é um transdutor de movimento capaz de converter movimentos lineares ou angulares em informações elétricas, as quais podem ser transformadas

em informações binárias que decodificadas passam a ser entendidas como distância, velocidade, direção e sentido [44].



Figura 5.6: *Sensor encoder incremental.*

Sensor: um corpo que reage a uma condição física, química ou biológica. Ele sente. Pode ser considerado como um detector.

Transdutor: A conversão de energia de uma forma para outra é conhecida como Transdução. Um transdutor serve para essa finalidade.

A imagem da figura 4.1, revela o momento em que ocorreu o processo de aquisição de dados, no instante no qual a roda começa a se mover por intermédio da água caindo sobre os copos. O sistema possui um sensor/transdutor (figura 5.7a) que converte a energia mecânica provida do movimento rotatório (figura 5.7b) do sistema, em energia de pulsos elétricos.

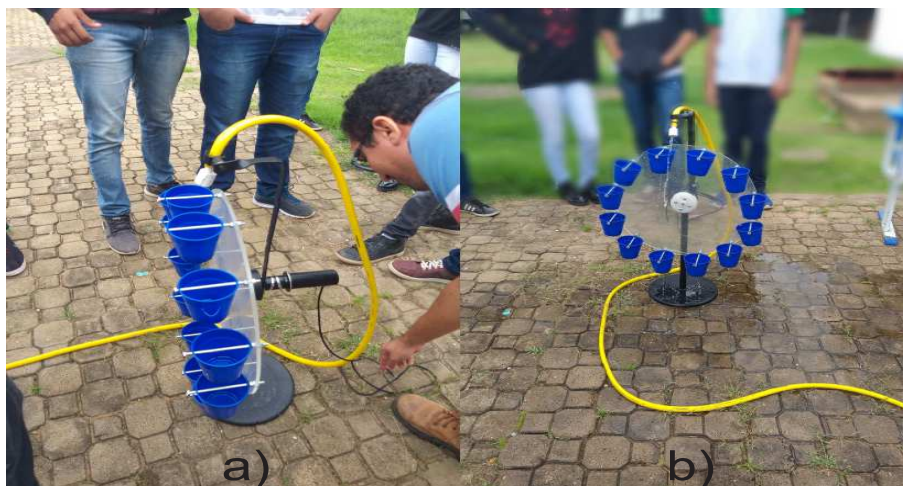


Figura 5.7: *a) sistema estático (b) sistema em movimento provocado pela queda da água nos copos*

O sensor/transdutor utilizado no experimento é do tipo incremental que possui dois sinais de saída digital *A* e *B* conforme figura 5.8 (Mostrou-se, também, na figura

4.1 a correlação entre as cores dos cabos de saída e os sinais digitais. também ilustrado na figura 4.1, os sinais correspondentes às cores dos cabos de saída do sensor), este modelo tem uma resolução de 600 passos por rotação, atende perfeitamente as necessidades do projeto, além de ser de baixo custo num valor em torno de 100 reais.

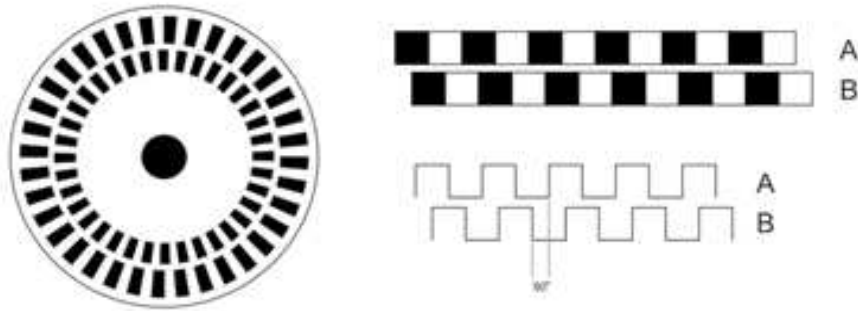


Figura 5.8: *Representação funcional dos sinais das duas saídas A e B defasados em 90° no interior do encoder incremental [44].*

Os sinais de saída do encoder incremental estão defasados com duas marcações ou sequências de furos deslocados tanto na régua como no disco. Esta montagem provoca uma defasagem nos sinais gerados pelos componentes óticos de 90 graus, o que permite ao computador ou circuito de controle, além de determinar a velocidade de deslocamento ou de rotação, também o sentido. Embora seja possível determinar a velocidade e posição com alguns modelos de encoder, no entanto, com este modelo não é possível determinar velocidade e deslocamento ao mesmo tempo, só é possível optar por um destes, e nesse caso, foi escolhido para aquisição o deslocamento angular do sistema [45].

Além do encoder incremental, existe também o absoluto (ver figura 5.9), este último se diferencia do outro, pois utiliza vários emissores e detectores de luz que combinados entre si geram um código binário, para cada posição do disco [44].

Ou seja, é um encoder que possibilita grande precisão; para definir a precisão desejada basta dividir os 360° graus do disco por 2 elevado ao número de sensores. Esse modelo permite saber a posição em que o sistema parou, mesmo sem um ponto de referência, já que cada posição existe um código diferente.

Deste momento em diante, o encoder é ligado ao Arduino, que recebe os sinais convertidos mediante o movimento angular da roda de Malkus-Lorenz, e este por sua vez converte esses sinais os transformando em valores numéricos digitais que podem ser impressos no computador.

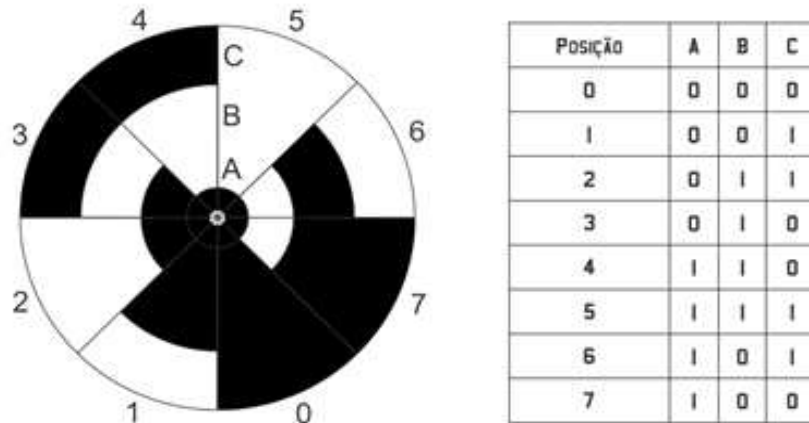


Figura 5.9: Representação funcional dos sinais das duas saídas no interior do encoder absoluto [44].

### 5.2.3 Análise dos resultados

A água cai do alto, num fluxo constante. Com um baixo escoamento da água, o copo jamais adquirirá volume de proporção suficiente para vencer o atrito, e pôr a roda em movimento, e o sistema continua estático.

Aumentando o fluxo da queda d'água, o copo superior aumenta seu peso, fazendo dessa forma com que a roda entre em movimento, podendo girar em um dos sentidos. A roda d'água estabiliza-se numa rotação que permanece em ritmo constante.

Seu fluxo for maior, de forma que o peso do copo de cima coloca a roda em movimento. Dependendo deste fluxo de água que cai sobre os copos, o movimento pode tornar-se caótico por causa da não linearidade das equações devida ao acoplamento dos graus de liberdade. Desta forma, o sentido da rotação pode inverter-se várias vezes, sem nunca alcançar um estado estável ou seguir um padrão de algum modo previsível. A roda d'água de Lorenz, apesar de ser um sistema extremamente simples, mostra-se capaz de um comportamento surpreendentemente complexo [45]

O movimento da roda pode-se tornar imprevisível: a roda gira em uma direção algumas voltas, em seguida, alguns dos copos ficam muito cheios e a roda não tem inércia suficiente para levá-los ao topo, então a roda fica mais lenta e inverte a sua direção. A roda continua a mudar de direção, de forma irregular a cada instante. A figura 5.10 mostra o conjunto usado na obtenção dos dados.

No instante em que os copos passam pela queda d'água, as proporções em que se echem dependem da velocidade de rotação. Se esta for rápida, os copos tem pouco tempo para se encherem; e ainda quando a roda estar rápida, os copos do lado oposto à rotação, começam a subir antes de esvaziarem. Como consequência, os copos pesados do lado que sobe, perdem velocidade e logo em seguida invertem



Figura 5.10: *Aquisição de dados excel com Software PLX-DAQ*

seu sentido de giro (figura 5.11).



Figura 5.11: *Resultados obtidos de uma movimento não linear da roda de Lorenz, obtida na planilha excel pelo program PLX-DAQ*

São esse tipos de padrões que podem ser analisados quando se consegue obter os graficos do movimento. para este caso, é possível afirma que o sistema é não linear.

Os dados a seguinte mostra o resultados obtidos com um aplicativo de aquisição de dados construído com o ambiente de desenvolvimento NI-Labview 2010.

O código inserido neste programa, gera uma reta, caso o sistema gire em um único sentido com velocidade angular constante. À exemplo da figura 5.13, o gráfico mostra que, o deslocamento angular se dar no sentido anti-horário, apresentando



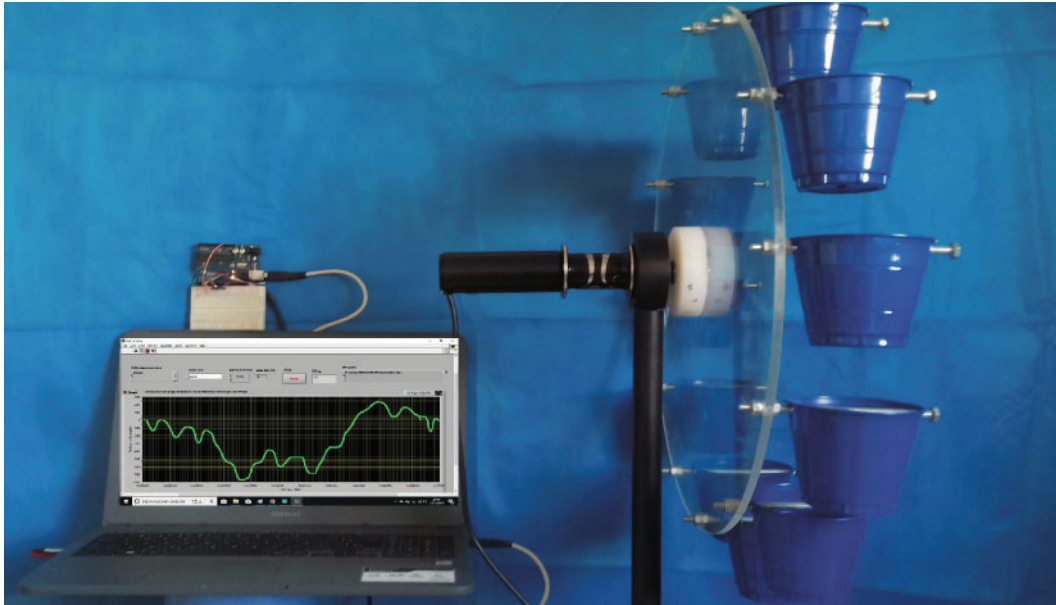


Figura 5.12: *Sistema de aquisição de dados da roda d'água usando o aplicativo em Labview.*

pequenas oscilações no sentido contrário, mas prevalecendo seu movimento com maior frequência ao sentido anti-horário até o passo 12500 na vertical.

A partir deste instante, o sistema passa a deslocar-se com maior frequência no sentido horário, apresentando pequenas oscilações no sentido anti-horário. A repetição de vários testes, iniciando o movimento do sistema o quanto mais próximo possíveis dos dados iniciais, foram implementados, a figura 5.14 é um outro exemplo dos dados obtidos.

Somente uma grande quantidade de testes, com os gráficos gerados convergindo ou divergindo uns dos outros, será possível caracterizar o sistema como sendo ou não caótico. A figura 5.15 mostra outra interação, com dados iniciais de posição da roda, o mais próximo possível do dado inicial, porém com fluxo de água diferente.

O que se pode afirmar categoricamente, é que este sistema, faz parte dos sistemas não lineares (ver figura 5.15).

No exemplo abaixo (figura 5.17. A roda gira para um determinado fluxo de água, após algumas oscilações, o sistema vai diminuindo seu movimento, até parar.

Algebricamente pode se definir como sistema caótico, aquele sistema que apresenta pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Os expoentes de Lyapunov  $\lambda$  avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas, e representam um dos critérios mais importantes utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos [49].

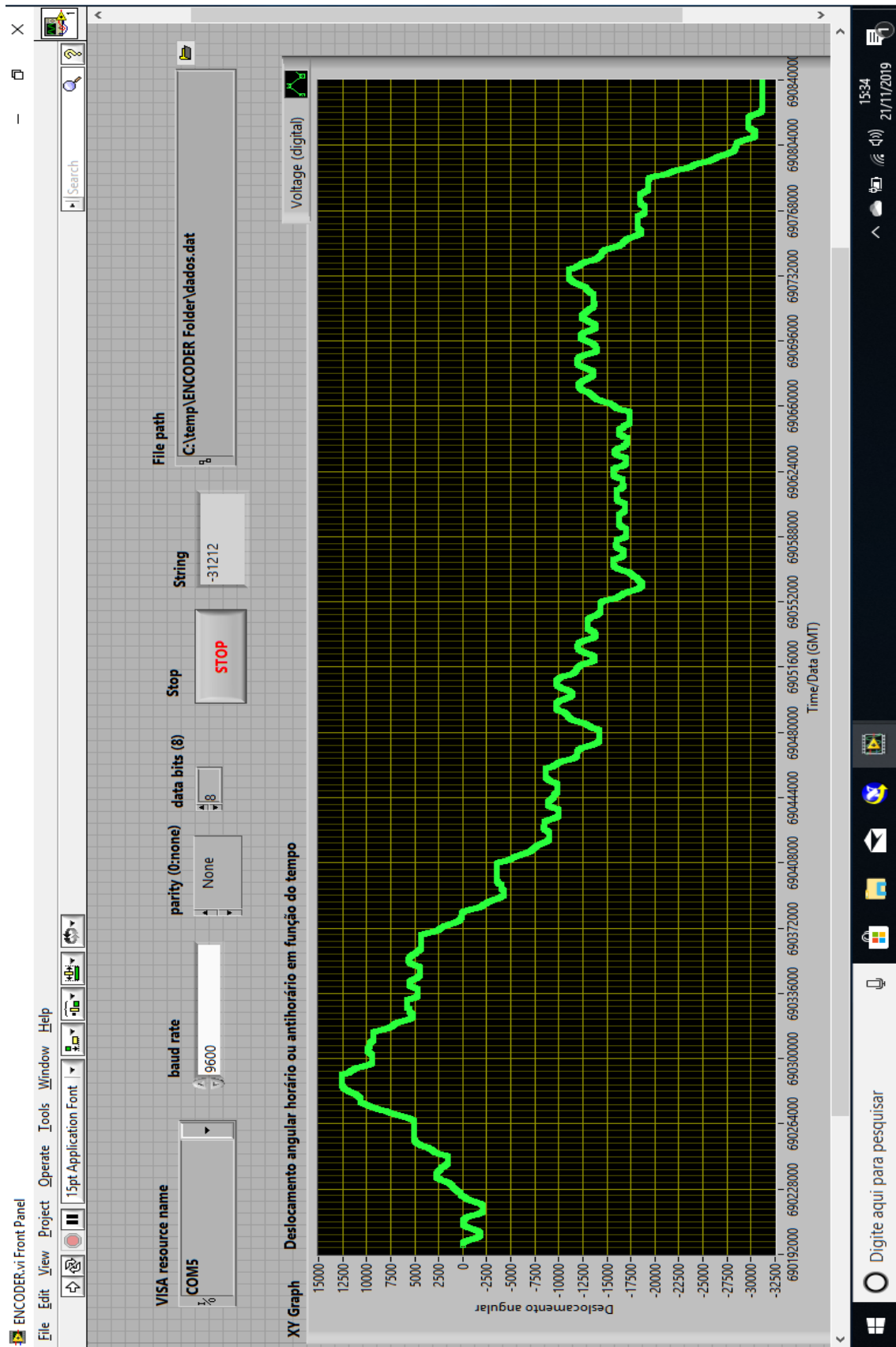


Figura 5.13: Dados obtidos com fluxo de 38,9ml/s.

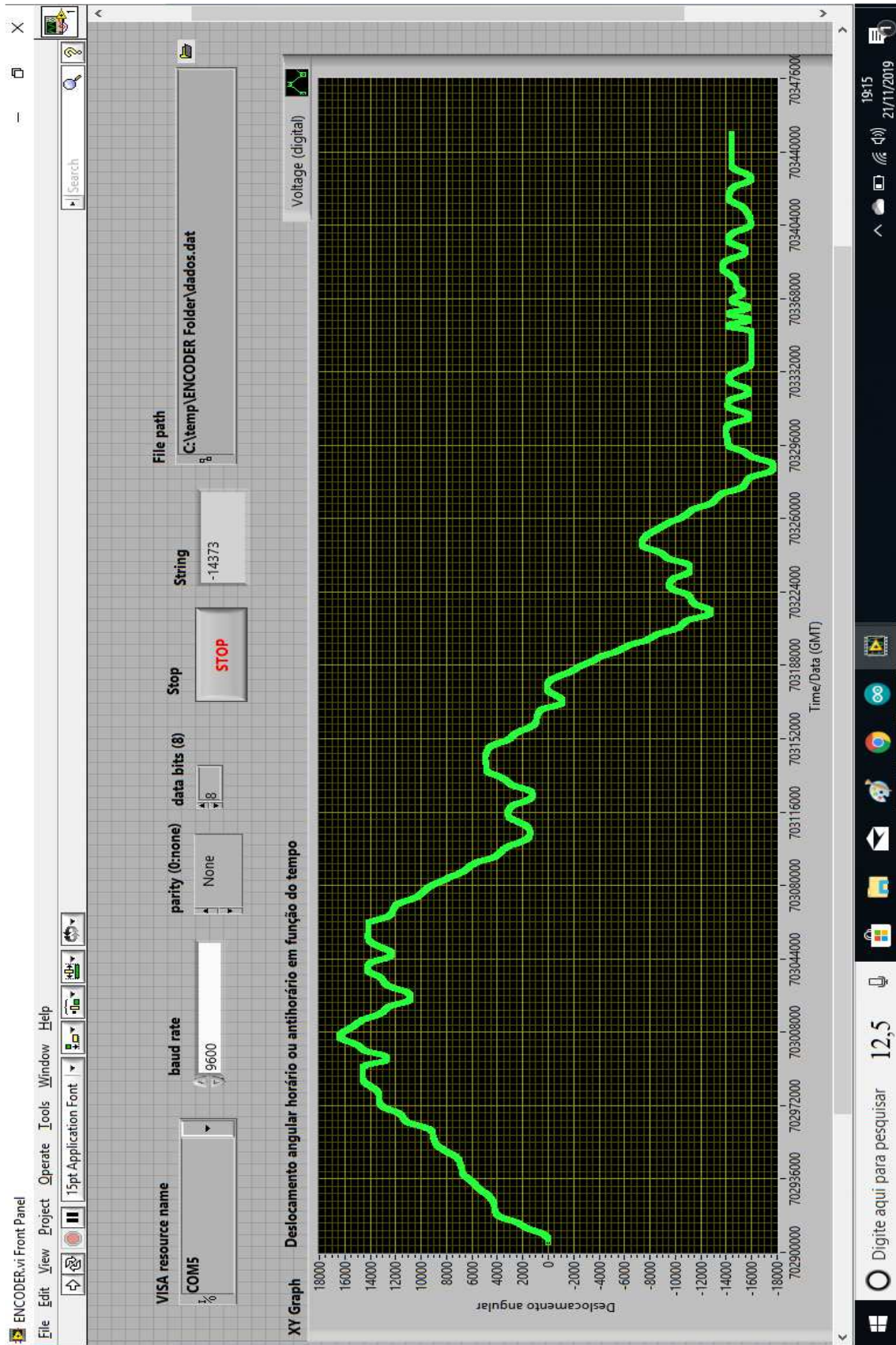


Figura 5.14: Dados obtidos com fluxo de 27,7ml/s.

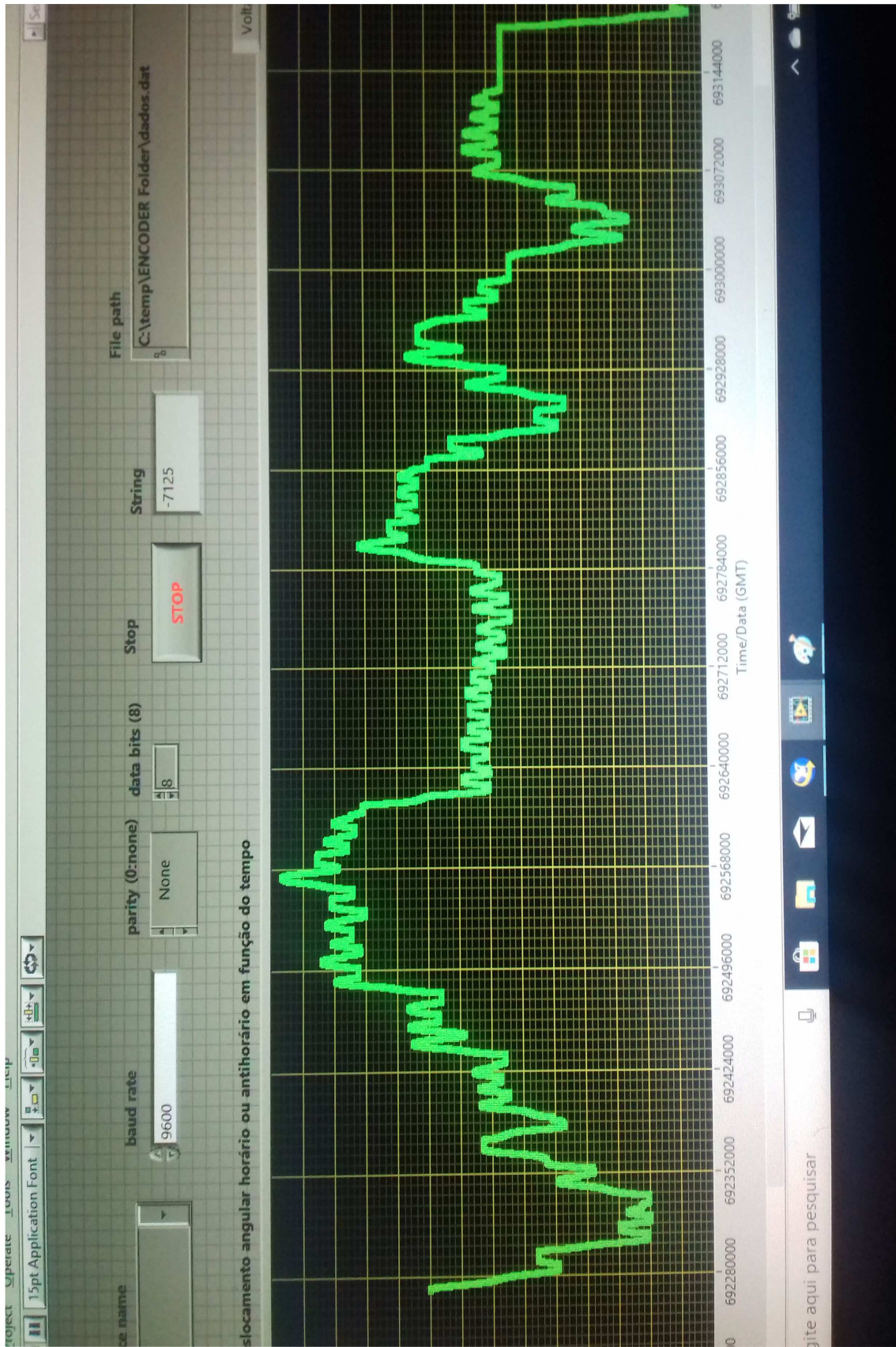


Figura 5.15: Dados obtidos com fluxo de 35,0ml/s.

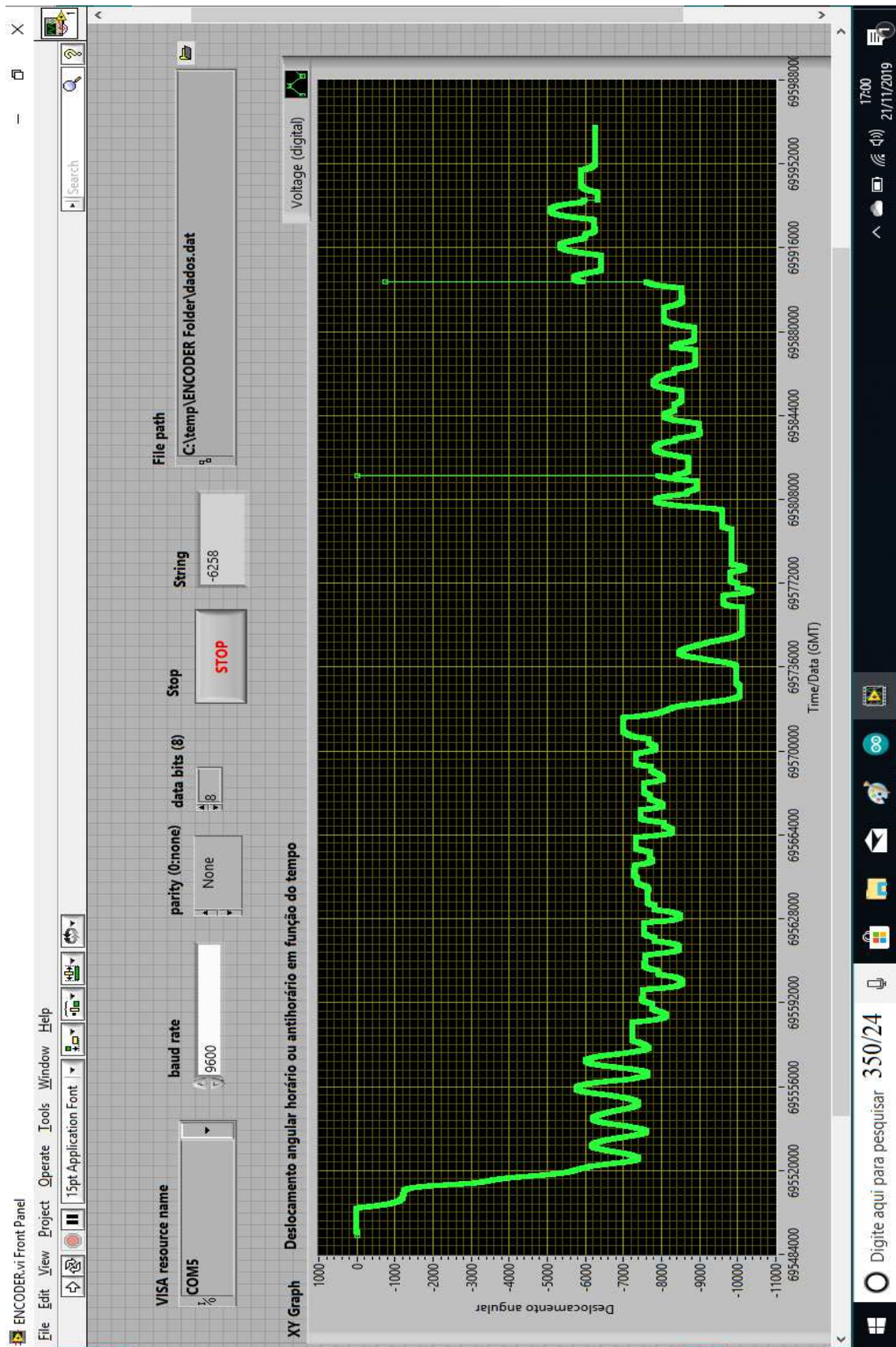


Figura 5.16: Dados obtidos com fluxo de 14,6ml/s.

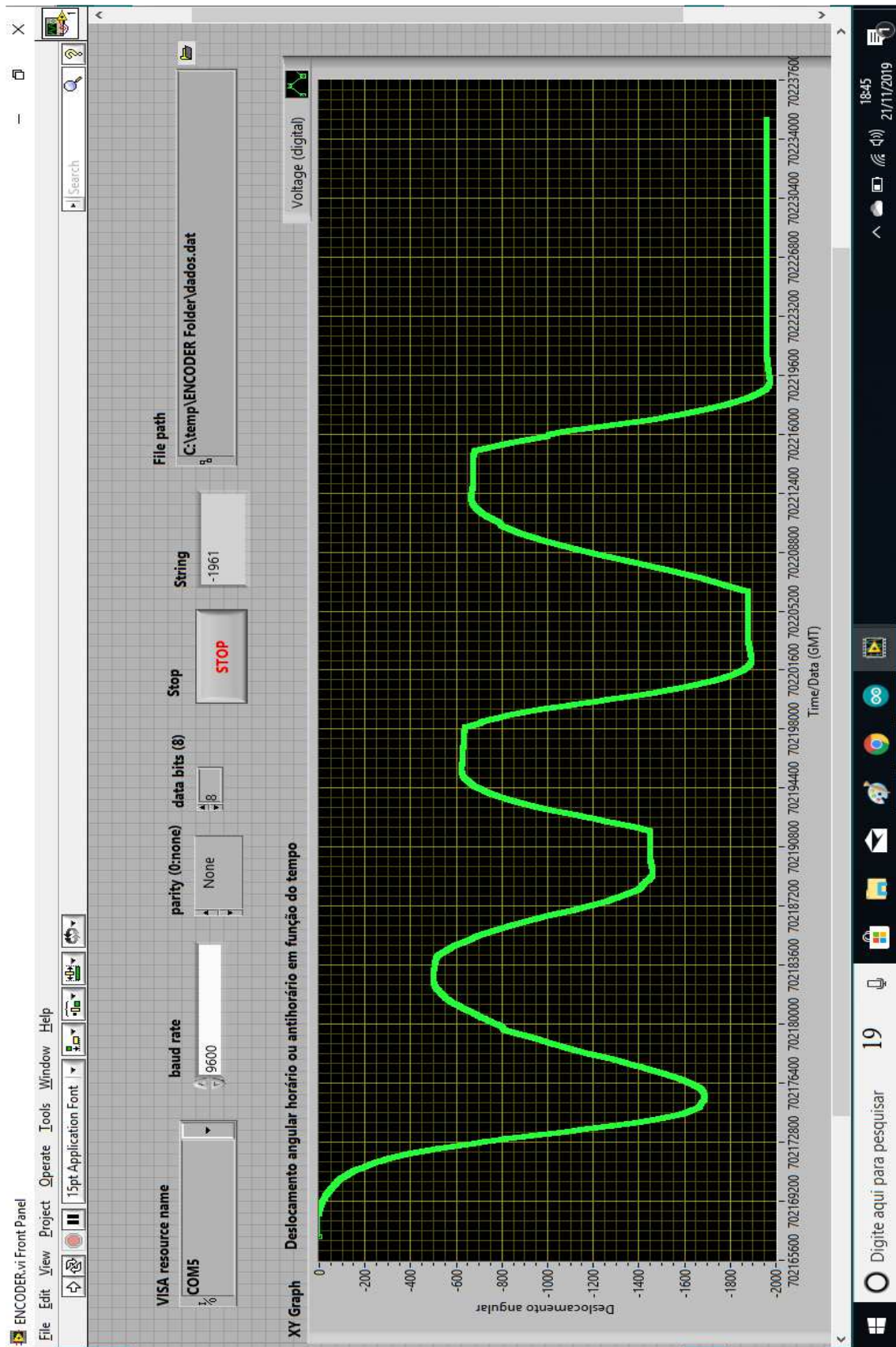


Figura 5.17: Dados obtidos com fluxo de 18,4ml/s.

# Capítulo 6

## ENHANCED E-BOOK

Quando se observa o catálogo da Amazon, o catálogo das livrarias nacionais, observa-se em grande parte livros de texto puro, com algumas imagens, tabelas e rodapés. Ainda é bem difícil encontrar os chamados Enhanced e-Books, embora sejam eles que ocupem os espaços na mídia.

Animações, interações, sons, vídeos. A evolução do livro seria esses arquivos híbridos digitais cheios de melhorias, cheios de novas informações, coisas que nunca se espera em folhas de papel, em livros impressos [52].

A falta de um livro eletrônico melhorado (enhanced e-book), e de fácil mobilidade voltado para o conteúdo de física e que combine seu uso com os sistemas experimentais desenvolvidos na presente dissertação foram o grande motivador para o desenvolvimento deste produto, visando exatamente os primórdios da dinâmica dos sistemas físicos, com interações animações, áudios e vídeos. Tais tecnologias podem potencializar as ações, tanto do educando como do educador nos mais diversos segmentos, indicando possibilidades de renovação/reconfiguração ou substituição daquilo que já se sabe e até da forma de como se faz [53].

### 6.1 Revisão da Literatura

O processo de desenvolvimento e de expansão das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) é irreversível, a cada dia novos aplicativos, tecnologias e sistemas são produzidos e a informatização amplia a sua presença em todos os setores da sociedade. Os equipamentos/dispositivos digitais (figura 6.1) que apresentam diferenciais significativos nesse processo são os aparelhos celulares, os smartphones e os tablets, que além de intensificar o fenômeno da mobilidade, estão diretamente relacionados às transformações apontadas em teorias da cibercultura [53].

Os livros eletrônicos interativos têm mais do que palavras e dados, dão a oportunidade de fundir texto, animação e interação. Livros interativos, que possam ser utilizados em diferentes plataformas, representam possibilidades expressivas para



Figura 6.1: *Diferentes equipamentos de tecnologia digital [54]*

combinar uma série de expedientes em abordagens pedagógicas, além da integração de disciplinas e da disponibilização de informação [53].

Sobre o formato do produto desenvolvido, não se encontra modelos semelhantes no âmbito do ensino de física. Portanto há muito para se explorar nesta modalidade de enhanced e-book direcionadas para o ensino de física; somente dois trabalhos no segmento das ciências exatas foram encontrados na revisão bibliográfica [55][53], e mesmo estes não apresentam o mesmo formato da ideia do produto com livros digitais melhorados. são:

- “DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DE UM E-BOOK NO ENSINO DA FÍSICA” - Dissertação do MNPEF defendida por Juliana Pereira Duarte [55].
- “A Produção e a Utilização de ebooks Interativos e Multimídia em Cursos na Modalidade a Distância: o caso do NEAD/UFSJ no Brasil”. Protótipos de ebooks interativos e multimídia (artefatos digitais) sobre história da matemática, voltados para propostas de ensino e aprendizagem no curso de especialização em Matemática do núcleo de ensino a distância da Universidade Federal de São João del-Rei (NEAD/UFRJ)- estudos feitos por Eduardo Henrique de Matos Lima e José Manuel [53].

A transformação do ambiente de aprendizagem associado a presença de mais materiais didáticos e disponibilização de diversas maneiras de acesso às informações contribuem para o aprendizado do aluno. Este ambiente oferece tanto aos alunos



quanto aos professores um espaço favorável à aprendizagem, tendo um rico conjunto de materiais que deve contribuir de forma significativa para a exploração e a aprofundamento de pesquisas, uma vez que esse ambiente de aprendizagem é uma característica da TIC na educação [55].

O enhaced e-book aqui desenvolvido para o Ensino de Física, é composta de teorias, imagens e vídeos, animações, exemplos que ilustram situações de um evento físico, ou seja composto por elementos multimídia. A linguagem não verbal, como os gráficos, tabelas, figuras, fórmulas, gifs, vídeos, tem por intuito, enriquecer o conteúdo e motivar a aprendizagem. O objetivo do enhaced e-book é facilitar a compreensão de um fenômeno físico, utilizando recursos que aguçam os sentidos, abrindo a visão ou aprofundando o conhecimento do professor e posteriormente do estudante sobre uma determinada informação [55].

Os e-books encontrados sobre o conteúdo de física, são compostas apenas por textos, e quando apresentam alguma interatividade, se restringe ao uso do mesmo em computadores. A proposta deste enhaced e-book, é apresentada com uma alternativa de interatividade a ser utilizados em celulares e tablets com sistema android. Acredita-se que integrar um projeto fundamentado no desenvolvimento de ebooks interativos e multimídia a uma abordagem pedagógica voltada para a utilização de mídias digitais, explorando as possibilidades centrada nas demandas e necessidades do aluno, poderá ampliar e criar novas oportunidades e perspectivas em processos de aprendizagem [53].

A multimídia tornou-se uma ferramenta muito importante para o Ensino de Física, os experimentos virtuais (simulações) são bastante utilizados pelos professores com intuito romper com as dificuldades em realizar experimentos. Esta dificuldade ocorre por causa da carga horária reduzida da disciplina, da disponibilidade do professor e dos recursos oferecidos pela instituição de ensino. Os estudantes têm adotado rápida e naturalmente os novos ambientes sócio tecnológicos, e os professores e instituições educacionais precisam implementar novos modelos para enfrentar essas transformações, promover propostas pedagógicas coerentes com as possibilidades de desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos em consonância com as demandas da contemporaneidade [53].

Assim, entende-se que a sala de aula não é o único lugar onde ocorre a aprendizagem e que a comunicação pode proporcionar, através de variados meios, a formação de diferentes ambientes de aprendizagem e uma maior participação dos alunos nas relações de ensino [56]. A multimídia interativa permite uma exploração profunda devido à sua dimensão não linear.

Através da multimídia tem-se uma nova estruturação de como apresentar, demonstrar e estruturar a informação apreendida. Os celulares e tablets mediante texto, imagem, vídeos e som interrompe a relação autor/leitor que é claramente

definida num livro, passa para um nível mais elevado, reconfigurando a maneira de como é tratada esta relação. A interatividade proporcionada pelos aplicativos multimídia pode auxiliar tanto na tarefa de ensinar quanto na de aprender [56].

Quanto as fases de desenvolvimento do enhanced e-book são detalhados no apêndice que descreve o produto educacional e que acompanha a esta dissertação; neste que detalha minuciosamente o passo a passo e métodos como: programa software, geração das animações e vídeos, e forma de geração do aplicativo para uso em celulares e tablets com android. Este capítulo apenas mostra a motivação que direcionou à construção deste produto.

### 6.1.1 Conteúdo do enhanced e-book

O conteúdo inserido no enhanced e-book, explora conhecimentos do aluno sobre equações: exponenciais, do 1º e 2º grau, 2º Lei de Newton. Estas abordagens reúnem um conjunto de informações que servem de subsunçores para ancorar os conceitos de: sistemas dinâmicos, sistemas lineares, sistemas não lineares, espaço de fases; até culminar com as equações de Lorenz que descrevem um sistema caótico.

O mapa conceitual abaixo descreve a representação gráfica das dimensões do conjunto de conceitos construídos e apresentados no ebook de tal forma que as relações entre eles sejam evidentes.

Para a construção das principais animações do livro iterativo, foi utilizado o software Modellus versão 4.01 (figura 6.3), que serviu para fazer as modelagens gráfica das animações, numa sequência didática que permita ao aluno interpretar os modelos dinâmicos abordados cuja evolução é descrita por um modelo matemático. Como parte opcional ao professor, fica o artigo “**MODELLUS: PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE FÍSICA A ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA, NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**”[57], para implantação e uso do software Modellus como instrumento metodológico de ensino da Física.

O Modellus é uma ferramenta computacional (software) para criar e explorar modelos matemáticos. A ideia básica do Modellus é a de facilitar a realização de experiências (ou simulações) com o auxílio do computador. O software é dirigido ao ensino e aprendizagem de Matemática, Física e Química. Permite que alunos e professores realizarem experiências com modelos matemáticos, controlar variáveis como tempo, velocidade e distância, analisar a variação de uma função e a respectiva representação gráfica, preparar animações e implementar exercícios propostos ou criar o seu próprio exercício sob a forma de simulação [58].

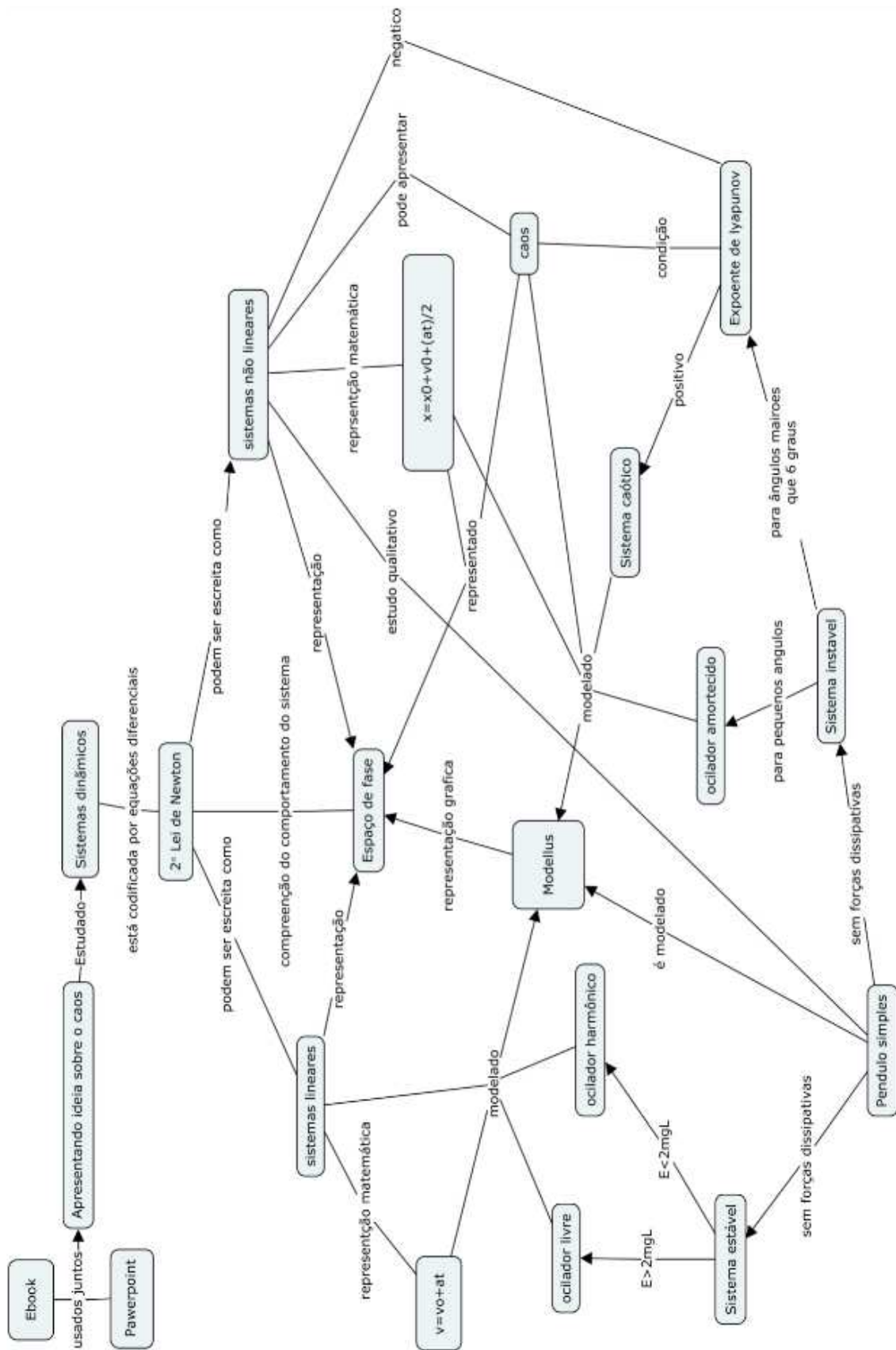


Figura 6.2: Mapa conceitual do conteúdo inserido no enhanced e-book.

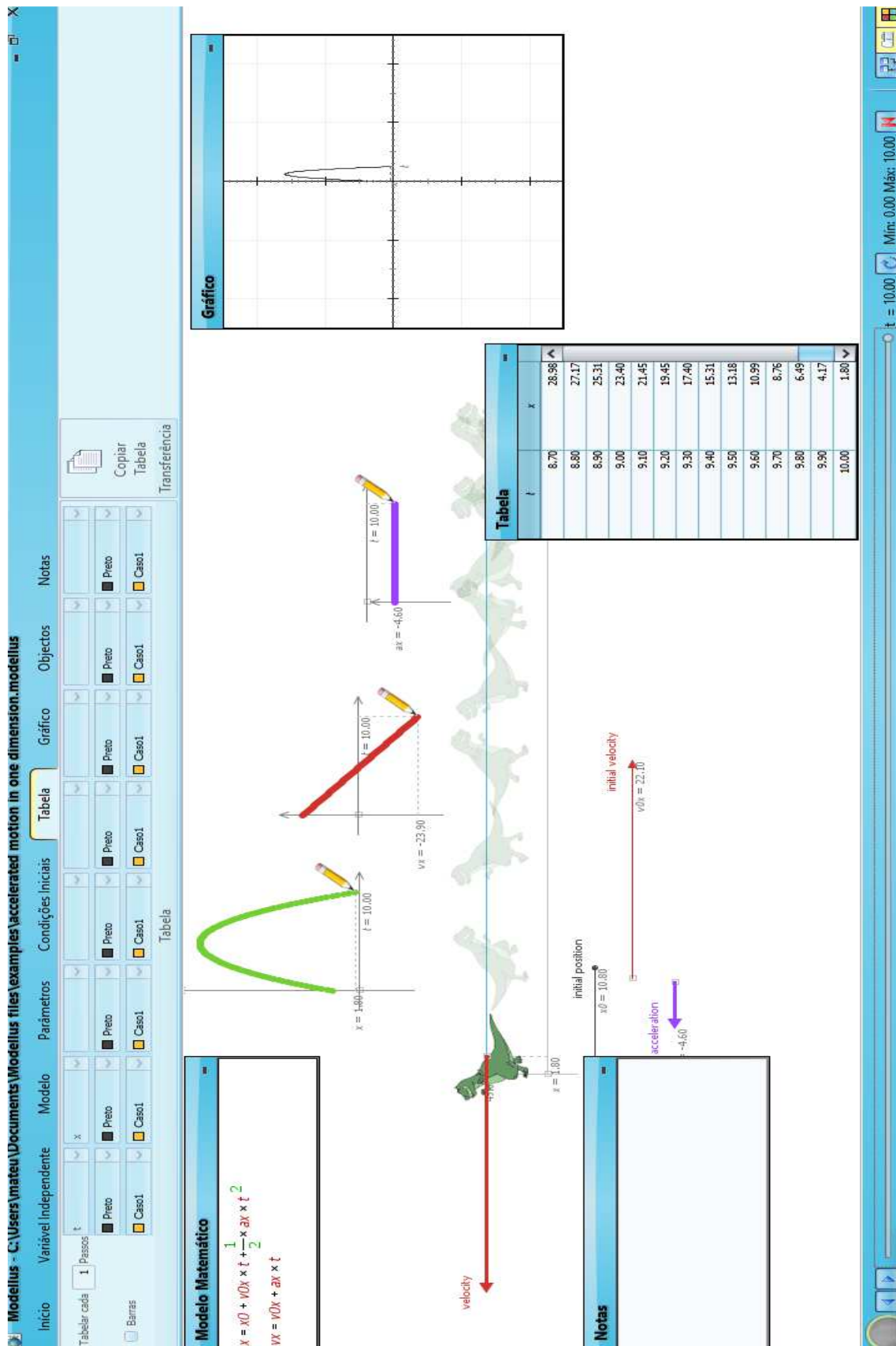


Figura 6.3: Interface do Software Modellus versão 4.01.

# Capítulo 7

## APLICAÇÃO DO PRODUTO

Neste capítulo, inicialmente, nos dedicaremos à metodologia utilizada para mensurar a contribuição do nosso produto educacional. Em seguida, relataremos os resultados da pesquisa realizada antes e depois da utilização do produto educacional.

A Instituição escolhida foi o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Tocantins (IFTO) - Campos Araguatins (figura 7.1), onde eventualmente se fez a coleta de dados e que:

- Faz parte de umas das melhores escolas públicas em ensino médio do país, e está situada no Povoado Santa Tereza, Km 05 S/N Zona Rural, Araguatins - TO, 77950-000;
- Todas as salas de aula são refrigeradas e tem a disposição multimídias, facilitando a apresentação.

Para aplicação do produtor foi escolhida uma turma de 30 alunos do primeiro ano do ensino médio, integrado com curso técnico em redes de computadores. A escolha da turma foi baseado no rendimento na disciplina de Física, e determinada pelo conteúdo em curso, que aborda o movimento oscilatório do pêndulo, neste caso, conhecimento este, notadamente importante à nova aprendizagem em que é inserido no produto educacional, que serve como ponte para chegar a sistemas dinâmicos não lineares e compreender uma possível evolução a teoria do caos.

### 7.1 Planejamento do Material de apoio ao professor

Foram utilizadas 8 horas-aulas, compostas de duas aulas cada encontro. A metodologia usada foi baseada nas teorias da aprendizagem significativa de David Ausubel; que aproveitando os conhecimentos prévios dos alunos, como a noção que



Figura 7.1: *IFTO - Campus Araguatins.*

eles têm sobre meteorologia, para ancorar aos novos conhecimentos envolvendo o exemplo citado. Com etapa inicial no uso de aulas expositivas, sequenciado com montagem do experimento mecânico a roda d'água de Malkus-Lorenz, seguido do processo com aquisição de dados, estas etapas servindo de ponte para interpretação da geração gráfica computacional, fazendo dessa abordagem um conhecimento significativo a nova realidade inserida.

Todos os conteúdos apresentados nos encontros, estão ilustrados através de animações, audios e vídeos, no enhanced ebook (figura 7.2), que é o material de apoio ao professor usando-o nos aplicativos de celulares e tablets com sistema android. Este material a critério do professor, pode-lhe auxiliar também, fazendo com que os alunos usem o livro interativo digital acompanhando em seus próprios celulares.

### 7.1.1 Primeiro encontro

Foi lhes apresentado inicialmente o slide com o tema “**INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES NA FÍSICA QUE POSSAM APRESENTAR CAOS; ATRAVÉS DA RODA D'ÁGUA DE MALKUS-LORENZ E COM AUXÍLIO DAS TICS**”(ver figura 7.3), e acompanhando o tema, com o experimento à amostra, que seria alvo de estudo direcionado pelo andamento das aulas. Esta apresentação embora pareça estranha a primeira vista, é amparada por seus conhecimentos adquiridos em cinemática, que estuda o movimento de corpos ou partículas, sem referências a massas ou a forças.

Este comportamento da variação de velocidade, é estudado pelas Leis de Newton, mas precisamente pela Segunda Lei que descreve os sistemas dinâmicos, pois estes



Figura 7.2: Aplicativo do enhanced ebook, instalado no PC e celular.



Figura 7.3: Slide de apresentação do tema sobre sistemas dinâmicos.

evoluem no tempo. Tirando o termo “caos”, sistemas dinâmicos, é de conhecimento inerente ao momento da série em que estão inseridos toda a turma.

Após as exposições iniciais, foi feita a seguinte pergunta:—Você sabe o que é caos ou já ouviu falar sobre isso? Após ouvir as respostas, uma delas foi muito interessante, pois relatava o filme “efeito borboleta”. Com base nisso foi discorrido em direção ao tema, em relação a sistemas dinâmicos não lineares a um possível surgimento de caos. Trata-se de sistemas complexos e dinâmicos rigorosamente deter-

ministas, mas que apresentam um fenômeno fundamental de instabilidade chamado sensibilidade às condições iniciais que, modulando uma propriedade suplementar de recorrência, torna-os não previsíveis na prática a longo prazo.

Em seguida foram questionados, sobre terem percebido se em algum momento notaram que uma previsão do tempo (figura 7.4) transmitida pelos telejornais, não tinha se concretizado; como era de se esperar, alguns disseram que sim. –Esse tipo de inconsistência ocorre, não por erro do apresentador, ou por inabilidade dos avaliadores da meteorologia, mas porque qualquer variação de pressão, temperatura, umidade do ar, redirecionamento dos ventos, aumento de nuvens, massas de ar, por menor que sejam, pode influenciar no resultado das previsões de tempo.

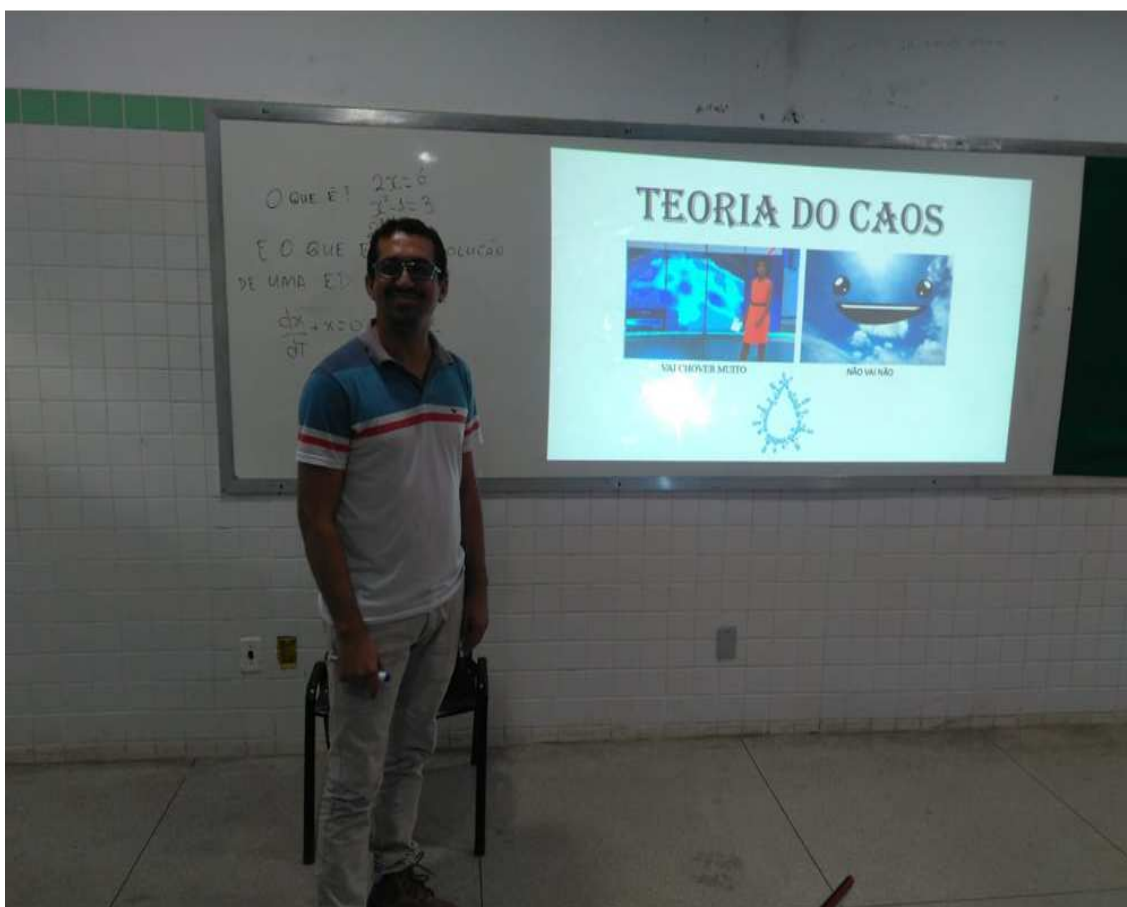


Figura 7.4: Slide de apresentação sobre previsão do tempo relacionada com caos.

–Só será possível definir se irá chover ou não para pequenos intervalos de tempo, ou, se a evolução do sistema se mantiver nos padrões dos dados de entrada, porém, se qualquer dado de entrada for alterado, ao longo da evolução do sistema, o resultado pode ser completamente diferente das previsões anteriores. A teoria que explica essa extrema sensibilidade às condições iniciais, é chamada teoria do caos.

Na tentativa de esclarecer os efeitos de uma característica de um sistema caótico. Foi proposto aos alunos, que derramem um pouco de água no piso, mas de maneira



que estudantes repetissem algumas vezes a mesma ação, sob as mesmas condições que fizeram à primeira vez. A ideia é que os alunos percebem que, mesmo sob condições iniciais muito próximas, é impossível gerar as mesmas imagens ao derramar a água(7.5). Isso porque a água é um fluido, e em alguns aspectos, o estudo de seu sistema é bem complexo e pode apresentar caos.

Tomando o cuidado em aproximar o máximo as condições iniciais de altura e velocidade de escoamento (dentro de suas percepções) de onde foi abandonado o líquido, e repetindo o procedimento várias vezes. Vale ressaltar que o piso foi limpo após este experimento.



Figura 7.5: *Imagem produzida pela queda de uma quantidade de água.*

Observa-se nas imagens feitas pelo líquido, que mesmo tentando abandonar a água da mesma altura e fluxo das situações anteriores, a disposição final das figuras abaixo mostra imagens diferentes umas das outras.

Em seguida foi apresentado uma animação (figura 7.6). – É possível notar a mudança desordenada da atmosfera climática, o que faz desse sistema uma estrutura caótica e muito complexa para previsões climáticas para longos intervalos de tempos.

–Esses fenômenos desordenados e aparentemente imprevisíveis, mas que são previsíveis, são avaliados por sistemas dinâmicos que é a parte da Física que estuda

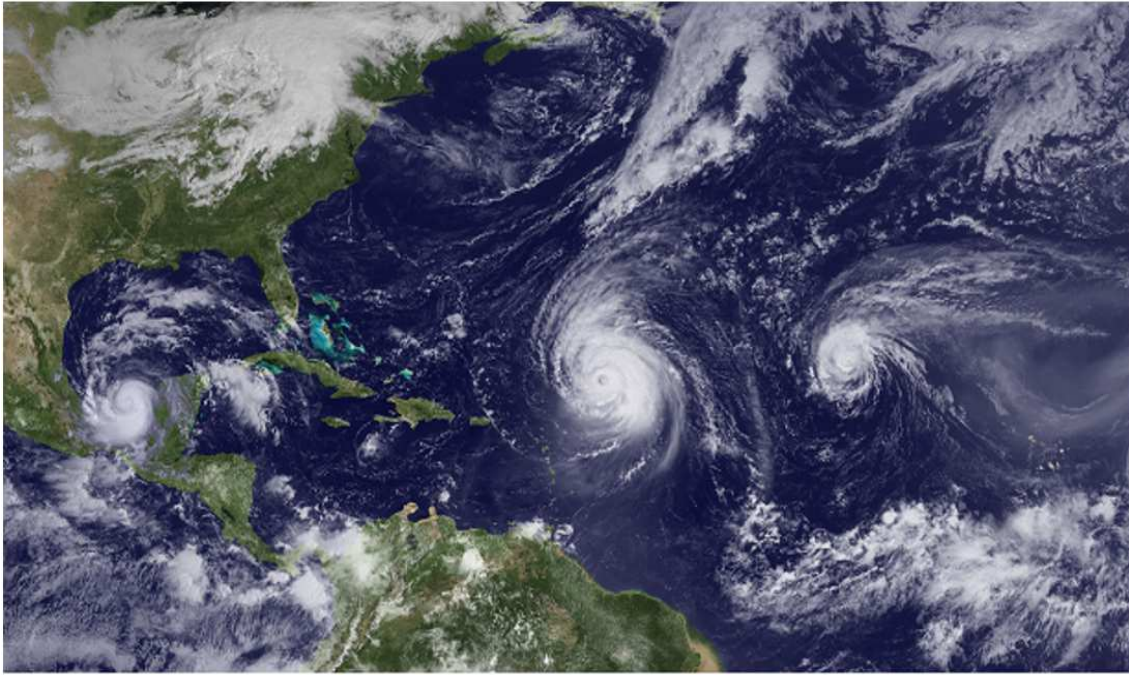


Figura 7.6: *Atmosfera climática.*

o comportamento dos corpos em movimento e a ação das forças que produzem ou modificam seus movimentos. Sistemas dinâmicos, foi o assunto abordado na etapa seguinte das apresentações (figura 7.7), assunto este que é o conteúdo principal a ser estudado.

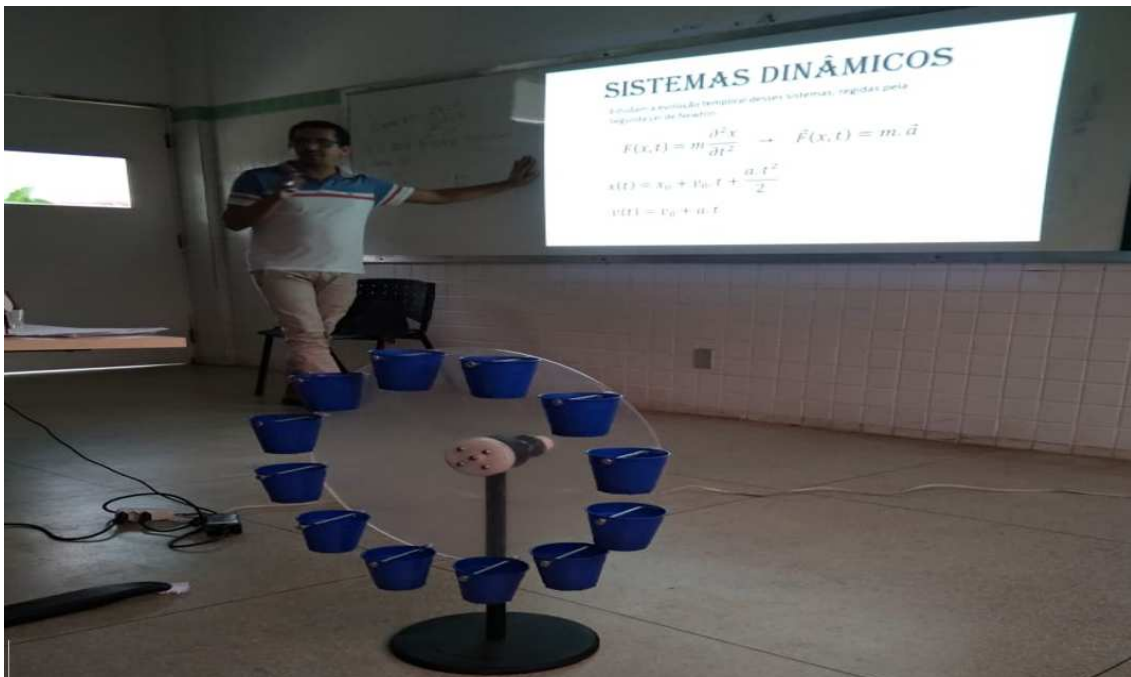


Figura 7.7: *Abordagem sobre sistemas dinâmicos.*

–Em física, sistema físico é uma parte ou porção do universo escolhida para

análise. O entorno que rodeia o sistema é conhecido como meio ou ambiente., e tudo fora do sistema é conhecido como o ambiente. O ambiente é ignorado, exceto pelos seus efeitos no sistema. Um sistema dinâmico é descrito como uma partícula ou conjunto de partículas cujo estado varia ao longo do tempo e, portanto, obedece a equações diferenciais (ED) envolvendo derivadas no tempo.

–Todas as leis que regem o comportamento do mundo físico, envolvem taxas de variação de grandezas físicas que determinam a evolução temporal dos sistemas, segundo o qual os fenômenos evoluem. Essas leis são codificadas em linguagem matemática, onde as relações são equações, e as taxas, são derivadas. Equações que envolvem derivada são denominadas equações diferenciais.

–A evolução temporal dos estados de um sistema físico, representado de forma simples por uma partícula pontual ou sistema de partículas, é descrita pela dinâmica codificada em equações diferenciais que envolvem derivadas em relação ao tempo.

Foram demonstrados alguns exemplos de forma bem simples de equações diferenciais, e que estes exemplos apresentavam mais de uma solução possível. E que portanto quando uma função resolve o problema da equação diferencial, está é chamada de solução da EDO

## 7.1.2 Segundo encontro

Iniciando com uma breve revisão da aula anterior incluindo figuras já mostradas, foi salientado que uma equação diferencial descreve a dinâmica dos sistemas físicos através de funções definidas por condições iniciais.

–Qualquer sistema físico submetido a agentes que mudam o seu estado de movimento terá a sua dinâmica descrita pela Segunda lei de Newton (Eq.2.18). Uma partícula pontual submetida a uma força efetiva deverá ser acelerada e os seus estados como função do tempo poderão ser obtidos a partir das funções dos vetores posição e velocidade.

Foi demonstrado partindo da segunda lei de Newton o processo que extração da das equações: do movimentos uniformes (MU Eq.2.30, para o caso em que o sistema não está acelerado; e uniformemente variado (MUV)(equações 2.25 e 2.30); estas são equações bastante utilizadas na cinemática do ensino médio. Logo em seguida, foram feitos exercícios sobre o assunto, do conteúdos de cinemática, conteúdo este que faz parte do conteúdo programático dos alunos de primeiros anos s alunos.

–As equações do MU e MUV, se relacionados com o conteúdo de matemática, percebe-se , que estas são equações do primeiro e do segundo grau estudadas no ensino fundamental e revisadas no primeiro ano do ensino médio. Portanto estas equações são ditas lineares e não lineares, respectivamente (no caso da posição).

Animações referentes as modelagens matemáticas das equações 2.25 e 2.30, foram

demonstradas no próprio software Modellus, como mostra a figura 7.8 na apresentação de preparação do software.



Figura 7.8: *Preparação do software Modellus.*

Para que os alunos pudessem acompanhar (7.9) e conseguissem identificar, sem qualquer dúvida por meios gráficos, que um sistema linear produz uma linha (reta), pois atende a estímulos proporcionais; enquanto um sistema não linear, corresponde a qualquer gráfico diferente de uma reta.

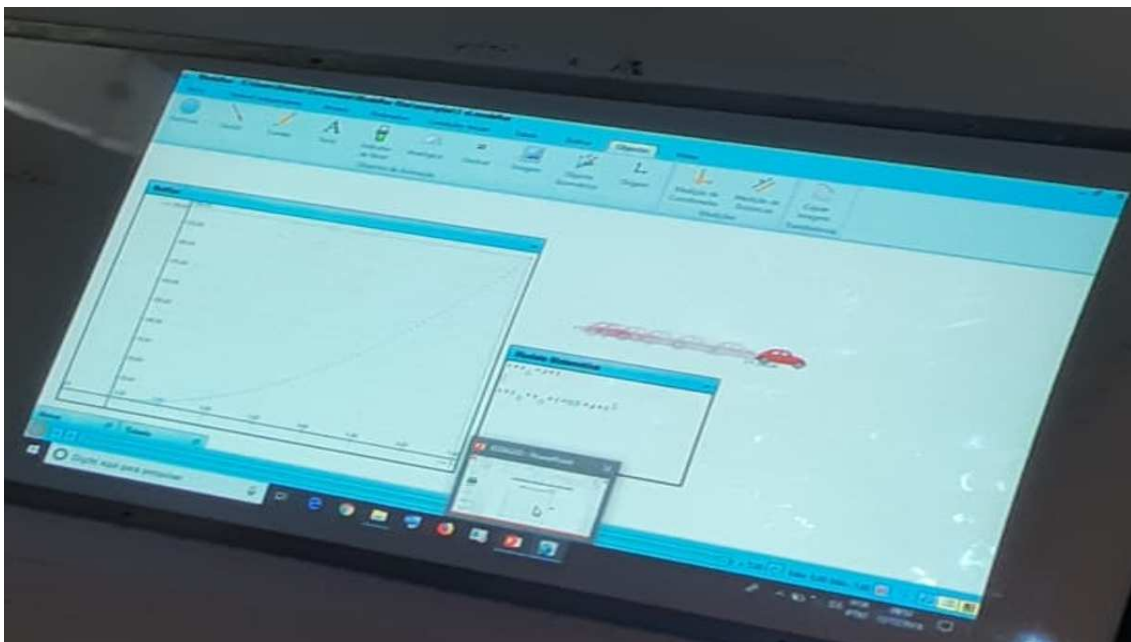


Figura 7.9:  *Animações sobre sistemas lineares e não lineares.*

Logo em seguida foram-lhes apresentados uma equação do terceiro grau, e seu respectivo gráfico, apenas com o intuito de salientar que alguns desses sistemas apresentam comportamentos onde, as equações diferenciais que os representam, não possuem solução analítica.

Dentre estes, alguns podem apresentar comportamento caótico. No entanto, é possível simular o comportamento do sistema conferindo valores numéricos aos parâmetros envolvidos, modelando-os no **espaço de fases**, essa temática figura 7.10, foi o tópico abordado na sequência.



Figura 7.10: *Apresentação sobre espaço de fase.*

–Espaço de fase de um sistema dinâmico, é o espaço no qual todos os estados possíveis do sistema são representados, com cada um dos possíveis estados correspondente a um único ponto geométrico indicado pelos graus de liberdade do sistema. A figura 7.11, mostra a modelagem referente a um sistema linear e outro não linear, bem como os estados destes sistemas, sendo os pontos em vermelhos sistema linear, e os pontos em azuis sistema não linear.

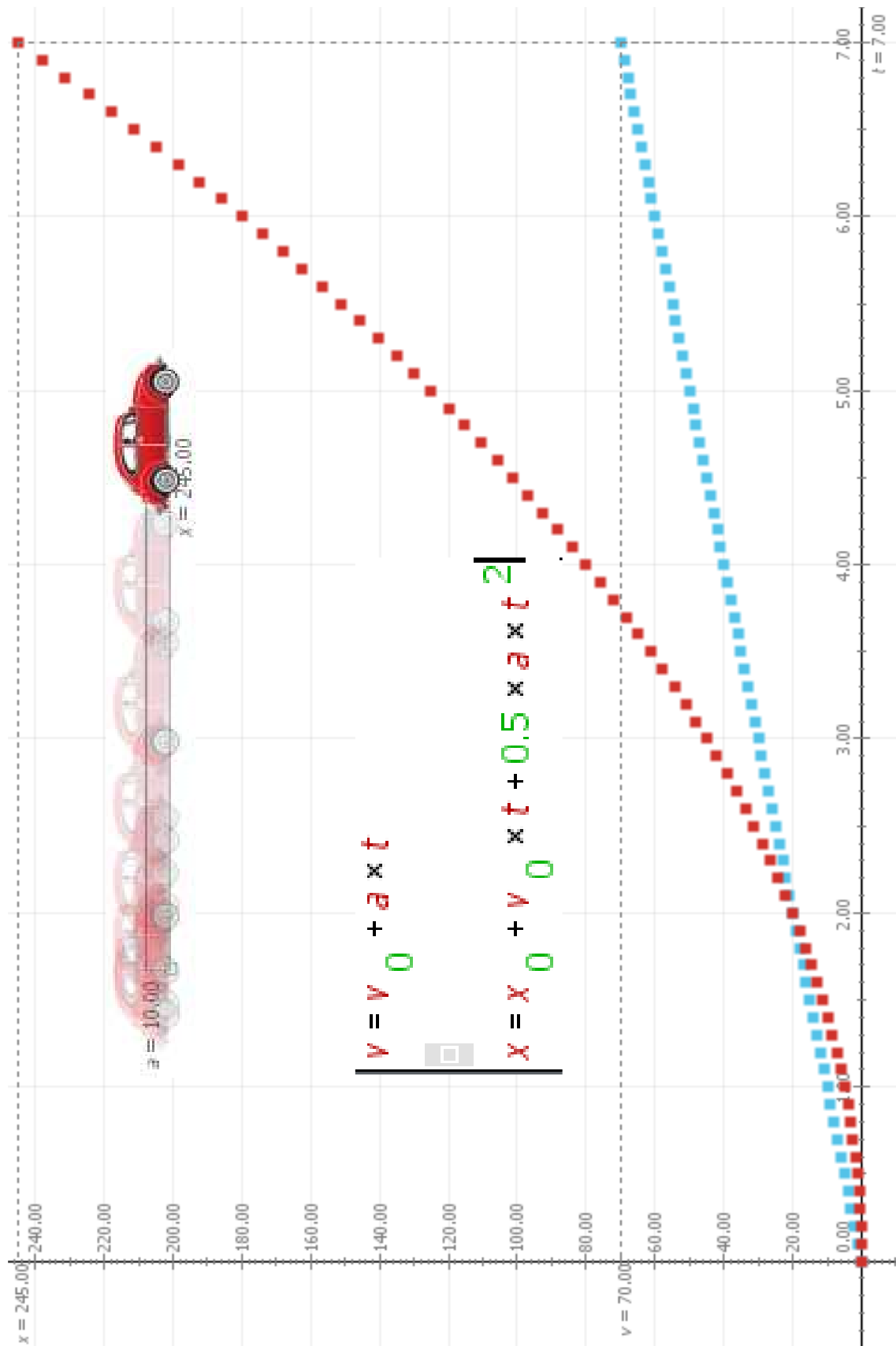


Figura 7.11: Pontos geométricos no espaço de fases representado estados de um sistema físico.

### 7.1.3 Terceiro encontro

Neste encontro, esteve sendo trabalhado e analisado o pêndulo simples, que é um modelo de sistema não linear; nesta feita, a equação que modela o sistema, com todas as forças influenciadoras do movimento pendular foram apresentadas; a partir deste momento, foram feitas considerações para iniciar com um formato simplificado, que possibilita a análise qualitativa do pêndulo. Das considerações iniciais feitas, uma era considerar pequenos ângulos, fazendo de  $\sin \theta \cong \theta$ ; a outra era desconsiderar as forças dissipativas (tornando o sistema giratório ou pendular).

Em relação aos pequenos ângulos, foi demonstrado o porque é feito essa consideração para pequenas oscilações. No Material de apoio (enhanced e-book) ao professor, é feito uma tabela relacionando ângulos em radianos com seus respectivos senos, isso só é valido para ângulos de até  $6^\circ$ . Todas os códigos matemáticos que descrevem o movimento do pêndulo de acordo com as considerações feitas na análise, foram modeladas no espaço de fases com Modellus.

–Quando o sistema é conservativo, o espaço de fase deste pêndulo exibe uma elipse, nesse caso, afirma-se que o sistema é estável, ver figura 7.12.

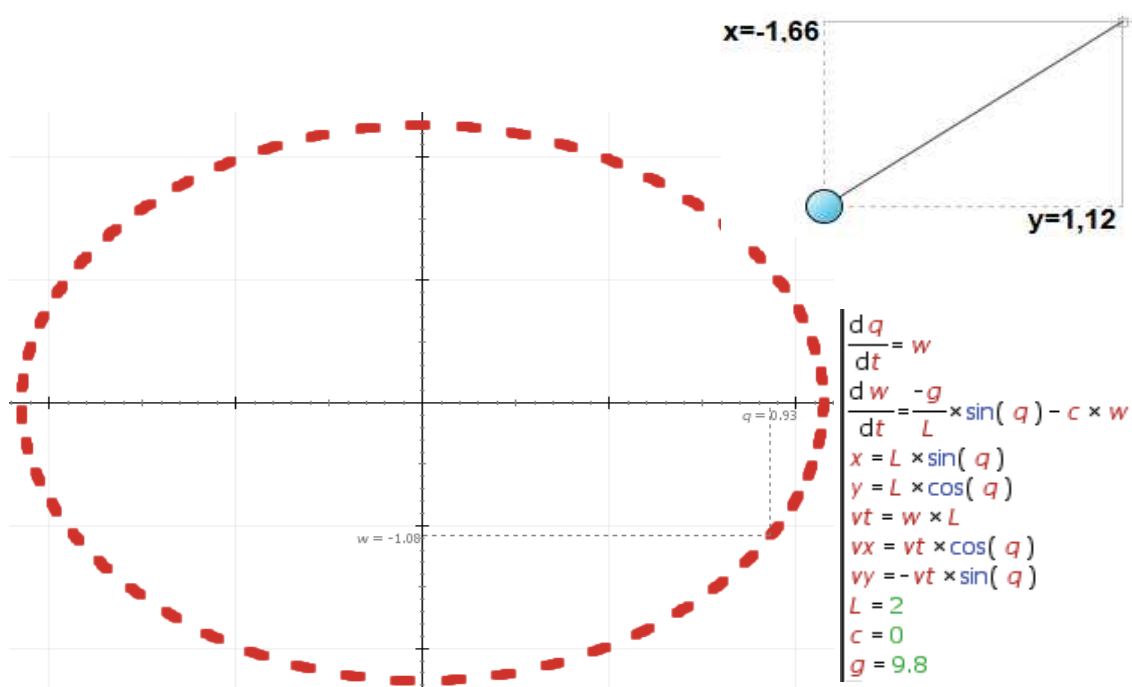


Figura 7.12: Estabilidade do pêndulo no espaço de fase.

Quando o sistema for dissipativo, que para este caso tonar o estudo do pêndulo como amortecido; se trabalha dois casos, a partir do deslocamento do pêndulo de uma posição de equilíbrio. O objetivo da aula, não foi análise das equações do movimento, mas apenas considerando duas posições físicas de equilíbrio, uma com a massa do pêndulo diretamente abaixo do suporte (ângulo zero) com a horizontal

e a outra com a massa diretamente acima do suporte (ângulo  $180^\circ$ ).

Respectivamente movimentando o pêndulo de suas duas posições de equilíbrio. Primeiro deslocando da posição de equilíbrio inferior, percebe-se que o pêndulo vai oscilar até voltar para a posição anterior de equilíbrio, portanto o sistema terá estabilidade assintótica, também chamada de atrator ou sovedoura figura 7.13; agora considerando o deslocamento da posição de equilíbrio com o pêndulo na parte superior de altura máxima, nota-se que o pêndulo jamais retornará a sua posição anterior; neste caso afirma-se que o sistema é instável.

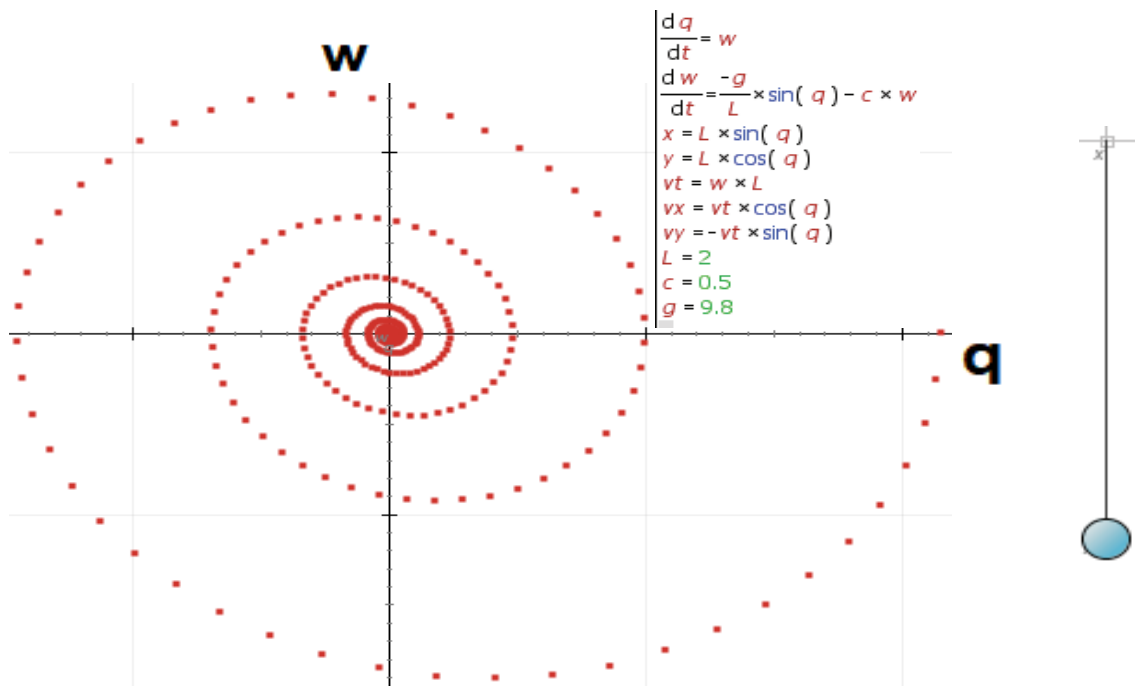


Figura 7.13: Atrator ou sovedoura descrito pelo pêndulo amortecido.

Quando o sistema perde a estabilidade, passa a ser um caminho para que o sistema se torne complexo e caótico. O pêndulo amortecido forçado é um modelo que para alguns parâmetros adotados, este tipo de sistema pode apresentar caos.

Usando dois dados de entradas muito próximos se estes dados divergirem ao longo do tempo, então o sistema é dito caótico. O espaço de fase da figura 7.14 mostra exatamente o que acontece com certos parâmetros, em que as trajetórias mantêm-se praticamente à mesma distância ao longo do tempo.

Usando parâmetros diferentes da 7.14, observa-se na figura 7.15 que as trajetórias inicialmente muito próximas divergem a medida que o tempo passa, portanto esse tipo de comportamento pode apresentar caos.

Toda essa demonstração teve o intento de deixar claro, a forma de analisar um



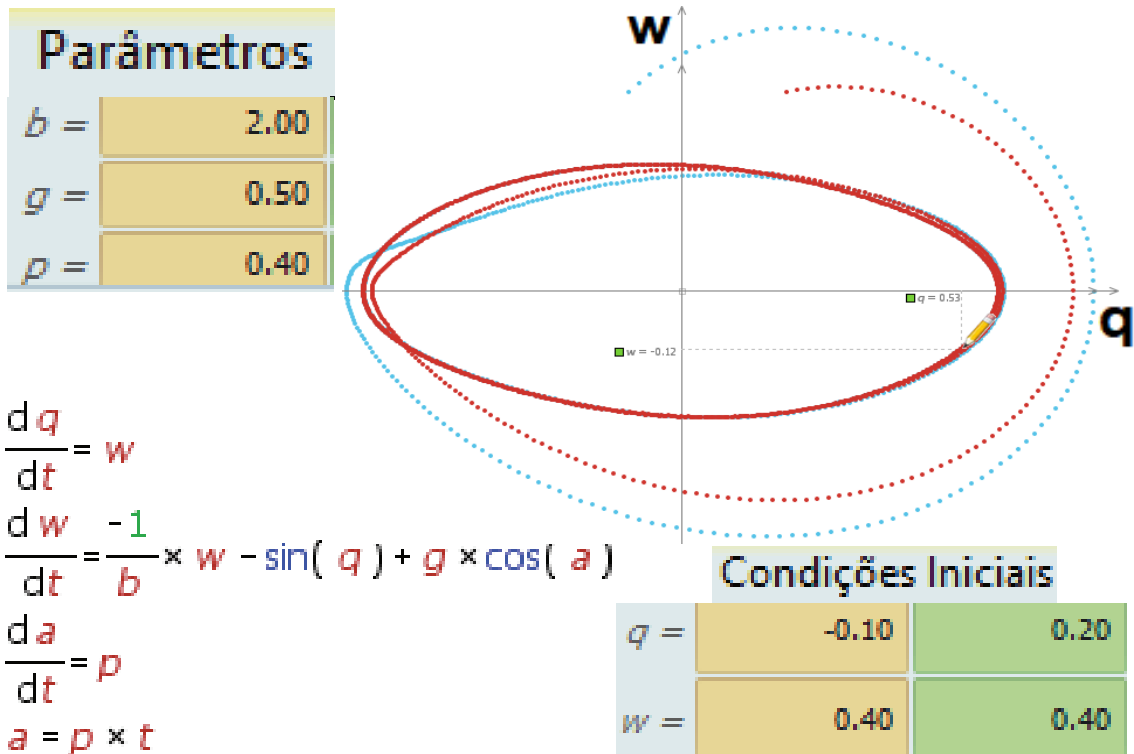


Figura 7.14: Espaço de fases com dois conjuntos de parâmetros diferentes para o pêndulo amortecido forçado com comportamento periódico.

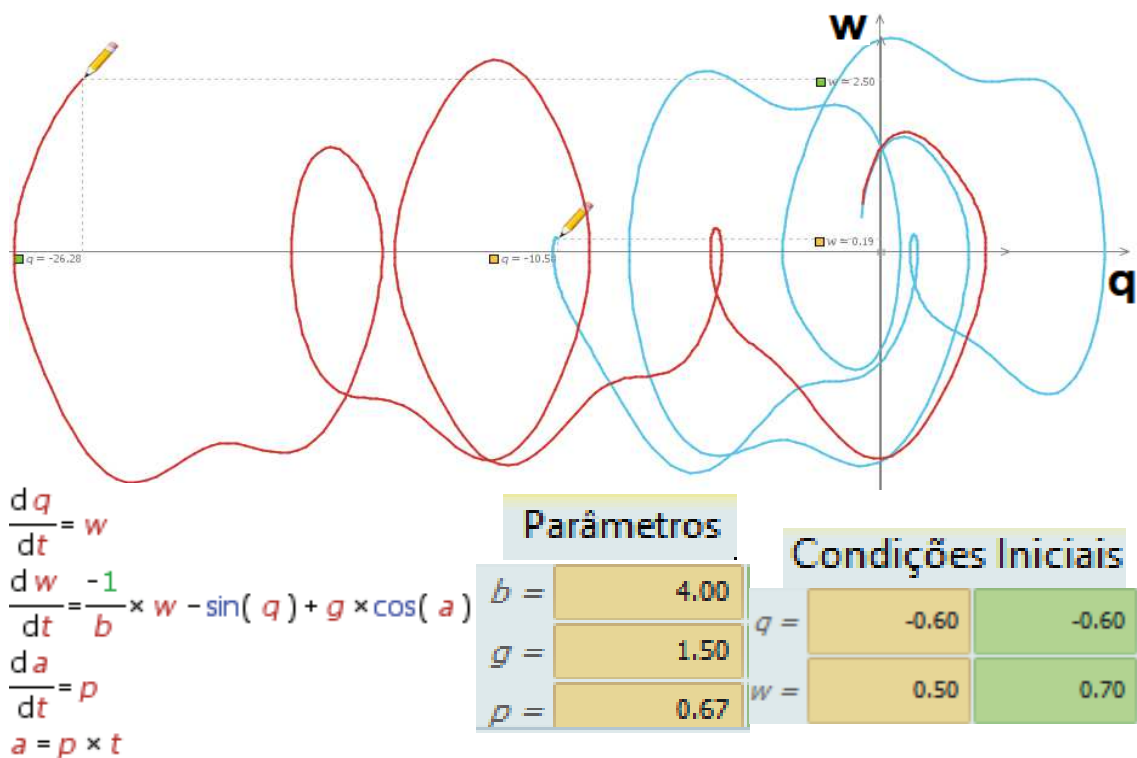


Figura 7.15: Espaço de fases com dois conjuntos de parâmetros diferentes para o pêndulo amortecido forçado com possível comportamento caótico.

espaço de fase para qualquer sistema, e identificar nesse espaço de fase quando um sistema é linear ou não linear, e eventualmente apresentar uma natureza caótica.

Uma vez evidenciado como analisar graficamente se um dado sistema é ou não caótico; são apresentadas diferentes trajetórias com dados iniciais muito próximos, a divergência nas trajetórias diz se um dado sistema é ou não caótico.

Matematicamente, a sensibilidade de um sistema dinâmico, é medido pela taxa com que dois pontos muito próximos se afastam à medida que o sistema evolui; essa sensibilidade é medida pelo expoente de Lyapunov. Por ser um método um tanto complexo, a explicação ficou apenas na menção de que para valores positivos do expoente de Lyapunov, o sistema é caótico.

#### 7.1.4 Quarto encontro

O quarto e último encontro tornou-se o momento mais esperado, pois neste, a turma faria uso da experimentação.

A ilustração da figura 7.16 apresenta os estudos de Lorenz sobre rolos de convecções meteorológicas, e que estudando este fenômeno, o Cientista Edward Lorenz foi levado à descoberta das equações 3.12 que descrevem o sistema dinâmico dos rolos de convecções climáticos da atmosfera terrestre, as equações que descreve este fenômeno geram gráficos estanhos (atratores), mas sempre em torno de uma região. Estas equações ficaram conhecidas como as “Equações de Lorenz”.



Figura 7.16: Apresentação dos rolos de convecções e das equações de Lorenz.

Esses atratores foram modelados no Modells figura 7.17, que permite graficar as equações de Lorenz apenas no plano, pois o software tem algumas limitações.

Este modelo vem nos próprios exemplos, quando a versão 4.01 do Modells é instalada no computador do usuário, como mostra a figura 7.17. A semelhança dos

atratores de Lorenz com uma borboleta, deu origem ao termo **efeito borboleta**, que de origem a uma célebre frase que diz “o bater de asas de uma simples borboleta poderia influenciar o curso natural das coisas e, assim, talvez provocar um tufão do outro lado do mundo” [30] devido ao fato de que um sistema caótico é muito sensível as condições iniciais.

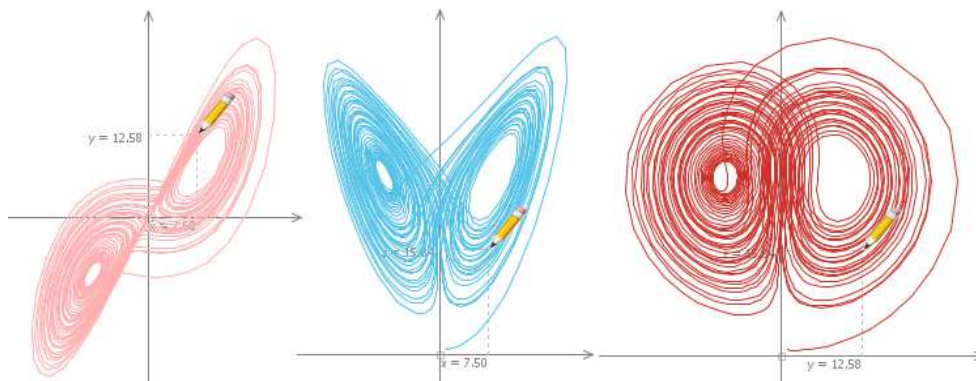


Figura 7.17: *Atratores de Lorenz nos planos:  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  respectivamente.*

Após este momento, foram feitas as relações que possuem os rolos de convecções estudado por Lorenz, com o modelo mecânico construído conforme figura 7.18 que é a roda d’água de Malkus-Lorenz.



Figura 7.18: *Apresentação da roda de Lorenz relacionando-a com os RC.*

Uma vez explicado e correlacionado o experimento com as ações meteorológicas, foi apresentado as partes integrantes do experimento, participando da desmontagem

e montagem do conjunto, com intento de que estes alunos tivesse mais vínculo com o experimento conforme ilustra a figura 7.19.



Figura 7.19: *Explicação da montagem do experimento.*

Em seguida foi apresentado, conforme figura 7.20, o conjunto de aquisição de dados, que é a junção do encoder que transforma o deslocamento angular em sinal para o Arduíno, e este por sua vez transforma em resultados apresentados na tela do computador.



Figura 7.20: *Componentes para aquisição de dados.*

Neste momento, foi deixado apenas um copo fixo na roda para fazer o sistema pendular, gerando o gráfico, o que deixou a turma bem eufórica e animada, ao

perceber que a geração da figura ia diminuindo à medida que a roda ia parando sua oscilação.

NA finalização das aulas, foi mostrado o experimento em funcionamento conforme figura 5.7, que para os alunos foi uma novidade experimental até o momento não usual, houve uma boa receptividade por parte dos alunos devido a aplicação de modelagens e interação com produto. Isso fez com que os estudantes relacionassem os conhecimentos adquiridos através dos elementos que compõem um sistema dinâmico não linear com um possível comportamento caótico, e que pode ser notável através da capacidade de interpretação dos gráficos gerados no espaço de fase obtidos através da coleta de dados.

# Capítulo 8

## RESULTADOS

A análise dos relatórios recortou as impressões mais recorrentes nas citações das aulas e conclusões dos estudantes de 1 ano do ensino médio integrado com curso de técnico em redes de computadores que participaram da aplicação do produto no IFTO-Araguatins, no segundo semestre de 2018.

Participaram da aplicação do produto cerca de 30 estudantes, no entanto, somente 15 deles finalizaram a participação registrando comentários sobre a atividade.

A maioria deles participou ativamente do processo, mas, dentre eles, cinco estudantes se destacam pela proximidade e interesse ao tema. Respeitando as diferenças entre os interesses individuais, é visível que a realização do experimento e as explicações dadas pelo professor suscitam um acréscimo na participação habitual dos estudantes em atividades didáticas.

Os relatos dos estudantes mostram de forma recorrente que eles incorporaram ao vocabulário palavras como teoria, caos, efeito borboleta, sistemas lineares e não lineares, sistemas dinâmicos, Modellus, Arduino, Encoder, experimentos, espaço de fases, atrator, programação gráfica, aleatório e não aleatório, previsões, mapeamento, evolução temporal, LabView, sistema complexo, equações diferenciais, estabilidade, instabilidade, padrão, simulação, entre outras.

Quanto à prática experimental, ela teve a aderência de todos, e surgem palavras como surpreendente, incrível, interessante, imprevisível, produtivo, genial, curioso, relevante, na descrição das atividades, de modo geral.

Alguns recortes das falas dos estudantes mostram percepções que eles escolheram relatar, como por exemplo: pequenas variações iniciais podem gerar grandes alterações em sistemas não lineares; é um primeiro contato com equações diferenciais; equações lineares podem ser associadas àquelas do movimento uniforme enquanto as não lineares ao movimento uniformemente variável; todo sistema caótico é não linear, porém nem todo sistema não linear é caótico (recorrente); um contato com um mapa caótico e a relação entre ele e o estado de um sistema dinâmico que evolui no tempo, num padrão complexo, não-repetitivo e cuja forma é conhecida por se

assemelhar graficamente as asas de uma borboleta – efeito borboleta (muito recorrente) (associação com informações prévias – Ausubel); reconhecimento de caos em situações do cotidiano, deu novas perspectivas da física; distinção entre sistemas lineares e não lineares, primeiro contato com o conceito de Caos, Espaço de Fase, Estabilidade de um Sistema, Atrator ou Sorvedouro, Arduino, Modellus, LabView, Encoder, (muito recorrente); experimento simples para demonstração de conceitos da física; tomada de consciência que não é possível prever o futuro de um sistema físico (recorrente) dado fato de o sistema possuir multivariáveis que precisam de um poder muito alto de computação para a simulação, o qual nem sempre é disponível; associação das palavras atitude/consequências e não previsíveis (recorrente); forma gráfica de representação de evolução do estado de um sistema (recorrente); importância dos experimentos no ensino; inexistência de padrão no giro da roda, falta de propriedade em relacionar o experimento com seus objetivos; Simulação computacional (recorrente); relação com fenômenos meteorológicos ou fenômenos sociais (recorrente); associações entre fluxo de água com a velocidade da roda, destacando que ora o movimento poderia se inverter (recorrente); movimentos aleatórios; estimulou um interesse que antes não tinha (recorrente); convergência/complementaridade entre teoria, experimento e simulação computacional; Conhecimentos relevantes; Linguagem de programação gráfica; aleatório não é tão aleatório, pode ser previsto teoricamente; associação com filme (animação); sistemas dinâmicos associados à segunda lei de Newton, evolução temporal, espaço de fase, estabilidade e instabilidade em sistemas, novos conhecimentos, etc.

O que poderia ser melhorado na pesquisa?

No experimento atual foi visualizada a posição angular dependente do tempo, no entanto, com a utilização de um Encoder mais funcional será possível, além da posição angular, mapear a velocidade angular com relação ao tempo. Isso possibilitaria a visualização gráfica do efeito borboleta, retirada do experimento, caso este apresente um comportamento caótico.

No e-book, as explicações dos fenômenos são visualizadas por meios de texto, figuras, animações, vídeos, gifs, no entanto, a introdução de softwares computacionais pode ser feita para mapear os fenômenos de forma a possibilitar a alteração dos parâmetros iniciais, o que possibilita que os professores que utilizarem a pesquisa alterem e manipulem os dados de entrada de modo a atender suas demandas próprias.

Dos comentários registrados dos alunos; cabe as seguintes perguntas sobre métodos de ensino: Acredita em pesquisa translacional que usa resultados já aplicados e continua a pesquisa com novas aplicações e ajustes?

No caso da demanda por pesquisas translacionais no ensino, o e-book desenvolvido na presente pesquisa pode ser utilizado em outros temas e para além do

ensino de física. Neste caso, as funcionalidades descritas podem ser estendidas para todo o conteúdo da física, como forma de dinamizar o ensino, abrindo inúmeras possibilidades de manipulação por parte do público alvo.

No que se refere às dificuldades encontradas no desenvolvimento do estudo, compreendemos que a inovação esbarra na falta de referências anterior, o que é esperado quando um estudo está na fronteira de um novo conhecimento. Este fato alterou a ordem prevista para as ações experimento/e-book o que nos obriga a admitir que a sequência mais coerente fosse o desenvolvimento do livro anterior a realização do experimento.



## Capítulo 9

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi a fabricação de um produto educacional inovador, que oferecesse uma alternativa para a melhor inserção e exploração dos conteúdos de sistemas dinâmicos físicos não lineares no ensino médio e até no ensino superior, tendo em vista que poucos são os sistemas físicos lineares, porém os livros didáticos do ensino médio reduzem a maioria dos sistemas físicos não lineares a modelos simplórios linearizados.

Portanto, foi construído um produto educacional composto por um sistema mecânico experimental com dinâmica não-linear denominado roda de água de Malkus-Lorenz e um e-book interativo estendido para explorar os princípios fundamentais da evolução dinâmica dos sistemas físicos, principalmente dos não lineares.

O produto é constituído pela integração de elementos de tecnologias da comunicação e informação inovadores, juntamente com a plataforma de prototipagem eletrônica Arduino, e o ambiente de desenvolvimento de sistemas NI-Labview ou PLX-DAQ, os quais oferecem novas alternativas para a melhor inserção, exploração e consolidação dos conteúdos de física mecânica no ensino médio e de graduação

A roda de água de Malkus-Lorenz possui um sistema de aquisição de dados de posição angular em função do tempo com base em um encoder incremental óptico rotativo e o processo de colheita dos dados é controlado por um código em Arduino que interatua com um aplicativo de software redigido na linguagem G do Labview ou com código arduino para comunicação com planilha de excel através do software PLX-DAQ. Os dados numéricos são apresentados, em tempo real, no display de um computador e simultaneamente armazenados em arquivos de texto.

A roda de água de Malkus-Lorenz tem a sua dinâmica descrita por um conjunto de três equações diferenciais não lineares, de primeira ordem, as quais sob mudanças de variáveis apropriadas são equivalentes ao sistema de Lorenz. Portanto, o sistema pode eventualmente apresentar caos, sob uma cuidadosa variação de determinados parâmetros, entretanto não foi objetivo da dissertação a investigação detalhada desta propriedade, mas sim a observação e verificação da dinâmica de um sistema não

linear. Não investigamos propriedades caóticas; porque este não era o objetivo do estudo sobre o sistema, pois seria necessário um número muito grande de testes para esta afirmação.

O e-book interativo estendido (extended e-book) construído, de acordo com a nossa pesquisa, é uma das primeiras iniciativas, no país, de se utilizar este recurso para o ensino de física. Ele foi construído através do emprego do software Pubcoder 3 da empresa italiana PubCoder Srl. A plataforma para a construção do livro interativo estendido é diferente das plataformas de livros digitais existentes. Ela permite a inclusão de vídeos, animações, simulações computacionais, arquivos de voz, e muitas outras possibilidades a serem exploradas. Isso aumenta as capacidades, tanto de transmissão de informação, como de recepção e assimilação dos conteúdos abordados.

O e-book foi projetado para ser usado em dispositivos móveis, como celulares e tablets que possuam sistema android. Com isso, pode ler o livro texto, executar animações e simulações, assistir vídeos, ouvir áudios; enfim possui muitas capacidades alternativas para o processo de ensino/aprendizagem não apenas para da mecânica física não linear, mas também para vários conceitos da física podendo abranger outras matérias.

O Produto educacional pode ser introduzido como um conjunto didático para ser utilizados nos laboratórios de física de ensino médio e de graduação. Ele é de baixo custo e pode ser construído por alunos e professores com as informações proporcionadas no apêndice de descrição do produto.

Acreditamos que este novo seguimento de livro, chegou para contribuir de forma muito significativa tanto para o ensino de física como às demais áreas científicas.

Portanto usando tanto o livro estendido como a roda d'água nas aulas sobre mecânica, pude observa o quanto os alunos conseguem ficar mais atentos, e os motivam a procurar entender como ocorre a correspondência entra a física e a matemática, principalmente na geração de gráficos, que é a maneira de interpretar o estado do sistema no espaço de fases.

Este sistema pode ser reproduzido para equipar laboratórios didáticos de física das escolas de uma maneira geral, em especial das escolas do interior do país; pois sua implementação é simples, o custo é muito baixo, o programa para fazer o livro e aquisição de dados dos experimentos, são disponíveis e gratuitos (como é o caso do PLX-DAQ), ou pode ser comprado com versões de maior qualidade (como é o caso do LabVIEW).

A plataforma arduino junto ao LabVIEW ou até mesmo com PLX-DAQ, são ferramentas muito importantes e úteis para fazer automação, aquisição de dados para fazer de controle de diversos equipamentos de aquisição didática em física. E portanto de forma muito viável, simples e barata, é possível implantar um bom

laboratório usando essas tecnologias de fácil acesso.

Como complemento, foram redigidos dois códigos computacionais em linguagem Fortran 77. O primeiro é um programa para integrar numericamente as equações diferenciais do sistema de Lorenz, obter as trajetórias numéricas e mostrar a evolução do espaço de fases, de forma gráfica, através de animações. O segundo é um código para calcular o espectro de coeficientes de Lyapunov para o sistema de Lorenz. Ambos programas são apresentados na dissertação. O cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov mostra que o sistema de Lorenz apresenta caos para os valores dos parâmetros considerados no cálculo.

Além tudo, Foi realizada também uma revisão sobre os principais fundamentos físicos e matemáticos básicos envolvidos com a mecânica de Newton. Foi salientada a importância da formalização dos conceitos físicos intuitivos fundamentais tais como sistema físico e estado de um sistema físico para conseguir uma descrição físico-matemática apropriada do movimento ou evolução temporal destes entes. Conceitos como: objetos matemáticos, espaços topológicos, métrica de um espaço topológico, variedades, fibrados vetoriais, e outros foram abordados para enfatizar a importância da matemática na descrição formal da dinâmica dos sistemas físicos e para ajudar a compreender melhor a física mecânica.

# Referências Bibliográficas

- [1] FEIX, E. C.; SARAIVA, S. B.; KIPPER, L. M. **A IMPORTÂNCIA DA FÍSICA EXPERIMENTAL NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM**. Salão de ensino e de extensão. Universidade de Santa Cruz do Sul. out. 2012. Disponível em: <[http://online.unisc.br/acadnet/anais/index.php/salao\\_ensino\\_extensao/article/view/10269/97](http://online.unisc.br/acadnet/anais/index.php/salao_ensino_extensao/article/view/10269/97)>. Acesso em: nov. 2019.
- [2] NOGUEIRA, L. K. da C. et al. Formação de professores e tecnologias da informação e comunicação (TICs): uma relação necessária para o uso de recursos tecnológicos na educação. In: X Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância. Belém, 2013. Disponível em: <[https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/23454\\_11876.pdf](https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/23454_11876.pdf)>. Acesso em: nov. 2019.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Programa Nacional do Livro Didático 2015. Guia de livros didáticos para o ensino médio. Componente curricular: Física. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2014.
- [4] INEP. Censo da educação superior. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br>>. Acesso em julho de 2018.
- [5] Loureiro, S. A. G. **Alfabetização - uma pesquisa humanista e progressista**. Belo Horizonte: Autentica, 2005. 248 p.
- [6] BOTH, I. J. **Avaliação "voz da consciência" da aprendizagem**. 2. ed. rev., atual. e ampl. Curitiba. Ibpex, 2012.
- [7] BOTH, I. J. **Avaliação "voz da consciência" da aprendizagem**. 2. ed. rev., atual. e ampl. Curitiba. Ibpex, 2012.
- [8] GRASSI, M. H. et al. **Docência em mestrado profissional**. Revista Brasileira de Educação. v.21 n.66. jul/set. 2016
- [9] Ausubel, D.P. (2000). **The acquisition and retention of knowledge**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- [10] VAGAS PROFISSÕES. Disponível em: <<https://www.vagas.com.br/profissoes>>
- [11] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. Reimpr. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [12] PELIZZARI, A. **TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA SEGUNDO AUSUBEL**. Disponível em: <[portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012381.pdf](http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012381.pdf)>. Acesso em: 20 set. 2017.
- [13] MOREIRA, M. A. **Teoria de Aprendizagem**. São Paulo:EPU,1999
- [14] LAKONY, A. M. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. 2. ed. rev. E atual. Curitiba: Ibpex, 2008.
- [15] MOREIRA, M. A. **A Teoria de Aprendizagem de David Ausubel como Sistema de Referência para a Organização de Conteúdo de Física**. Revista Brasileira de Física, Vol. 9, NP 1, ago. 1979
- [16] OSTERMANN, F.; CAVALCANTI, C. J. H. **Teorias de Aprendizagem**. Porto Alegre: Evangraf; UFRGS, 2011.
- [17] PRASS, A. R. **Teorias de Aprendizagem**. 2007. 257 f. monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2007. Disponível em: <[www.fisica.net/monografias/Teorias\\_de\\_Aprendizagem.pdf](http://www.fisica.net/monografias/Teorias_de_Aprendizagem.pdf)>. Acesso em: 05 jul. 2017.
- [18] Nogueira, M. O. G.; Leal, D. **Teorias da aprendizagem: um encontro entre os pensamentos filosófico, pedagógico e psicológico**. Livro eletrônico. 2. ed. Curitiba: Inter saber, 2015. (Serie Construção Histórica da Educação), 2MG; PDF.
- [19] MOREIRA, Marcos Antônio. **A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD, O ENSINO DE CIÊNCIAS E A PESQUISA NESTA ÁREA**. Disponível em: <[www.egov.ufsc.br/portal/sites/default/files/anexos/29107-29125-1-PB.pdf](http://www.egov.ufsc.br/portal/sites/default/files/anexos/29107-29125-1-PB.pdf)>. Acesso em: 08 fev 2018.
- [20] COELHO, T. S.O. **Proposta de unidade didática para a aprendizagem significativa de conceitos de física moderna e contemporânea**. Universidade Federal de Goiás. Instituto de Física e Química - CAC Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física Mestrado Profissional em Ensino de Física. 2015.

- [21] Gatti, Bernardete. "**Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década**". Revista Brasileira de Educação, vol. 13, no. 37, 2008, pp. 57-70. Editorial Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.
- [22] MOREIRA, Marco Antonio; STUDART, Nelson; VIANNA, Deise Miranda. **O Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF): uma experiencia em larga escala no Brasil**. Latin-American: Journal of Physics Education, Espanha, v. 10, n. 4, p. 4327-4332, jun./2016. Disponível em: <<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6014060>>. Acesso em: 19 set. 2019.
- [23] Costa, Jean Henrique (5 de dezembro de 2012). **Reflexões sobre a indústria cultural a partir de Pierre Bourdieu: a importância dos conceitos de Habitus e Capital Cultural**. Revista Espaço Acadêmico. 12 (140): 12-22. ISSN 1519-6186. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Habitus#cite\\_note-:1-6](https://pt.wikipedia.org/wiki/Habitus#cite_note-:1-6)>. Acesso em: 20 Jun. 2019.
- [24] HAWKING, Stephen. **Tese de PhD sobre expansão do universo**. Disponível em: <<https://www.hypeness.com.br/2017/10/tese-de-phd-de-stephen-hawking-sobre-expansao-do-universo-e-liberada-online/>>. Acesso em: 14 Ago. 2019.
- [25] CHOQUE, Nilo Mauricio Sotomayor. **ESTUDO DA DINÂMICA DE CAOS NO GÁS TRIDIMENSIONAL DE ELÉTRONS DE ALTA MOBILIDADE**. Tese de Doutorado em Ciências. Universidade de São Paulo Instituto de Física. São Paulo 2001.
- [26] ZALAMEA, Federico. The Mathematical Description of a Generic Physical System. Topoi, Springer Verlag, 2015.
- [27] SOTOMAYOR CHOQUE N. M. Notas de aulas sobre Estudo da dinâmica. Universidade Federal do Tocantins Campus Cimba. Araguaína março 2018.
- [28] ZALAMEA, Federico. The Mathematical Description of a Generic Physical System. Topoi, Springer Verlag, 2015.
- [29] GEOCITIES. **Introdução ao caos em sistemas dinâmicos**. Disponível em: <[http://www.geocities.ws/projeto\\_caos\\_ufg/minicurso/aula2.html](http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/minicurso/aula2.html)>. Acesso em: 20 Jan. 2018.
- [30] GLEICK, James. **Caos: A Criação de Uma nova Ciência**. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

- [31] PATY, Michel. **A física do século XX**. [tradução Pablo Mariconda]. São Paulo: Ideias e Letras, 2009.
- [32] GODOY, Moacir Fernandes de. **A teoria do caos aplicada á medicina**. Faculdade de Medicina. São José do Rio Preto 2003. Disponível em: <<http://www.fepafem.org/conferenciaincaosjfp.htm>>. Acesso em: 19 ago. 2012.
- [33] FERRARI, PAULO CELSO. **Temas contemporâneos na formação docente a distancia - uma introdução a teoria do caos**. UFSC, Florianópolis 2008. Disponível em: <<http://www.ufsc.br/files201203tese10.pdf>>. Acesso em: 18 ago. 2012.
- [34] TORRES, José Júlio Martins. Teoria do caos. Disponível em: <<http://www.ni.com/TeoriaDoCaos.pdf>>. Acesso em: 18 ago. 2012.
- [35] VIANATO. **Análise de séries temporais caóticas**. Disponível em: <<http://www.ufpr.br/vianatopicospdf.pdf>>. Acesso em: 26 out. 2012.
- [36] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. 7ed. New York: Ken Santor, 2001
- [37] FRANCO, Marcelo Vieira Duarte. **O emprego de módulos de ondas de radio com fator de forma compatível para a automação da aquisição de dados em experimentos didáticos de Física**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação da Universidade Federal do Tocantins no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF). Araguaína, TO Mar. 2018.
- [38] National Instruments. **o que é aquisição de dados DAQ?**. Disponível em: <[http://www.ni.com/data-acquisition/what-is/pt/](https://www.googleadservices.com/pagead/aclk?sa=L&ai=DChcSEwii0ePh6YHmAhWEnrMKHa5BCPcYABAAGgJxgbg&ohost=www.google.com&cid=CAASE-Ro6Upg_hThe6T1zUSn1z2thFE&sig=A0D64_0XUDRSc2X2QXWKC2ADPeXPpSIDZA&q=&ved=2ahUKEwjlm9vh6YHmAhVJr1kKHQ9IA5oQ0Qx6BAG0EAE&adurl=>. Acesso em: 18 ago. 2012.</p>
<p>[39] Disponível em: <<a href=)>, acesso em janeiro de 2019.
- [40] PRISMA, Á LUZ DA FÍSICA. **O que são atratores estranhos: Azenha de Lorenz**. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/prisma>>. Acesso em: 06 jul. 2012.

- [41] Wikipédia: Natural Variability and Chaos . Disponível em: <<https://scienceofdoom.com/2014/07/27/natural-variability-and-chaos-two-lorenz-1963/>>. Acesso em: 10 jun. 2012.
- [42] BAPTISTA, Manuel. **Sistemas de aquisição de dados**. Departamento de Informática. Escola Superior de Tecnologia de Viseu. 2010.
- [43] Eletronpi. **O que é aquisição de dados**. Disponível em: <[http://www.eletronpi.com.br/aquisicao\\_de\\_dados.aspx](http://www.eletronpi.com.br/aquisicao_de_dados.aspx)>. Acesso em: 10 nov. 2019.
- [44] Eletricamente Falando: **Encoder**. Disponível em: <<http://eletricamentefalando.blogspot.com/2011/10/encoder.html>>. Acesso em: 22 jul. 2018
- [45] HI tecnologia. **O que é um encoder**. Disponível em: <<https://www.hitecnologia.com.br/blog/o-que-encoder-para-que-serve-como-escolher-como-interface>>. Acesso em: 11 ago. 2018.
- [46] SILVA, W. L. et al. **Desenvolvimento de sistemas de aquisição de dados usando a placa arduino uno e o software nilabview**. Seminário de iniciação científica da Universidade Federal do Tocantins. 23 nov. a 09 dez de 2015. Câmpus de Araguaína, Gurupí e Palmas. p.2.
- [47] Manual de treinamento do LabVIEW™ Básico I. Disponível em: <<file:///D:/APORTILAS20LABVIEW/LabView.pdf>>.
- [48] ERIKSEN, B. T. BenRotaryEncoder. Disponível em: <<https://github.com/BenTommyE/BenRotar>>. Acesso em: 08 de julho de 2018.
- [49] PAIVA, Vagner Peixoto de. **A teoria do caos e as organizações**. USP. Disponível em: <<http://www.ead.fea.usp.br/Cad-pesqarquivosv08-2art07.pdf>>. Acesso em: 06 nov. 2012.
- [50] W. V. R. Malkus, Non periodic convection at high and low Prandtl number, Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, IV, 125 a 128, 1972.
- [51] Leslie E. Matson, The Malkus Lorenz water wheel revisited. Am. J. Phys. 75 (12), December 2007.
- [52] SIMPLISSÍMO. **Os Consumidores Estão Prontos Para os Enhanced eBooks**. Disponível em: <<https://simplissimo.com.br/consumidores-estao-prontos-para-enhanced-ebooks/>>. Acesso em: 18 dez 2018.
- [53] LIMA, E. H. M.; Almeida; J. M. E. B. **A Produção e a Utilização de eBooks Interativos e Multimídia em Cursos na Modalidade a Distância: o caso do NEAD/UFSJ no Brasil**. 7 Simpósio de Hipertexto e Tecnologias



na Educação. Universidade Federal de São João del-Rei; Universidade Aberta de Portugal. 6-7 dez 2017.

- [54] Imagens equipamentos digitais. Disponível em: <Googletecnoligadigital,Diferentesequipamentosdetecnoligiadigitais> Acesso em: 5 abr. 2019.
- [55] DUARTE, JULIANA PEREIRA. **Desenvolvimento e Aplicação de um E-book no Ensino da Física**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF). Universidade Federal de Goiás Regional Catalão. Dez. 2015.
- [56] SOUSA, R. P., MIOTA, F. M. C. S. C., and CARVALHO, ABG., orgs. **Tecnologias digitais na educação [online]**. Campina Grande: EDUEPB, 2011. 276 p. ISBN 978-85-7879-065-3. Available from SciELO Books. Disponível em: <<http://books.scielo.org>>. Acesso em: 15 nov 2018.
- [57] SANTOS, Luiz Gustavo Fernandes . **MODELLUS: PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE FÍSICA A ALUNOS DO 1Âº ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA, NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação da Universidade Federal do Tocantins no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF). Araguaína, TO Mai. 2018.
- [58] ENDERS, Bernhard. **O que é o Modellus**. Disponível em: <<http://www.bernhard.com.br/disciplinas/simulacao-em-ensino-de-fisica/o-que-e-o-modellus>>. Acesso em: 20 fev. 2019.